

5. TURBULENCIJA

5.1. LAMINARNO I TURBULENTNO STRUJANJE OPIS TURBULENTNOG STRUJANJA

"LAMINA" - TANICA PLOČICA $\Rightarrow$ PREMAZ, SLOJ

"LAMINARNO STRUJANJE" $\Rightarrow$ SLOJEVITO STRUJ.

STRUJANICE I TRANSEKTORISE
SU PRAVE LINIJE

DELICI NE PRELAZE
IZ JEDNOG SLOJA U
DRUGI

"TURBULENTUS" - NEMIRAN, UZBURKAN

TRANSEKTORISE SU ZACEN-
JENE LINIJE, NEPRAVILNOG
OBLIKA, MEĐUSOBNO
ISPREDJETANE

DELICI SE MEŠAJU,
PRELAZE IZ SLOJA
U SLOJ.

- STRUJANJA SU VEĆINOM TURBULENTNA
- ZATO SU I INTERESANTNA.
- LAMINARAN SVET BI BIO DOSADAN

KAKO NASTAJE TURBULENCIJA?

1. USLED SLOBE VISKOZNOSTI
2. LOKALNO USLED NEKE PREPREKE

① OSLABljena ViskoZNOST

SNARNE BRZINE
RELATIVNE BRZINE
VISKOZNOST DELICE DRZI POD KONTROLOM

DATA VISKOZNOST
SMIRUJE
POROBUJE

IZ NAROC RAZLOGA SE ZATAKASU RAVNI

↓ SABA VISKOZNOST - VEDICI $\frac{\partial u}{\partial y}$

POVEDAVAJOU SE TAKSI ...

PRITISCI RASTU - OPADAJOU USLED CENTRIFUGALNE SILE PA TO POSPEVUJE SNARANJE VRTLOGA.

... ZAMOTAVAJOU SE ...

i NA KRAJU OTKIDAJOU, PUTUJU VRTLOZI NIZ STRUJOM.

HAOTICNO KRECANJE !!!
KAKO GA OPISATI JEDNACINAMA?

② LOKALNO GENERISANA TURBULENCIJA

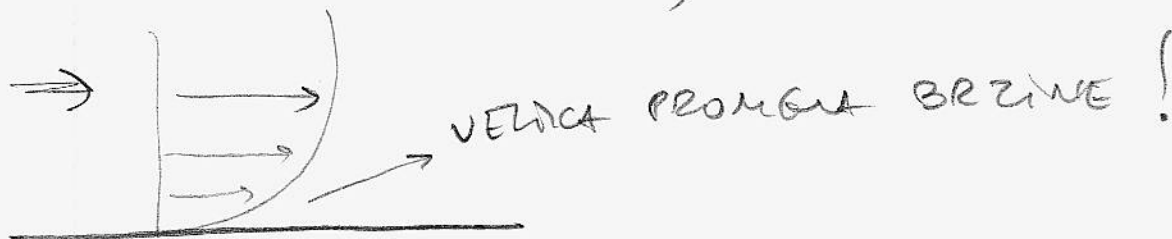
DOLAZI LAMINARNO

STRUJNICA NE MOZE PRATI KONTOUR

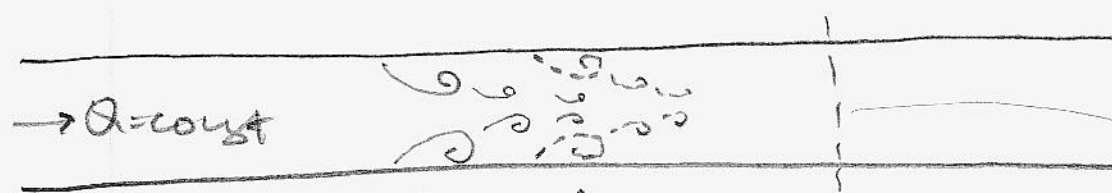
SNARA SE VEDICI VRTLOG

KODI SE DELI NA MANJE, PA NA KRAJU VISKOZNOSTI SMIRI NABMANJE VRTLOGE

- TURBULENCIJA GENERIŠE I SAM
ZID CEVI (NEPOKRETN)



- "USTALJENA" TURBULENCIJA - STATISTIČKI
SREDEN PROCES

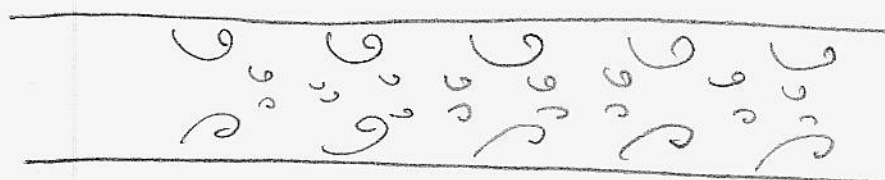


GENERISAN
VELIKI VRTLOŽ
KOGA VISKOZNOST
SMANJUJE

KROZ VREME

KROZ OVAJ PRESEK STALNO
DOLAZI ISTI BROJ MALIH I
VELIKIH VRTLOŽA, HOTAĆO
Ali STATISTIČKI UREDNO!

ISTO VAŽI I KROZ PROSTOR! U ODREDNOM
TRENUTKU PO PROSTORU SE BROJ VELIKIH I
MALIH VRTLOŽA UPODENAČEN

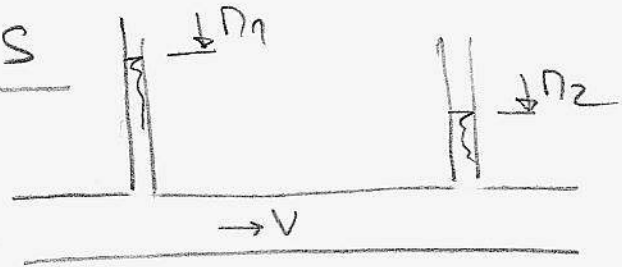


$t = \text{const}$

NAMETJE SE ZACHUČAT DA
POSTOJI VEZA IZMEĐU PROSTORNOG - VRE-
MENSKOG IZUČAVANJA TURBULENCIJE
(REYNOLDS, 1920.)

