

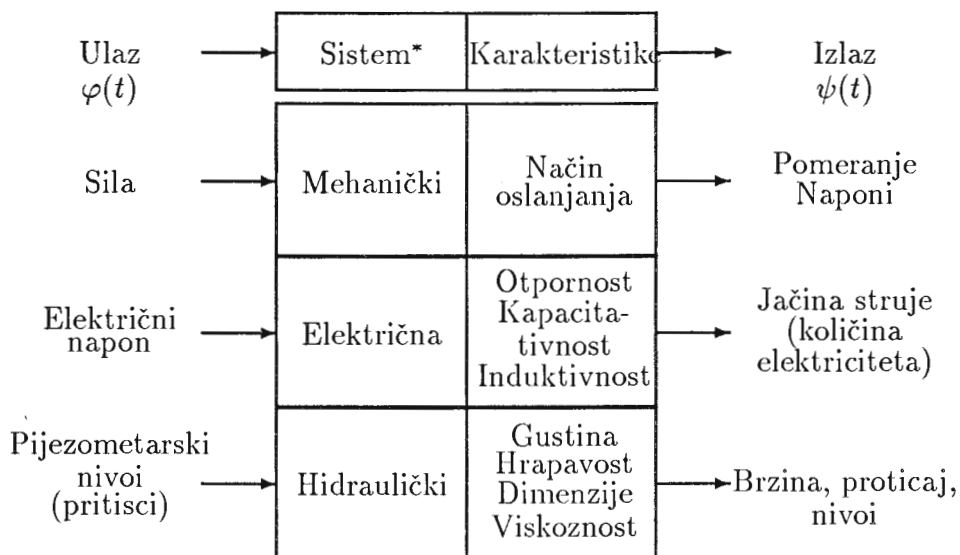
Poglavlje 6

Dinamičke karakteristike mehaničkih, električnih i hidrauličkih sistema

6.1 Uvod

Pri realizaciji merenja u svim tehničkim disciplinama, ako se ona odnose na veličine koje se brzo menjaju u vremenu (imaju dinamički karakter) i ako je neophodno da se te brze promene prate i analiziraju, neophodno je da se poznaje mehanizam koji može da utiče na promenu tih dinamičkih veličina. Pošto se u obavljanju merenja služimo raznim mehaničkim, električnim (elektronskim) uređajima, a u oblasti kojom se bavi ova knjiga merenja se obavljaju na hidrotehničkim sistemima, ovo poglavlje je posvećeno analizi osnovnih pojmova o dinamičkim karakteristikama sistema i primeni na hidrotehnička merenja.

Kompletna dinamička analiza svodi se na analizu veze između ulaza u sistem (onoga čime se na sistem deluje) i izlaza iz sistema (veličina koju merimo, odnosno čija nas promena pod dejstvom ulaza interesuje). Primer veze između ulaza i izlaza za mehanički, električni i hidraulički sistem dat je na slici 24.



*Linearna sa konstantnim parametrima

Slika 24. Primeri veza između ulaza i izlaza mehaničkih, električnih i hidrauličkih sistema

Pošto dinamički ulaz u sistem ima svoje karakteristike (amplitudu i frekvenciju), od posebnog interesa je analiza promene izlazne amplitude za različite vrednosti frekvencije sa kojima deluje ulazni pobudjivač.

Opšti prikazi ovih relacija biće dati teorijski za mehanički sistem, dok će se za hidrotehnički sistem te veze pokazati na osnovu rezultata eksperimentalne analize i numeričke simulacije tečenja u sistemu.

6.2 Osnovne funkcije kojima se opisuje dinamičko ponašanje sistema

6.2.1 Težinska funkcija

U opštem slučaju pretpostaviće se da će ulazna funkcija $\varphi(t)$ izazvati reakciju sistema, tako da će izlazna veličina koju posmatramo pod uticajem dinamičkih karakteristika sistema, reagovati nešto kasnije (nakon

vremena τ). Funkcija koja to opisuje naziva se težinska funkcija i obeležićemo je sa $h(\tau)$.

