

Универзитет у Београду

Грађевински факултет



МАСТЕР РАД:

**АСИМИЛАЦИЈА ПОДАТАКА У ХИДРОТЕХНИЦИ
ПРИМЕНОМ КАЛМАНОВОГ ФИЛТЕРА**

Иван Марисављевић 562/17

**АСИМИЛАЦИЈА ПОДАТАКА У ХИДРОТЕХНИЦИ
ПРИМЕНОМ КАЛМАНОВОГ ФИЛТЕРА**

Сажетак

Мастер рад обрађује проблем асимилације података у хидротехници. У оквиру рада приказан је поступак асимилације применом Калмановог филтера. Приказан је принцип и алгоритам рада Калмановог филтера. Примена Калмановог филтера је приказана кроз примере истицања воде из резервоара, где се мери висина воде у резервоару. Урађена су два примера. Први пример детаљно обрађује поједине параметре Калмановог филтера и њихов утицај на излазне резултате. У оквиру овог примера нису рађена стварна мерења, подаци су добијени применом математичког модела. Други пример је пример са лабораторијским мерењима, тј. стварна примена асимилације помоћу Калмановог филтера. Приказане су и напредне методе асимилације, које се заснивају на Калмановом филтеру. На крају су приказани утицаји специфичних параметра Калмановог филтера, као и препоруке за примену овог поступка асимилације података.

Кључне речи: Асимилација података; Калманов филтер; истицање из резервоара; математички модели предикције.

Abstract

The master's thesis deals with the problem of data assimilation in hydraulic engineering. Thesis presents an assimilation procedure using a Kalman filter. The principle and algorithm of operation of the Kalman filter are presented. The application of the Kalman filter is shown through examples of water leakage from the tank, where the height of the water in the tank is measured. Two examples were made. The first example details the individual parameters of the Kalman filter and their influence to the outputs. No actual measurements were made within this example, the data were obtained using a mathematical model. Another example is an example with laboratory measurements, ie the actual application of assimilation using a Kalman filter. Advanced assimilation methods, which are based on the Kalman filter, are also presented. Finally, the effects of the specific parameters of the Kalman filter are presented, as well as recommendations for implementing this data assimilation procedure..

Keywords: Data assimilation; Kalman filter; leakage from the tank; mathematical models of prediction;

Радна биографија студента

Студент: Иван Марисављевић

Број индекса: 562/17

Лични подаци:

Рођен 26.12.1990 у Београду

Образовање:

- Основне студије на Грађевинском Факултету универзитета у Београду, смер хидротехника и водно-еколошко инжењерство

Радно искуство:

Грађевински инжењер у Hydro Power Consulting-у од септембра 2018 до јула 2019.

- Пројектовање мали хидроелектрана
- Хидрауличко моделовање водотока
- Прорачуни производње и израде студија оправданости

Инжењер за хидрографска мерења у iC consulenten-у од маја 2017 до септембра 2018.

- Теренско прикупљање батиметријских података, помоћу мултибеам (multibeam) уређаја
- Израда тродимензионалног модела речног корита на основу снимљених података
- Као део хидрографског тима учествовао на међународном пројекту **FAST DUNABE**. Пројекат је укључивао прикупљање података о конфигурацији корита, распореду брзина и проносу наноса, као и њихово моделовање у јединствени речни хидраулички модел.

Изјава о академској честитости

Студент: Иван Марисављевић

Број индекса: 562/17

Студент мастер академских студија Грађевинског факултета Универзитета у Београду

Аутор мастер рада под називом:

„Асимилација података у хидротехници применом Калмановог филтера“

Потписивањем изјављујем:

- да је рад искључиво резултат мог сопственог истраживачког рада;
- да сам рад и мишљења других аутора које сам користио у овом раду назначио или цитирао у складу са Упуством;
- да су радови и мишљења других аутора наведени у списку литературе/референци који су саставни део овог рада и писани у складу са Упуством;
- да сам добио све дозволе за коришћење ауторског дела који се у потпуности/целости уносе у предати рад и да сам то јасно навео;
- да сам свестан да је плагијат коришћење туђих радова у било ком облику (као цитата, парафраза, слика, табела, дијаграма, дизајна, планова, фотографија, филма, музике, формула, веб сајтова, компјутерских програма и сл.) без навођења аутора или представљање туђих дела као мојих, кажњиво по закону (Закон о ауторским и сродним правима, Службени гласник Републике Србије, бр. 104/2009, 99/2011, 119/2012), као и других закона и одговарајућих аката Универзитета у Београду;
- да сам свестан да плагијат укључује и представљање, употребу и дистрибуирање рада предавача или других студената као сопствених;
- да сам свестан последица које код доказаног плагијата могу проузроковати на предати мастер рад и мој статус;
- да је електронска верзија мастер рада идентична штампаном примерку и пристајем на његово објављивање под условима прописаним актима Универзитета.

Београд, _____

Потпис студента

Садржај

Садржај	6
Списак слика	8
Списак табела	9
1. УВОД.....	10
2. МЕТОДОЛОГИЈА КАЛМАНОВОГ ФИЛТЕРА.....	12
2.1. Шта је Калманов филтер?	12
2.2. Примена	14
2.3. Математички алгоритам Калмановог филтера	16
1.1.1. 2.3.1. Матрица стања	17
2.3.2. Измерено стање	20
2.3.3. Матрице коваријансе	20
2.4. Нумерички пример.....	23
3. ПРИМЕНА КАЛМАНОВОГ ФИЛТЕРА У ХИДРОТЕХНИЦИ	33
3.1. Пример истицање воде из резервоара - нумерички пример	33
3.1.2. Општи модел истицања из резервоара	34
3.1.3. Математички модел предикције	34
3.1.4. Измерени подаци	35
3.1.5. Приказ урађених варијанти и њихових параметара.....	36
3.1.6. Геометријске поставке математичког модела предикције	37
3.1.7. Утицај шума модела	38
3.1.8. Утицај неодређености мерења	39
3.1.9. Утицај неусаглашености временског корака математичког модела предикције и мерења.....	40
3.2. Резултати	40
3.2.1. Шум модела.....	41
3.2.2. Неодређености мерења	43
3.2.3. Неусаглашеност временског корака математичког модела предикције и временског корака мерења.....	45
3.3. Пример истицање воде из резервоара – лабораторијска мерења	48
3.3.1. Измерени подаци	49
3.3.2. Математички модела предикције.....	50

3.3.3. Поставка модела.....	51
3.4. Резултати	51
4. НАПРЕДНЕ МЕТОДЕ КОЈЕ СЕ ЗАСНИВАЈУ НА КАЛМАНОВОМ ФИЛТЕРУ	54
4.1. Проширени Калманов филтер (Extended Kalman Filter)	55
4.2. Безмирисни Калманов филтер (Unscented Kalman Filter)	57
4.3. Филтер честица (Particle Filter).....	58
4.4. Преглед напредних метода асимилације.....	59
5. ЗАКЉУЧАК	60
6. ЛИТЕРАТУРА	62
ПРИЛОЗИ.....	63
Нумерички прилози.....	64

Списак слика

Слика 1.1 Различити нивои уклапања података у модел	10
Слика 2.1 Поређење брзине достизања стварне вредности применом асимилације помоћу Калмановог филтера и методом средње вредности измеренх података (до датог тренутка)	12
Слика 2.2 Интервали поверења: мерења, математичког модела и Калмановог филтера [2]	13
Слика 2.3 Алгоритам асимилације података применом Калмановог филтера	14
Слика 2.4 Пример примене Калмановог филтера [4]	15
Слика 2.5 Алгоритам и матрице у Калмановом филтеру	16
Слика 2.6 Модел једнодимензионалног кретања тела	17
Слика 2.7 Густина нормалне, Гаусове расподеле [5]	23
Слика 2.8 Промена брзине, упоредни приказ измерених вредности, предикције (модела) и вредности асимилираних применом Калмановог филтера - пример кретање тела дуж х осе	30
Слика 2.9 Промена позиције, упоредни приказ измерених вредности, предикције (модела) и вредности асимилираних применом Калмановог филтера - пример кретање тела дуж х осе	31
Слика 2.10 Промена Калмановог тежинског фактора за брзину и за позицију - пример кретање тела дуж х осе	31
Слика 3.1 Мерење висине воде при истицању воде из резервоара	33
Слика 3.2 Моделоване вредности и „измерени“ подаци истицања из резервоара	36
Слика 3.3 Геометријске карактеристике резервоара	37
Слика 3.4 Базна и променљива вредност шума математичког модела предикције	38
Слика 3.5 Разлика између измерене вредности и вредности добијене асимилацијом уз помоћ Калмановог филтера за варијанте 1, 2, 3 и 4	41
Слика 3.6 Промена тежинског фактора кроз време за варијанте 1, 2, 3 и 4	42
Слика 3.7 Разлика између измерене вредности и вредности добијене асимилацијом уз помоћ Калмановог филтера за варијанте 5, 6 и 7	43
Слика 3.8 Промена тежинског фактора кроз време за варијанте 5, 6 и 7	44
Слика 3.9 Промена тежинског фактора кроз време за варијанте 8, 9, 10 и 11	45
Слика 3.10 Разлика између измерене вредности и вредности добијене асимилацијом уз помоћ Калмановог филтера за варијанте 8, 9, 10 и 11	46
Слика 3.11 Промена висине воде у резервоару добијена асимилацијом уз помоћ Калмановог филтера за варијанте 8, 9, 10 и 11	47
Слика 3.12 Приказ лабораторијске инсталације [6]	48
Слика 3.13 Промена нивоа воде у резервоару добијена асимилацијом уз помоћ Калмановог филтера – лабораторисјки пример	52
Слика 3.14 Промена тежинског коефицијента – лабораторисјки пример	53
Слика 3.15 Разлика између измерених вредности и вредности математичког модела предикције – лабораторисјки пример	53
Слика 4.1 Расподела вероватноће пре и после линеарне трансформације [2]	54
Слика 4.2 Расподела вероватноће пре и после нелинеарне трансформације [2]	54
Слика 4.3 Линеаризација нелинеарне функције, помоћу проширеног Калмановог филтера [2]	55
Слика 4.4 Случај када линеаризација није валидна [2]	57
Слика 4.5 Апроксимирање функције расподеле помоћу безмирисног Калмановог филтера [2]	57
Слика 4.6 Добијање емпиријске Гаусове расподеле [2]	58
Слика 4.7 Апроксимирање функције расподеле помоћу филтера честица [2]	58

Списак табела

Табела 2.1 Измерене вредности – кретање тела дуж x осе	23
Табела 2.2 Резултати нумеричког примера кретања тела дуж x осе.....	30
Табела 3.1 Комбинације параметара за варијанте у примеру истицања воде из резервоара.....	37
Табела 3.2 Вредности шума математичког модела предикције за варијанте 1, 2, 3 и 4.....	39
Табела 3.3 Вредности неодређености мерења за варијанте 5, 6 и 7	39
Табела 3.4 Временски кораци математичког модела предикције и мерења за варијанте 8, 9, 10 и 11.....	40
Табела 3.5 Вредности корена средње квадратне грешке за варијанте промене шума математичког модела предикције	42
Табела 3.6 Вредности корена средње квадратне грешке за варијанте промене мерне неодређености.....	44
Табела 3.7 Вредности корена средње квадратне грешке за варијанте различитих временских корака математичког модела предикције и мерења.....	47
Табела 3.8 Измерени лабораторијски подаци	49
Табела 4.1 Преглед метода оптималне процене	59

1. УВОД

Асимилација података је математичка дисциплина чије је задатак уклапање измерених података и математичких модела. Овде се под уклапањем података подразумева поступак који ће узети у обзир измерене податке као и податке математичког модела и на основу тога дати прецизнији излазни податак (или прогнозу излаза).

Математички модели користе улазне податке како би нам дали прогнозу излаза из система на основу улазних података. Систем подразумева неки физички процес који желимо да симулирамо. Математички модели, који у себи немају неки од механизма асимилације података, заснивају се на калибрацији модела. Калибрација подразумева „када се на основу историјског низа мерених, улазних променљивих, одређују параметри система тако да разлика (грешка) између мерених и симулираних излазних вредности буде минимална“ [1]. Овај начин уклапања измерених података не урачунава стохастичку природу процеса, тј. неурачунава да само мерење има своју неодређеност као и да математички модел такође има неодређеност јер не постоји ни један математички модел који може да савршено симулира неки физички процес. При овом начину уклапања података критеријумска функција је функција (најмање) грешке. Главни недостак овог приступа је то што је модел калибрисан за један сет података (или више њих) што значи да се неће мењати ако се промене и услови за које је калибрисан. Током времена може доћи до промене у самом процесу. Због тога долази до проблема: колико је калибрација поуздана од почетка, када треба опет извршити калибрацију, и колико често треба калибристи математички модел. Асимилација (уклапање измерених) података је један од начина за решавање ових проблема.