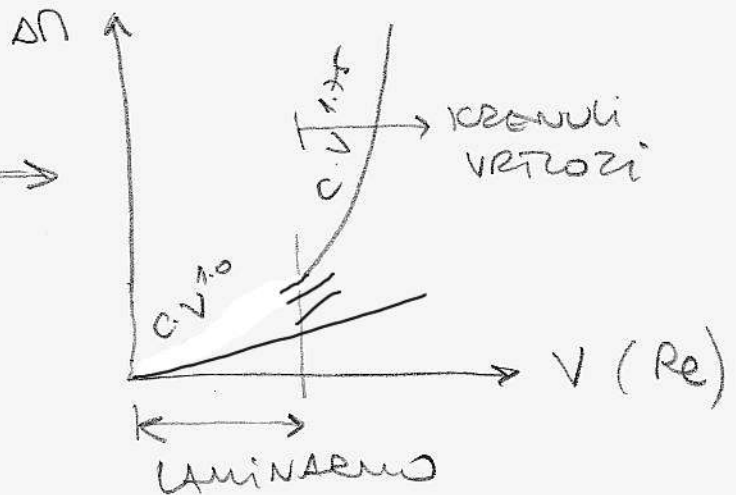
ENERGETSKI BILANS

EXPERIMENT:



POVEĆAVA SE BRZINA POSTEPENO - ČIM DA SE ΔP

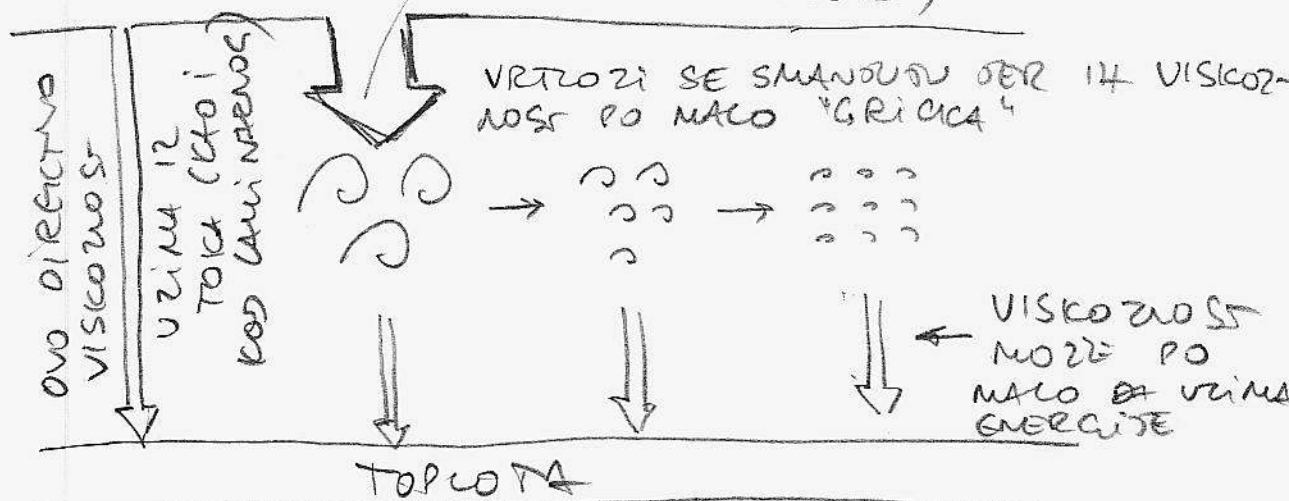
U TURBULENTNOM
STRUJANJU
NAGLO RASTE
GUBITAK
ENERGIJE !!!



TREBA "HEANITI" VRTLOŽE

ODREĐENOM OPOREŽENOM MOGU
MEHANIČKE ENERGIJE → U VRTLOŽE

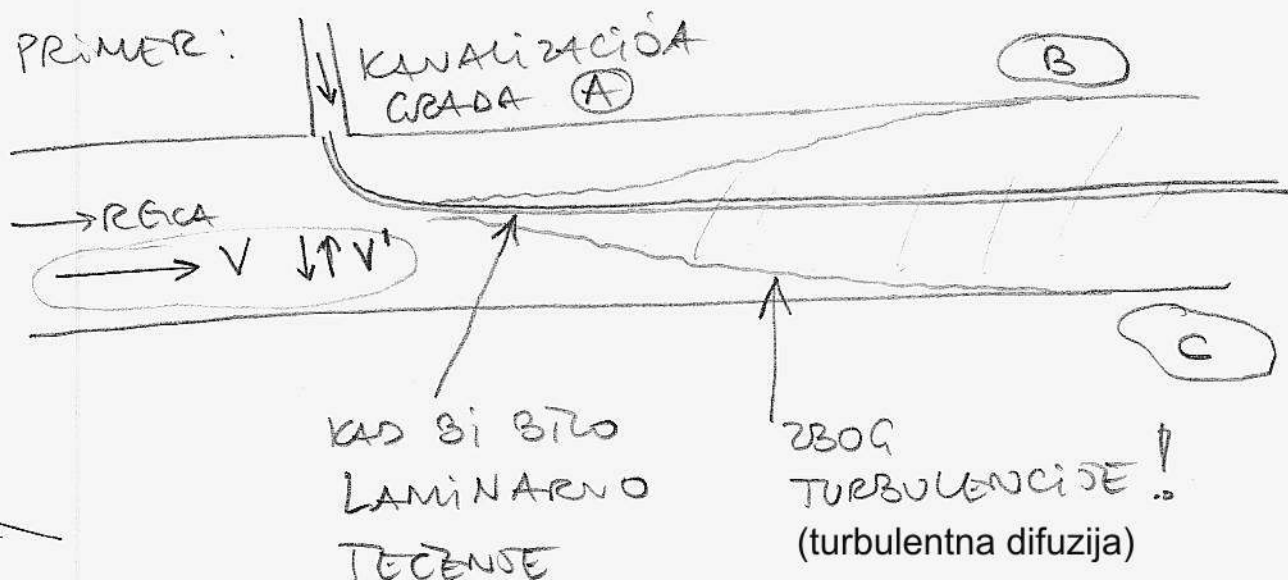
GLAVNO STRUJANJE (OVO ŠTO NOSI
FLUID)



- ZASTO SE PRIRODA IZMISLILA TURBULENCIJU?

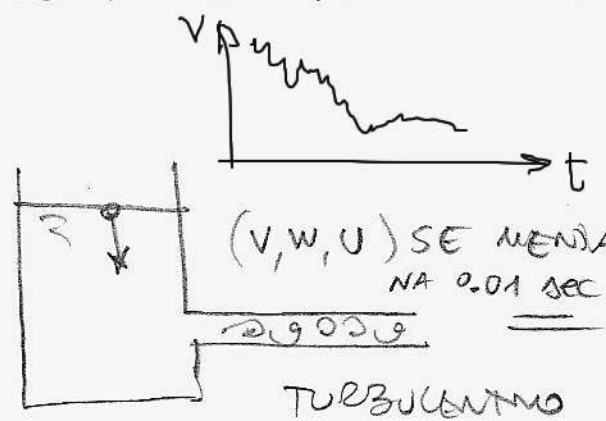
- DA BI UPROSECILA VELICINE! DELICI U VRTLOŽ NOSE BRZINU, PRITISAK, ... I MEŠANJEM SE UPROSECUJU VELICINE!!!

PRIMER:

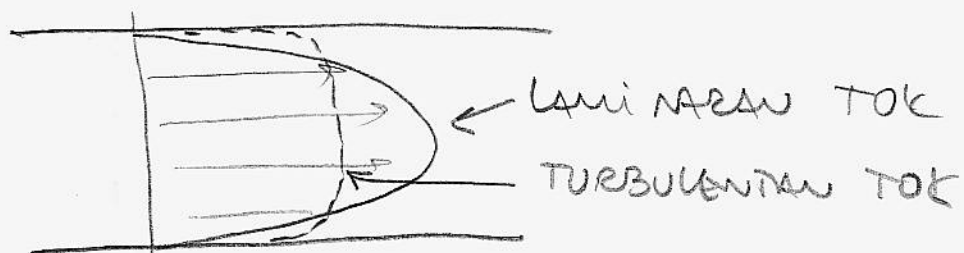


KAKO UVESTI RED U SEONACINE?