Funkcija $h(\tau)$ predstavlja izlaz iz sistema u bilo kom vremenskom trenutku za jedinični ulaz koji se pojavio ranije za vreme τ , a veza izmedju izlaza $\psi(t)$ i ulaza $\varphi(t)$ može se opisati integralom konvolucije

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\varphi(t - \tau)d\tau$$

Težinska funkcija $h(\tau)$ jednaka je nuli za sve vrednosti τ manje od nule. Umesto direktnog odredjivanja težinske funkcije $h(\tau)$ koriste se i Laplasova (*Laplace*) ili Furijeova (*Fourier*) transformacija koje definišu transfer funkciju i funkciju frekventnog odziva.

6.2.2 Transfer funkcija $h(\tau)$

Transfer funkcija je Laplace-ova transformacija težinske funkcije $h(\tau)$:

$$T(p) = \int_0^{\infty} h(\tau)e^{-p\tau}d\tau$$

gde je p kompleksan broj, odnosno $p = a + ib$.

6.2.3 Funkcija frekventnog odziva

Funkcija frekventnog odziva predstavlja Furijeovu transformaciju težinske funkcije $h(\tau)$

$$F(f) = \int_0^{\infty} h(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau$$

gde je f frekvencija $[f] = \frac{1}{T}$ što bi odgovaralo transfer funkciji u kojoj bi se u izrazu za p uzelo da je $a = 0$ i $b = 2\pi f$.

Bez gubitka informacije funkcija frekventnog odziva $F(f)$ može da zameni transfer funkciju.

Značajna primena funkcije frekventnog odziva je u analizi dinamičkih karakteristika sistema. Primenjujući Furijeovu transformaciju jednačine (*) i uzimajući da je

$\Phi(f)$ Furijeova transformacija ulaza $\varphi(t)$ i

$\Psi(f)$ Furijeova transformacija izlaza $\psi(t)$, dobija se

$$\Psi(f) = F(f) \cdot \Phi(f)$$

U eksperimentalnim istraživanjima do nje se često tako i dolazi. Funkcija frekventnog odziva je obično kompleksno promenljiva veličina i može se izraziti na sledeći način

$$F(f) = |F(f)|e^{-f\phi(f)}$$

gde je

$|F(f)|$ - faktor pojačanja sistema

$\phi(f)$ - faktor faze

Kod analize dinamičkog ponašanja sistema svaka od dve gornje veličine $|F(f)|$ i $\phi(f)$ ima svoj značaj. Pojedini senzori za merenje se baziraju na principu promene jedne od dve gornje veličine.

Za proračun Fourier-ove transformacije u poslednje vreme najčešće se koristi algoritam brze Fourier-ove transformacije (*FFT - Fast Fourier Transform*) - J.W. Cooley i J.W. Tuckey [10].

6.2.4 Dirac-ova delta funkcija

Ova funkcija se često koristi pri analizi dinamičkih karakteristika sistema, te će se ovde navesti njene osnovne osobine. Dirac-ova delta funkcija (u zavisnosti od frekvencije f , na primer) prikazana je na slici 25. i definisana je sledećim izrazima

$$\delta(f) = 0 \quad \text{za } f \neq 0$$

$$\delta(0) = \infty$$

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(f)df = 1$$

za sve $\epsilon > 0$

$$\delta(-f) = \delta(f) \quad (\text{funkcija je parna})$$

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} F(f) \delta(f)df = F(0)$$

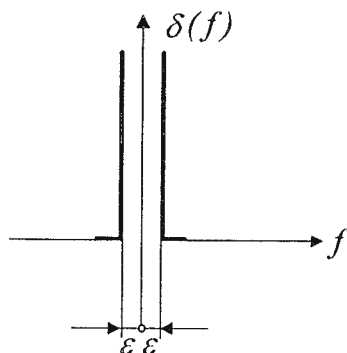
za bilo koju funkciju $F(f)$

Za jedinični ulaz

$$\varphi(t) = 1$$

u frekventnom domenu (nakon Furijeove transformacije) dobija se:

$$\varphi(f) = \delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ft} dt$$



Slika 25. Dirac-ova δ funkcija

6.2.5 Definicija decibela

Za prikaz odnosa izlaznih i ulaznih amplituda signala koristi se veličina pod nazivom nivo (Λ), koja se izražava u *decibelima* ($1 \text{ dB} = 1\text{B}/10$). Za ove potrebe koristi se sledeća konvencija: $\Lambda \text{ [dB]} = 10 \log \left(\frac{a}{b} \right)$ gde je a - izlazna amplituda, a b - ulazna amplituda.