Асимилација података се може вршити на различите начине:

1. Уклапањем улазних података
2. Уклапањем променљивих стања
3. Одређивањем параметара модела
4. Корекцијом излазних променљивих



Слика 1.1 Различити нивои уклапања података у модел (1) Уклапањем улазних података (2) Уклапањем променљивих стања (3) Одређивањем параметара модела (калибрација) (4) Корекцијом излазних променљивих [1]

Прва категорија асимилације измерених података подразумева калибрацију математичког модела (3).

„У другу категорију спадају преостали начини уклапања измерених података (1, 2 и 4). Њих користимо када већ имамо калибрисан математички модел, а желимо да „побољшамо“, унапредимо стање модела или прогнозу (излазни податак модела). У оквиру ове категорије постоје методе уклапања измерених података које урчунавају и стохастичку природу како измерених података као и математичког модела“ [1]. Једна од таквих метода је и метода Калмановог филтера.

Задатак овог рада је приказ могуће примене асимилације података помоћу Калмановог филтера у хидротехници. Овај рад треба да омогући разумевање рада Калмановог филтера и олакша његову примену.

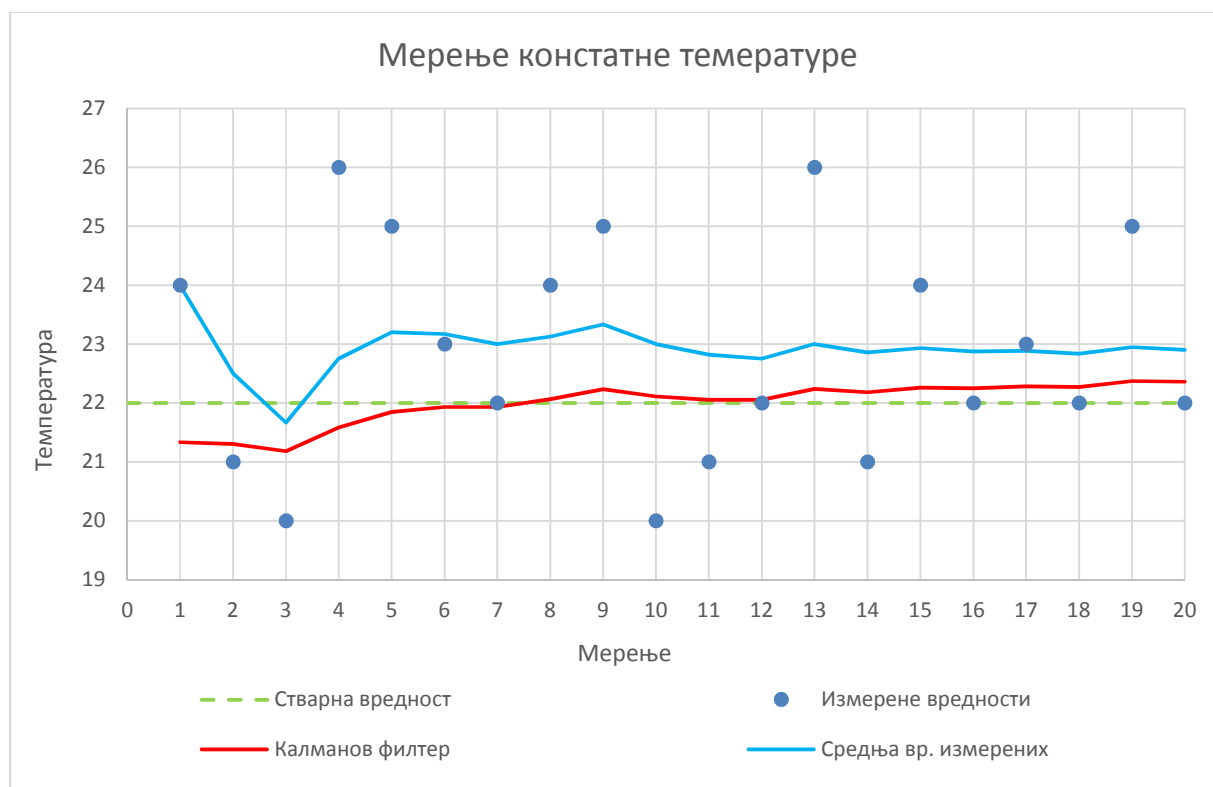
У оквиру овог рада приказана је методологија рада Калмановог филтера. Примена методе асимилације података применом Калмановог филтера биће показана на примерима истицања воде из резервора. Детаљно ће бити приказани поједини параметри карактеристични за Калманов филтер и њихов утицај на излазне податке. На самом крају биће приказани недостаци Калмановог филтера који ограничавају његову примену. Приказане су и напредне методе, које се заснивају на Калмановом филтеру, а омогућавају примену и у сличајевима где није могућа примена Калмановог филтера.

2. МЕТОДОЛОГИЈА КАЛМАНОВОГ ФИЛТЕРА

2.1. Шта је Калманов филтер?

Калманов филтер представља алгоритам оптималне процене. Представља итеративни математички процес који користи сет једначина и константан унос мерених података да брже процени стварну вредност параметра који се мери (позиције, брзине или нечег другог). Он подразумева да свака измерена вредност има одређену мерну неодређеност (грешку у мерењу), али и да сам математички модел такође има одређену неодређеност, тј. несигурност.

У наставку је једноставнији пример који пореди процену стварне вредности температуре на основу средње вредности измерених података и података добијених асимилацијом помоћу Калмановог филтера. Калманов филтер брже долази до стварне вредности (или близу ње) и самим тим погоднији је за примену код појава са бржом променом.



Слика 2.1 Поређење брзине достизања стварне вредности применом асимилације помоћу Калмановог филтера и методом средње вредности измеренх података (до датог тренутка)

У примеру са горње слике коришћен је упрошћени математички модел за Калманов филтер. За вредност предикције математичког модела узима се вредност из предхоног корака, тј. у првом кораку задата је (нека) почетна вредност, а у наредним корацима узета је вредност добијана

Калмановим филтером из предходног корака. У сваком временском кораку рачуната је и средња вредност свих до тада измерених података.

Калманов филтер функционише тако што комбинује податке математичког модела и измерене податке, рачунајући да и једни и други подаци имају одређену (грешку) неодређеност, тј. интервал поверења. На основу предходних вредности филтер даје одређено поверење математичком моделу предикције и измереном податку, и на основу тога даје оптималну вредност.



Слика 2.2 Интервали поверења: мерења, математичког модела и Калмановог филтера [2]

У односу на стварну вредност и математички модел и измерени податак могу направити грешку (тј. интервал поверења) која која ће се налазити у у распону нормалне, Гаусове расподеле. Када се укомбинују ова два податка, што Калманов филтер ради, добија се податак који је доста ближи стварној вредности.



Слика 2.3 Алгоритам асимилације података применом Калмановог филтера

Три основна корака (једначине) у алгоритму Калмановог филтера су:

1. Прорачун Калмановог прираштаја
2. Прорачун тренутне процене (стварне вредности)
3. Прорачун грешке у процени

2.2. Примена

Калманов филтер се примењује у случајевима где је математички модел линеаран. Калманов филтер даје оптималну процену тако што рекурзивно, кроз алгоритам, убацује последње мерење у линеарни модел да би ажурирао излазни податак (параметар) модела. Ради под претпоставком да је систем који се моделира линеаран, тј. стохастички процеси у систему који изазивају грешке прате Гаусову (нормалну) расподелу. При оваквим условима Калманов филтер даје најбољу процену са минималном средњом квадратном грешком.

Назив филтер потиче из тога што алгоритам из мерених података који су пуни шума, грешака, даје најбољу процену чиме „филтрира“ податке. Треба напоменути да Калманов филтер не „чисти“ тј.

не брише мерене податке, већ филтрира шум и грешке. Измерене податке користи у алгоритму кобиновајући их са математичким моделом предикције да да најбољу процену.

Предности Калмановог филтера:

- Даје добро резултате на основу своје структуре и прилагодљивости
- Погодан је за обраду података који долазе у стварном времену (real time processing)
- Лако се формулише и примењује

На основу свега тога нашао је широку примену у разним сферама, најзаступљеније области примене су:

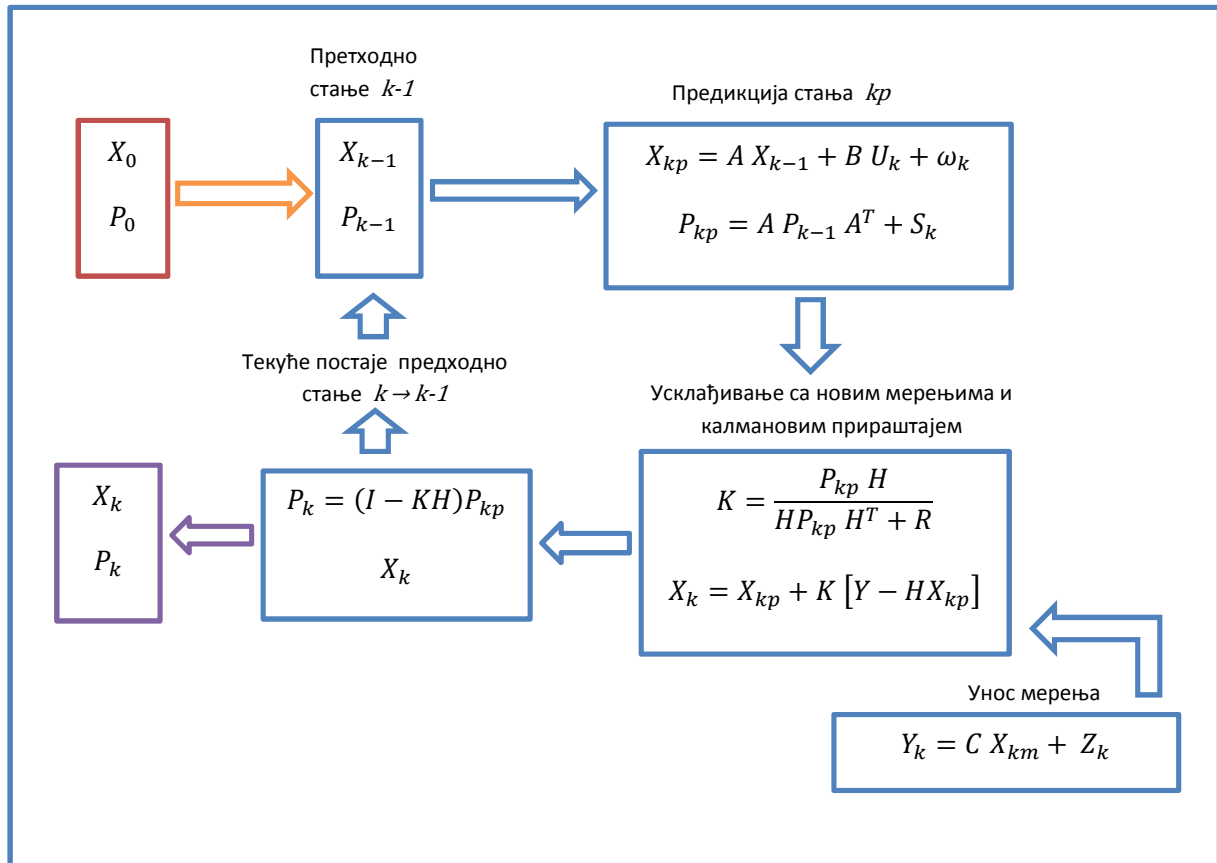
- Одређивање орбита планета на основу лимитираних мерења са Земље
- Праћење мета, авиона, пројектила и сличих објеката помоћу радара
- Навигацији
- Навигацији и управљању беспилотних возила и летелица (која се доста ослањају на податке са сензора и уређаја)



Слика 2.4 Пример примене Калмановог филтера [4]

2.3. Математички алгоритам Калмановог филтера

У оквиру овог поглавља биће представљен алгоритам и начин примена Калмановог филтера, све потребне једначине и параметри, као и њихова повезаност.



Слика 2.5 Алгоритам и матрице у Калмановом филтеру

Где су:

X – Матрица стања

P – Матрица коваријансе процеса (грешка у процени, тј. процесу)

K – Калманов прираштај - тежински фактор

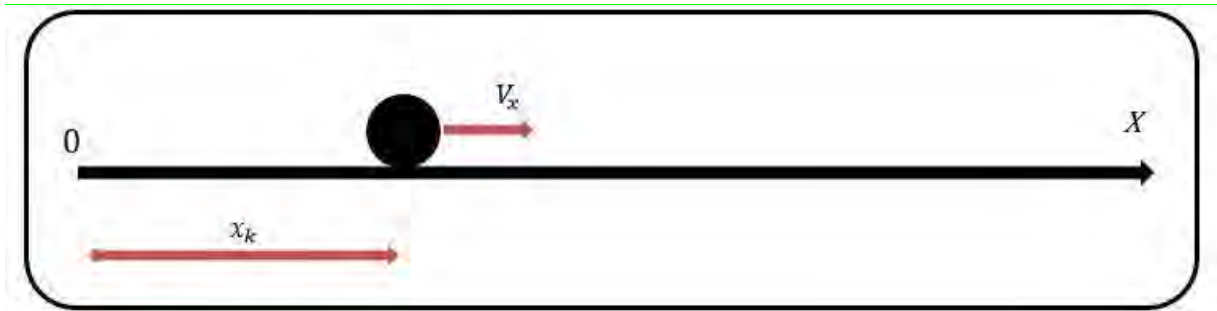
I – Матрица идентитета

R – Матрица коваријансе мерних уређаја (грешка, неодређеност при мерењу)

Y – Матрица измереног стања

Калманов филтер користи матрични рачун. Иако на први поглед делује компликованије матрични рачун нам омогућава једноставније и брже рачунање за велики број података и мерења. Он омогућава бржу обраду података од параметарског рачуна.