- ZA LAMINARNO TEČENJE NAVIJE-ŠTOKSOVE SEONACINE SU OK
- ZA TURBULENTNO - MOGUĆE BI NAVIJE-ŠTOKSOVE ALI IH TREBA PISATI ZA SVI TRI DIMENZIJE I ZA SVAKI VREMENSKI TRENUTAK - ZA RED VELICINE KRAĆI TRENUTAK OD ONOGA ŠTO NAS INTERESUJE



PI RASPORED BRZINA U
CEVI :



DOŠ JEDAN PROBLEM - TREBA NAM

IZUČ PO PROSTORU - TURBULENCIJA SE

HAOTIČNA PA NE ZAMO GDE IDE SVAKI

DELIC !!!

Ako merenjem
pratimo položaj

delica, gubi se njegova osobina

jer treba da pratimo kretanje
svakog delica

REŠENJE - OSREDNOSTI VELIČINE - RAZDVOJITI

VELIČINU KOJA SE JAKO SPORO

MENJA OD OPSTUPANJA - FLUKTUACIJE

$$Y = \bar{Y} + Y'$$



MOŽE PO
VREMENU A I
PO PROSTORU !

$$\bar{Y} = \bar{Y}(t) = \frac{1}{t_0} \int_{t - \frac{t_0}{2}}^{t + \frac{t_0}{2}} Y dt$$

$t - \frac{t_0}{2}$ → NE SMO DA
ZAVISI OD
OVOG VREMENA

FLUKTUACIONI DEO
JE ONDA:

$$\left| \bar{Y}' = \frac{1}{t_0} \int_{t - \frac{t_0}{2}}^{t + \frac{t_0}{2}} Y' dt = 0 \right|$$

ISPUNJENO AKO
JE $\frac{\partial Y(t)}{\partial t} = 0$

U INTERVALU
 $\pm \frac{t_0}{2}$ - ZNAČI

DA TO NE SMO

BIM PREDUKTORO - ALI NI
PREPRAČO !!!

5.2. OSREDOŃAVANJE UTICAJA, RAZDVAJANJE STRUJANJA, DEŠNO FLUKTUACIJA NA GLAVNO STRUJANJE

137

- TURBULENTNO STRUJNO POJE SE VEOMA KOMPLEKSNO
- KAO ŠTO SE DEONA VELIČINA RAZDVAJA NA OSREDOŃENU I FLUKTUIRAJUĆU VREDNOST, I CELO STRUJNO POJE MOŽE DA SE PODELI, OSREDOŃAVANJEM, NA

- GLAVNO, OSREDOŃENO STRUJANJE
- SECUNDARNO, FLUKTUIRAJUĆE STRUJANJE

NE GUBI SE INFORMACIJA O TURBULENCIJ, ĐER FLUKTUACIJE UTIČU I NA GLAVNO STRUJANJE !

ZAVISI ŠTA IZVOĐAVAMO : - TREŃE UŽA ZID -
DVOGONO SE
GLAVNO STRUJANJE
- DIFUZIJA ZACIĐENJA
MORAŠU FLUKTUACIJE !

→
→
→
OSREDOŃEN
TOK

— da

— OSREDOŃEN
PROTOK KEOZ
 $da = \phi$

ALI TRENUĆI
NIŠE !!!

PRAVILA OSREDNJEVANJA:

138

1) OSREDNENA VREDNOST ZBIRA

$$\overline{Y_1 + Y_2} = \overline{Y_1} + \overline{Y_2}$$

2) OSREDNEN INTEGRAL (MNOGO SABIKA)

$$\int_X Y dx = \int_X \overline{Y} dx$$

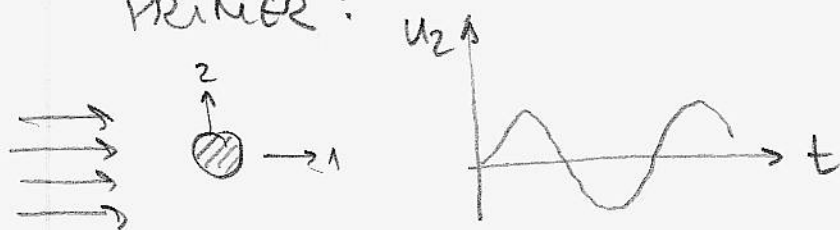
3) OSREDNEN IZVOD

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial \overline{Y}}{\partial x}$$

4) OSREDNEN PROIZVOD DVE TRENUTNE VREDNOS.

$$\overline{Y_1 \cdot Y_2} \neq \overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2} !$$

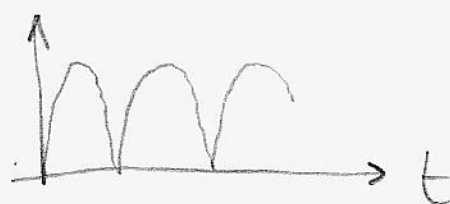
PRIMER:



SILA F_2 :



SNAGA = $F_2 \cdot u_2$



$$Y_1 \cdot Y_2 = (\overline{Y_1} + Y_1')(\overline{Y_2} + Y_2') =$$

$$= \overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2} + \overline{Y_1} \cdot Y_2' + Y_1' \cdot \overline{Y_2} + Y_1' \cdot Y_2'$$

$$\overline{Y_1 \cdot Y_2} = \overline{\overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2}} + \overline{Y_1' \cdot Y_2'} + \overline{\overline{Y_1} \cdot Y_2'} + \overline{Y_1' \cdot \overline{Y_2}}$$

$\downarrow$
 $\overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2}$

$$\overline{Y_1' \cdot Y_2'} = \frac{1}{t_0} \int_{t-t_0/2}^{t+t_0/2} \overline{Y_1' \cdot Y_2'} dt = \text{const}$$

$\rightarrow \phi$

$$\overline{Y_1 \cdot Y_2} = \overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2} + \overline{Y_1' \cdot Y_2'}$$

5) ОСРЕДНЕН ПРОИЗВОД ТРИ ВЕРИТИМЕ

$$\overline{Y_1 \cdot Y_2 \cdot Y_3} = \overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2} \cdot \overline{Y_3} + \overline{Y_1'} \cdot \overline{Y_2'} \cdot \overline{Y_3'} +$$

$$+ \overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2'} \cdot \overline{Y_3'} + \overline{Y_2} \cdot \overline{Y_3'} \cdot \overline{Y_1'} +$$

$$+ \overline{Y_3} \cdot \overline{Y_1'} \cdot \overline{Y_2'}$$

6) КОМБИНАЦИОННЫЕ ПРАВИЛА

a) $\frac{\partial(\overline{Y_1 \cdot Y_2})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\overline{Y_1 \cdot Y_2}) = \frac{\partial}{\partial x} (\overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2}) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{Y_1'} \cdot \overline{Y_2'})$