6.3 Primeri analize dinamičkih karakteristika

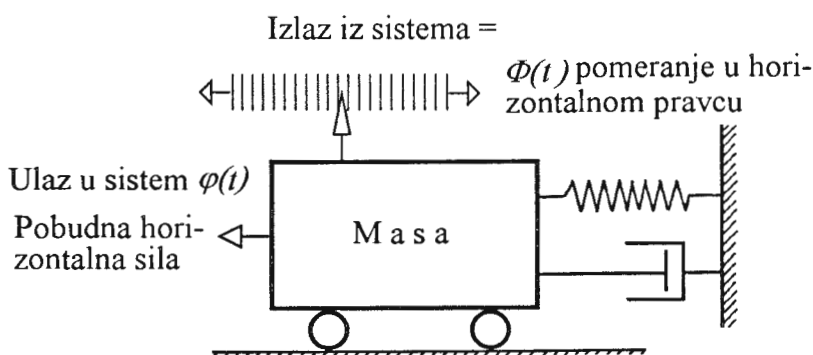
6.3.1 Mehanički sistem

Za pouzdano merenje dinamičkih veličina neophodno je poznavati dinamičke karakteristike kako senzora i električnih instrujmenata, tako i mehaničkih i hidrauličkih celina (sistema ili njihovih delova).

Pod dinamičkim karakteristikama podrazumeva se način reagovanja (odziv) sistema na promene (pobude) koje se primenjuju na ulazu u sistem. Pri tome je značajno da se utvrdi kako sistem reaguje na ulazne pobude i u pogledu amplituda i u pogledu faze. Pogodan način za prikazivanje odziva je funkcija frekventnog odziva ili transfer funkcija.

Kao primer analize dinamičkih karakteristika prikazaće se ispitivani sistem, teorijske analize i rezultati merenja za jedan mehanički sistem. Dinamičke karakteristike mehaničkog sistema određene su analitičkim rešenjem osnovnih jednačina njihovog ponašanja, dok je za hidrauličke sisteme njihovo ponašanje određeno numeričkom integracijom osnovnih jednačina u diskretnim tačkama za sistem, odnosno eksperimentalno za sistem.

Mehanički sistem prikazan na slici 26. čije dinamičko ponašanje će se analizirati, sastoji se od krutog tela mase m , oslonjenog na horizontalne pokretne oslonce zanemarljivog trenja. Posmatra se njegovo kretanje u horizontalnom pravcu. U tom pravcu je posmatrana masa za nepokretnu vertikalnu površinu učvršćena elastičnom oprugom i prigušivačem sa viskoznim fluidom. Karakteristika opruge je njena krutost



Slika 26. Mehanički sistem čije dinamičke karakteristike se analiziraju

(konstanta k). Poznato je da je pri laminarnom kretanju tangencijalni napon u fluidu, a time i sila koja se suprotstavlja kretanju, proporcionalna brzini kretanja. Analizira se odziv sistema - pomeranje u horizontalnom pravcu - $\psi(t)$ za poznatu pobudnu horizontalnu silu F , tj. $\varphi(t)$.

Ako se zanemaruje trenje oslonaca i sile otpora trenja vazduha, sile

koje u horizontalnom pravcu deluju na telo su:

pobudna horizontalna sila F

gde je $\varphi(t)$ proizvoljna funkcija vremena

sila elastičnosti opruge $F_K(t) = -k \psi(t)$

gde je $\psi(t)$ pomeranje

sila viskoznog trenja $F_c(t) = -c \frac{d\psi(t)}{dt}$

gde je $\frac{d\psi(t)}{dt}$ brzina

inercijalna sila: $F_m(t) = -m \frac{d^2\psi(t)}{dt^2}$

gde je $\frac{d^2\psi(t)}{dt^2}$ ubrzanje

Uslov ravnoteže horizontalnih sila glasi:

$$m \frac{d^2\psi(t)}{dt^2} + c \frac{d\psi(t)}{dt} + K \psi(t) = \varphi(t)$$

Primenjući izraz za vezu funkcije frekventnog odziva ulaza i izlaza u frekventnom domenu za slučaj jediničnog impulsnog ulaza

$$\Psi(f) = F(f) \cdot \Phi(f)$$

sledi:

$$\Psi(f) = \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-i2\pi ft} dt = F(f) \Phi(f)$$

Za jedinični impulsni ulaz od proizvoda na desnoj strani jednačine ostaje samo $F(f)$, jer je za takav jedinični impulsni ulaz (tj $\varphi(t) = \delta(t)$) funkcija $\Phi(f)$ jednaka jedinici, gde je $F(f)$ funkcija frekventnog odziva.