Цео алгоритам и начин примене ради лакшег разумевања биће представљени кроз пример. За пример је узето кретање тела у једном правцу (X - осе), а мерени су положај тела (у односу на неки референтни систем) као и тренутна брзина тела. Претпостављено је да тело има константно убрзање.



Слика 2.6 Модел једнодимензионалног кретања тела

1.1.1. 2.3.1. Матрица стања

Матрица X чува потребне податке о тренутном стању система тј. о параметрима који описују систем. У случају кретања тела где параметре система представљају позиција и брзина то би изгледало:

2. За једнодимензионално кретање:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

3. За дводимензионално кретање

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

4. За тродимензионално кретање

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Где су:

x, y и z – позиције у датим осама, а

\dot{x}, \dot{y} и \dot{z} – брзине по у смеру оса.

Овде се ограничавамо на једнодимензионално кретање и матрицу (2.1)

Ново стање, тј. тренутно стање система се рачуна на следећи начин:

$$X_k = AX_{k-1} + BU_k + \omega_k \quad (2.4)$$

Где су:

X – Матрица стања

U – Контролна матрица променљиве

ω – Шум у процесу

а k временски тренутак

Ако се ограничимо само на пример једнодимензионалног кретања, физички модел тј. једначина којом би израчунали позицију тела у x правцу у тренутку t гласила би:

$$x = x_0 + \dot{x} t + \frac{1}{2} \ddot{x} t^2 \quad (2.5)$$

Где су:

x – тренутна позиција [m]

x_0 – почетна позиција [m]

\dot{x} – брзина [m/s]

\ddot{x} – убрзање [m/s²]

t – протекло време [s]

Сада када имамо физички модел враћамо се на Калманов филтер и матрични рачун и дефинишемо и остале матрице из једначине (2.4).

Матрица A нам служи да прорачунамо следаћи корака на основу података из преходног корака тј. односи се на прва два члана са десне стране једначине (2.5) ($x_0 + \dot{x} t$) и има следећи облик:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Како је:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Следи:

$$A X = \begin{bmatrix} 1 & \Delta T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$A X = \begin{bmatrix} x + \Delta T \dot{x} \\ 0 + \dot{x} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

U – Контролна матрица променљиве у овом примеру представља убрзање тела a ($a = \ddot{x}$), и оно је узето као константно.

Слично како и код матрице A имамо матрицу B која у овом примеру служи да се добије трећи члан са десне стране једначне (2.5) ($\frac{1}{2} \ddot{x} t^2$):

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta T^2 \\ \Delta T \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Следи:

$$B U = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta T^2 \\ \Delta T \end{bmatrix} [a] \quad (2.11)$$

$$B U = \begin{bmatrix} a \frac{1}{2} \Delta T^2 \\ a \Delta T \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

ω - Представља шум у процесу и до њега може доћи када временски корак математичком модела и мерења нису усаглашени или када постоји и извесна неизвесност у самом моделу. У овом примеру он се неће разматрати и узеће се да је :

$$\omega = 0 \quad (2.13)$$

Када смо дефинисали све елементе једначине (2.4) можемо је написати у пуном матричном облику:

$$X_k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta T^2 \\ \Delta T \end{bmatrix} [a] + 0 \quad (2.14)$$

$$X_k = \begin{bmatrix} X_{k-1} + \Delta T \dot{X}_{k-1} \\ 0 + \dot{X}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \frac{1}{2} \Delta T^2 \\ a \Delta T \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$X_k = \begin{bmatrix} X_{k-1} + \Delta T \dot{X}_{k-1} + a \frac{1}{2} \Delta T^2 \\ \dot{X}_{k-1} + a \Delta T \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

2.3.2. Измерено стање

Матрица Y_k се користи за унос и коришћење измерених података и у матричном облику се записује:

$$Y_k = C X_m + Z_k \quad (2.17)$$

Матрица C служи само да контролишемо унос података мерења, тј. да одаберемо податке које ће даље ићи у Калманов филтер. Сам поступак ће бити приказан кроз пример:

У овом примеру мери се и позиција и брзина тела

$$X_m = \begin{bmatrix} x_m \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Ако желимо да у Калманов филтер убацујемо само мерени податак о позицији тела матрица C ће имати следећи облик:

$$C = [1 \quad 0] \quad (2.19)$$

И следи :

$$C X_m = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_m \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = [x_m] \quad (2.20)$$

Ако желимо да у Калманов филтер улазе мерени подаци и позиције и брзине (што даје боље решење и што ћемо урадити) матрица C има следећи облик:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

И следи:

$$C X_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Матрица Z_k представља матрицу шума мерења, тј. несигурности у мерењу. Она се може јавити услед неусклађености временског корака и математичког модела. У овом примеру узеће се да нема шума мерења и да је:

$$Z_k = 0 \quad (2.23)$$

2.3.3. Матрице коваријансе

$$P_{kp} = A P_{k-1} A^T + S \quad (2.24)$$

$$K_k = \frac{P_k H^T}{H P_k H^T + R} \quad (2.25)$$

Где је:

P – Матрица коваријансе стања (грешка у процени)

S – Шум у предикцији

R – Матрица коваријансе мерних уређаја (грешка, неодређеност при мерењу)

K – Калманов прираштај

Калманов прираштај представља „тежински“ фактор који даје одређену „тежину“ тј. поверење мерним вредностима као и предикцији у моделу. И важи следеће:

- Ако је $R \rightarrow 0$, онда $K \rightarrow 1$ следи да у процењеној вредности већу тежину има мерење, тј. Калманов филтер више поверења даје мереној вредности него предикцији.
- Ако је $R \rightarrow$ велико, онда $K \rightarrow 0$ следи да у процењеној вредности Калманов филтер више поверења даје предикцији него мереној вредности.
- Ако је $K = 0.5$ једнако поверење имају и измерена вредност и предикција.
- Ако је $P \rightarrow 0$, онда се измерене вредности занемарају, и губи се суштина процеса Калмановог филтера. Да би се ово избегло мора се урачунати и шум предикције тј. $S \neq 0$. Преко матрице S дефинишемо и убрајамо све факторе које нисмо могли да моделирамо математичким моделом (стохастичке елементе процеса).

Стандардна квадратна грешка или стандардна девијација показује колико се свако појединачно мерење (или у овом случају може бити и вредност предикције) разликује од средње вредности. Дефинише се као :

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{N}} \quad (2.26)$$

Где је:

x_i – појединачно мерење

\bar{x} – одступање од просечне вредности

$(\bar{x} - x_i)^2$ – квадрат одступања

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{N} \text{ – варијанса}$$

Коваријанса представља мере јачине међусобне зависности између промене две променљиве. Дефинише се као :

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)}{N} \quad (2.27)$$

За различит број променљивих величина, параметара у моделу, матрице коваријансе ће имати и различит облик.

У случају једне променљиве:

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{N} \right] = [\sigma_x^2] \quad (2.28)$$

Када су у моделу две променљиве:

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{N} & \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)}{N} \\ \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y} - y_i)(\bar{x} - x_i)}{N} & \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y} - y_i)^2}{N} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Три променљиве:

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{N} & \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)}{N} & \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)(\bar{z} - z_i)}{N} \\ \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y} - y_i)(\bar{x} - x_i)}{N} & \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y} - y_i)^2}{N} & \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y} - y_i)(\bar{z} - z_i)}{N} \\ \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{z} - z_i)(\bar{x} - x_i)}{N} & \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{z} - z_i)(\bar{y} - y_i)}{N} & \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{z} - z_i)^2}{N} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z^2 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Треба напоменути да је:

$$(\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i) = (\bar{y} - y_i)(\bar{x} - x_i) \quad (2.31)$$

као и

$$(\bar{y} - y_i)(\bar{z} - z_i) = (\bar{z} - z_i)(\bar{y} - y_i) \quad (2.32)$$

$$(\bar{x} - x_i)(\bar{z} - z_i) = (\bar{z} - z_i)(\bar{x} - x_i) \quad (2.33)$$

Одатле следи да су матрице коваријансе дијагонално симетричне матрице.

При сваком мерењу настају грешке. Оне могу бити грубе, системске и случајне. Грубе и системске настају или људском грешком или погрешним коришћењем мерне опреме. Оне се могу избећи или уклонити, што није случај са случајним грекама. Случајне грешке су део мерене неодређености, не могу се избећи и као такве се морају узети у обзир. Статистички гледано ако се узме распон од $\pm\sigma_x$ од средње вредности $2/3$ мерења ће упасти у тај распон, ако распон проширимо на $\pm\sigma_x^2$ он ће покривати скоро све измерене вредности.



Слика 2.7 Густина нормалне, Гаусове расподеле [5]

2.4. Нумерички пример

У наставку је приказан нумерички пример за кретање тела дуж x осе, где су мерене брзина и позиција тела (x координата)

Измерене су следеће вредности:

Табела 2.1 Измерене вредности – кретање тела дуж x осе

t	X_{mer}	V_{mer}
[s]	[m]	[m/s]
0	0,00	0,00
5	5,00	1,91
10	18,22	4,80
15	46,76	6,94
20	88,20	8,23

Узето је да тело има константно убрзање од $0,5 \text{ m/s}^2$ и узет је временски корак од 5s.

Почетно стање

Први корак је одређивање почетног стања и почетне грешке модела које се морају дати као улазни податаци за модел Калмановог филтера, тј. морају се дати матрице X_0 и P_0 .

Матрица X_0 је матрица почетног стања и у овом примеру она представља почетне вредности брзине и позиције тела:

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

Узимамо да су у почетном тренутку и брзина и позиција једнаке нули.

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Матрица P_0 је матрица коваријансе стања тј. грешке у процени и за две величине које меримо изгледа:

$$P_0 = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xv} \\ \sigma_{vx} & \sigma_v^2 \end{bmatrix}$$

У овом примеру радићемо једноставнијим поступком, да нема међусобне корелације између положаја и брзине (има је али ово је показни једноставнији пример) тако да матрица P има облик:

$$P_0 = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{bmatrix}$$

Усвајамо да је почетна непоузданост модела за положај 10m, $\sigma_x = 10\text{m}$, а за брзину 2m/s, $\sigma_v = 2\text{m/s}$. Тако да матрица P_0 има следећи облик:

$$P_0 = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Прва интерација

$$t = 5\text{s}$$

Након одређивања параметара почетног стања крећемо са првом интерацијом.

Почетно стање постаје претходни корак:

$$X_{k-1} = X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и

$$P_{k-1} = P_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Први корак је одређивање предикције X_p :

$$X_{1p} = AX_0 + BU_0 + \omega_0$$

$$X_{1p} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta T^2 \\ \Delta T \end{bmatrix} [a] + 0$$

Асимилација података у хидротехници применом Калмановог филтера

$$X_{1p} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 5^2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} [0,5]$$

$$X_{1p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6,25 \\ 2,5 \end{bmatrix}$$

$$X_{1p} = \begin{bmatrix} 6,25 \\ 2,5 \end{bmatrix}$$

Следеће је одређивање матрице коваријансе предикције P_p :

$$P_{1p} = A P_0 A^T + S$$

$$P_{1p} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Delta T & 1 \end{bmatrix} + 0$$

$$P_{1p} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{1p} = \begin{bmatrix} 100 & 20 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{1p} = \begin{bmatrix} 200 & 20 \\ 20 & 4 \end{bmatrix}$$

Узимамо да је ово једноставнији пример у коме нема коваријансе између мерених величина, позиције и брзине, тако да су елементи ван главне дијагонале једнаки 0 тј. матрица P_k има следећи облик:

$$P_{1p} = \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Наредни корак је одређивање Калмановог прираштаја:

$$K_1 = \frac{P_{1p} H^T}{H P_{1p} H^T + R}$$

Овде је матрица H матрица идентитета и има облик:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица R је матрица грешке при мерењу, и зависи од мерне неодређености уређаја којим меримо. У овом примеру узимамо да је мерна неодређеност уређаја за мерење позиције 8 m, а за мерење брзине 1,5 m/s. Тада матрица R има следећи облик:

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8^2 & 0 \\ 0 & 1.5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 2,25 \end{bmatrix}$$

Сада када познајемо све потребне матрице можемо израчунати и Калманов прираштај:

$$K_1 = \frac{\begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 2,25 \end{bmatrix}}$$

$$K_1 = \frac{\begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 2,25 \end{bmatrix}}$$

$$K_1 = \frac{\begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 264 & 0 \\ 0 & 6,25 \end{bmatrix}}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0,758 & 0 \\ 0 & 0,64 \end{bmatrix}$$

Даље узимамо измерене вредности:

$$Y_1 = C X_{1m} + Z$$

У овом примеру измерене вредности су усклађене са математичким моделом процеса тако да матрица идентитета C има улогу само да преслика вредност (једноставнији облик):

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Измерене вредности у првој интерацији, првом временском кораку $t=5s$, су:

- Измерена позиције је 5m
- Измерена брзина је 1,91m/s

Следи да матрица измерених вредности X_m има облик:

$$X_{1m} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1,91 \end{bmatrix}$$

па је:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1,91 \end{bmatrix} + 0$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1,91 \end{bmatrix}$$

Сада када имамо све потребне елементе рачунамо тренутно стање (излазни податак Калмановог филтера).

$$X_1 = X_{1p} + K_1[Y_1 - H X_{1p}]$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 6,25 \\ 2,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,758 & 0 \\ 0 & 0,64 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 1,91 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,25 \\ 2,5 \end{bmatrix} \right\}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 6,25 \\ 2,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,758 & 0 \\ 0 & 0,64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,25 \\ -0,59 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 6,25 \\ 2,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,948 \\ -0,378 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 5,303 \\ 2,122 \end{bmatrix}$$

После рачунања тренутног стања рачуна се матрица коваријансе процеса P_k :

$$P_1 = (I - KH)P_{1p}$$

где је I матрица идентитета:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,758 & 0 \\ 0 & 0,64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0,242 & 0 \\ 0 & 0,36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 48,48 & 0 \\ 0 & 1,44 \end{bmatrix}$$

Овиме завршавамо први временски корак $t = 5s$, и прелазимо на следећи $t = 10s$.