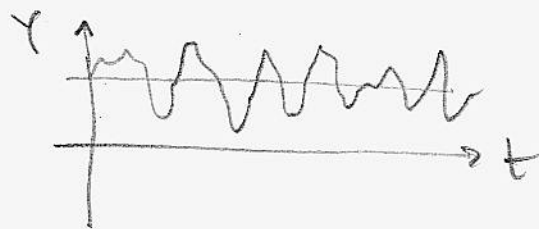
b) $\overline{Y_1} \cdot \frac{\partial \overline{Y_2}}{\partial x} = \overline{Y_1} \cdot \frac{\partial \overline{Y_2}}{\partial x} + \overline{Y_1'} \cdot \frac{\partial \overline{Y_2'}}{\partial x}$

c) $\frac{\partial^2 \overline{Y}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \overline{Y}}{\partial x^2}$

- USLOV USTAJENOSTI TURBULENTNOG STRUJANJA:

140

$$\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} = 0 \Rightarrow$$



- PROTOK KROZ PLOŠTINU A (ZAPREMINSKI):

$$Q = \int_A u_i n_i dA = \int_A (\bar{u}_i + u'_i) n_i dA$$

$$\bar{Q} = \int_A \overline{(\bar{u}_i + u'_i) n_i} dA = \int_A \bar{u}_i n_i dA$$

PROTOK ZAVISI ISKLJUČIVO OD SREDNJE BRZINE

- PROTOK NEKE FLUKTUIRajuće VELIČINE
- NA PRIMER INTERNE ENERGIJE e (ω)

$$e = \bar{e} + e'$$

$$Q_e = \int_A \rho e u_i n_i dA = \rho \int_A e u_i n_i dA$$

↑ A
ρ = const

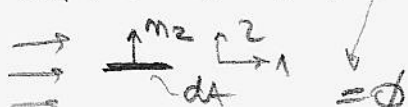
$$\bar{Q}_e = \rho \int_A \bar{e} \bar{u}_i n_i dA + \rho \int_A \overline{e' \cdot u'_i} n_i dA$$

PROTOK
SREDNJOM
BRZINOM
(KONVEKCIJOM)

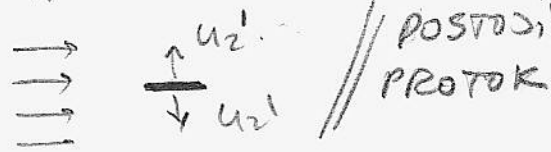
PROTOK
FLUKTUACIJAMA
(TURBULENTNA DIFUZIJA)

SWOHO
1D STENO

$$\bar{u}_1 \neq 0 \quad \bar{u}_2 = \bar{u}_3 = 0$$



$$u_1' \neq 0 \quad u_2' \neq 0 \quad u_3' \neq 0$$



$$\overline{\frac{D\varphi}{Dt}} \neq \frac{D\bar{\varphi}}{Dt} !!!$$

$$\overline{\frac{D\varphi}{Dt}} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} + \overline{u'_i \frac{\partial \varphi'}{\partial x_i}}$$

5.3. JEDNACINE PRIZACIJE TURBULENTNOM STRUJANOM

Ⓐ JEDNACINA ODRZAVANJA MASE

NAPISANA ZA OSREDNJEVANJE BRZINA I FLUKTUACIJE

$$\text{Ⓐ} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} + \rho') + \frac{\partial}{\partial x_i} [(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u}_i + u'_i)] = 0$$

Jednacinu samo za osrednjeni tok se dobija
OSREDNJAVANJEM CELE JEDNACINE:

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i)} = 0$$

$$\text{Ⓑ} \Rightarrow \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\rho' u'_i}) = 0$$

ili u integralnom obliku:

$$\int_{CV} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} dV + \int_{CA} \bar{\rho} \bar{u}_i n_i dA + \int_{CA} \overline{\rho' u'_i} n_i dA = 0$$

Ako se napravi Ⓐ i Ⓑ = Jednacinu za fluktuacije

PROTOK MASE TURBULENTNOM
DIFUZIOM

ZA NESTISLJIV FLUID $\rho = \text{const}$, $\rho' = 0$

(142)

PA SE:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\int_{CA} \bar{u}_i n_i dA = 0$$

ISTE JEONACINE IMAO I
ZA TRENUTNE VREDNOSTI
- FLUKTUACIJE NEMAJU
UTICAJA

ZA $\rho = \text{const}$ VAZI ZA TRENUTNE BRZINE

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \frac{\partial (\bar{u}_i + u_i')}{\partial x_i} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0 !!!$$

⑧ JEONACINA ODRZANJA KOLICINE IZOSTANJA

OSREDNJAVA SE NAVIER-STOKESOVA JEONACINA
ZA NESTISLJIV FLUID ($\rho = \text{const}$)

$$\rho \frac{D u_i}{D t} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

OSREDNJOVANJEM:

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \rho \overline{u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i' \cdot u_j'}) - \overline{u_i' \cdot \frac{\partial u_j'}{\partial x_j}}$$

$\rightarrow \phi$

IDE NA DRUGU STRANU
JEONACINE!

DOBRO SE IZRAZ:

143

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j})$$

DINAMIČKA OBRADBA ZA
ČISTO STRUJANJE NEISTOVRNOG
FUIDA - REYNOLDSOVA OBRADBA

ČAN KOJI ODRŽI
UNOSI TURBULENCIJE U
ČISTNI TOK !!!

- ODRŽI NOVI ČAN

$$\left[\begin{array}{l} \text{NAVIER-STOKES OBRADBA} \\ \text{SA TREKUTNIM} \\ \text{BEZINAM} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{N-S. OBRADBA} \\ \text{SA SREDNIM} \\ \text{BEZINAM I} \\ \text{PRITISKOM} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{DODATNA} \\ \text{OD TURBULENCIJE} \end{array} \right]$$

- DODATNI ČAN SE TUMAČI KAO DODATNI
NAPON KOJI UMANJUJE ENERGIJU STRUJNE TOKA.
TURBULENTNI NAPON - TI REYNOLDSOV NAPON

$$\tau_{ij}^t = \rho \cdot \overline{u_i u_j} \quad (\text{KOD G. HADJINIA } \tau_{ij}^t = -\rho \overline{u_i u_j} \text{ (53-13)})$$

$$\text{PA SE } \frac{\partial \tau_{ij}^t}{\partial x_j} = \text{SILA OD TURBULENTNOG NAPONA.}$$

- OVO NIJE PRAVI NAPON - OVO SE USNAČI
DODATNA NA OSREDNOSTI INERCIJALNI SIZ
USLED TURBULENCIJE.

