5. TURBULENCIJA

5.1. LAMINARNO I TURBULENTNO STRUJANJE OPIS TURBULENTNOG STRUJANJA

"LAMINA" – TANKA PLOČICA ⇒ PREMAZ, SLOJ

"LAMINARNO STRUJANJE" ⇒ SLOJEVITO STRUJ.

STRUJNICE I TRAJEKTORIJE SU PRAVE LINIJE

DELIĆI NE PRELAZE IZ JEDNOG SLOJA U DRUGI

"TURBULENTUS" – NEMIRAN, UZBURKAN

TRAJEKTORIJE SU ZAKRIVLJENE LINIJE, NEPRAVILNOG OBLIKA, MEĐUSOBNO ISPREPLETANE

DELIĆI SE MEŠAJU, PRELAZE IZ SLOJA U SLOJ.

- STRUJANJA SU VEĆINOM TURBULENTNA
  - ZATO SU I INTERESANTNA.
- LAMINARAN SVET BI BIO DOSADAN

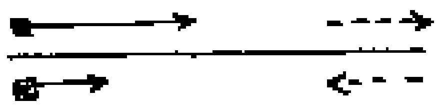
KAKO NASTAJE TURBULENCIJA?

1. USLED SILE VISKOZNOSTI
2. LOKALNO USLED NEKE PREPREKE

① OSLABLJENA VISKOZNOST

STVARNE BRZINE

RELATIVNE BRZINE

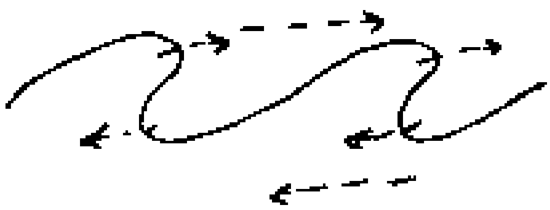


VISKOZNOST DELIĆE DRŽI POD KONTROLOM

DAKLE VISKOZNOST SMIRUJE POREMEĆAJ

IZ NEKOG RAZLOGA SE ZATALASAJU RAVNI

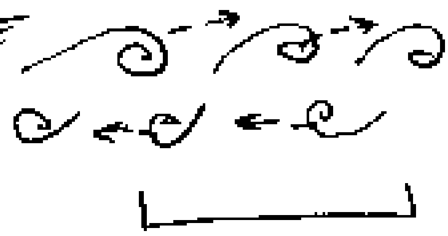
↓ SLABA VISKOZNOST - VELIKI $\frac{\partial u}{\partial y}$



POVEĆAVAJU SE TALASI ...

PRITISCI RASTU -
-OPADAJU
USLED CENTRIFUGALNE SILE
PA TO
POSPEŠUJE
STVARANJE
VRTLOGA.

...ZAMOTAVAJU SE...

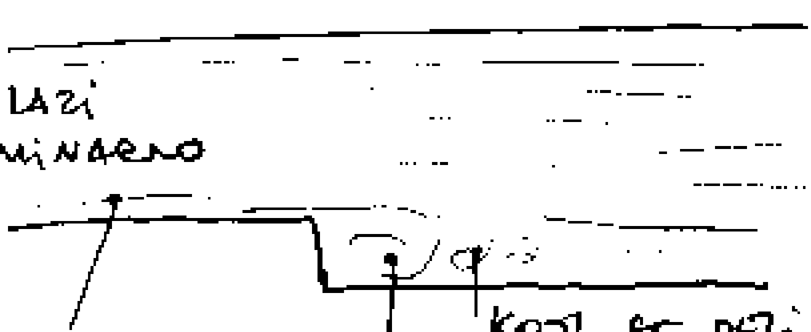


I NA KRAJU OTKIDAJU, PUTUJU VRTLOZI NIZ STRUJU.

HAOTIČNO KRETANJE !!!
KAKO GA OPISATI JEDNAČINAMA?

② LOKALNO GENERISANA TURBULENCIJA

DOLAZI LAMINARNO



STRUJNICA NE MOŽE DA PRATI KONTURU

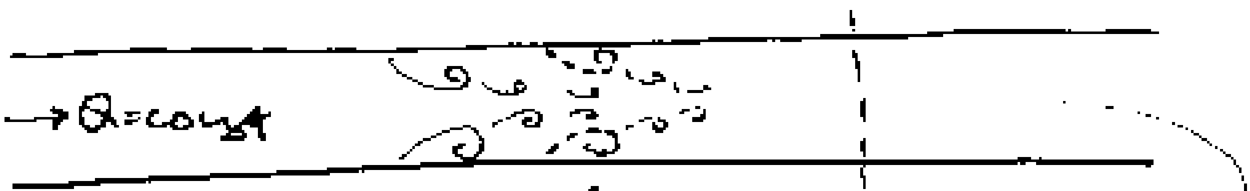
STVARA SE VEĆI VRTLOG

KOJI SE DELI NA MANJE, PA NA KRAJU VISKOZNOST SMIRI NAJMANJE VRTLOGE

• TURBULENCIJU GENERIŠE i SAM ZID CEVI (NEPOKRETAN)

VELIKA PROMENA BRZINE !

• "USTALJENA" TURBULENCIJA - STATISTIČKI SREĐEN PROCES



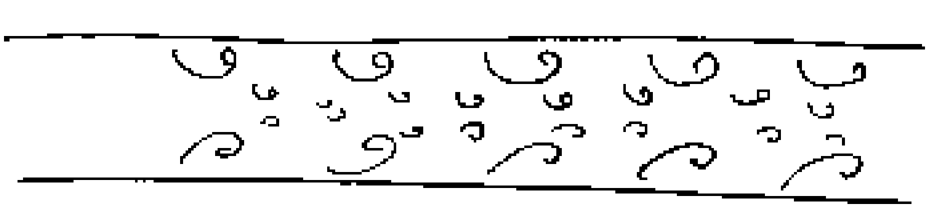
ALI ISTO SE DOGAĐA i NIVELIŠE !

GENERISAN VELIKI VRTLOG KOGA VISKOZNOST SMANJUJE

KROZ VREME →

KROZ OVAJ PRESEK STALNO DOLAZI ISTI BROJ MALIH i VELIKIH VRTLOGA, HAOTIČNO ALI STATISTIČKI UREĐENO !

ISTO VAŽI i KROZ PROSTOR ! U JEDNOM TRENUTKU PO PROSTORU SE BROJ VELIKIH i MALIH VRTLOGA UJEDNAČEN

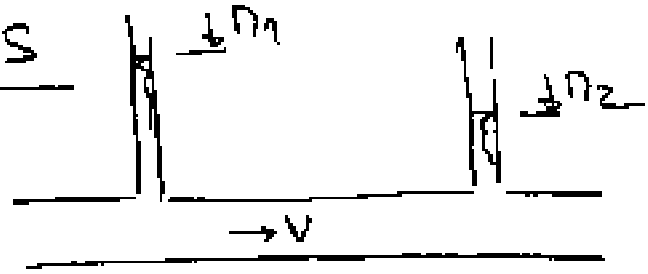


$t = const$

NAMEĆE SE ZAKLJUČAK DA POSTOJI VEZA IZMEĐU PROSTORNOG - VREMENSKOG IZUČAVANJA TURBULENCIJE (REYNOLDS, 1920.)