Prvi i drugi izvod po vremenu funkcije izlaza u vremenskom domenu $\psi(f)$ su

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = i 2\pi f F(f)$$

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = -(2\pi f)^2 F(f)$$

Ako se Furijeova transformacija primeni na jednačinu ravnoteže horizontalnih sila

$$m \frac{d^2\psi(t)}{dt^2} + c \frac{d\psi(t)}{dt} + k \psi(t) = \varphi(t)$$

vodeći ponovo računa da je Furijeova transformacija za jediničnu ulaznu impulsnu silu $\varphi(t) = \delta(t)$ jednaka jedinici, dobija se sledeća jednačina

$$\left[-(2\pi f)^2 m + i2\pi fc + k \right] F(f) = 1$$

Iz gornje jednačine se za funkciju frekventnog odziva $F(f)$ dobija:

$$F(f) = \frac{1}{[k - (2\pi f)^2 m + i 2\pi fc]}$$

Kao što je ranije objašnjeno ova funkcija reprezentuje vezu izmedju ulaza i izlaza (u domenu frekvencije). Veličine u imeniocu prethodne jednačine mogu se grupisati i od njih načiniti bezdimenzionalni brojevi (koji se standardno koriste u mehanici) na sledeći način:

- koeficijent prigušenja ζ

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{c_{\text{kritično}}}$$

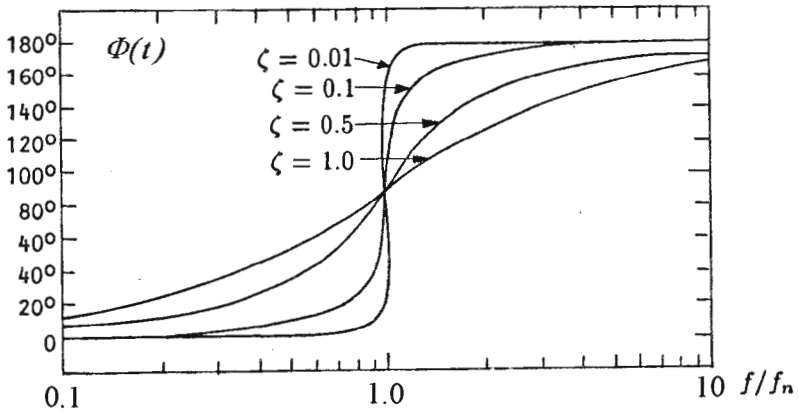
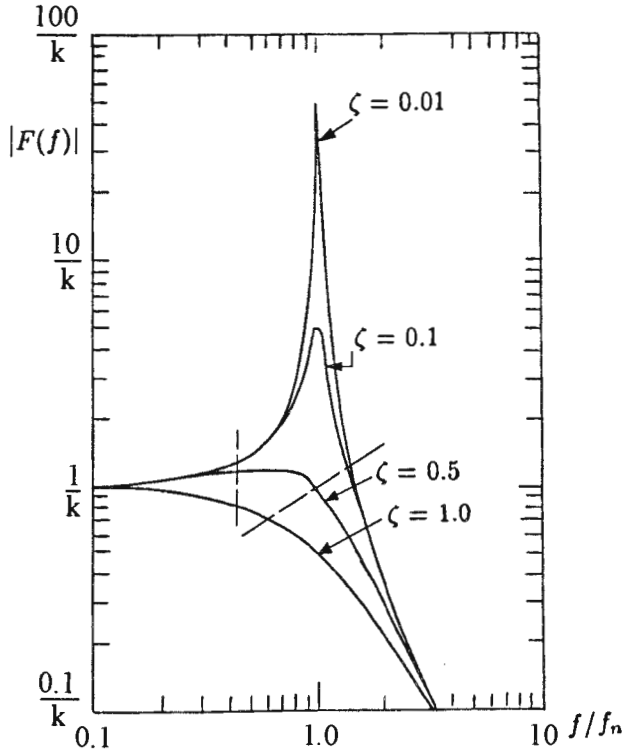
1

Funkcija pojačanja u ovom slučaju nije bezdimenzionalna već ima dimenziju $[1/k] = \left[\frac{\text{dužina}}{\text{sila}} \right]$. Za nekoliko karakterističnih vrednosti koeficijenta prigušenja ($\zeta = 1.0, 0.5, 0.1$ i 0.01) dijagram za faktor pojačanja ($F(f)$) i faktor faze ($\phi(f)$) prikazani su na slici 27.