OSREDNOSTI INERCIJALNE OBRADBE

U KOJIM JE ČAN

$\int_{CA} \rho u_i (u_j n_j) dA$ - PROTOK KONTINE
INTEGRANSA KROZ
POVRSTINU

$\Rightarrow \int \rho \bar{u}_i \bar{u}_j n_j dA + \int \rho \overline{u_i' u_j'} n_j dA$

INERCIJALNA
SILA (-I)
OD SREDNOST
BRZINA

DODATOK USLED
FLUKTUACIJA

- U REYNOLDSOVOM SEODNOSINI SE NEKADA
SPAJAJU ZADNOA OVA CILINA?

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u_i' u_j'} \right)$$

↑
VISKOZNI
NAPONI

↑
TURBULE
NAPONI

KOD RAZVINE TURBULENCIJE
SU ZANEMARLJIVI

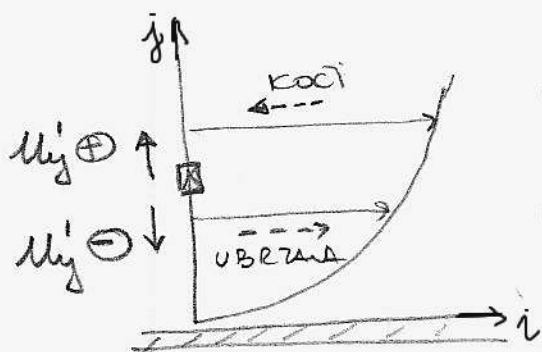
ALI IPAK VISKOZNOST POSTOJI
I SMIRUJE ALI MALE VRTLOGE!

↓
ČLAN $\overline{u_i' u_j'}$ SE ČESTO ZOVE I KOEF. KORELACIJE
BRZINE U i-PRAVCU SA BRZINOM U j-PRAVCU

$$C_{ij} = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{\sqrt{\overline{u_i'^2} \cdot \overline{u_j'^2}}} \quad \text{NORMALIZOVANO!}$$

$$C_{ij} = 1 \quad \text{za} \quad u_i = u_j.$$

za viskozni tok $C_{ij} < \phi \quad i \neq j$ (strana 171 u knjizi GH II)



Povećanje $u_i^+ > 0$ znači da je delić došao "odozgo", da gde su brzine veće, pa je brzina $u_j < 0$.

I obrnuto: smanjenje $u_i^+ < 0$ znači da je delić došao "odozdo", iz zone manjih brzina pa je brzina $u_j > 0$. Ispada da je uvek $u_i^+ u_j^+ < 0$.

BROJ NEPOZNATIH U SEONACIJI REYNOLDSOVA
(4) - PORASTAO JE ZA $C_{ij} - 6$ NOVIT !!
(u_i, p) 9-3 ZBOG
SIMETRIJE

→ PROBLEM ZATVARANJA SEONACIJA
JER SMO RAZNOVILNI OSREDNENE I
FLUKTUIRajuće VELIČINE

→ REŠENJE SE ZASNIVAO NA TOME KAKO SE
PREPOSTAVLJA DA SE REYNOLDSOVI NAPONI
MENJAJU PO PROSTORU.

- POKUŠAJ KORELACIJE REYNOLDSOVH
NAPONA I SREDNJE BRZINE
- POKUŠAJ PROSTORNOG OPISIVANJA
VREĆA

→ KOD NEISTISLJIVOG FLUIDA SE SVE
DOŠ GORE, JER JE $p = \bar{p} + p'$

INTERESUJE NAS SAMO GLAVNO STRUJANJE
— ODRŽANJE MEHANIČKE ENERGIJE I NJEJINA
VEZA SA VRTLOŽIMA

DVA PRISTUPA:

- 1) UZETI REYNOLDSOVU JEKONACIJU I
POMNOŽITI JE SA SREDNJOM BRZINOM $\bar{u}$
UMESTO JEKONACIJE SA KOLIČINOM KRETAJKA
I SILAMA, DOBISA SE JEKONACIJA SA
KINETIČKOM ENERGIJOM I RADOM SILE.

TURBULENCIJA SE POJAVLJUJE SAMO KAO
DODATNI RAD KOJI UMANSUJE KORISNU
ENERGIJU TOKA

- 2) OSREDNŢITI JEKONACIJU MEHANIČKE
ENERGIJE — DOBISA SE PROIZVOD FLUKTU-
IRASUĆIH VELIČINA I ČLANOVI KOJI POKAZUJU
PRELAZ ENERGIJE U FLUKTUACIJE.

ODUZIMANJEM (1) OO (2) DOBISA SE JEKONACIJA
KOJA PRATI PREDSTAVU ENERGIJU KOJA NIJE
UŠLA U GLAVNO STRUJANJE

C-1

$\bar{u}_i \times (\text{REYNOLDSOVA OED.}) (p = \text{const!})$

$$\underbrace{\bar{u}_i \cdot \rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}}_{\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{u}_i \cdot \bar{u}_i}{2} \right)} + \underbrace{\bar{u}_i \cdot \rho \cdot \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{\substack{- \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \bar{u}_i + \mu \cdot \bar{u}_i \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ - \rho \cdot \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i' \cdot \bar{u}_j')}} = - \rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot \bar{u}_i -$$

$$\bar{u}_i \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \cdot \bar{u}_j \cdot \bar{u}_i) - \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \cdot \bar{u}_j) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j \bar{u}_i) - \bar{u}_i \cdot \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} \xrightarrow{=0 \text{ za } p=\text{const}} - \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \bar{u}_i \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j \bar{u}_i)$$

$$\Rightarrow \bar{u}_i \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{u}_i \cdot \bar{u}_i \bar{u}_j}{2} \right)$$

DOBILA SE ENERGETSKA (MEHANIČKA) OBLASTNA:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\bar{u}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \cdot \bar{u}_j \cdot \frac{\bar{u}^2}{2} \right) = \underbrace{- \rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} \bar{u}_i}_{\text{RAD SILE TEŽINE I SILE PRITISKA}} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \bar{u}_i +$$

PROMENA + PROTOK KINETIČKE ENERGIJE

$$\left. \begin{aligned} &+ \mu \cdot \bar{u}_i \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad \text{RAD VISKOZNH SILA} \\ &- \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \cdot \bar{u}_i' \cdot \bar{u}_j') \quad \text{RAD TURBULENTNH SILA} \end{aligned} \right\} \text{SVE MOTRANI RADOVI}$$

SVE U OBLASTI VREMENA

DOBIŠENA JEDNAČINA SE SLIČNA
DINAMIČKOJ JEDNAČINI - OD NJE SE
POSLO MNOŽENJEM SA $\bar{u}_i$

(C-2) DRUGI PRISTUP

JEDNAČINA ODREĐENJA MEHANIČKE ENERGIJE
SE OSREDNJAVA:

$$\overline{u_i \rho \frac{Du_i}{Dt}} = \overline{-\rho g u_i \frac{\partial h}{\partial x_i}} - \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} - \overline{u_i \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}}$$