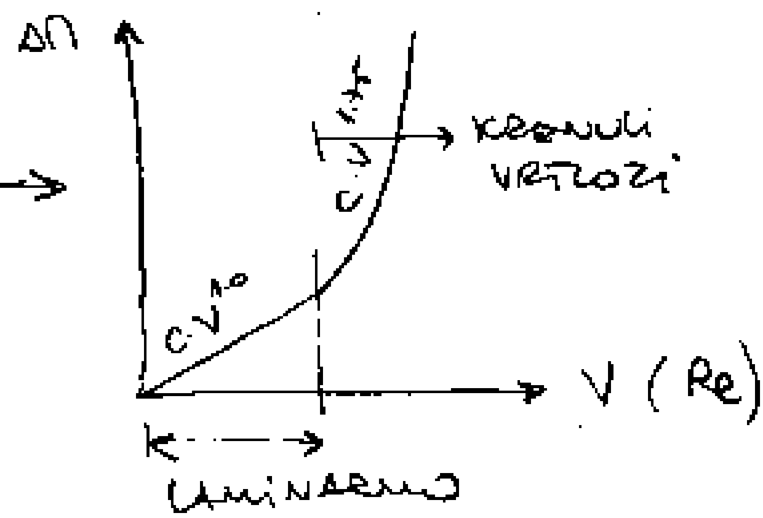
ENERGETSKI BILANS

EKSPERIMENT:



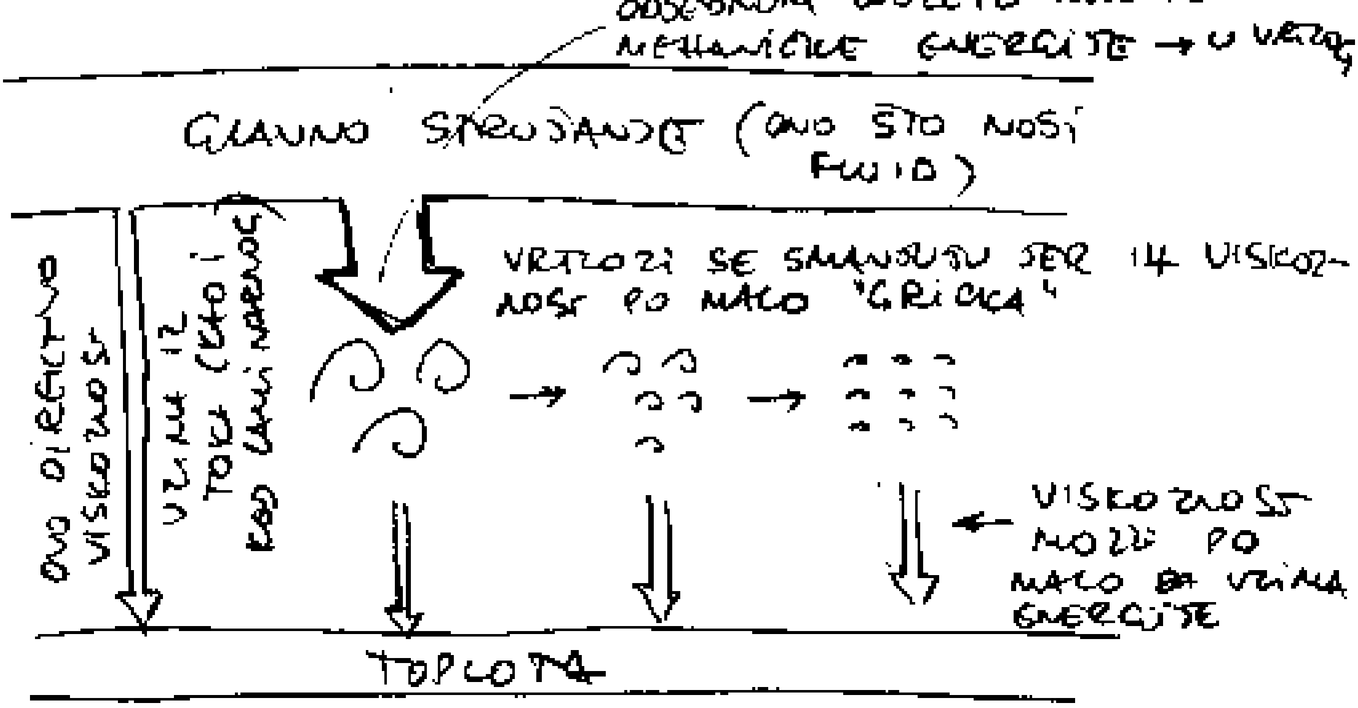
POVEĆAVA SE BRZINA POSTEPENO - GLEDA SE $\Delta\Pi$

U TURBULENTNOM STRUJANJU NAGLO RASTE GUBITAK ENERGIJE !!!



↓

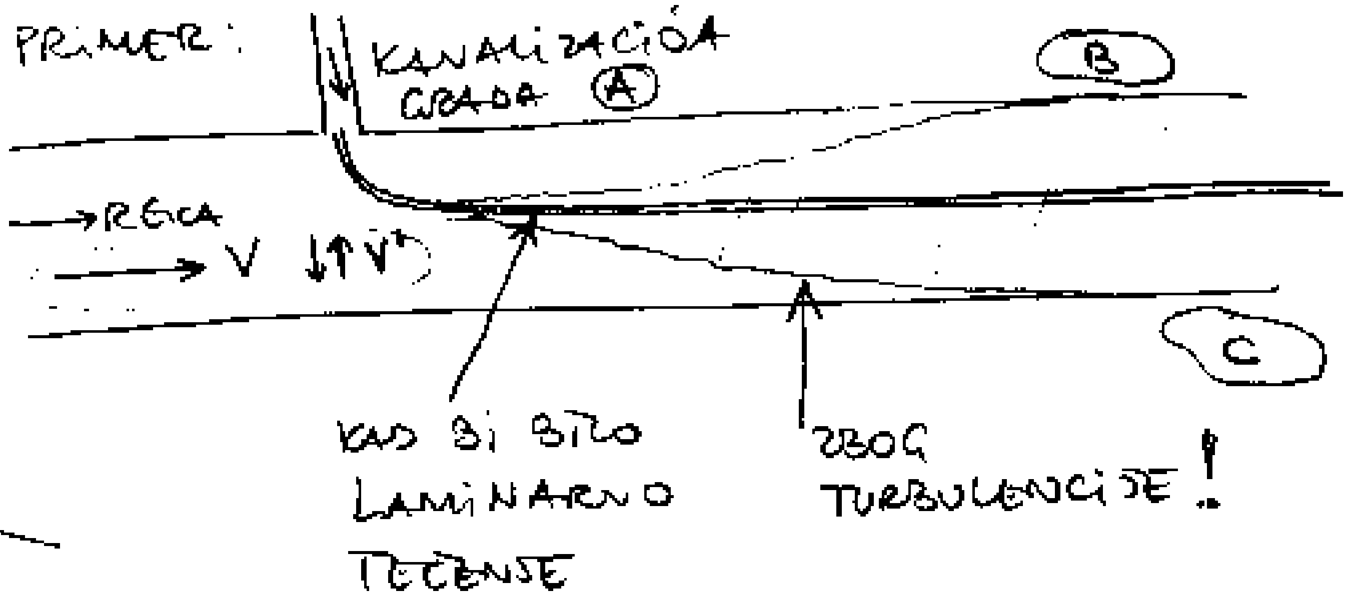
TREBA 'HRANITI' VRTLOGE



• ZAŠTO JE PRIRODA IZMISLILA TURBULENCIJU?

