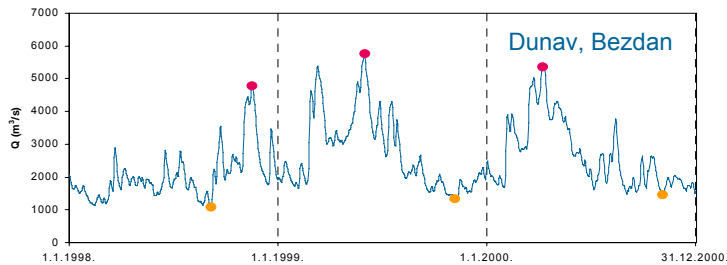


Statistička analiza hidroloških nizova

- Uslovi koje hidrološki nizovi moraju da ispune:
 - nezavisni podaci (slučajnost)
 - jednako raspoređeni, "istorodni" (homogenost)
- Nizovi godišnjih ekstrema
 - godišnji minimumi (male vode)
 - godišnji maksimumi (velike vode, padavine)
- Nizovi prekoračenja iznad praga (parcijalne serije)

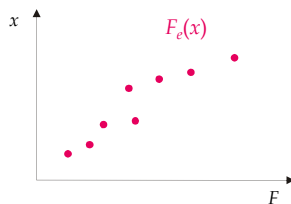


Postupak

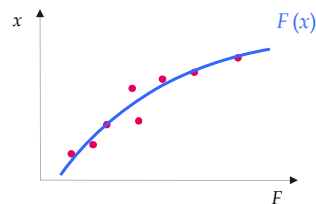
I. PRILAGOĐAVANJE teorijskih raspodela osmotrenim podacima

- 1) formiranje EMPIRIJSKE RASPODELE
- 2) proračun parametara TEORIJSKIH RASPODELA
- 3) testiranje SAGLASNOSTI empirijske i teorijskih raspodela
- 4) IZBOR najbolje raspodele

osmotreni podaci -
EMPIRIJSKA RASPODELA



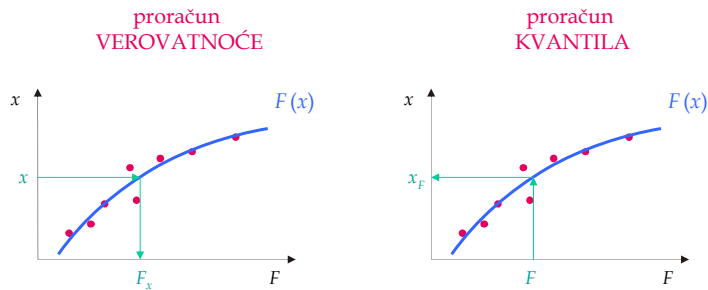
prilagođavanje -
TEORIJSKA RASPODELA



Postupak

II. PRORAČUN teorijske raspodele

- VEROVATNOĆE za zadatau vrednost, $F(x)$
- KVANTILA (vrednosti za zadatau verovatnoću), $x(F)$



Način izražavanja veze X-P

vrednost slučajne
promenljive
 x



VEROVATNOĆA:

funkcija raspodele
ili verovatnoća
neprevazilaženja

$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

verovatnoća
prevazilaženja

$$P\{X > x\} = 1 - F(x)$$

Povratni period

- način izražavanja verovatnoće kritičnog događaja

- izražava se u godinama

- velike vode (maksimumi)

$$T(x) = \frac{1}{P\{X > x\}} = \frac{1}{1 - F(x)}$$

- primer:

$T(200 \text{ m}^3/\text{s}) = 50$ god. znači da će se protok od $200 \text{ m}^3/\text{s}$ prevazići jednom u 50 godina (odnosno sa verovatnoćom $1/50 = 0.02 = 2\%$)

- male vode (minimumi)

$$T(x) = \frac{1}{P\{X \leq x\}} = \frac{1}{F(x)}$$

- primer:

$T(0.4 \text{ m}^3/\text{s}) = 20$ god. znači da će se protok manji od $0.4 \text{ m}^3/\text{s}$ javiti jednom u 20 godina (odnosno sa verovatnoćom $1/20 = 0.05 = 5\%$)

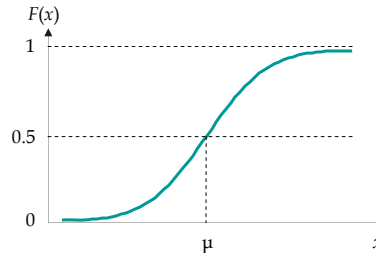
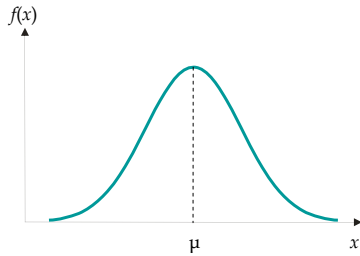
Teorijske raspodele verovatnoće u hidrologiji

- Normalna i log-normalna raspodela
- Gumbelova raspodela
- Pirson III i log-Pirson III raspodela

Normalna raspodela

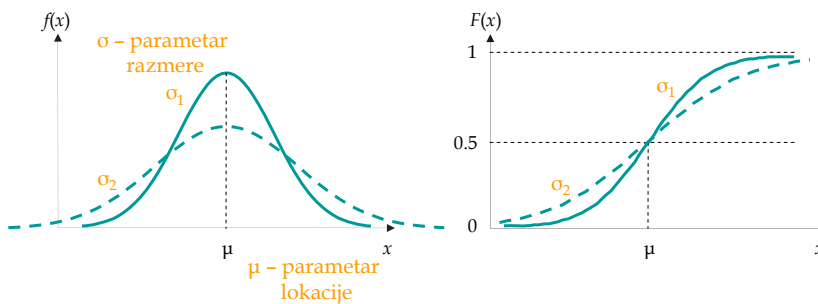
■ gustina raspodele: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < x < \infty$

■ funkcija raspodele: $F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] du$



Normalna raspodela

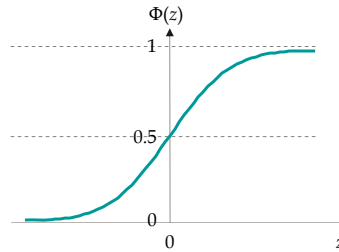
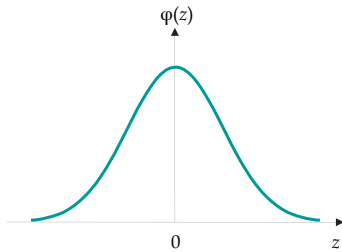
- parametri:
- μ - srednja vrednost ($\mu = \mu'_1$)
 - σ - standardna devijacija ($\sigma^2 = \mu_2$)



Normalna raspodela

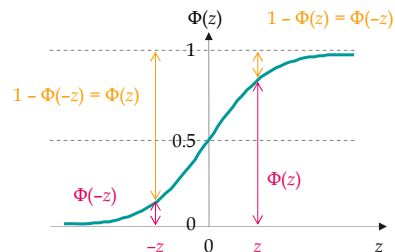
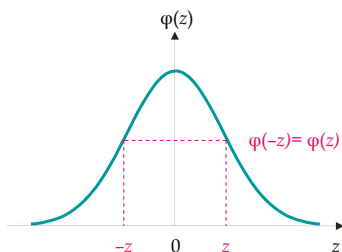
■ Standardna normalna raspodela

- smena: $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$
- gustina i funkcija raspodele: $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right]$ $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du$
- parametri: $\mu = 0, \sigma = 1$



Normalna raspodela

■ važna osobina: simetričnost → $C_s = 0$



Normalna raspodela

- Veza između normalne i standardne normalne raspodele:

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X - \mu \leq x - \mu\} =$$

$$= P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\} =$$

$$= P\left\{Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$F(x) = \Phi(z), \quad z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Normalna raspodela