2 člana $\frac{\partial}{\partial t}$ 1 član 2 člana 2 člana

5 članova $\frac{\partial}{\partial x_j}$

DOBIŠA SE: ($\rho = \text{const}$)

$$\textcircled{A} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\bar{u}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\overline{u'_i \cdot u'_i}}{2} \right) +$$

$$\textcircled{B} \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \cdot \bar{u}_j \frac{\bar{u}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \cdot \bar{u}_j \frac{\overline{u'_i \cdot u'_i}}{2} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{u}_i \cdot \rho \overline{u'_i \cdot u'_j} \right) + \textcircled{C} \quad \left[\overline{u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u'_i \cdot u'_j)} \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \cdot u'_j \frac{\overline{u'_i \cdot u'_i}}{2} \right) =$$

DELI SE NA:

$$\textcircled{C} \quad \left[\overline{u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u'_i \cdot u'_j)} \right] +$$

$$+ \rho \cdot \overline{u'_i \cdot u'_j} \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

$$\textcircled{D} \quad = -\rho g \bar{u}_i \frac{\partial h}{\partial x_i} - \textcircled{E} \quad \bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_i}} -$$

$$\textcircled{F} \quad - \overline{u_i \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}} - \overline{u'_i \frac{\partial \tau'_{ji}}{\partial x_j}}$$

6 ZAPOČETIENIH ČLANOVA SE POŠALJUJE U
PRETHODNOJ JEDNAČINI C-1

SREDNJE CENA $\overline{f u_i \frac{Du_i}{Dt}}$

- MAT. IZVOD: $\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

- MAT. IZVOD KDA SE RAZDVOJI BZGINA NA $\bar{u} + u'$

$$\frac{D(\bar{u}_i + u'_i)}{Dt} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} +$$

$$+ \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

- POMNOŽENO SA $(\bar{u}_i + u'_i)$

$$(\bar{u}_i + u'_i) \frac{D(\bar{u}_i + u'_i)}{Dt} = \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} \textcircled{1} + \bar{u}_i \frac{\partial u'_i}{\partial t} \textcircled{2} + u'_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} \textcircled{3} + u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial t} \textcircled{4}$$

$$+ \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \textcircled{5} + u'_i \cdot \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \textcircled{6} + \bar{u}_i \cdot u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \textcircled{7} +$$

$$+ u'_i \cdot u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \textcircled{8} + \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \textcircled{9} + u'_i \cdot \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \textcircled{10} +$$

$$+ \bar{u}_i \cdot u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \textcircled{11} + u'_i \cdot u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \textcircled{12}$$

- SADA SE SVE OSREDNJAVA. TREBA NAM OSREDNJEVA
JEDNAČINA MEHANIČKE ENERGIJE (f JE SKLO-
NOSTI SEI JE KONSTANTNO):

$$\overline{(\bar{u}_i + u'_i) \frac{D(\bar{u}_i + u'_i)}{Dt}} = \overline{(\quad)} + \overline{(\quad)} + \dots + \overline{(\quad)}$$

(2)

$$\textcircled{1} = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_i \cdot \bar{u}_i \cdot \frac{1}{2}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{u}^2}{2} \right) \rightarrow \text{POJAVUJE SE U } \bar{u}_i \cdot (\text{REG. TER.})$$

$$\textcircled{2} = \phi \quad \textcircled{3} = \phi$$

$$\textcircled{4} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overline{u_i' \cdot u_i'}}{2} \right)$$

$$\textcircled{5} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{u}_j \cdot \frac{\bar{u}^2}{2} \right) \longrightarrow \text{POJAVUJE SE U } \bar{u}_i \cdot (\text{REG. TER.})$$

$$\textcircled{6} = \phi$$

$$\textcircled{7} = \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i' \cdot u_j'}) \longrightarrow \text{---}$$

$$\textcircled{8} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j' \cdot \frac{\overline{u_i' \cdot u_i'}}{2} \right) \longrightarrow \text{PROJEK FLUKTUACIJE ENERGIJE TURBULENTNOJ DIFUZIJOM (POJAVUJE SE S!)} \quad \text{---}$$

$$\textcircled{9} = \phi$$

$$\textcircled{10} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{u}_j \cdot \frac{\overline{u_i' \cdot u_i'}}{2} \right)$$

$$\textcircled{11} = \phi$$

$$\textcircled{12} = \overline{u_i' \cdot u_j'} \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

$$\pi_i \textcircled{7} + \textcircled{12} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \cdot \overline{u_i' \cdot u_j'})$$

OSTAJE JEONAEŠNA NAMENJENA

ENERGIJI KOJA ULAZI U FLUKTUACIJE:

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \cdot \frac{\overline{u_i' \cdot u_i'}}{2} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_j} \rho \frac{\overline{u_i' \cdot u_i'}}{2} \right) + \textcircled{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \cdot u_j' \frac{\overline{u_i' \cdot u_i'}}{2} \right) = \\
 & = \textcircled{4} - \overline{u_i'} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \textcircled{5} \overline{u_i'} \frac{\partial \tau'_{ji}}{\partial x_j} - \textcircled{6} \rho \overline{u_i' \cdot u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}
 \end{aligned}$$

ČLANOVI: (SVE U JEDINICI VREMENA)

① - PRIRASTAJ KINETIČKE ENERGIJE U FLUKTUACIJAMA

② } PROTOK FLUKTUACIONE KINETIČKE ENERGIJE
 ③ } KROZ KONTURU (KADA PREĐE IZ $\nabla \cdot A$)

② - KONVEKCIJOM $\overline{u_j}$

③ - DIFUZIJOM TURBULENTNOM u_j'
 (NE PRENOŠI SE MASA!!!)

④ RAD SFERNOG DELA FLUKTUACIONIH SILA
 (POVRŠINSKIH SILA)

⑤ RAD DIVERGENTNOG DELA POVRŠINSKIH
 SILA - RAD PRAVIH VISKOZNIH NAPONA

⑥ ENERGIJA PREBAČENA IZ OSREDNJEVOG
 STRUJANJA - PRODUKCIJA TURBULENTNE ENER-
 GIJE (UKLADENA ENERGIJA IZ OSREDNJEVOG TOKA)

OSREDNJE NO STRUJANJE (CUBITAK ENERGIJE)

OBICNO
ZANEMARLJIVO

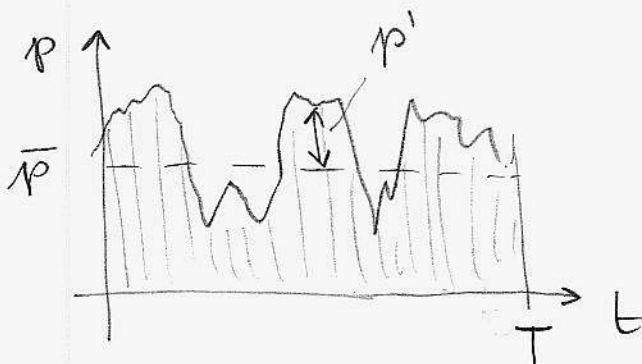
TOPLOTA
(VISKOZNOST)

FLUKTUACIJE

(NE INTERESUJE NAS!)