Друга интерација

$$t = 10s$$

$$X_{2p} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5,303 \\ 2,122 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 5^2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

$$X_{2p} = \begin{bmatrix} 15,913 \\ 2,122 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6,25 \\ 2,5 \end{bmatrix}$$

$$X_{2p} = \begin{bmatrix} 22,165 \\ 4,622 \end{bmatrix}$$

$$P_{2p} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48,48 & 0 \\ 0 & 1,44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{2p} = \begin{bmatrix} 84,48 & 7,20 \\ 7,20 & 1,44 \end{bmatrix}$$

И овде остављамо само елементе на главној дијагонали, тако да је:

$$P_{2p} = \begin{bmatrix} 84,48 & 0 \\ 0 & 1,44 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \frac{\begin{bmatrix} 84,48 & 0 \\ 0 & 1,44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 84,48 & 0 \\ 0 & 1,44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 2,25 \end{bmatrix}}$$

$$K_2 = \frac{\begin{bmatrix} 84,48 & 0 \\ 0 & 1,44 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 84,48 & 0 \\ 0 & 1,44 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 2,25 \end{bmatrix}}$$

$$K_2 = \frac{\begin{bmatrix} 84,48 & 0 \\ 0 & 1,44 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 148,48 & 0 \\ 0 & 3,69 \end{bmatrix}}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0,569 & 0 \\ 0 & 0,390 \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 18,22 \\ 4,80 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 22,165 \\ 4,622 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,569 & 0 \\ 0 & 0,390 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 18,22 \\ 4,80 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22,165 \\ 4,622 \end{bmatrix} \right\}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 22,165 \\ 4,622 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,569 & 0 \\ 0 & 0,390 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3,945 \\ 0,178 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 22,165 \\ 4,622 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2,245 \\ 0,069 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 19,920 \\ 4,692 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,569 & 0 \\ 0 & 0,390 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 84,48 & 0 \\ 0 & 1,44 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0,431 & 0 \\ 0 & 0,61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 84,48 & 0 \\ 0 & 1,44 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 36,414 & 0 \\ 0 & 0,878 \end{bmatrix}$$

Трећа интерација

$$t = 15s$$

Трећа и четврта интерација ће бити написане у скрећеном облику, тј. биће приказани само крајњи резултати.

$$X_{3p} = \begin{bmatrix} 49,629 \\ 7,192 \end{bmatrix}$$

$$P_{3p} = \begin{bmatrix} 58,366 & 0 \\ 0 & 0,878 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0,477 & 0 \\ 0 & 0,281 \end{bmatrix}$$

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 46,76 \\ 6,94 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 48,26 \\ 7,121 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 30,527 & 0 \\ 0 & 0,632 \end{bmatrix}$$

Четврта интерација

$$t = 20s$$

$$X_{4p} = \begin{bmatrix} 90,116 \\ 9,621 \end{bmatrix}$$

$$P_{4p} = \begin{bmatrix} 46,316 & 0 \\ 0 & 0,632 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 0,420 & 0 \\ 0 & 0,219 \end{bmatrix}$$

$$Y_4 = \begin{bmatrix} 88,20 \\ 8,23 \end{bmatrix}$$

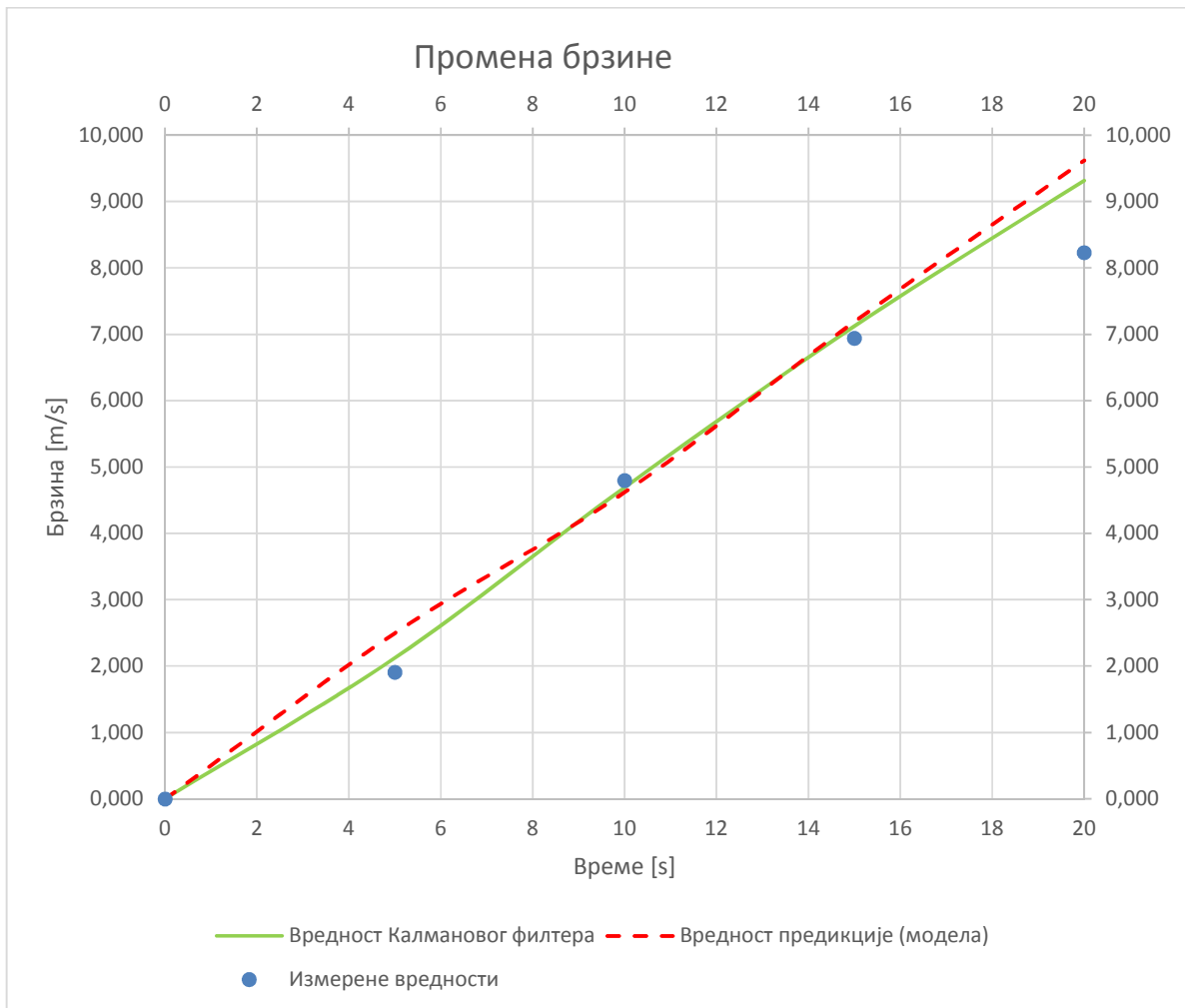
$$X_4 = \begin{bmatrix} 89,311 \\ 9,316 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 26,87 & 0 \\ 0 & 0,493 \end{bmatrix}$$

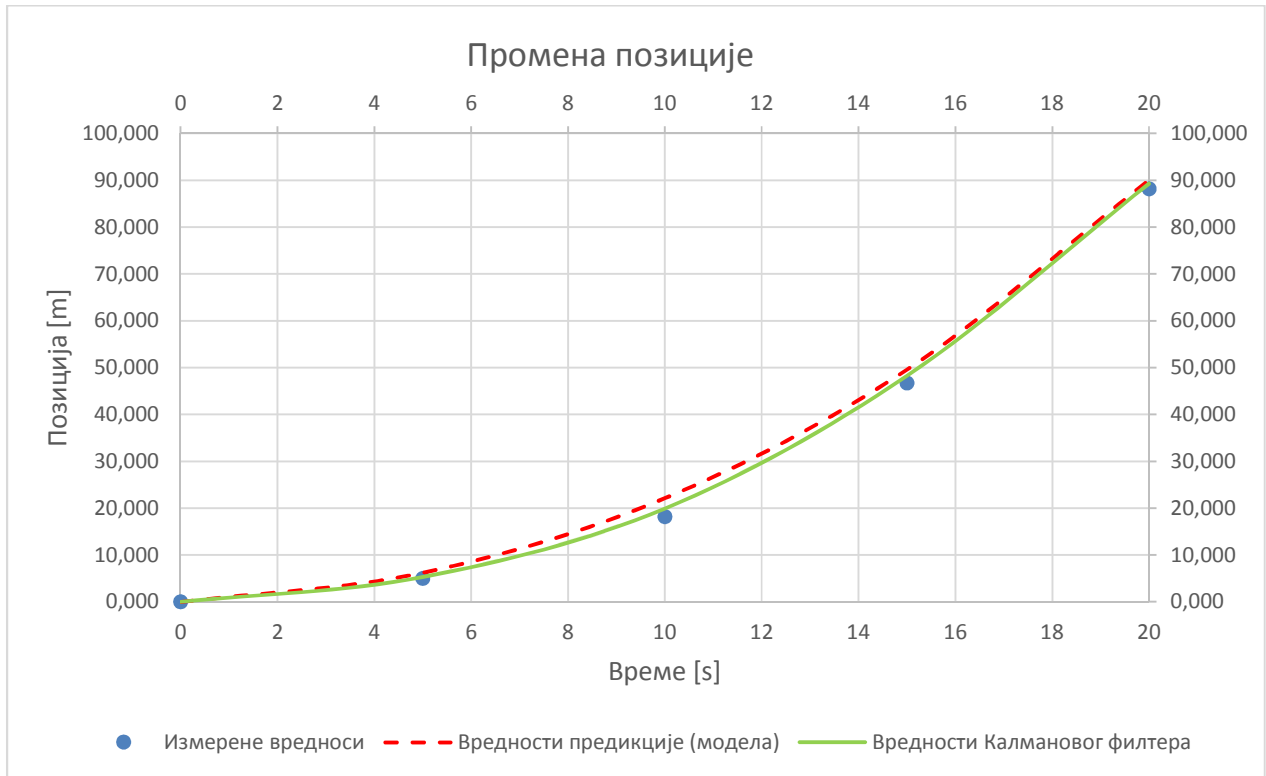
У наставку дат је табеларни и графички приказ резултата.