Iz dijagrama za $F(f)$ može se uočiti da u zoni sopstvene frekvencije faktor pojačanja ima maksimalnu vrednost (za $\zeta < 0.5$). Značajno je da se uoči da ovaj mehanizam sistema (čije ponašanje je karakteristično i za druge sisteme: električne, hidrauličke itd.) reaguje tako što se bitno na dijagramu za faktor pojačanja razlikuju tri karakteristične oblasti (sl. 27.) približno razdvojene crtkastim linijama i to:

Oblast 1. Niske frekvencije - sistem reaguje proporcionalno sa pobudjivanjem i nema značajnije promene amplitude sa promenom frekvencije;

¹ $c_{\text{kritično}} = 2m\sqrt{k/m} = 2\sqrt{mk} = 2m\omega_n$ ($\omega_n = 2\pi f$ - frekvencija prirodnog oscilovanja) je kritična vrednost prigušenja elastične opruge



Slika 27. Funkcija faktora pojačanja i faktora faze za sistem: merni bunar, spojna cev sa rekom i komora za ovazdušenje (iz rada [12])

Oblast 2. Oblast rezonance - izlazne amplitude se značajno povećavaju u zoni sopstvene frekvencije;

Oblast 3. Oblast prigušenja - sistem opterećen visokim frekvencijama ne uspeva da ih prati i naglo smanjuje amplitude i prestaje da se kreće.

Analizirajući drugi dijagram (faktor faze) uočava se da, kada frekvencija ulaza predje sopstvenu frekvencu, dolazi do promene faze. U ovom slučaju sila deluje u jednom pravcu sistem se pomera u drugom.

Pri realizaciji merenja značajno je da se uoči da o ovakvom ponašanju mehaničkog dela sistema mora da se vodi računa pri izboru mernog sistema i metoda merenja. Posebno se mora voditi računa o tome u kojoj oblasti se sistem koristi. Fluktacije hidrodinamičkih veličina (nivoi, pritisci, brzina, protok, itd.) mogu se kao i mehanički sistemi i prigušivati i pojačavati. Nepoznavanje ovog ponašanja može da dovede do značajnih grešaka u merenju.

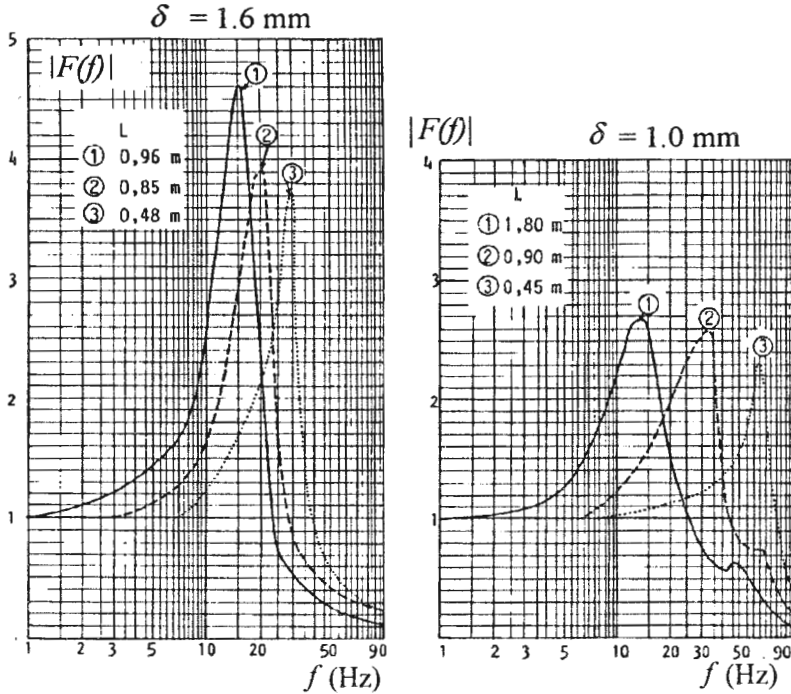
6.3.2 Hidraulički sistem

Rezultati teorijske analize dinamičkog ponašanja mehaničkog sistema prikazanom u 6.3.1. značajni su zbog toga što se i u drugim tehničkim sistemima (električnim, hidrauličkim itd.) dobijaju slične funkcije.