5.4. STATISTIČKI POKAZATELJI TURBULENCije

U JEDNOJ TAČCI SE MERI PRITISAK IKOZO
VREME:

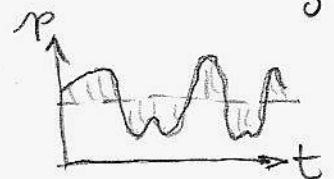


$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt$$

$$\int_0^T p' dt = 0$$

a) POKAZATELJ DISPERZIJE $\overline{p' \cdot p'} = \overline{p'^2} = \frac{1}{T} \int_0^T p'^2 dt$

|| MOŽE SE SHVATITI I KAO
|| MOMENAT INERCIJE OKO $\bar{p}$
- MOMENAT SE MANJI UKOLIKO
JE PLOŠTINA "SFERICANIDA"



b) KOREN IZ DISPERZIJE JE SREDNJE
KWADRATNO ODSTUPANJE ILI
STANDARDNA DEVIJACIJA

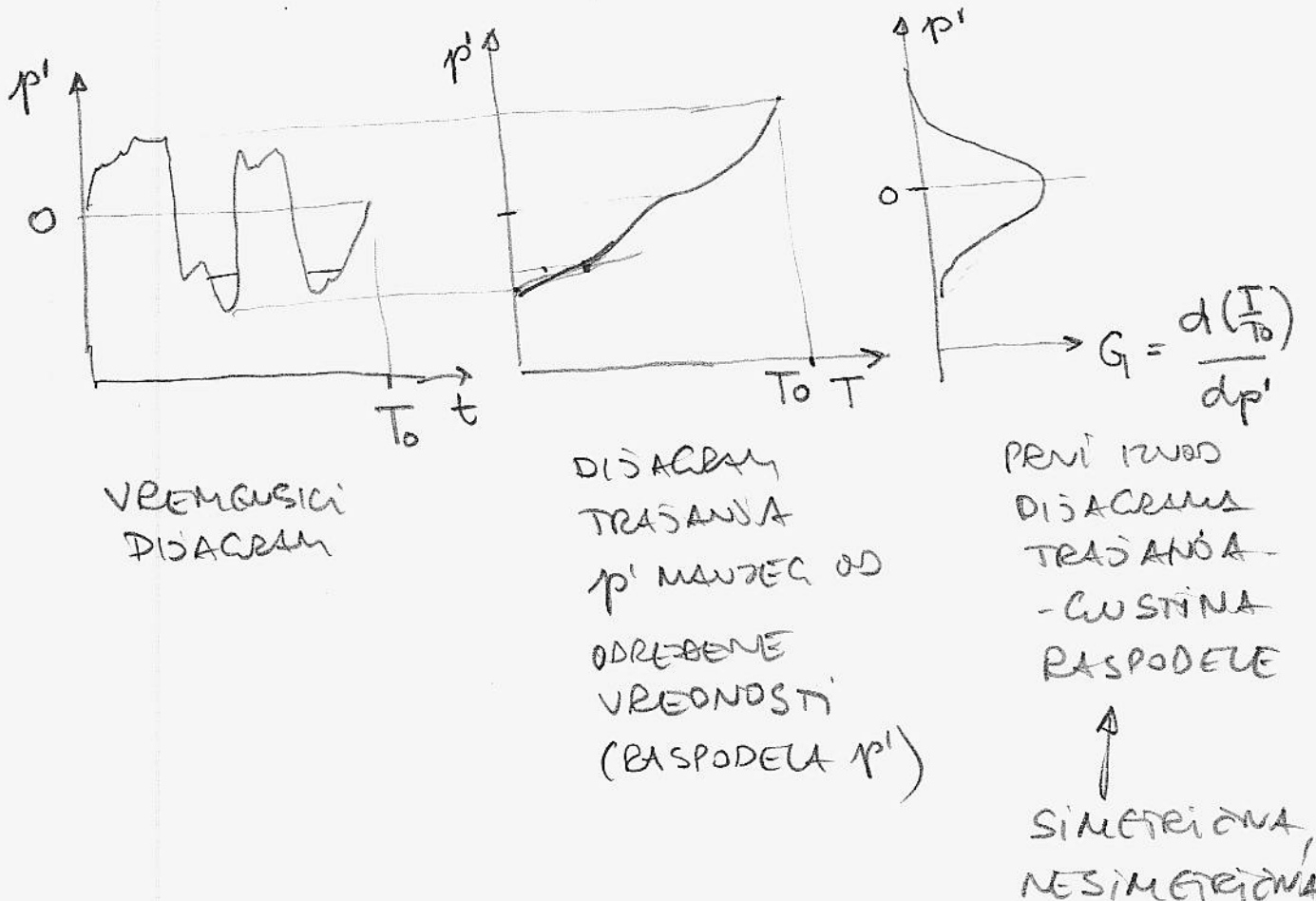
$$\sqrt{\overline{p'^2}}$$

(RMS)
ROOT MEAN
SQUARE

- c) SREDNJE KVADRATNO ODSTUPANJE SE
POKAZATELJ TURBULENCIJE - ZGODNO SE
DA SE NORMALIZUJE SA SREDNJOM BRZINOM:

$$\frac{\sqrt{\overline{p'^2}}}{\bar{p}} - \text{INTENZITET TURBULENCIJE}$$

- d) RASPODEL PUKTUACIJA - POCAZUTE UCESCE POSEDINIK
VREDNOSTI U UKUPNOM VREMENSKOM ZAPISU



- e) BEZDIMENZIONALNI POKAZAT.

- ASIMETRIČNA

$$\frac{\overline{p'^3}}{(\overline{p'^2})^{3/2}}$$

- SPLOŠTENOST

$$\frac{\overline{p'^4}}{(\overline{p'^2})^2}$$

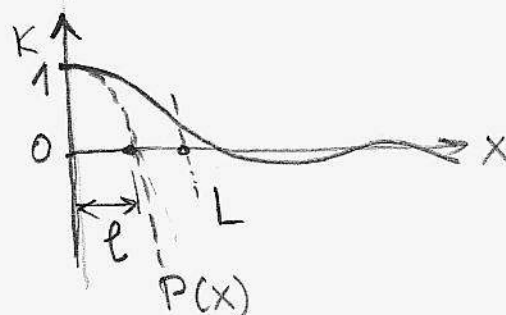
← OBIČNO GAUSOVA
NORMALNA.

A) KORELACIJA PUKTUACIJA

- PO PROSTORU

P'_A i P'_B su u nekoj
vezi dok su unutar
istog vrtloga!

$$K_p(x) = \frac{P'_A \cdot P'_B(x)}{\sqrt{P'^2_A} \cdot \sqrt{P'^2_B(x)}}$$



$$K(x=0) = 1$$

- FITOVANJEM PARABOLE DOBIBA SE

NERA VELICINE VRTLOGA ... l - MIKROSKALA
TURBULENCIJE

$$P(x) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2$$

- DEFINISE SE DOZINA L - MAKROSKALA

$$L = \int_0^{\infty} K(x) dx$$

DASE VELICINU VELIKIH VRTLOGA

RADI SE I KORELACIJA RAZLIČITIH VELICINA
PO PROSTORU!