Табела 2.2 Резултати нумеричког примера кретања тела дуж x осе

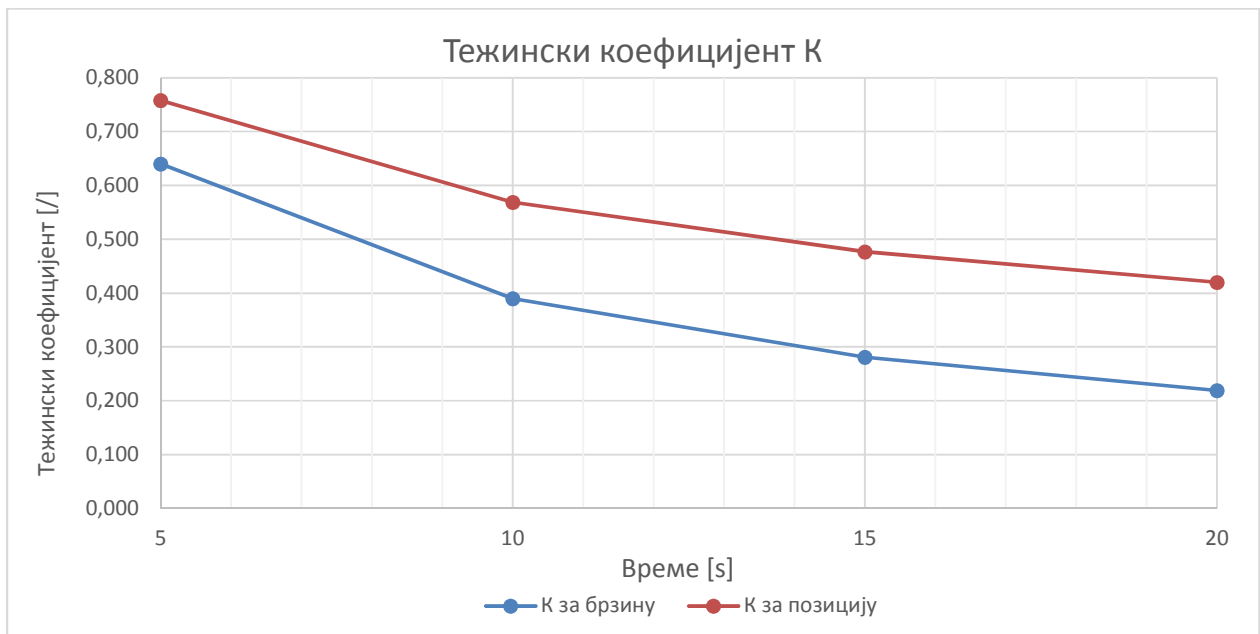
T	V_{mer}	X_{mer}	V_{pred}	X_{pred}	V_{kal}	X_{kal}	K_V	K_X
[s]	[m/s]	[m]	[m/s]	[m]	[m/s]	[m]	[/]	[/]
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	/	/
5	1,910	5,000	2,500	6,250	2,122	5,303	0,640	0,758
10	4,800	18,220	4,622	22,165	4,692	19,920	0,390	0,569
15	6,940	46,760	7,192	49,629	7,121	48,260	0,281	0,477
20	8,230	88,200	9,621	90,116	9,316	89,311	0,219	0,420



Слика 2.8 Промена брзине, упоредни приказ измерених вредности, предикције (модела) и вредности асимилираних применом Калмановог филтера - пример кретање тела дуж x осе



Слика 2.9 Промена позиције, упоредни приказ измерених вредности, предикције (модела) и вредности асимилираних применом Калмановог филтера - пример кретање тела дуж x осе



Слика 2.10 Промена Калмановог тежинског фактора за брзину и за позицију - пример кретање тела дуж x осе

Треба напоменути да у овом показном примеру матрица шума математичког модела S није узета у обзир тј. $S = 0$. Ово за последицу има ниске вредности тежинског фактора и његово даље смањивање. Последица малих вредности тежинског фактора доводи до тога да алгоритам Калмановог филтера више поверења даје самој предикцији (тј. математичком моделу), него измереним вредностима. Ово даље има за последицу да алгоритам Калмановог филтера не функционише оптимално. Више о самој матрици шума математичког модела и њеној улози у Калманово филтеру биће приказано кроз примере у наставку.

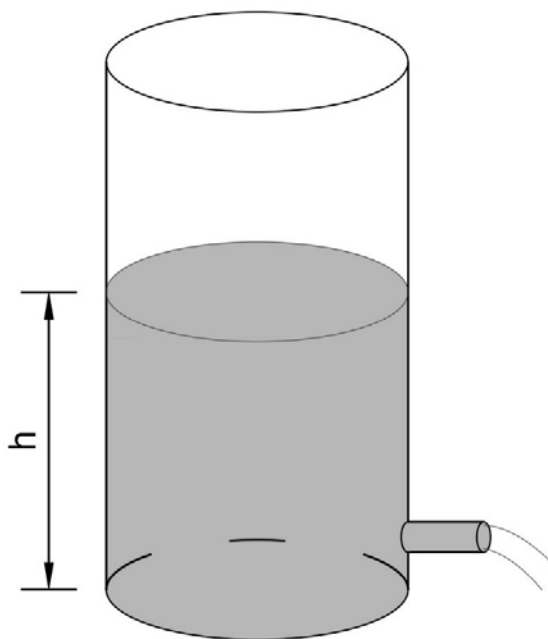
3. ПРИМЕНА КАЛМАНОВОГ ФИЛТЕРА У ХИДРОТЕХНИЦИ

Калманов филтер је лак за имплементацију и не захтева велике процесорске ресурсе како би радио. Због ове карактеристике погодан је за примену у различитим областима. Међутим и Калманов филтер има својих ограничења. Његово највеће ограничење је што систем мора бити линеаран како би се Калманов филтер применио. Калманов филтер претпоставља и да је случајно променљива која описује стање система распоређена по нормалној функцији расподеле. Такође Калманов филтер захтева и велики број мерења (континуална мерења) како би оптимално функционисао.

Због његових ограничења примена у хидротехници није широко заступљена, али било је покушаја и примера његовог коришћења у системима за водоснабдевање, регулацију рада пумпи као и примену у хидрологији.

3.1. Пример истицање воде из резервоара - нумерички пример

У оквиру овог рада детаљније ће се обрађивати проблем истицања воде из резервоара и примена Калмановог филтера на податке мерења.



Слика 3.1 Мерење висине воде при истицању воде из резервоара

Код истицања воде из резервоара можемо пратити и мерити проток на излазу и/или висину воде у самом резервоару. Проток је величина која има бржу промену и захтева скупљу и компликованију опрему за мерење, због тога је узето да се мери виси воде у самом резервоару. Ово је узето из чисто практичних разлога да би се показао пример који је реалан и изводљив у широј пракси.

Као математичка и теоријска основа овог примера узет је „Пример линеарног модела истицања из резервоара“ који је урађен у оквиру „Уклапање података мерења у хидролошке моделе – Теоријске

основе“ , Станић и Продановић Београд 2010 [1]. Овај модел је додатно испитиван на осетљивост појединих параметара и њихов утицај.

3.1.2. Општи модел истицања из резервоара

Општи модел истицања из резервоара се описује једначином:

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{C(t)A_0\sqrt{2gh}}{A(h)} \quad (3.1)$$

Где је:

h - висина вода у резервоару

C - коефицијент истицања које је функција времена, тј. пражњења резервоара

A_0 - величина отвора

$A(h)$ - површина водног огледала, која је функција дубине h

3.1.3. Математички модел предикције

На основу тога што меримо висину воде у резервоару h постављамо и математички модел истицања воде из резервоара, тј. модел промене висине воде у резервоару. Крећемо од основне једначине истицања воде из резервоара:

$$Q = C A_0 \sqrt{2 g (P_A - P_B)} \quad (3.2)$$

где су:

Q - проток

C - коефицијент истицања

A_0 - површина излазног отвора

P_A - пијезометарска кота у резервоару

P_B - пијезометарска кота на изласку из резервоара

Даље имамо:

$$P_A - P_B = h \quad (3.3)$$

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{dh A(h)}{dt} \quad (3.4)$$

$$\frac{dh A(h)}{dt} = C(t)A_0\sqrt{2gh} \quad (3.5)$$

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{C(t)A_0\sqrt{2gh}}{A(h)} \quad (3.6)$$

Када дискретизујемо једначину за временски корак Δt :

$$h_{k+1} = h_k - \frac{C_k A_0 \sqrt{2gh_k} \Delta t}{A(h)} \quad (3.7)$$

У основи овај модел је нелинеаран. Да би линеаризовали модел узимамо да површина воденог огледала има следећи облик (преузето из [1]):

$$A(h) = c \sqrt{h} \quad (3.8)$$

Где је c геометријска константа чије су јединице $m^{3/2}$. У овом примеру узето је да она износи $c = 2.5 m^{3/2}$.

Усвајањем (3.8) математички модел истицања из резервоара се своди на облик:

$$h_{k+1} = h_k - c^{-1} C(t) A_0 \sqrt{2g} \Delta t \quad (3.9)$$

У овом случају, ако погледамо предходно описану методологију Калмановог филтера, дубина воде у резервоару би одоговарала стању система X , који у овом случају није векторска него скаларна величина, U контролна матрица променљиве одговара вредности $c^{-1} C(t) A_0 \sqrt{2g} \Delta t$ која се мења током времена, док су матрице пресликавања A и B такође скаларне величине, чија је вредност једнака 1.

Промена коефицијента истицања кроз време је моделирана једначином (преузето из [1]):

$$C(t) = C_0 r^t \quad (3.10)$$

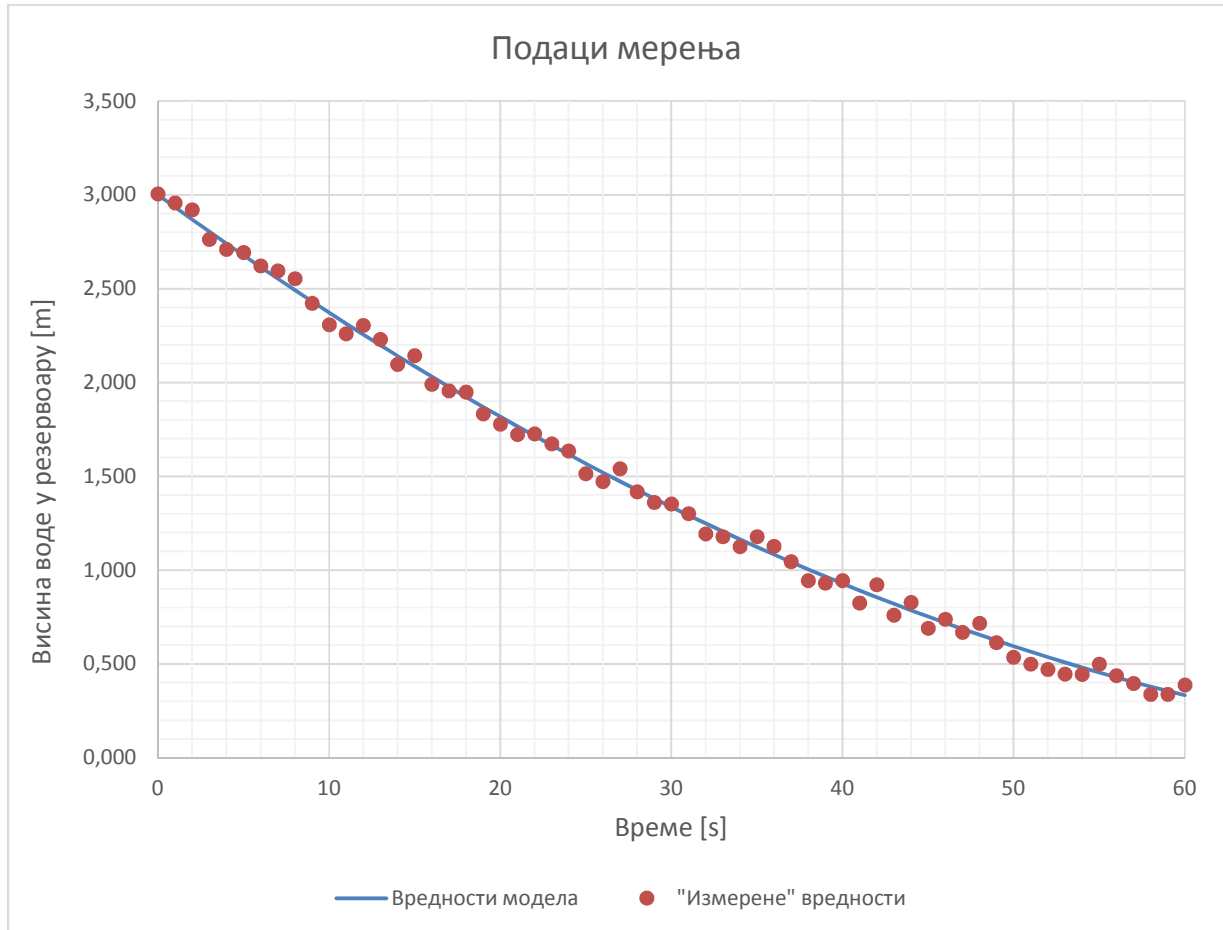
где је r константна смањена и $r = 0,995$ а t је време у секундама од почетног тренутка, а вредност $C_0 = 0,77$.

3.1.4. Измерени подаци

У оквиру овог примера мерења на физичком моделу нису рађена. До података мерења се дошло применом математичког модела. Узет је математички модел истицања из резервоара који има елипасту основу дименезија $R_1 = 1m$ и $R_2 = 0.85m$. Пречник отвора кроз који вода истиче је $195mm$. Временски корак модела је $1s$.