– DA BI UPROSEČILA VELIČINE! DELIĆI U VRTLOG NOSE BRZINU, PRITISAK, ... I MEŠANJEM SE UPROSEČUJU VELIČINE!!!

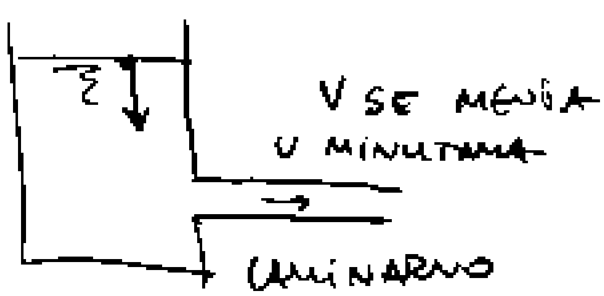
PRIMER:

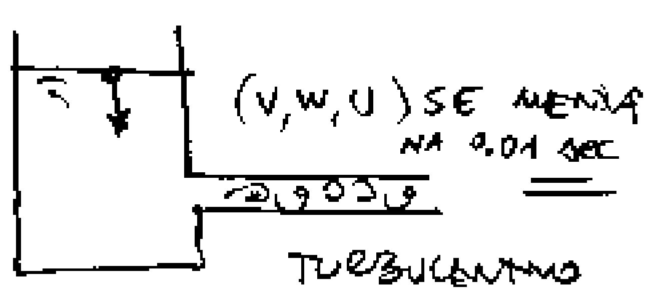


KAKO UVESTI RED U JEDNAČINE?

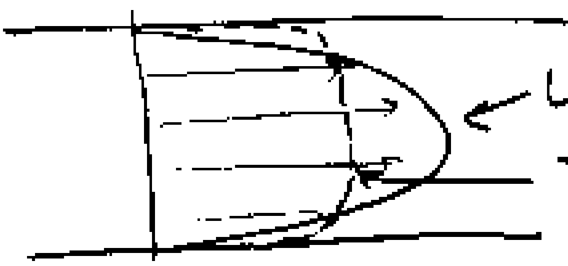
– ZA LAMINARNO TEČENJE NAVIE-ŠTOKSOVE JEDNAČINE SU OK

– ZA TURBULENTNO – MOGLE BI NAVIE-ŠTOKSOVE ALI IH TREBA PISATI ZA SVE TRI DIMENZIJE I ZA SVAKI VREMENSKI TRENUTAK – ZA RED VELIČINE KRAĆI TRENUTAK OD ONOGA ŠTO NAS INTERESUJE





Ri RASPORED BRZINA U CEVI :



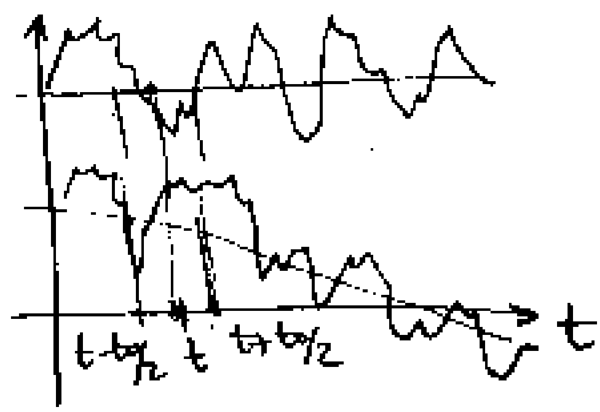
LAMINARAN TOK

TURBULENTAN TOK

JOŠ JEDAN PROBLEM - TREBA NAM IZVOD PO PROSTORU - TURBULENCIJA JE HAOTIČNA PA NE ZNAMO GDE IDE SVAKI DELIĆ !!!

REŠENJE - OSREDNJITI VELIČINE - RAZDVOJITI VELIČINU KOJA SE JAKO SPORO MENJA OD ODSTUPANJA - FLUKTUACIJE

$$Y = \overline{Y} + Y'$$



MOŽE PO VREMENU A I PO PROSTORU !

$$\overline{Y} = \overline{Y}(t) = \frac{1}{t_0} \int_{t-\frac{t_0}{2}}^{t+\frac{t_0}{2}} Y \, dt$$

→ NE SME DA ZAVISI OD OVOG VREMENA

↓

ISPUNJENO AKO JE $\frac{\partial Y(t)}{\partial t} = const$ U INTERVALU $\pm t_0/2$ - ZNAČI DA t_0 NE SME BITI PREDUGAČKO - ALI NI PREKRATKO !!!

FLUKTUACIONI DEO JE ONDA:

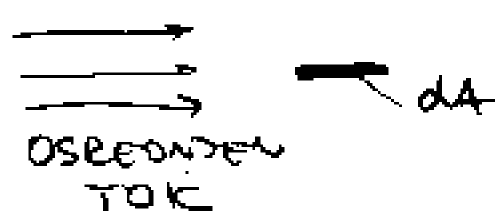
$$\boxed{\overline{Y'} = \frac{1}{t_0} \int_{t-t_0/2}^{t+t_0/2} Y' \, dt = 0}$$

5.2. OSREDNJAVANJE UTICAJA, RAZDVAJANJE STRUJANJA, DEJSTVO FLUKTUACIJA NA GLAVNO STRUJANJE

- TURBULENTNO STRUJNO POLJE JE VEOMA KOMPLEKSNO
- KAO ŠTO SE JEDNA VELIČINA RAZDVAJA NA OSREDNJENU I FLUKTUIRAJUĆU VREDNOST, I CELO STRUJNO POLJE MOŽE DA SE PODELI, OSREDNJAVANJEM, NA
  - GLAVNO, OSREDNJENO STRUJANJE
  - SEKUNDARNO, FLUKTUIRAJUĆE STRUJANJE

NE GUBI SE INFORMACIJA O TURBULENCIJI, JER FLUKTUACIJE UTIČU I NA GLAVNO STRUJANJE !

ZAVISI ŠTA IZUČAVAMO:
- TRENJE UZ ZID – DOVOLJNO JE GLAVNO STRUJANJE
- DIFUZIJA ZAGAĐENJA MORAJU FLUKTUACIJE !



— OSREDNJEN PROTOK KROZ $dA = 0$ ALI TRENUTNI NIJE !!!