- Određivanje parametara na osnovu uzorka

$$\mu = \bar{x}$$

$$\sigma = S_x$$

- Postupak proračuna

$$x \rightarrow z = \frac{x - \bar{x}}{S_x} \xrightarrow{\text{TAB}} F_Z(z) = F_X(x)$$

$$F_X(x) = F_Z(z) \xrightarrow{\text{TAB}} z \rightarrow x = \bar{x} + z \cdot S_x$$



F = NORMSDIST(z)
z = NORMSINV(F)

Log-normalna raspodela

- Primena normalne raspodele na logaritmovane podatke
 - ako slučajna promenljiva $Y = \log X$ prati normalnu raspodelu, tada X prati log-normalnu raspodelu
 - parametri: srednja vrednost i standardna devijacija logaritmovanog niza

$$\mu_Y, \sigma_Y$$

- Veza sa standardnom normalnom raspodelom

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{10^Y \leq x\} = \\ = P\{Y \leq \log x\} = F_Y(\log x)$$

$$F(x) = F_Y(\log x) = \Phi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$F(x) = F_Y(y) = \Phi(z), \quad y = \log x, \quad z = \frac{y - \mu}{\sigma}$$

Log-normalna raspodela

- Određivanje parametara na osnovu uzorka

$$\mu_Y = \bar{y}$$

$$\sigma_Y = S_y$$

- Postupak proračuna

$$x \rightarrow y = \log x \rightarrow z = \frac{y - \bar{y}}{S_y} \xrightarrow{\text{TAB}} F_Z(z) = F_Y(y) = F_X(x)$$

$$F_X(x) = F_Z(z) \xrightarrow{\text{TAB}} z \rightarrow y = \bar{y} + z \cdot S_y \rightarrow x = 10^y$$



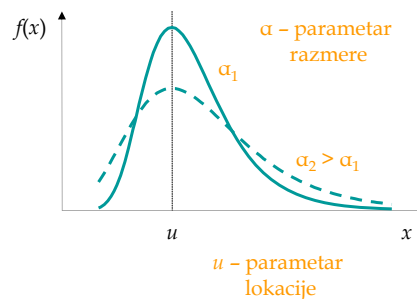
F = NORMSDIST(z)
z = NORMSINV(F)

Gumbelova raspodela

- gustina raspodele: $f(x) = \frac{1}{\alpha} \exp\left\{-\frac{x-u}{\alpha} - \exp\left[-\frac{x-u}{\alpha}\right]\right\}, \quad -\infty < x < \infty$
- funkcija raspodele: $F(x) = \exp\left\{-\exp\left[-\frac{x-u}{\alpha}\right]\right\}$
- inverzna funkcija raspodele: $x(F) = u + \alpha[-\ln(-\ln F)]$
- drugi nazivi:
 - dvostruko eksponencijalna raspodela
 - raspodela ekstremnih vrednosti I tipa

Gumbelova raspodela

- parametri:
 - α - parametar razmere
 - u - parametar lokacije
- osobine:
 - srednja vrednost $\mu(u, \alpha)$
 - standardna devijacija $\sigma(u, \alpha)$
$$\mu = u + 0.5772\alpha$$
$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \alpha$$
 - koef. asimetrije $C_s = 1.14$



Gumbelova raspodela

■ Standardna Gumbelova raspodela

- smena: $y = \frac{x-u}{\alpha}$

- parametri: $\alpha = 1$
 $u = 0$

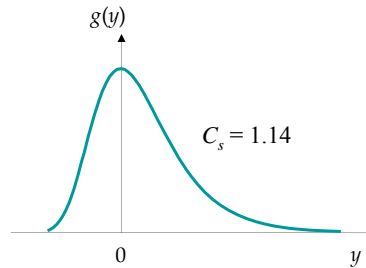
- gustina raspodele:

$$g(y) = e^{-y} e^{-e^{-y}}, \quad -\infty < y < \infty$$

- funkcija raspodele: $G(y) = e^{-e^{-y}}$

- inverzna funkcija raspodele:

$$y(G) = -\ln(-\ln G)$$



Gumbelova raspodela

■ Veza između obične i standardne Gumbelove raspodele:

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{X \leq x\} = P\{X - u \leq x - u\} = \\ &= P\left\{\frac{X - u}{\alpha} \leq \frac{x - u}{\alpha}\right\} = \\ &= P\left\{Y \leq \frac{x - u}{\alpha}\right\} = G\left(\frac{x - u}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

$$F(x) = G\left(\frac{x - u}{\alpha}\right)$$

$$F(x) = G(y), \quad y = \frac{x - u}{\alpha}$$

Gumbelova raspodela

- Određivanje parametara na osnovu uzorka

$$u = \bar{x} - 0.45 S_x$$

$$\alpha = 0.78 S_x$$

- Postupak proračuna

$$x \rightarrow y = \frac{x-u}{\alpha} \rightarrow F_Y(y) = e^{-e^{-y}} = F_X(x)$$

$$F_X(x) = F_Y(y) \rightarrow y = -\ln(-\ln F) \rightarrow x = u + y \cdot \alpha$$

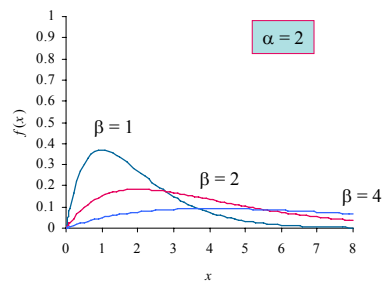
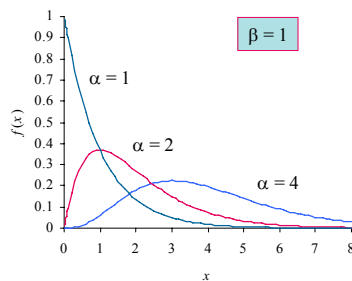


$$F = \text{EXP}(-\text{EXP}(-y))$$
$$y = -\text{LN}(-\text{LN}(F))$$

Familija gama raspodela

- Dvoparameterska gama raspodela

- gustina raspodele: $f(x) = \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0$
- parametri:
 - α - parametar oblika
 - β - parametar razmere



Pirsonova raspodela III tipa

- Troparametarska gama raspodela

- gustina raspodele:
$$f(x) = \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha)} \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right)^{\alpha-1} e^{-(x-\gamma)/\beta}, \quad x \geq 0$$

- parametri:

- α - parametar oblika
- β - parametar razmere
- γ - parametar lokacije

- osobine:

- asimetrična; za $C_s = 0$ postaje normalna raspodela

- momenti:
$$\mu = \alpha\beta + \gamma$$

$$\sigma = \beta\sqrt{\alpha}$$

$$C_s = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

Pirsonova raspodela III tipa

- Određivanje parametara na osnovu uzorka

$$\alpha = \frac{4}{c_{sx}^2}, \quad \beta = \frac{S_x \cdot c_{sx}}{2}, \quad \gamma = \bar{x} - \alpha\beta$$

- Postupak proračuna

$$x \rightarrow K_p = \frac{x - \bar{x}}{S_x} \xrightarrow{\text{TAB za } C_{sx}} F_X(x)$$

$$F_X(x) \xrightarrow{\text{TAB za } C_{sx}} K_p \rightarrow x = \bar{x} + K_p \cdot S_x$$

K_p – faktor
frekvencije



$$C_{sx} > 0: F = \text{GAMMADIST}((x - c)/b, a, 1, \text{TRUE})$$

$$x = c + b * \text{GAMMAINV}(F, a, 1)$$

$$C_{sx} < 0: F = 1 - \text{GAMMADIST}((x - c)/b, a, 1, \text{TRUE})$$

$$x = c + b * \text{GAMMAINV}(1 - F, a, 1)$$

Log-Pirson III raspodela

- Log-Pirson III raspodela
 - ako slučajna promenljiva $Y = \log X$ prati Pirson III raspodelu, tada X prati log-Pirson III raspodelu
 - primena Pirson III raspodele na logaritmovane podatke