Податаке које смо добили моделом представљају идеално мерење које је немогуће, увек ће постајати нека мерна неодређеност без обзира на врсту мерног уређаја и поступак мерења. Због тога „измерене“ податке допуњавамо моделиране вредности шумом тј. додајемо неку случајну променљиву у распону мерне неодређености. У овом случају, да би што сликовитије показали примену Калмановог филтера узели смо да је мерна неодређеност ± 7 cm. Користећи „RAND“

функцију у Excel-у, која даје случајне вредности које прате нормалну расподелу на сваки моделирани податак смо додали неодређеност (шум), и добили следеће вредности.



Слика 3.2 Моделоване вредности и „измерени“ подаци истицања из резервоара

Овако добијене податке користимо у наставку као измерене вредности у свим комбинацијама.

3.1.5. Приказ урађених варијанти и њихових параметара

У оквиру овог примера примене Калмановог филтера урађено је више различитих варијанти. Кроз 11 варијанти испитивала се осетљивост и утицај следећих параметара Каламановог филтера:

- Утицај шума математичког модела S .
- Утицај неодређености мерења R .
- Осетљивост и утицај разлике, неусаглашености, временског корака математичког модела предикције Δt_{MOD} и мерења Δt_{MER} .

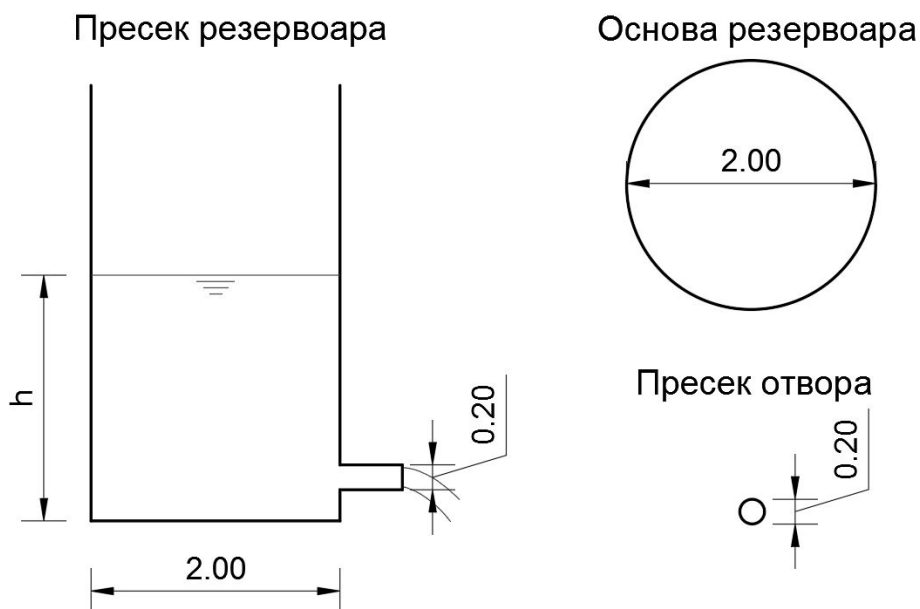
У свим варијантама коришћени су горе описани „измерени“ подаци као и математички модел предикције. Вредности параметара које су се мењале по варијантама су приказани у табели:

Табела 3.1 Комбинације параметара за варијанте у примеру истицања воде из резервоара

Параметар	R	S	$\pm s$	$\Delta T_{mer.}$	$\Delta T_{mod.}$
Варијанта	[m]	[m ²]	[m ²]	[s]	[s]
1	0,05	0	0	1	1
2	0,05	0,001	0,0005	1	1
3	0,05	0,01	0,001	1	1
4	0,05	0,1	0,01	1	1
5	0,005	0,01	0,001	1	1
6	0,01	0,01	0,001	1	1
7	0,1	0,01	0,001	1	1
8	0,02	0,002	0,0002	1	1
9	0,02	0,002	0,0002	2	1
10	0,02	0,002	0,0002	5	1
11	0,02	0,002	0,0002	10	1

3.1.6. Геометријске поставке математичког модела предикције

У овом примеру за све варијанте за математички модел предикције узимамо да је резервоар кружно попречног пресека пречника 2m ($D = 2m$), да је отвор кроз који вода истиче пречника 200mm ($D_{отв} = 200mm$) и да је почетни коефицијент истицања $C = 0.77$, и да је геометријска константа $c = 2.5 m^{3/2}$. За почетну вредност висине воде у резервоару узета је вредност од 3m ($h_0 = 3m$).

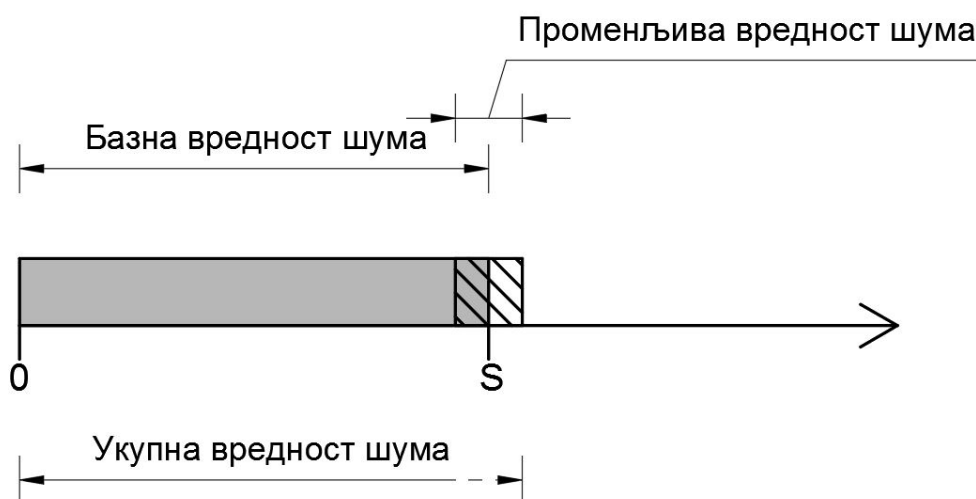


Слика 3.3 Геометријске карактеристике резервоара

3.1.7. Утицај шума модела

У оквиру прве четири варијанте разматра се утицај шума математичког модела предикције S . До шума модела долази због несавршености самог математичког модела, ниједан модел не може да апсолутно прецизно симулира неку физичку појаву, увек постоји део процеса који ће бити стохастичка компонента. Због тога је неопходно да и код најпрецизнијих математичких модела додамо шум модела. Без додавања шума имамо Калманов филтер који своју процењену вредност базира искључиво на математичком моделу предикције, а мерене вредности занемарује тј. $K \rightarrow 0$.

Шум математичког модела предикције S треба да „урачуна“ променљиву, тј. стохастичку природу процеса и због тога вредност шума не сме бити констатна вредност, мора садржати и компоненту која ће се мењати у току времена, које је овде обележено са s . У оквиру овог примера у свим варијантама, на базну вредност шума S додата је променљива вредност s . Променљива вредност шума је добијена коришћењем RAND функције у EXCEL-у.



Слика 3.4 Базна и променљива вредност шума математичког модела предикције

У наставку су приказане базне вредности шума модела предикције као и распон променљиве вредности.

Табела 3.2 Вредности шума математичког модела предикције за варијанте 1, 2, 3 и 4

Параметар	S	$\pm s$
Варијанта	[m ²]	[m ²]
1	0	0
2	0,001	0,0005
3	0,01	0,001
4	0,1	0,01

У првој варијанти узето је да нема шума, у свакој следећој варијанти базна и укупна вредности шума се повећа. Вредност променљиве вредности шума је реда величине мања од базне вредности.

3.1.8. Утицај неодређености мерења

Примери 5, 6 и 7 разматрају утицај неодређености мерења R , тј. утицај неодређености уређаја којим меримо. Као и шум математичког модела предикције S , неодређеност мерења ће увек постојати. Употребом прецизнијих и квалитетнијих мерних уређаја неодређеност мерења се може значајно смањити.

Да би се сликовито приказао утица неодређености мерења R узете су вредности које се међусобно доста разликују (различитих редова величина). Усвојене вредности R у различитим варијантама су приказане у табели:

Табела 3.3 Вредности неодређености мерења за варијанте 5, 6 и 7

Параметар	R
Варијанта	[m]
5	0,005
6	0,01
7	0,1

Треба напоменути да се реална неодређеност мерења усваја на основу спецификација самог мерног уређаја, тј. саму неодређеност произвођач уређаја би морао да наведе у спецификацији уређаја.

3.1.9. Утицај неусаглашености временског корака математичког модела предикције и мерења

Задње четири варијанте (8, 9, 10 и 11) разматрају утицај неусаглашености, тј. разлике између временског корака математичког модела предикције и мерења.

У све четири варијанте усвојени су следећи параметри $R = 0.02$, $S = 0.002$ и $\pm s = 0.0002$.

Времени кораци математичког модела предикције и мерења по варијантама приказани су у следећој табели:

Табела 3.4 Времени кораци математичког модела предикције и мерења за варијанте 8, 9, 10 и 11

Параметар	$\Delta T_{mer.}$	$\Delta T_{mod.}$
Варијанта	[s]	[s]
8	1	1
9	2	1
10	5	1
11	10	1

Треба рећи да у овом примеру, за временски тренутак када нема измереног податка Калманов филтер даје вредност искључиво на основу математичког модела предикције.

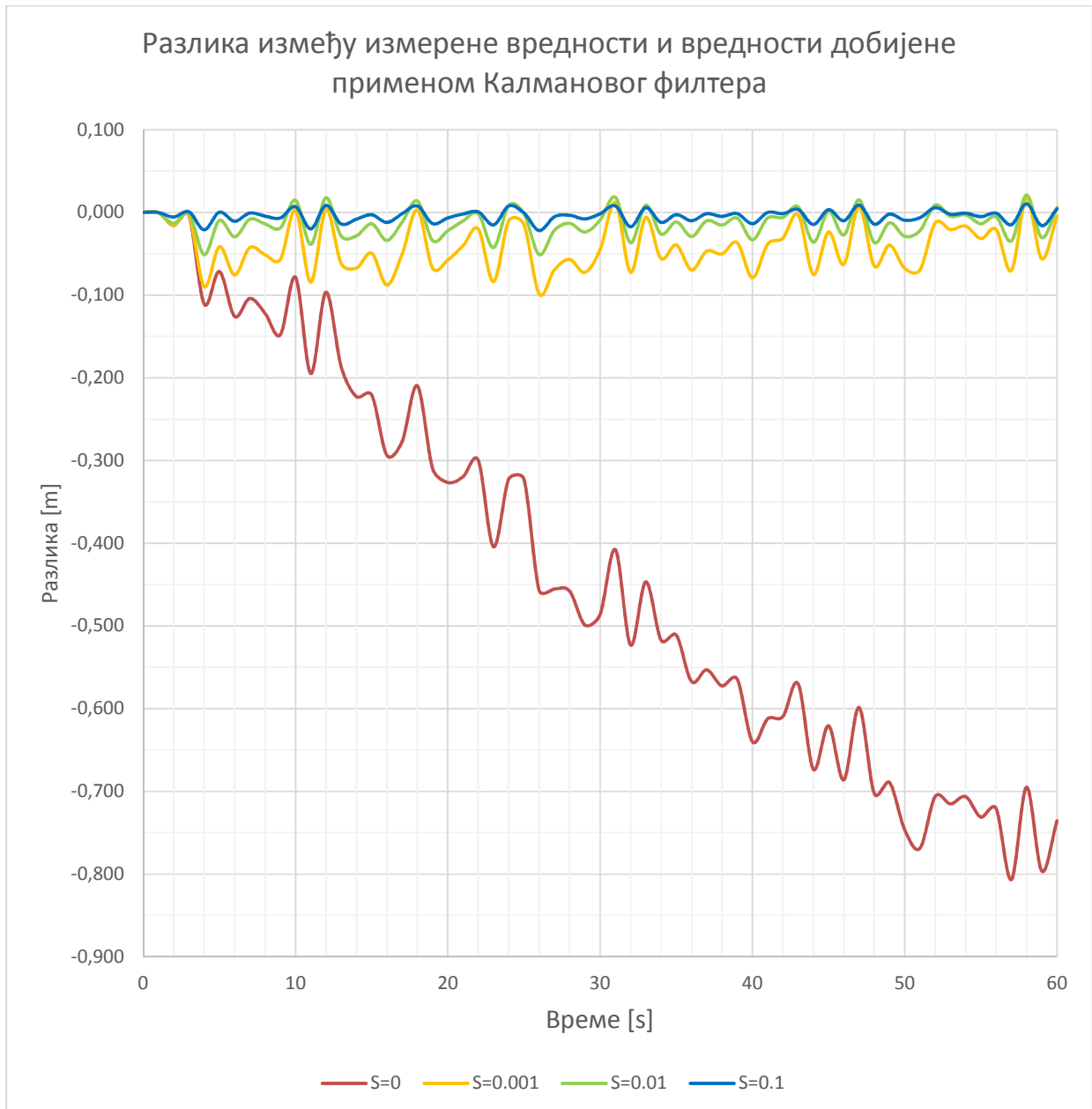
3.2. Резултати

У оквиру овог поглавља приказани су резултати за свих 11 варијанти. Као и у предходном поглављу резултати су подељени по параметрима које дате варијанте обрађују. За сваки од параметара на једном графику су дати резултати свих разматраних варијанти. Овде су дати графици промене тежинског коефицијента K , као и промене разлике између измерених вредности и вредности Калмановог филтера. Детаљни резултати за сваку од варијанти дати су у нумеричком прилогу.