PRAVILA OSREDNJAVANJA:

1) OSREDNJENA VREDNOST ZBIRA

$$\overline{Y_1 + Y_2} = \overline{Y_1} + \overline{Y_2}$$

2) OSREDNJEN INTEGRAL (MNOGO SABIRAKA)

$$\overline{\int_X Y\,dx} = \int_X \overline{Y}\,dx$$

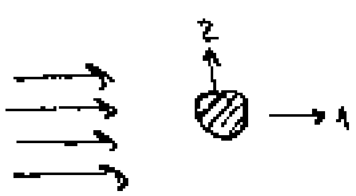
3) OSREDNJEN IZVOD

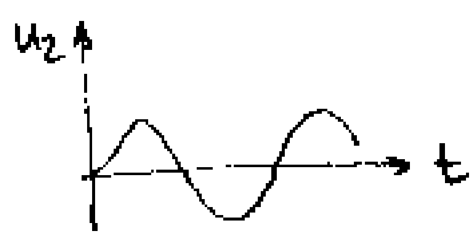
$$\overline{\frac{\partial Y}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{Y}}{\partial x}$$

4) OSREDNJEN PROIZVOD DVE TRENUTNE VREDNOS.

$$\overline{Y_1 \cdot Y_2} \neq \overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2} \quad !$$

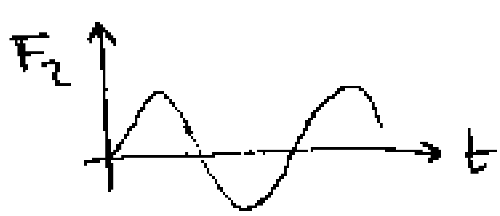
PRIMER:



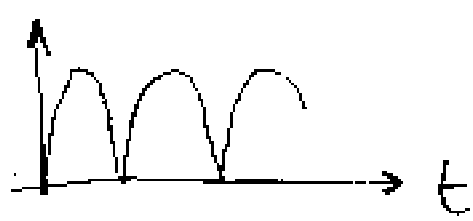


$\overline{u_z} = 0$

SILA F_z:



SNAGA = $F_z \cdot u_z$



$$Y_1 \cdot Y_2 = (\overline{Y_1} + Y_1')(\overline{Y_2} + Y_2') =$$

$$= \overline{Y_1}\cdot\overline{Y_2} + Y_1'\cdot Y_2' + \overline{Y_1}\cdot Y_2' + Y_1'\cdot\overline{Y_2}$$

$$\overline{Y_1\cdot Y_2} = \underbrace{\overline{\overline{Y_1}\cdot\overline{Y_2}}}_{\overline{Y_1}\cdot\overline{Y_2}} + \overline{Y_1'\cdot Y_2'} + \phi + \phi$$

$$\overline{\overline{Y_1}\cdot Y_2'} = \frac{1}{t_0}\int_{t-t_0/2}^{t+t_0/2} \overline{Y_1}\cdot Y_2'\,dt \to \phi$$

$\overline{Y_1}$ = const

$$\overline{Y_1\cdot Y_2} = \overline{Y_1}\cdot\overline{Y_2} + \overline{Y_1'\cdot Y_2'}$$

5) OSREDNJEN PROIZVOD TRI VELIČINE

$$\overline{Y_1\cdot Y_2\cdot Y_3} = \overline{Y_1}\cdot\overline{Y_2}\cdot\overline{Y_3} + \overline{Y_1'\cdot Y_2'\cdot Y_3'} +$$

$$+ \overline{Y_1}\cdot\overline{Y_2'\cdot Y_3'} + \overline{Y_2}\cdot\overline{Y_3'\cdot Y_1'} +$$

$$+ \overline{Y_3}\cdot\overline{Y_1'\cdot Y_2'}$$

6) KOMBINACIJE PRAVILA

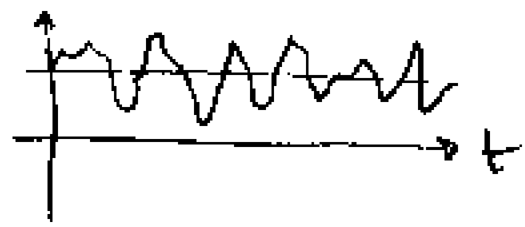
a) $$\overline{\frac{\partial(Y_1\cdot Y_2)}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x}\overline{(Y_1 Y_2)} = \frac{\partial}{\partial x}(\overline{Y_1}\cdot\overline{Y_2}) + \frac{\partial}{\partial x}\overline{(Y_1'\cdot Y_2')}$$

b) $$\overline{Y_1\cdot\frac{\partial Y_2}{\partial x}} = \overline{Y_1}\cdot\frac{\partial\overline{Y_2}}{\partial x} + \overline{Y_1'\cdot\frac{\partial Y_2'}{\partial x}}$$

c) $$\overline{\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}} = \frac{\partial^2\overline{Y}}{\partial x^2}$$

• USLOV USTALJENOSTI TURBULENTNOG STRUJANJA:

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial t} = \phi \quad \Rightarrow$$



• PROTOK KROZ POVRŠINU A (ZAPREMINSKI):

$$Q = \int_A u_i n_i \, dA = \int_A (\overline{u_i} + u_i') n_i \, dA$$

$$\overline{Q} = \int_A \overline{(\overline{u_i} + u_i') n_i \, dA} = \int_A \overline{u_i} n_i \, dA$$

PROTOK ZAVISI ISKLJUČIVO OD SREDNJE BRZINE

• PROTOK NEKE FLUKTUIRAJUĆE VELIČINE
- NA PRIMER INTERNE ENERGIJE e $(c\Theta)$

$$e = \overline{e} + e'$$

$$Q_e = \int_A \rho e u_i n_i \, dA = \rho \int_A e u_i n_i \, dA$$

za $\rho = const$

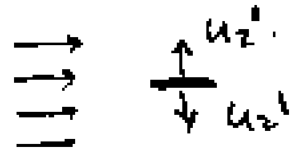
$$\overline{Q_e} = \underbrace{\rho \int_A \overline{e}\,\overline{u_i} n_i \, dA}_{\text{PROTOK SREDNJOM BRZINOM (KONVEKCIJOM)}} + \underbrace{\rho \int_A \overline{e' \cdot u_i'} \, n_i \, dA}_{\text{PROTOK FLUKTUACIJAMA (TURBULENTNA DIFUZIJA)}}$$

SLUČAJ 1D STRUJ.

$\overline{u_1} \neq 0 \quad \overline{u_2} = \overline{u_3} = \phi$

$= \phi$

$u_1' \neq 0 \quad u_2' \neq 0 \quad u_3' \neq 0$



// POSTOJI PROTOK

- OSREDNJEN MATERIJALNI IZVOD

$$\overline{\frac{D\varphi}{Dt}} \neq \frac{D\overline{\varphi}}{Dt} \quad !!!$$

$$\overline{\frac{D\varphi}{Dt}} = \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial t} + \overline{u}_i \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_i} + \overline{u_i' \frac{\partial\varphi'}{\partial x_i}}$$

5.3. JEDNAČINE PRILAGOĐENE TURBULENTNOM STRUJANJU

(A) JEDNAČINA ODRŽANJA MASE

NAPISANA ZA OSREDNJENU BRZINU I FLUKTUACIJE

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho} + \rho') + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\overline{\rho} + \rho')(\overline{u}_i + u_i')\right] = 0$$

OSREDNJAVANJEM CELE JEDNAČINE:

$$\overline{\frac{\partial\rho}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho}\,\overline{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho' \cdot u_i'}) = 0$$

ILI U INTEGRALNOM OBLIKU

$$\int_{CV} \frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t}\, dV + \int_{CA} \overline{\rho}\,\overline{u}_i\, n_i\, dA + \int_{CA} \overline{\rho' u_i'}\, n_i\, dA = 0$$

PROTOK MASE TURBULENTNOM DIFUZIJOM

ZA NESTIŠLJIV FLUID $\rho = const, \rho' = \phi$ (142)

PA JE: $\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = \phi$

$\int_{CA} \overline{u_i} \cdot n_i dA = \phi$

ISTE JEDNAČINE KAO I ZA TRENUTNE VREDNOSTI FLUKTUACIJE NEMAJU UTICAJA

ZA $\rho = const$ VAŽI ZA TRENUTNE BRZINE

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \phi \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{u_i} + u_i') = \phi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = \phi \quad !!!$$

(B) JEDNAČINA ODRŽANJA KOLIČINE KRETANJA

OSREDNJAVA SE NAVIE-STOKSOVA JEDNAČINA ZA NESTIŠLJIV FLUID ($\rho = const$)

$$\rho \frac{D u_i}{Dt} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

OSREDNJAVANJEM:

$$\rho \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \rho \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \rho \underbrace{\overline{u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \mu \cdot \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$= \boxed{\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i' \cdot u_j'})} - \overline{u_i' \frac{\partial u_j'}{\partial x_j}}$$

$\frac{\partial u_j'}{\partial x_j} = \phi$

IDE NA DRUGU STRANU JEDNAČINE!