- PO VREMENU

VRTLOG PROIZI PORED MERNE TAČKE, DOKU SLEDI!



$t=t_1$



$t=t_1+\Delta t$



$t=t_1+2\Delta t$



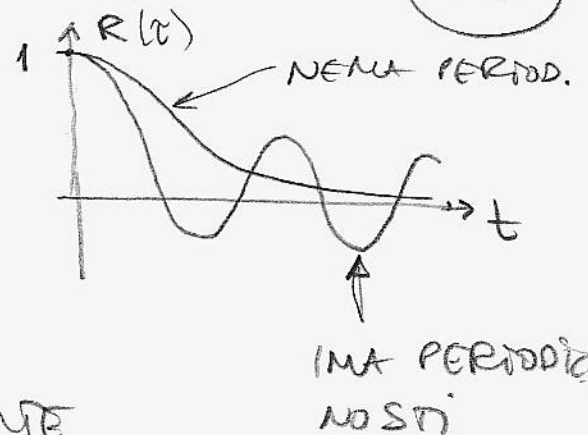
$t=t_1+3\Delta t$

JAKO TEŠKO DA SE
MERE I ISTOVREMENA
VREDNOST DVA
TAČKA !!!

AUTO KORELACIJA - ISTA VELOČINA
U ISTOJ TAČCI

$$R_{\tau} = K_{\tau} = \frac{\overline{p'(t) \cdot p'(t+\tau)}}{\overline{p'^2}}$$

DAJE PERIODE VRTLOGA.



KORELACIJA DVE KOMPONENTE
BRZINE

$$K_{12}(\tau) = \frac{\overline{u_1' \cdot u_2'}}{\sqrt{\overline{u_1'^2}} \cdot \sqrt{\overline{u_2'^2}}}$$

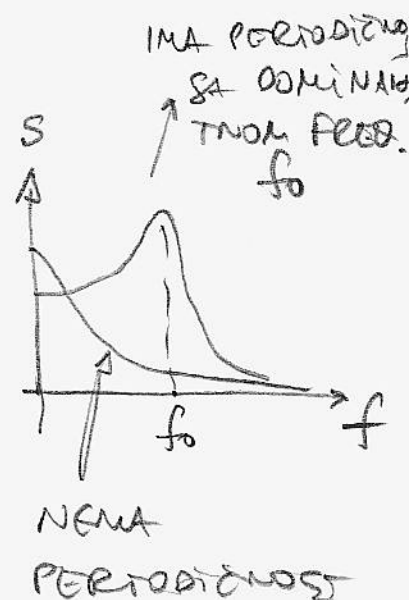
- MOŽE SE
ISTOVREMENO
BRZINE!!!

NE KLIŽA τ VEĆ SE MENJA
U VREMENU
POKAZUJE NORMALIZOVAN REYNOLDOSON
NAPON TURBULENCIJE!!!

VREMENSKA KORELACIJA GOVORI O PERIODIČNOSTI
I PERIODI VRTLOGA - LOGIČNA VEZA
SA FURIJEVOM TRANSFORMACIJOM KOJA TO
PREVODI U FREKVENCIJE

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} \underbrace{S(f)}_{\text{SPEKTRALNA GUSTINA}} \cos(2\pi f\tau) df$$

$$S(f) = 4 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau$$

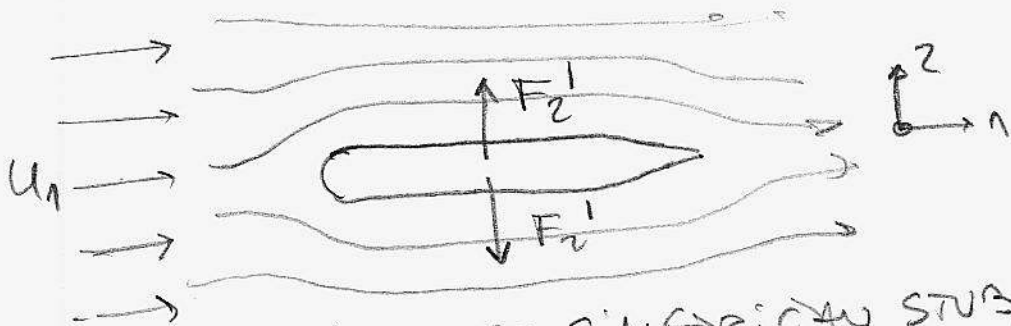


ČEMU SU A OVA IZUČAVANJA

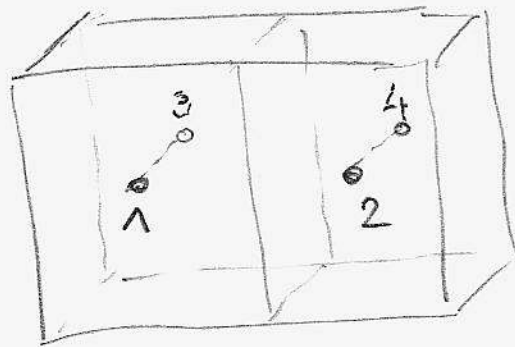
KORELACIJA

- DA BI SE REŠILI PRAKTIČNI PROBLEMI
ZA KOJE NIJE NEOPHOĐNO REŠAVATI
NEREŠIVE JEDNAČINE!

SILA NA MOSTOVSKI STUB:



IAKO JE SIMETRIČAN STUB, POSTOJI
SILA ZBOG FLUKTUACIJA



MERE SE PRITISCI
U TAČKAMA 1...4

SA JEDNE STRANE:

$$F_2^1 = (p_1^1 + p_2^1) \cdot A$$

$$\overline{F_2^{12}} = (\overline{p_1^{12}} + \overline{p_2^{12}} + 2 \underbrace{\overline{p_1^1 \cdot p_2^1}}_{\leq 1}) \cdot A^2$$

$$\max \overline{F_2^{12}} = 4 \overline{p_1^1} \cdot A^2$$

TREBA I KORELACIJA SA SUPROTNOG

STRANOM ZIDA - GDE SE KORELACIJA
R₁₃ I R₂₄

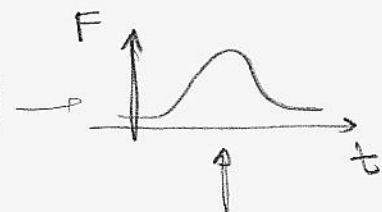
Ako se $R_{13} = -1$ tada se $p_1^{\text{uklono}} = 2 \cdot p_1$ 155

za $R_{13} = +1$ tada se $p_1^{\text{uklono}} = \emptyset$

uzima se $F_{\text{max}} = k \cdot \sqrt{\frac{F^2}{2}}$

↑

KOEFICIJENT
OBERBENJA
(obično = 3 za
pojačivače
deonak u 1000
doklata)



↑

obično
CAUSOVA
RASPODELA