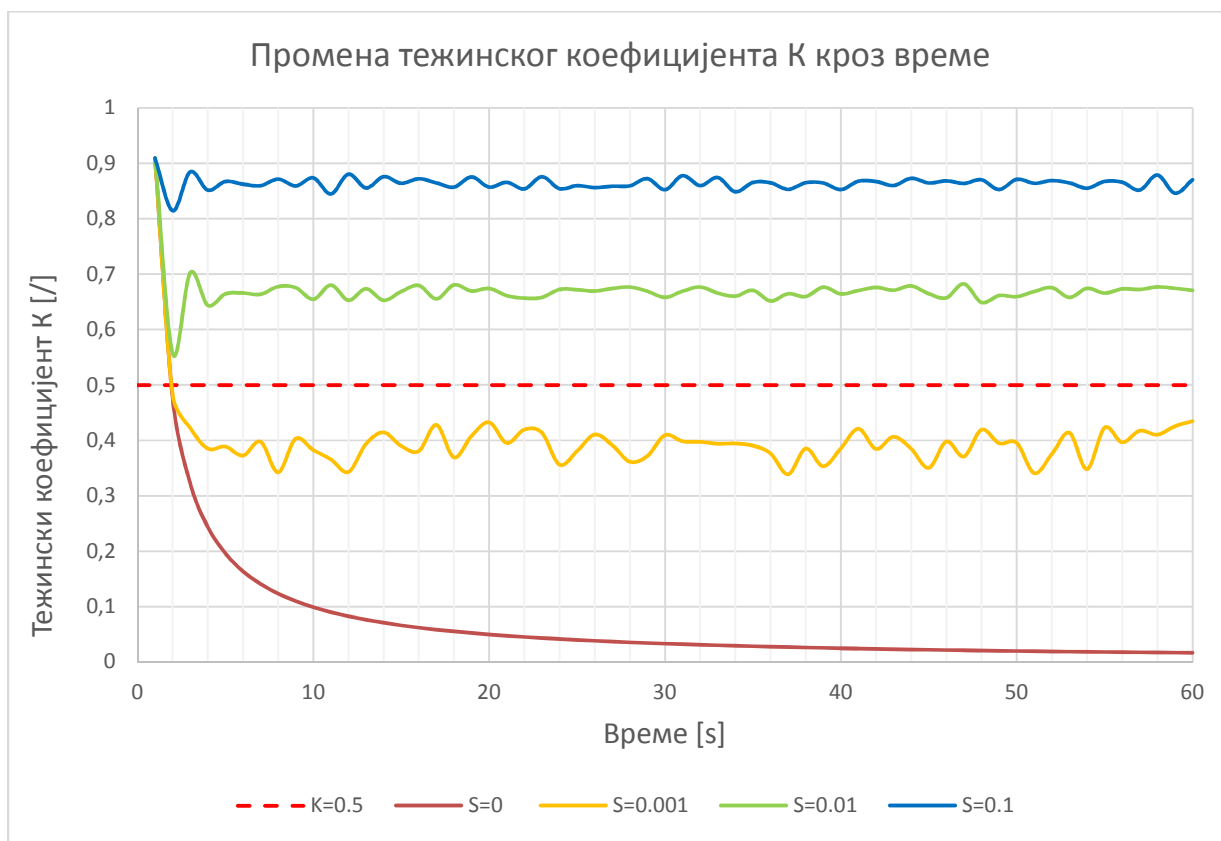
Поред графика за поређење резултата коришћен је и RMSE (Root Mean Square Error) тј. корен средње квадратне грешке помоћу кога су се обрађене измерене вредности и вредности добијене асимилацијом уз примену Калмановог филтера.

3.2.1. Шум модела

Резултати за прве четири варијанте, тј. за утицај шума математичког модела предикције.



Слика 3.5 Разлика између измерене вредности и вредности добијене асимилацијом уз помоћ Калмановог филтера за варијанте 1, 2, 3 и 4



Слика 3.6 Промена тежинског фактора кроз време за варијанте 1, 2, 3 и 4

Са ова два графика се може закључити да шум математичког модела предикције мора постојати јер у противном тежински коефицијент $K \rightarrow 0$. Такође се може уочити да што је шум већи поверење у математички модел предикције је мање. Са већим шумом и K ће бити веће ($S \uparrow \rightarrow K \uparrow$) и самим тим Калманов филтер ће имати више поверења у измерене вредности. Ово се такође може видети и из првог графика где су разлике између измерених вредности и вредности Каламановог филтера мање што се шум више повећава. Вредности корена средње квадратне грешке су приказани у табели испод.

Табела 3.5 Вредности корена средње квадратне грешке за варијанте промене шума математичког модела предикције

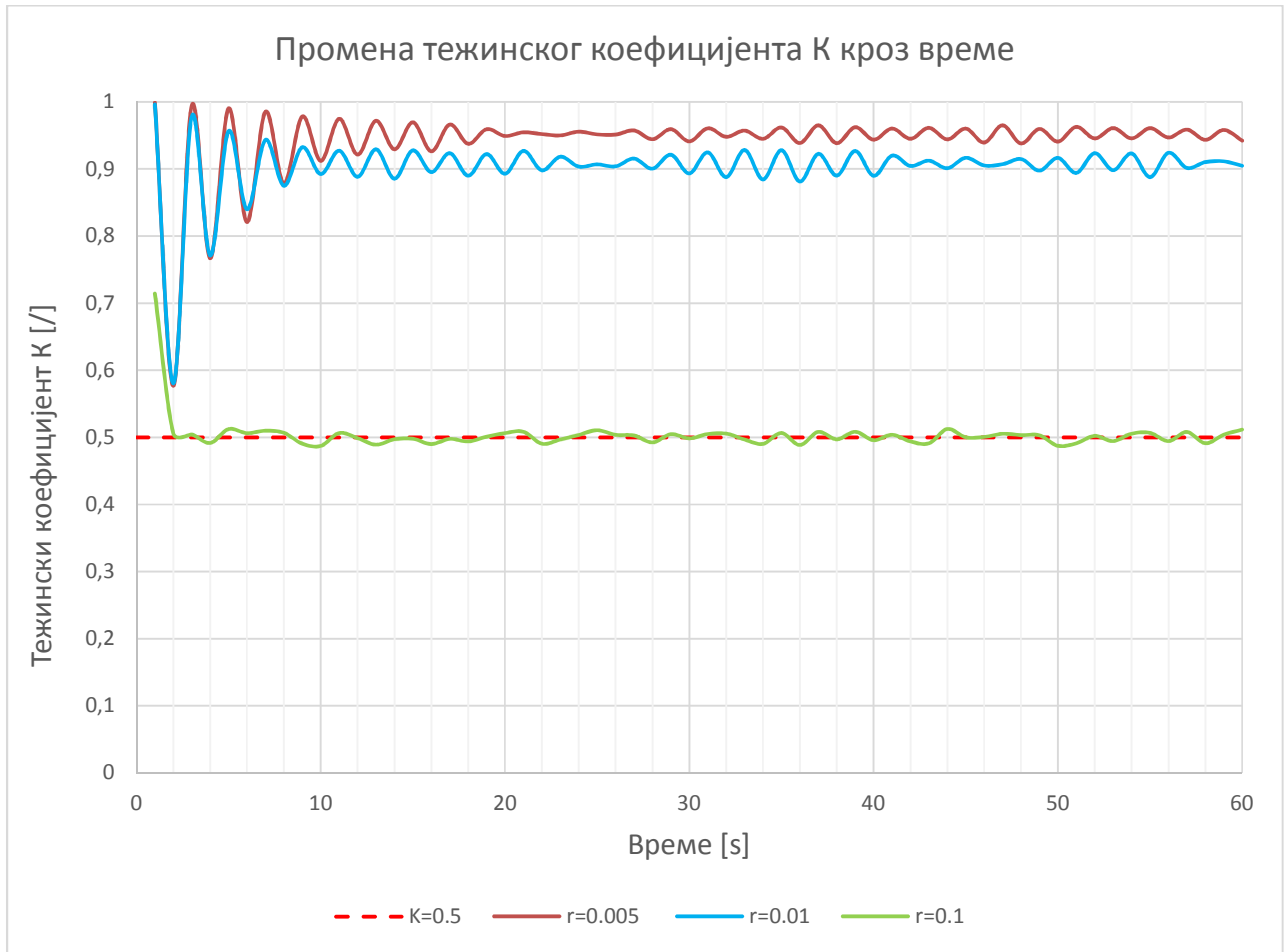
Параметар	S	$\pm s$	$RMSE$
Варијанта	[m ²]	[m ²]	[/]
1	0	0	3,8643
2	0,001	0,0005	0,4207
3	0,01	0,001	0,1749
4	0,1	0,01	0,0706

3.2.2. Неодређености мерења

Овде су приказани резултати варијанте које су испитивале утицај неодређености мерења.



Слика 3.7 Разлика између измерене вредности и вредности добијене асимилацијом уз помоћ Калмановог филтера за варијанте 5, 6 и 7



Слика 3.8 Промена тежинског фактора кроз време за варијанте 5, 6 и 7

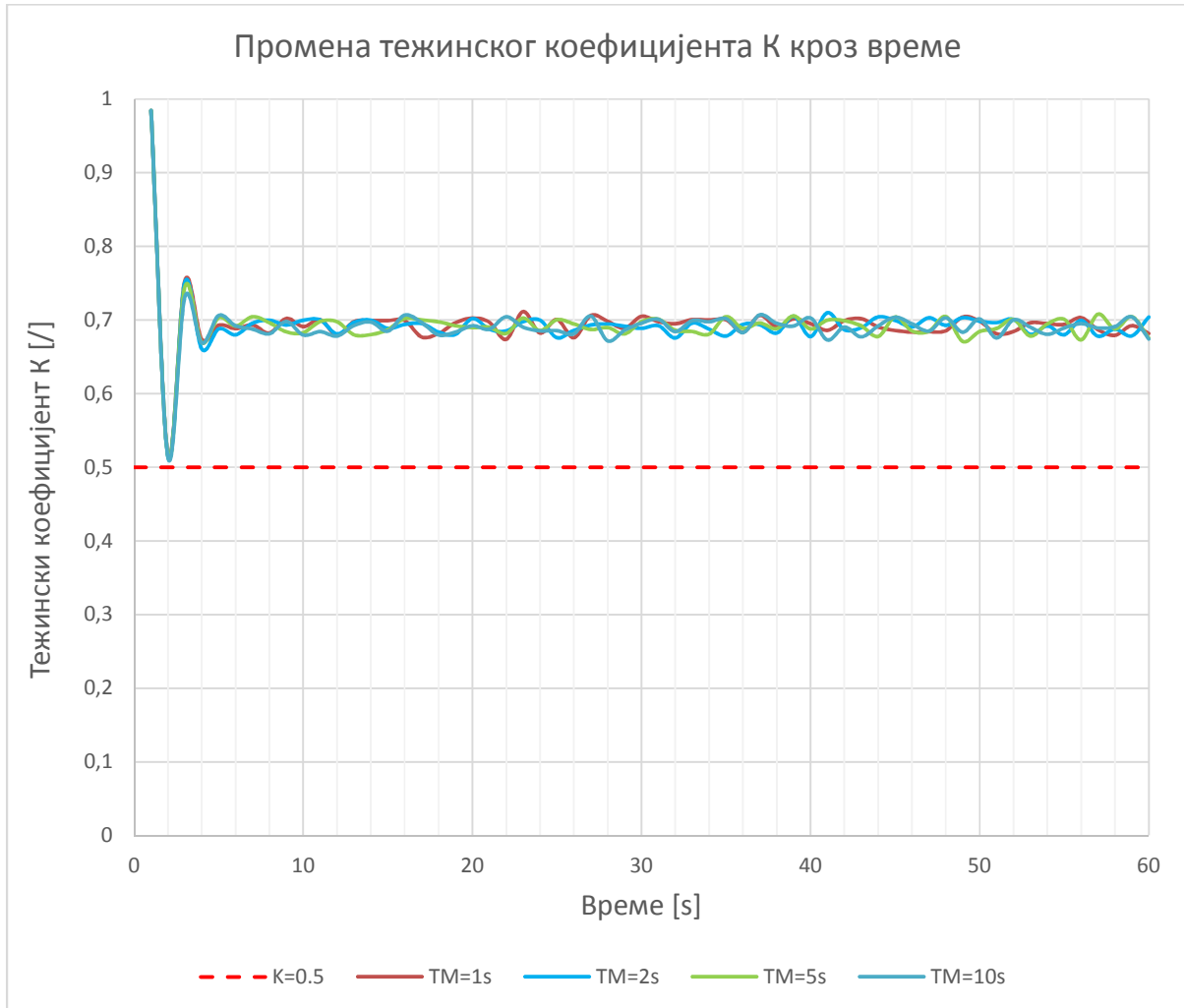
Посматрајући оба графика види се да повећавањем мерне неодређености расте и разлика између измерених вредности и вредности добијених применом Калмановог филтера. Такође повећавањем мерене неодређености опада и поверење Каламановог филтера у измерене вредности, тј. вредности тежинског коефицијента K се смањују. Вредности корена средње квадратне грешке су приказани у наставку.