143!

DOBIJA SE IZRAZ:

$$\rho\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial t}+\rho\bar{u}_j\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}=-\rho g\frac{\partial h}{\partial x_i}-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j\partial x_j}-\rho\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i'u_j'}\right)$$

DINAMIČKA JEDNAČINA ZA OSREDNJENO STRUJANJE NESTIŠLJIVOG FLUIDA – REJNOLDSOVA JEDNAČINA

ČLAN KOJI JEDINI UNOSI TURBULENCIJU U GLAVNI TOK !!!

- JEDINI NOVI ČLAN

[NAVIE-STOKS JEDNAČ. SA TRENUTNIM BRZINAMA] = [N.S. JEDNAČ. SA SREDNJIM BRZINAMA I PRITISKOM] – [DODATAK OD TURBULEN.]

- DODATNI ČLAN SE TUMAČI KAO DODATNI NAPON KOJI UMANJUJE ENERGIJU SREDNJEG TOKA. TURBULENTNI NAPON – ILI REJNOLDSOV NAPON

$\tau_{ij}^t=\rho\cdot\overline{u_i'u_j'}$ (KOD G. HAJDINA $\tau_{ij}^t=-\rho\overline{u_i'u_j'}$) (53-13)

PA JE $\frac{\partial\tau_{ij}^t}{\partial x_j}$ = SILA OD TURBULENTNOG NAPONA.

- OVO NIJE PRAVI NAPON – OVO JE USVARI DODATAK NA OSREDNJENU INERCIJALNU SILU USLED TURBULENCIJE.
OSREDNJAVANJEM INTEGRALNE JEDNAČINE U KOJOJ JE ČLAN . . .

$$\int_{CA} \rho u_i (u_j n_j) dA$$ - PROTOK KOLIČINE KRETANJA KROZ POVRŠINU

$$\Rightarrow \underbrace{\int \rho \bar{u}_i \bar{u}_j n_j dA}_{\text{INERCIJALNA SILA } (-I) \text{ OD SREDNJIH BRZINA}} + \underbrace{\int \rho \overline{u_i' u_j'} n_j dA}_{\text{DODATAK USLED FLUKTUACIJA}}$$

- U REJNOLDSOVOJ JEDNAČINI SE NEKADA SPAJAJU ZAJEDNO OVA ČLANA:

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\underbrace{\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{VISKOZNI NAPONI}} - \underbrace{\rho \overline{u_i' u_j'}}_{\text{TURBULE. NAPONI}}\Big)$$

KOD RAZVIJENE TURBULENCIJE SU ZANEMARLJIVI

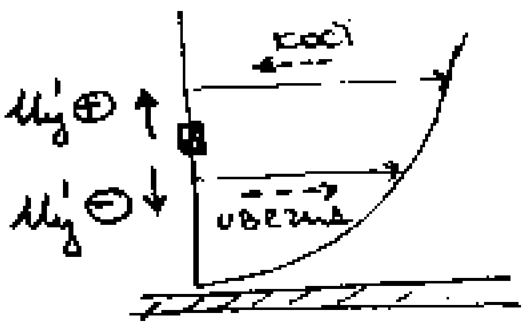
ALI IPAK VISKOZNOST POSTOJI I SMIRUJE ALI MALE VRTLOGE!

ČLAN $\overline{u_i' u_j'}$ SE ČESTO ZOVE I KOEF. KORELACIJE BRZINE U i-PRAVCU ~~SA~~ BRZINOM U j-PRAVCU

$$C_{ij} = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{\sqrt{\overline{u_i'^2} \cdot \overline{u_j'^2}}}$$ / NORMALIZOVANO!

$C_{ij} = 1$ za $u_i = u_j$.

ZA VISKOZNI TOK $C_{ij} < \emptyset$ $i \neq j$



BROJ NEPOZNATIH U JEDNAČINI REYNOLDSOVOJ (4) (u_i, p) — PORASTAO JE ZA C_{ij} - 6 NOVIH !!! 9 - $\underline{\underline{3}}$ ZBOG SIMETRIJE

→ PROBLEM ZATVARANJA JEDNAČINA JER SMO RAZDVOJILI OSREDNJENE I FLUKTUIRAJUĆE VELIČINE

→ REŠENJA SE ZASNIVAJU NA TOME KAKO SE PRETPOSTAVLJA DA SE REYNOLDSOVI NAPONI MENJAJU PO PROSTORU.

- POKUŠAJ KORELACIJE REYNOLDSOVIH NAPONA I SREDNJE BRZINE
- POKUŠAJ PROSTORNOG OPISIVANJA VRTLOGA

→ KOD NESTIŠLJIVOG FLUIDA JE SVE JOŠ GORE, JER JE $\underline{\underline{\rho = \bar{\rho} + \rho'}}$

c) ENERGETSKA JEDNAČINA

INTERESUJE NAS SAMO GLAVNO STRUJANJE – ODRŽANJE MEHANIČKE ENERGIJE I NJEGOVA VEZA SA VRTLOZIMA

DVA PRISTUPA:

1) UZETI REYNOLDSOVU JEDNAČINU I POMNOŽITI JE SA SREDNJOM BRZINOM $\bar{u}_i$ UMESTO JEDNAČINE SA KOLIČINOM KRETANJA I SILAMA, DOBIJA SE JEDNAČINA SA KINETIČKOM ENERGIJOM I RADOM SILA. TURBULENCIJA SE POJAVLJUJE SAMO KAO DODATNI RAD KOJI UMANJUJE KORISNU ENERGIJU TOKA

2) OSREDNJITI JEDNAČINU MEHANIČKE ENERGIJE – DOBIJA SE PROIZVOD FLUKTU-IRAJUĆIH VELIČINA I ČLANOVI KOJI POKAZUJU PRELAZ ENERGIJE U FLUKTUACIJE.