Log-Pirson III raspodela

- Određivanje parametara na osnovu uzorka

$$\alpha = \frac{4}{c_{sy}^2}, \quad \beta = \frac{S_y \cdot c_{sy}}{2}, \quad \gamma = \bar{y} - \alpha\beta$$

- Postupak proračuna

$$x \rightarrow y = \log x \rightarrow K_p = \frac{y - \bar{y}}{S_y} \xrightarrow{\text{TAB za } C_{sy}} F_Y(y) = F_X(x)$$

$$F_X(x) \xrightarrow{\text{TAB za } C_{sy}} K_p \rightarrow y = \bar{y} + K_p \cdot S_y \rightarrow x = 10^y$$



$$C_{sy} > 0: F = \text{GAMMADIST}((y - c)/b, a, 1, \text{TRUE})$$

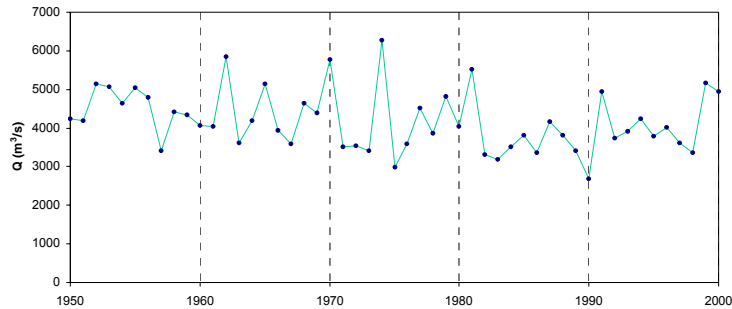
$$y = c + b * \text{GAMMAINV}(F, a, 1)$$

$$C_{sy} < 0: F = 1 - \text{GAMMADIST}((y - c)/b, a, 1, \text{TRUE})$$

$$y = c + b * \text{GAMMAINV}(1 - F, a, 1)$$

Primer

■ Sava – Sremska Mitrovica



| | originalni niz X | logaritmovani niz Y = log X |
|------------------------|---------------------|--------------------------------|
| broj podataka | 51 | 51 |
| srednja vrednost | 4187 | 3.6147 |
| standardna devijacija | 781.3 | 0.07936 |
| koeficijent varijacije | 0.187 | 0.022 |
| koeficijent asimetrije | 0.623 | 0.196 |

Primer

■ Proračun parametara raspodela

- Normalna raspodela:

$$\mu = \bar{x} = 4187 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\sigma = S_x = 781.3 \text{ m}^3/\text{s}$$

- Log-normalna raspodela:

$$\mu_Y = \bar{y} = 3.6147$$

$$\sigma_Y = S_y = 0.07936$$

- Gumbelova raspodela:

$$u = \bar{x} - 0.45 \cdot S_x = 4187 - 0.45 \cdot 781.3 = 3835 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\alpha = 0.78 \cdot S_x = 0.78 \cdot 781.3 = 609.4 \text{ m}^3/\text{s}$$

| | X | Y = log X |
|------------------------|-------|-----------|
| broj podataka | 51 | 51 |
| srednja vrednost | 4187 | 3.6147 |
| standardna devijacija | 781.3 | 0.07936 |
| koeficijent asimetrije | 0.623 | 0.196 |