Ovde će se navesti samo dva konačna rezultata dinamičkih karakteristika dva hidraulička sistema prikazana u radovima D. Prodanović, A. Špoljarić, M. Ivetić, i Č. Maksimović [11] i M. Ivetić, Č. Maksimović [12]. Na slici 28. su funkcije faktora pojačanja za kratku plastičnu cev koja se obično koristi u laboratoriji za merenje piježometarskog nivoa ili za spajanje sonde za merenje pritiska sa tačkom u kojoj se obavlja merenje. Prikazane funkcije dobijene su eksperimentalno, tj. obradom rezultata merenja na hidrauličkom modelu. Detalji o eksperimentalnoj proceduri dati su u radu [11].

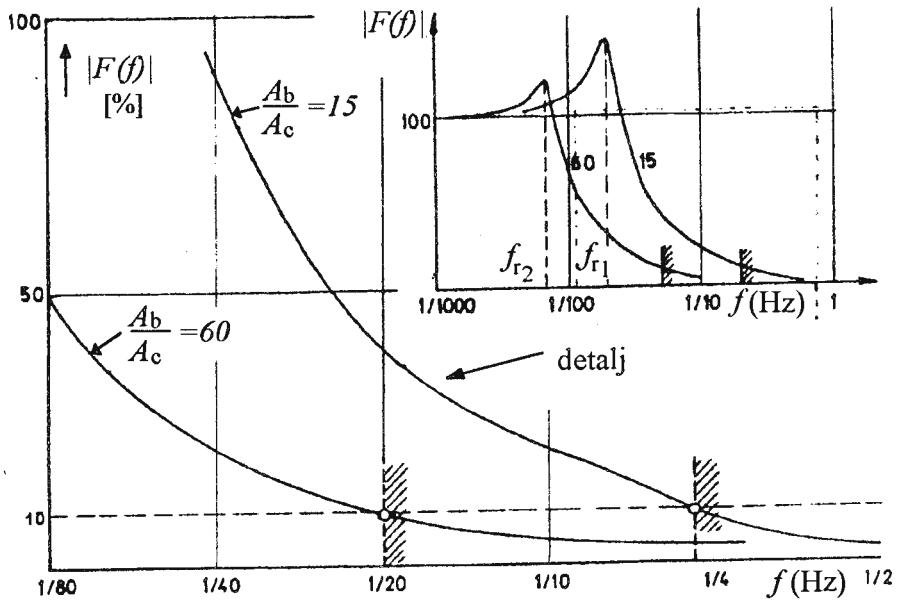
Na slici 29. prikazana je funkcija faktora pojačanja za nivo u merenom bunaru koji je spojen sa dnom rečnog korita dugačkom plastičnom cevi. Analiziran je uticaj odnosa horizontalne površine bunara i poprečnog preseka cevi. U ovom slučaju rezultat je dobijen numeričkom analizom osnovnih jednačina mehanike fluida (jednačine kontinuiteta i

dinamičke jednačine) za merni sistem koji se sastoji od: - spojne cevi,
- vakuum posude za ispuštanje vazduha, i - mernog bunara.



Slika 28. Faktor pojačanja za plastičnu cev unutrašnjeg prečnika 7mm (levo) i 7.5mm (desno) - Iz rada D. Prodanović, A. Špoljarić, M. Ivetić, i Č. Maksimović [11]

Slične analize treba da se obave kod mernih sistema kod kojih je značajno da se poznaju njegove dinamičke karakteristike, jer nepoznavanje tih karakteristika može da dovede do pogrešnih rezultata i zaključaka. Opasnost od grešaka je naročito velika u oblasti frekvencija bliskih sopstvenoj frekvenciji mernog sistema.



Slika 29. Faktor pojačanja za nivo vode u mernom bunaru (Iz rada M. Ivetić, Č. Maksimović [12]) za dva odnosa horizontalnog preseka bunara i poprečnog preseka cevi