ODUZIMANJEM (1) OD (2) DOBIJA SE JEDNAČINA KOJA PRATI PREOSTALU ENERGIJU KOJA NIJE UŠLA U GLAVNO STRUJANJE

$\bar u_i \times$ (REYNOLDSOVA JED.) (ρ=const!)

$$\underbrace{\bar u_i \cdot \rho \frac{\partial \bar u_i}{\partial t}}_{\rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar u_i \cdot \bar u_i}{2}\right)} + \bar u_i \cdot \rho \cdot \bar u_j \frac{\partial \bar u_i}{\partial x_j} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} \bar u_i - \frac{\partial \bar p}{\partial x_i} \bar u_i + \mu \cdot \bar u_i \frac{\partial^2 \bar u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \rho \cdot \bar u_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i' \cdot u_j'}\right)$$

$$\bar u_i\, \bar u_j \frac{\partial \bar u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar u_i \cdot \bar u_j \cdot \bar u_i\right) - \bar u_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar u_i \cdot \bar u_j\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar u_i\, \bar u_j\, \bar u_i\right) - \bar u_i \cdot \bar u_i \underbrace{\cancel{\frac{\partial \bar u_j}{\partial x_j}}}_{\to 0 \text{ za } \rho = \text{const}} - \bar u_i \cdot \bar u_j \frac{\partial \bar u_i}{\partial x_j}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \bar u_i\, \bar u_j \frac{\partial \bar u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar u_i\, \bar u_j\, \bar u_i\right)$$

$$\Rightarrow \bar u_i\, \rho\, \bar u_j \frac{\partial \bar u_i}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\bar u_i \cdot \bar u_i\, \bar u_j}{2}\right)$$

DOBIJA SE ENERGETSKA (MEHANIČKA) JEDNAČINA:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{\bar u^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \cdot \bar u_j \cdot \frac{\bar u^2}{2}\right)}_{\text{SVE U JEDINICI VREMENA}} = \underbrace{-\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} \bar u_i - \frac{\partial \bar p}{\partial x_i} \bar u_i}_{\text{RAD SILE TEŽINE I SILE PRITISKA}} + \underbrace{\mu \cdot \bar u_i \frac{\partial^2 \bar u_i}{\partial x_j \partial x_j}}_{\text{RAD VISKOZNIH SILA}} - \underbrace{\bar u_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \cdot \overline{u_i' \cdot u_j'}\right)}_{\text{RAD TURBULENTNIH SILA}}$$

PROMENA + PROTOK KINETIČKE ENERGIJE

SVE U JEDINICI VREMENA

SVE [illegible] RADOVI

DOBIJENA JEDNAČINA JE SLIČNA DINAMIČKOJ JEDNAČINI – OD NJE JE POŠLO MNOŽENJEM SA $\bar{u}_i$.

(C-2) DRUGI PRISTUP

JEDNAČINA ODRŽANJA MEHANIČKE ENERGIJE SE OSREDNJAVA:

$$\overline{u_i \rho \frac{Du_i}{Dt}} = \overline{-\rho g u_i \frac{\partial h}{\partial x_i}} - \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} - \overline{u_i \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}}$$

2 ČLANA $\frac{\partial}{\partial t}$ — 1 ČLAN — 2 ČLANA — 2 ČLANA

5 ČLANOVA $\frac{\partial}{\partial x_j}$

DOBIJA SE: $(\rho = const)$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{\bar{u}^2}{2}\right)} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{\overline{u_i' \cdot u_i'}}{2}\right) +$$

$$+ \boxed{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \cdot \bar{u}_j \frac{\bar{u}^2}{2}\right)} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \cdot \bar{u}_j \frac{\overline{u_i' \cdot u_i'}}{2}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_i \cdot \rho \overline{u_i' \cdot u_j'}\right) +$$

DELI SE NA: $\boxed{\bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \overline{u_i' u_j'}\right)} + \overline{+\rho \cdot u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho \cdot u_j' \frac{u_i' \cdot u_i'}{2}}\right) =$$

$$= \boxed{-\rho g \bar{u}_i \frac{\partial h}{\partial x}} - \boxed{\bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} - \overline{u_i' \frac{\partial p'}{\partial x_i}} -$$

$$- \boxed{\bar{u}_i \frac{\partial \bar{\tau}_{ji}}{\partial x_j}} - \overline{u_i' \frac{\partial \tau_{ji}'}{\partial x_j}}$$

Na sledece dve strane je dato detaljnije izvodjenje (doduse, sa konstantnim rho)

6 ZAOKRUŽENIH ČLANOVA SE PODAVLJUJE U

Nastavak na strani 149

SREĐIVANJE ČLANA $\overline{\rho\, u_i \frac{Du_i}{Dt}}$

- MAT. IZVOD: $\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

- MAT. IZVOD KADA SE RAZVOJI BRZINA NA $\bar{u} + u'$

$$\frac{D(\bar{u}_i + u_i')}{Dt} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i'}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

- POMNOŽENO SA $(\bar{u}_i + u_i')$

$$(\bar{u}_i + u_i') \frac{D(\bar{u}_i + u_i')}{Dt} = \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}{}_{(1)} + \bar{u}_i \frac{\partial u_i'}{\partial t}{}_{(2)} + u_i' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}{}_{(3)} + u_i' \frac{\partial u_i'}{\partial t}{}_{(4)}$$
$$+ \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}{}_{(5)} + u_i' \cdot \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}{}_{(6)} + \bar{u}_i \cdot u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}{}_{(7)} +$$
$$+ u_i' \cdot u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}{}_{(8)} + \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}{}_{(9)} + u_i' \cdot \bar{u}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}{}_{(10)} +$$
$$+ \bar{u}_i \cdot u_j' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}{}_{(11)} + u_i' \cdot u_j' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}{}_{(12)}$$

- SADA SE SVE OSREDNJAVA. TREBA NAM OSREDNJENA JEDNAČINA MEHANIČKE ENERGIJE (ρ JE SKLONJENO JER JE KONSTANTNO):

$$\overline{(\bar{u}_i + u_i') \frac{D(\bar{u}_i + u_i')}{Dt}} = \overline{(\ )} + \overline{(\ )} + \dots + \overline{(\ )}$$

1 $= \frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{u}_i \cdot \bar{u}_i \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{u}^2}{2}\right) \longrightarrow$ POJAVLJUJE SE U $\bar{u}_i \cdot$ (REY. JED.)

2 $= \phi$ 3 $= \phi$

4 $= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{u_i' \cdot u_i'}}{2}\right)$

5 $= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_j \cdot \frac{\bar{u}^2}{2}\right) \longrightarrow$ POJAVLJUJE SE U $\bar{u}_i \cdot$ (REY. JED.)

6 $= \phi$

7 $= \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i' \cdot u_j'}\right) \longrightarrow$ —

8 $= \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\left(u_j' \cdot \frac{u_i' \cdot u_i'}{2}\right)} \longrightarrow$ PROTOK FLUKTUACIJE ENERGIJE TURBULENCIJE DIFUZIJOM (POMNOŽITI SA ρ!)

9 $= \phi$

10 $= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_j \cdot \frac{\overline{u_i' \cdot u_i'}}{2}\right)$

11 $= \phi$

12 $= \overline{u_i' \cdot u_j'} \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$

Σi 7 + 12 $= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_i \cdot \overline{u_i' \cdot u_j'}\right)$

JEDNAČINI (C-1) ODUZIMANJEM

OSTAJE JEDNAČINA NAMENJENA

ENERGIJI KOJA ULAZI U FLUKTUACIJE:

$$\underset{①}{\frac{\partial}{\partial t}}\left(\rho \cdot \frac{\overline{u_i' \cdot u_i'}}{2}\right) +$$

$$+\underset{②}{\frac{\partial}{\partial x_j}}\left(\overline{u_j}\, \rho\, \frac{\overline{u_i' u_i'}}{2}\right) + \underset{③}{\frac{\partial}{\partial x_j}}\left(\overline{\rho \cdot u_j' \frac{u_i' \cdot u_i'}{2}}\right) =$$

$$= \underset{④}{-\overline{u_i' \frac{\partial p'}{\partial x_i}}} \quad \underset{⑤}{-\overline{u_i' \frac{\partial \tau_{ji}'}{\partial x_j}}} \underset{⑥}{- \rho\, \overline{u_i' \cdot u_j'}} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$$

ČLANOVI: (SVE U JEDINICI VREMENA)

① - PRIRAŠTAJ KINETIČKE ENERGIJE U FLUKTUACIJAMA

② PROTOK FLUKTUACIONE KINETIČKE ENERGIJE
③ KROZ KONTURU (KADA PREĐE IZ V U A)

② - KONVEKCIJOM $\overline{u_j}$

③ - DIFUZIJOM TURBULENTNOM u_j' (NE PRENOSI SE MASA!!!)