Primer

■ Proračun parametara raspodela

- Pirson III raspodela:

$$\alpha = \frac{4}{c_{sx}^2} = \frac{4}{0.623^2} = 10.31$$

$$\beta = \frac{S_x \cdot c_{sx}}{2} = \frac{781.3 \cdot 0.623}{2} = 243.3$$

$$\gamma = \bar{x} - \frac{2S_x}{c_{sx}} = 4187 - \frac{2 \cdot 781.3}{0.623} = 1678 \text{ m}^3/\text{s}$$

| | X | Y = log X |
|------------------------|-------|-----------|
| broj podataka | 51 | 51 |
| srednja vrednost | 4187 | 3.6147 |
| standardna devijacija | 781.3 | 0.07936 |
| koeficijent asimetrije | 0.623 | 0.196 |

- Log-Pirson III raspodela:

$$\alpha = \frac{4}{c_{sy}^2} = \frac{4}{0.196^2} = 104.31$$

$$\beta = \frac{S_y \cdot c_{sy}}{2} = \frac{0.07936 \cdot 0.196}{2} = 0.007771$$

$$\gamma = \bar{y} - \frac{2S_y}{c_{sy}} = 3.6147 - \frac{2 \cdot 0.07936}{0.196} = 2.804$$

Primer

■ Proračun teorijskih raspodela

- protok za $F(x) = 0.95$

- Normalna raspodela:

$$F_X(x) = 0.95 \xrightarrow{\text{TAB, XL}} z(0.95) = 1.645$$

$$x = \bar{x} + z \cdot S_x = 4187 + 1.645 \cdot 781.3 = 5472 \text{ m}^3/\text{s}$$

- Log-normalna raspodela:

$$F_X(x) = 0.95 \xrightarrow{\text{TAB, XL}} z(0.95) = 1.645$$

$$y = \bar{y} + z \cdot S_y = 3.6147 + 1.645 \cdot 0.07936 = 3.74524$$

$$x = 10^y = 5562 \text{ m}^3/\text{s}$$

Primer

■ Proračun teorijskih raspodela

- protok za $F(x) = 0.95$

- Gumbelova raspodela:

$$F_X(x) = 0.95 \rightarrow y(0.95) = -\ln(-\ln 0.95) = 2.970$$

$$x = u + y \cdot \alpha = 3835 + 2.970 \cdot 609.4 = 5645 \text{ m}^3/\text{s}$$

- Pirson III raspodela:

$$F_X(x) = 0.95 \xrightarrow{\text{TAB}} k_p(F = 0.95, c_{xx} = 0.6) = 1.797, \quad k_p(F = 0.95, c_{xx} = 0.7) = 1.819$$

$$k_p(F = 0.95, c_{xx} = 0.623) = 1.802$$

$$x = \bar{x} + k_p \cdot S_x = 4187 + 1.802 \cdot 781.3 = 5595 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$F_X(x) = 0.95 \xrightarrow{\text{XL}} \frac{x - \gamma}{\beta} = \text{GAMMAINV}(0.95, 10.311, 1) = 16.098 = u$$

$$x = \gamma + u \cdot \beta = 1678 + 16.098 \cdot 243.3 = 5595 \text{ m}^3/\text{s}$$

Primer

■ Proračun teorijskih raspodela

- protok za $F(x) = 0.95$

- Log-Pirson III raspodela:

$$F_X(x) = 0.95 \xrightarrow{\text{TAB}} k_p(F = 0.95, c_{yy} = 0.1) = 1.673, \quad k_p(F = 0.95, c_{yy} = 0.2) = 1.700$$

$$k_p(F = 0.95, c_{yy} = 0.196) = 1.699$$

$$y = \bar{y} + k_p \cdot S_y = 3.6147 + 1.699 \cdot 0.07936 = 3.74953$$

$$x = 10^y = 5617 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$F_X(x) = 0.95 \xrightarrow{\text{XL}} \frac{y - \gamma}{\beta} = \text{GAMMAINV}(0.95, 104.31, 1) = 121.66 = u$$

$$y = \gamma + u \cdot \beta = 2.8041 + 121.66 \cdot 0.00777 = 5617 \text{ m}^3/\text{s}$$