④ RAD SFERNOG DELA FLUKTUACIONIH SILA (POVRŠINSKIH SILA)

⑤ RAD DEVIJATORSKOG DELA POVRŠINSKIH SILA - RAD <u>PRAVIH</u> VISKOZNIH NAPONA

⑥ ENERGIJA PREBAČENA IZ OSREDNJENOG STRUJANJA - PRODUKCIJA TURBULENTNE ENERGIJE (UKRADENA ENERGIJA IZ OSREDNJENOG TOKA)

OSREDNJENO STRUJANJE
(GUBITAK ENERGIJE)

OBIČNO ZANEMARLJIVO

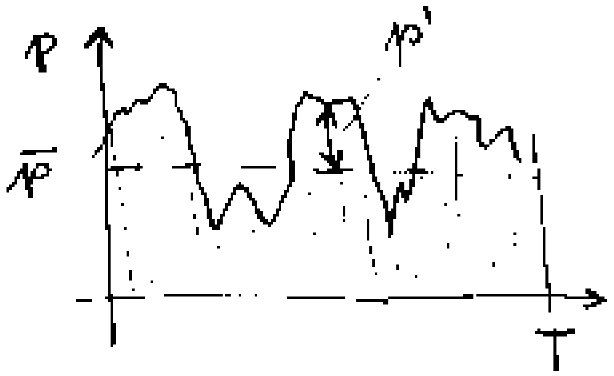
TOPLOTA
(VISKOZNOST)

FLUKTUACIJE

(NE INTERESUJE NAS!)

5.4. STATISTIČKI POKAZATELJI TURBULENCIJE

U JEDNOJ TAČKI SE MERI PRITISAK KROZ VREME:



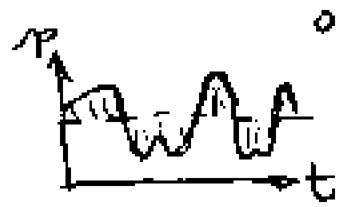
$$\overline{p} = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt$$

$$\int_0^T p'\,dt = 0$$

a). POKAZATELJ DISPERZIJE $\overline{p' \cdot p'} = \overline{p'^2} = \frac{1}{T}\int_0^T p'^2\,dt$

MOŽE SE SHVATITI I KAO MOMENAT INERCIJE OKO $\overline{p}$

– MOMENAT SE MANJI UKOLIKO JE POVRŠINA "SPLJEŠKANIJA"

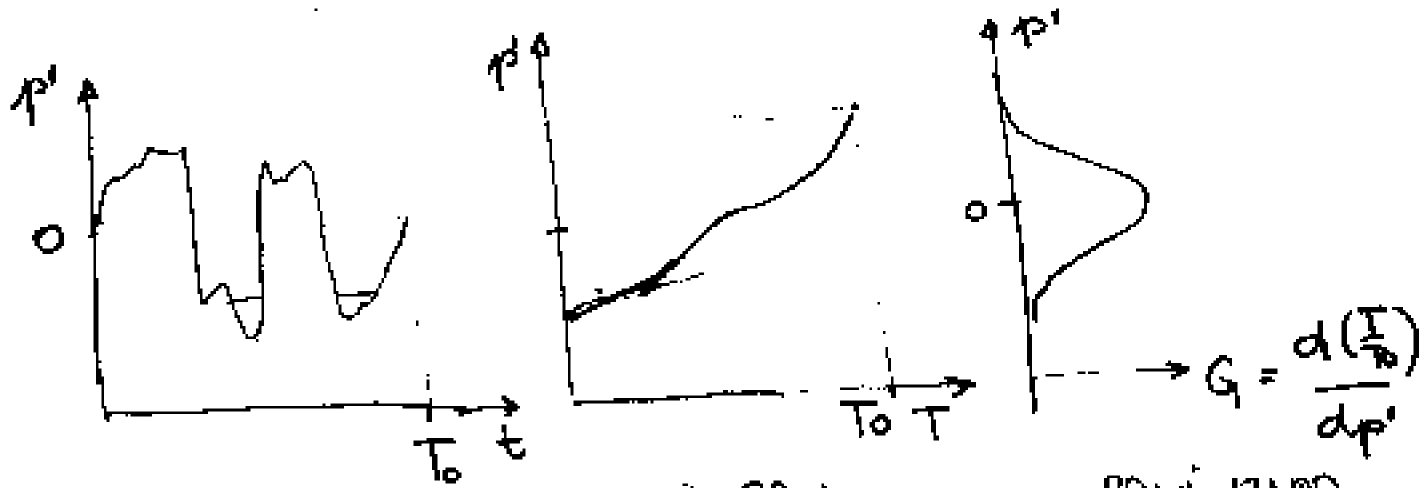


b) KOREN IZ DISPERZIJE JE SREDNJE KVADRATNO ODSTUPANJE ILI STANDARDNA DEVIJACIJA $\sqrt{\overline{p'^2}}$ (RMS ROOT MEAN SQUARE)

c) SREDNJE KVADRATNO ODSTUPANJE JE POKAZATELJ TURBULENCIJE – ZGODNO JE DA SE NORMALIZUJE SA SREDNJOM BRZINOM:

$$\frac{\sqrt{\overline{p'^2}}}{\overline{p}}$$ – INTENZITET TURBULENCIJE

d) RASPODELA FLUKTUACIJA – POKAZUJE UČEŠĆE POJEDINIH VREDNOSTI U UKUPNOM VREMENSKOM ZAPISU



VREMENSKI DIJAGRAM

DIJAGRAM TRAJANJA p' MANJEG OD ODREĐENE VREDNOSTI (RASPODELA p')

PRVI IZVOD DIJAGRAMA TRAJANJA – GUSTINA RASPODELE

SIMETRIČNA, NESIMETRIČNA

OBIČNO GAUSOVA NORMALNA

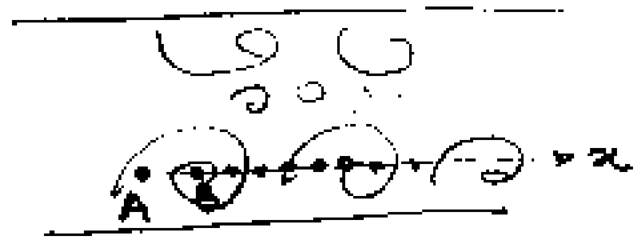
e) BEZDIMENZIONALNI POKAZAT.

– ASIMETRIJA $\dfrac{\overline{p'^3}}{\left(\overline{p'^2}\right)^{3/2}}$

– SPLJOŠTENOST $\dfrac{\overline{p'^4}}{\left(\overline{p'^2}\right)^{2}}$

A) KORELACIJA FLUKTUACIJA

— PO PROSTORU



p'_A i p'_B su u nekoj vezi dok su unutar istog vrtloga!

$$K_p(x) = \frac{\overline{p'_A \cdot p'_B(x)}}{\sqrt{\overline{p'^2_A}} \cdot \sqrt{\overline{p'^2_B(x)}}}$$

JAKO TEŠKO SE MERI !!! — TREBA ISTOVREMENA VREDNOST SVIH TAČAKA !!!

- $K(x=0) = 1$
- FITOVANJEM PARABOLE DOBIJA SE <u>MERA</u> VELIČINE VRTLOGA ... l – MIKROSKALA TURBULENCIJE

$$P(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2$$

- DEFINIŠE SE DUŽINA L – MAKROSKALA

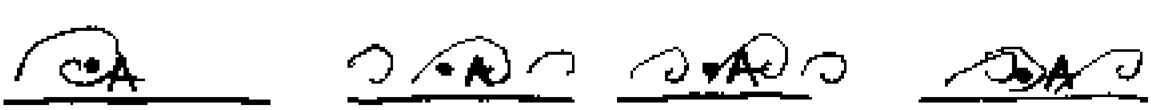
$$L = \int_0^\infty K(x)\,dx$$

DAJE VELIČINU VELIKIH VRTLOGA

RADI SE I KORELACIJA RAZLIČITIH VELIČINA PO PROSTORU!

— PO VREMENU

<u>VRTLOG PROLAZI PORED MERNE TAČKE, PA LI SLEDEĆI</u>

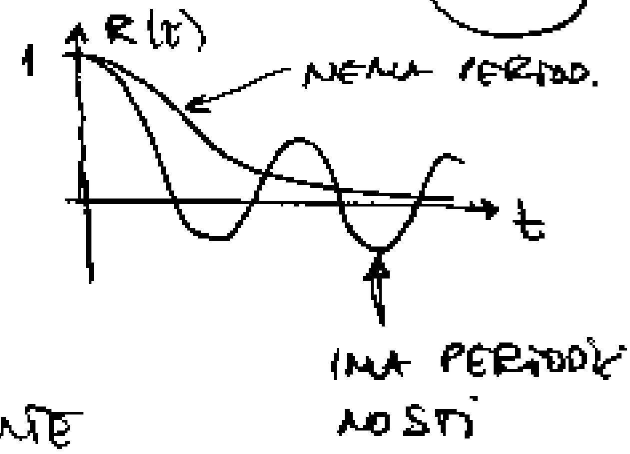


$t = t_1$ $\quad$ $t_1 + \Delta t$ $\quad$ $t_1 + 2\Delta t$ $\quad$ $t_1 + 3\Delta t$

AUTOKORELACIJA – ISTA VELIČINA U ISTOJ TAČCI

$$R_\tau = K_\tau = \frac{\overline{p'(t)\cdot p'(t+\tau)}}{\overline{p'^2}}$$

DAJE PERIODE VRTLOGA.



KORELACIJA DVE KOMPONENTE BRZINE

$$K_{12}(t) = \frac{\overline{u_1' \cdot u_2'}}{\sqrt{\overline{u_1'^2}} \cdot \sqrt{\overline{u_2'^2}}}$$

– MNOŽE SE ISTOVREMENE BRZINE!!!

NE KLIZA τ VEĆ SE MENJA U VREMENU

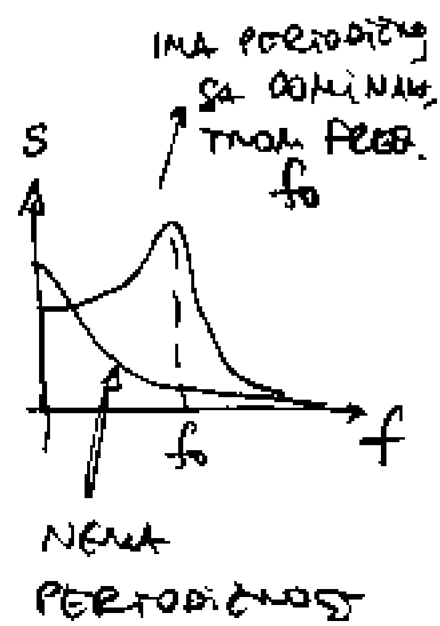
POKAZUJE NORMALIZOVAN REYNOLDSOV NAPON TURBULENCIJE!!!

VREMENSKA KORELACIJA GOVORI O PERIODIČNOSTI I PERIODI VRTLOGA – LOGIČNA VEZA SA FURIJEOVOM TRANSFORMACIJOM KOJA TO PREVODI U FREKVENCIJE

$$R(\tau) = \int_0^\infty S(f)\cos(2\pi f \tau)\,df$$

$S(f)$ → SPEKTRALNA GUSTINA

$$S(f) = 4\int_0^\infty R(\tau)\cos(2\pi f \tau)\,d\tau$$



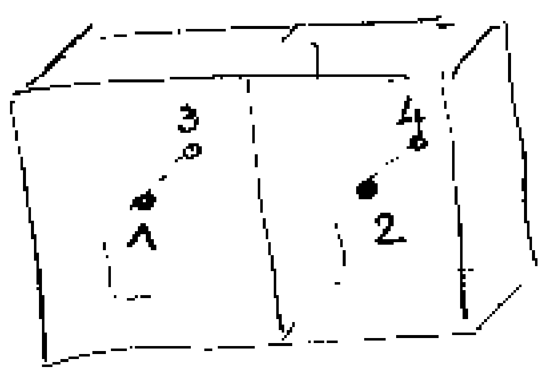
ČEMU SVA OVA IZUČAVANJA

KORELACIJA

– DA BI SE REŠILI PRAKTIČNI PROBLEMI ZA KOJE NIJE NEOPHODNO REŠAVATI NEREŠIVE JEDNAČINE !

SILA NA MOSTOVSKI STUB :

IAKO JE SIMETRIČAN STUB, POSTOJI SILA ZBOG FLUKTUACIJA



MERE SE PRITISCI U TAČKAMA 1...4

SA JEDNE STRANE :

$$F_2' = (p_1' + p_2')\cdot A$$

$$\overline{F_2'^2} = \left(\overline{p_1'^2} + \overline{p_2'^2} + \underbrace{2\overline{p_1' \cdot p_2'}}_{\le 1}\right)\cdot A^2$$

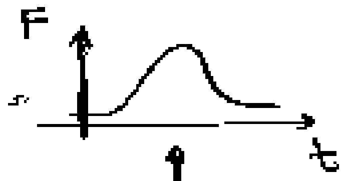
$$\max \overline{F_2'^2} = 4\,\overline{p'^2}\cdot A^2$$

TREBA I KORELACIJA SA SUPROTNOM STRANOM ZIDA – GLEDA SE KORELACIJA R_{13} i R_{24}

AKO JE $R_{13} = -1$ TADA JE $P_1^{UKUPNO} = 2 \cdot P_1$

ZA $R_{13} = +1$ TADA JE $P_1^{UKU} = \emptyset$

UZIMA SE $F_{max} = K \cdot \sqrt{\overline{F'^2}}$



KOEFICIJENAT OBEZBEĐENJA (OBIČNO = 3 ZA POJAVLJIVANJE JEDNOM U 1000 DOGAĐAJA)

OBIČNO GAUSOVA RASPODELA