Primer

- Sava – Sremska Mitrovica
 - Rezultati proračuna kvantila od 95%

| Raspodela | Protok sa $F(x) = 0.95$ (m ³ /s) |
|--------------|--|
| Normalna | 5472 |
| Log-normalna | 5562 |
| Gumbelova | 5645 |
| Pirson III | 5595 |
| Log-Pirson 3 | 5617 |

Testiranje saglasnosti

- Saglasnost empirijske i teorijske raspodele
 - empirijska raspodela $F_e(x)$
 - teorijska raspodela $F_f(x)$
- Test Kolmogorova-Smirnova
 - kontrolna statistika $D_{\max} = \max |F_f(x) - F_e(x)|$
 - kriterijum:
 - $D_{\max} < D_{kr} \rightarrow$ raspodele su saglasne
 - $D_{\max} > D_{kr} \rightarrow$ raspodele nisu saglasne
 - D_{kr} zavisi od dužine uzorka N i praga značajnosti α , dato u tablicama

| N | $\alpha = 10\%$ | $\alpha = 5\%$ | $\alpha = 2\%$ | $\alpha = 1\%$ |
|-----|-----------------|----------------|----------------|----------------|
| 20 | 0.265 | 0.294 | 0.329 | 0.352 |
| 40 | 0.189 | 0.210 | 0.235 | 0.252 |

Primer

- Sava - Sremska Mitrovica
 - Saglasnost empirijske i teorijske raspodele - test Kolmogorova-Smirnova

| D_{\max} | | | | |
|------------|-------|-------|-------|-------|
| N | LN | G | P3 | LP3 |
| 0.088 | 0.072 | 0.072 | 0.065 | 0.067 |

| D_{kr} | | | | |
|----------|-----------------|----------------|----------------|----------------|
| N | $\alpha = 10\%$ | $\alpha = 5\%$ | $\alpha = 2\%$ | $\alpha = 1\%$ |
| 51 | 0.171 | 0.190 | 0.213 | 0.228 |

Izbor teorijske raspodele

- Izbor najbolje teorijske raspodele
 - na osnovu primenljivosti teorijske raspodele
 - da li osobine teorijske raspodele odgovaraju osobinama uzorka (npr. asimetrija)
 - na osnovu testova saglasnosti empirijske i teorijske raspodele
 - vizuelna provera na [dijagramu verovatnoće](#)

Primer

- Sava - Sremska Mitrovica
 - izbor najbolje raspodele: kontrola osobina raspodela

| | originalni niz X | logaritmovani niz Y = log X |
|------------------------|---------------------|--------------------------------|
| broj podataka | 51 | 51 |
| srednja vrednost | 4187 | 3.6147 |
| standardna devijacija | 781.3 | 0.07936 |
| koeficijent varijacije | 0.187 | 0.022 |
| koeficijent asimetrije | 0.623 | 0.196 |



P3



LP3, možda LN

Primer

- Sava - Sremska Mitrovica
 - izbor najbolje raspodele: saglasnost empirijske i teorijske raspodele

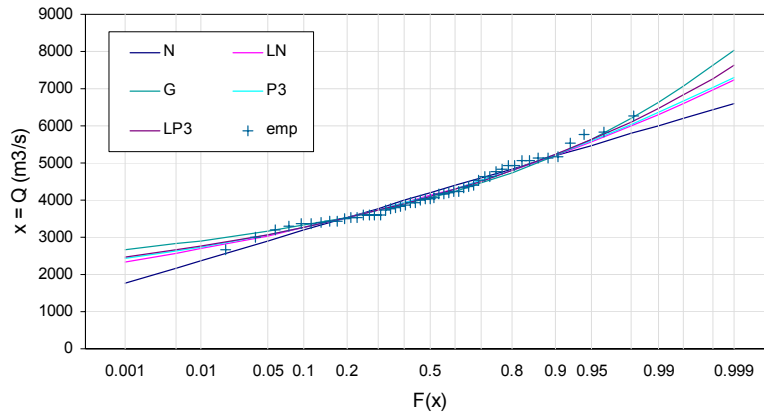
| D_{\max} | | | | |
|------------|-------|-------|-------|-------|
| N | LN | G | P3 | LP3 |
| 0.088 | 0.072 | 0.072 | 0.065 | 0.067 |

najbolje slaganje

Primer

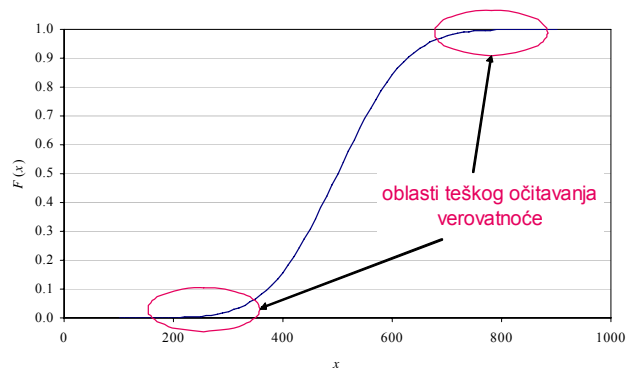
■ Sava – Sremska Mitrovica

- izbor najbolje raspodele: vizuelna provera na papiru verovatnoće



Dijagrami verovatnoće

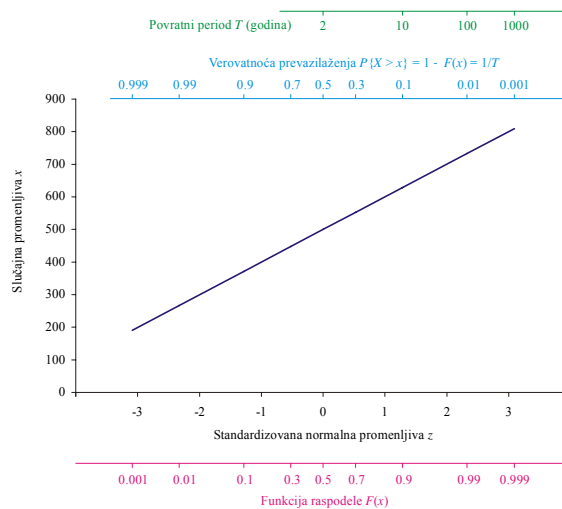
- Verovatnoća u aritmetičkoj razmeri?
- Kako "linearizovati" zavisnost $F(x)$?



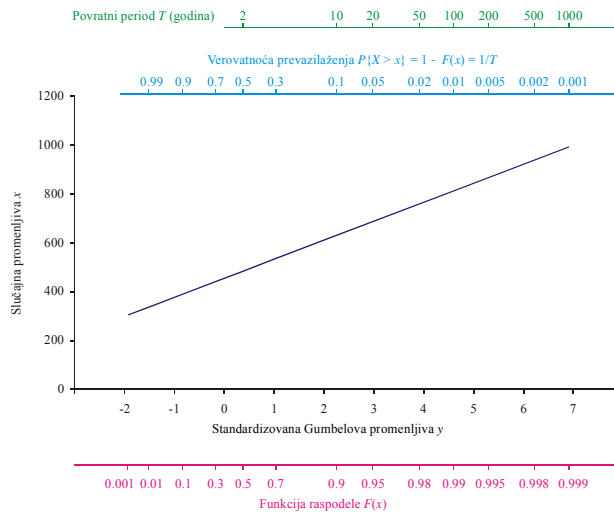
Dijagrami verovatnoće

- Standardizovane promenljive – jednoznačna veza između promenljive i verovatnoće
 - normalna raspodela: $z - F(z)$
 - Gumbelova raspodela: $y = -\ln(-\ln F)$
- Linearna veza između standardizovane i “originalne” promenljive
 - normalna raspodela: $X = \mu + \sigma Z$
 - Gumbelova raspodela: $X = u + \alpha Y$

Dijagram normalne verovatnoće



Dijagram Gumbelove verovatnoće



Dijagram log-normalne verovatnoće