Табела 3.6 Вредности корена средње квадратне грешке за варијанте промене мерне неодређености

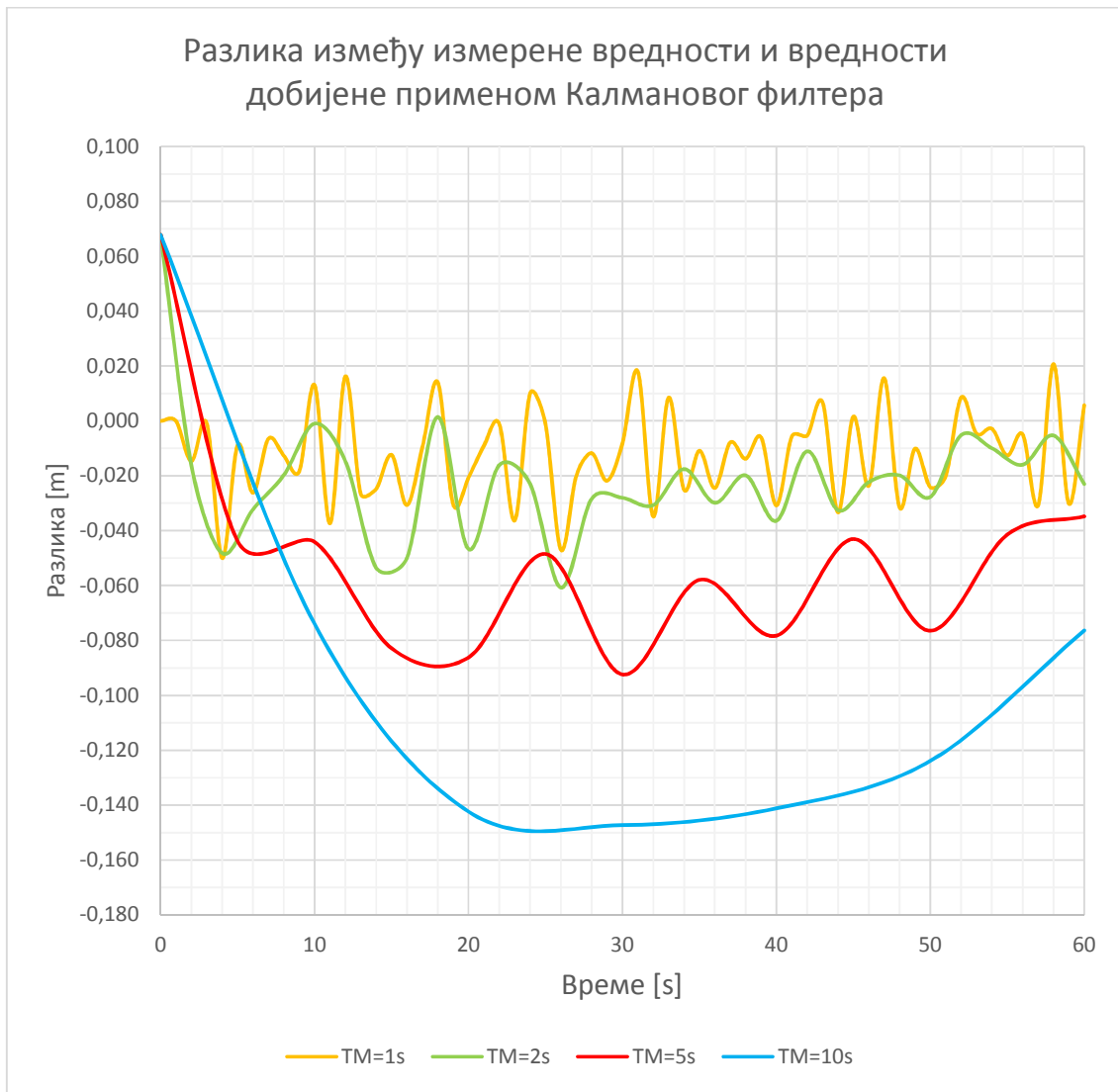
Параметар	R	$RMSE$
Варијанта	[m]	[/]
5	0,005	0,0449
6	0,01	0,0602
7	0,1	0,2887

3.2.3. Неусаглашеност временског корака математичког модела предикције и временског корака мерења

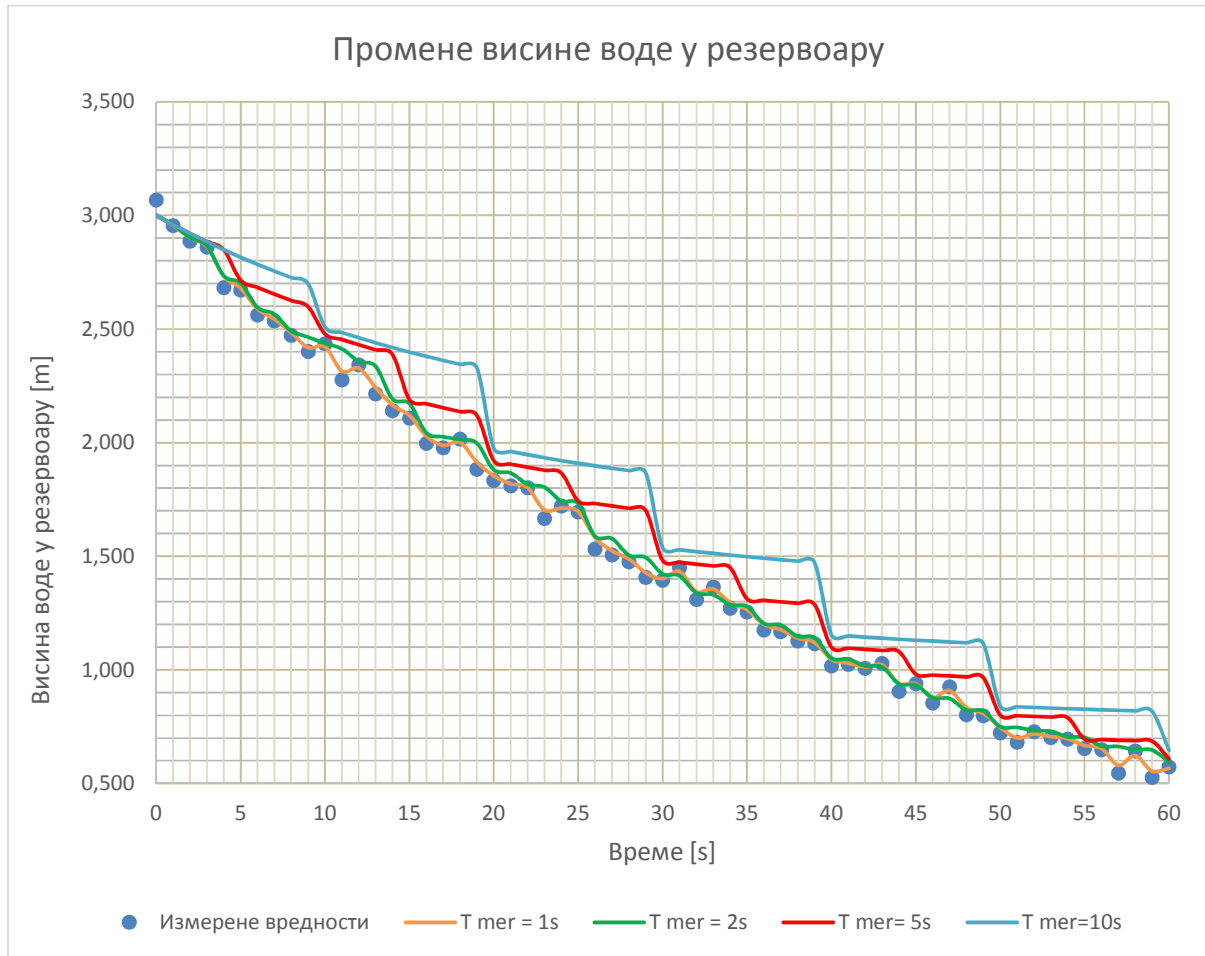
За варијанте које су обрађивале неусаглашеност између временског корака математичког модела предикције и временског корака мерења, поред графика разлике између измерене вредности и вредности добијених асимилацијом, графика промене тежинског фактора K , дат је и график промене нивоа у резервоару за све варијанте.



Слика 3.9 Промена тежинског фактора кроз време за варијанте 8, 9, 10 и 11



Слика 3.10 Разлика између измерене вредности и вредности добијене асимилацијом уз помоћ Калмановог филтера за варијанте 8, 9, 10 и 11



Слика 3.11 Промена висине воде у резервоару добијена асимилацијом уз помоћ Калмановог филтера за варијанте 8, 9, 10 и 11

Може се уочити да што је већа временска разлика између временског корака математичког модела предикције и мерења то ће и разлика између добијених података и мерења бити већа. Сам тежински фактор K се не мења значајније и за све варијанте износи приближно $K = 0,7$. Вредности корена средње квадратне грешке су дате у табели 3.7.

Табела 3.7 Вредности корена средње квадратне грешке за варијанте различитих временских корака математичког модела предикције и мерења

Параметар	$\Delta T_{mer.}$	$\Delta T_{mod.}$	$RMSE$
Варијанта	[s]	[s]	[/]
8	1	1	0,1613
9	2	1	0,1734
10	5	1	0,2318
11	10	1	0,3052

3.3. Пример истицање воде из резервоара – лабораторијска мерења

У овом примеру покушано је да се што верније прикаже како би у пракси изгледала употреба Калмановог филтера.

Коришћени су лабораторијски подаци снимљени за потребе израде рада „Утицај режима течења у цеви на губитак енергије на трење“ Петрић Филипа [6].

Инсталација коришћена за мерење је приказана на слици испод.



Слика 3.12 Приказ лабораторијске инсталације [6]

У наставку је опис експеримента из горе поменутог рада. У експерименту је коришћен резервоар који се налази на чврстој подлози, напуњен водом. Вода отиче кроз уски отвор на кога је накачено црево, чија висина може да се мења. Због промене висине црева, мењала се и висина између отвора и нивоа воде у резервоару. При томе је мерена висина и промена нивоа воде и растојање црева од подлоге. За сваку висину је мерена запремина која истече за произвољно време. Према томе, подаци који су мерени су: запремина која истече, време и висина између отвора и нивоа воде. На основу ових података се израчунавају: проток, брзина, кинематски коефицијент вискозности, Рејнолдсов број и коефицијент трења.

Како овде покушавамо да што верније прикажемо примену Калмановог филтер у стварним условима, желимо да имамо податак о нивоу у резервоару сваке секунде. Овде је проблем мали број мерења, где за период од 1200s имамо 30 мерења. Тако да практично овде имамо математички модел предикције, кога коригујемо са измереним подацима.

Измерени подаци који су се овде користили као и детаљни опис математичког модела предикције су дати у наставку.

3.3.1. Измерени подаци

Из [6], преузети су следећи подаци:

Табела 3.8 Измерени лабораторијски подаци

Мерење	Δt	T	Z ₁	Z ₂
[/]	[s]	[s]	[cm]	[cm]
0	0	0,00	77,42	69,10
1	32	32,00	77,18	59,10
2	27	59,00	77,01	49,10
3	37	96,00	76,99	59,10
4	39	135,00	76,71	49,10
5	52	187,00	76,70	69,10
6	42	229,00	76,58	39,10
7	34	263,00	76,30	49,10
8	38	301,00	76,29	59,10
9	37	338,00	76,05	39,10
10	37	375,00	75,79	29,10
11	47	422,00	75,49	19,10
12	47	469,00	75,08	9,10
13	46	515,00	74,79	19,10
14	46	561,00	74,51	29,10
15	44	605,00	74,38	39,10
16	40	645,00	74,11	49,10
17	41	686,00	74,06	59,10
18	39	725,00	73,78	49,10
19	41	766,00	73,69	49,10
20	54	820,00	73,48	39,10
21	35	855,00	73,29	29,10
22	42	897,00	73,08	19,10
23	40	937,00	72,80	9,10
24	39	976,00	72,58	19,10
25	37	1013,00	72,32	29,10
26	51	1064,00	72,09	39,10
27	46	1110,00	71,89	49,10
28	38	1148,00	71,50	27,00
29	42	1190,00	71,40	41,00

Време (T) није експлицитно дато у самом раду али до њега се долази сабирањем појединачних временских корака (ΔT).

Такође узето је да се између два временска корака висина црева (Z_2) није мењала тј. да је између два мерења $Z_2 = const.$

3.3.2. Математички модела предикције

У цеви којом вода истиче из резервоара се остварује ламинарно течење тако да је могуће извести линеаран модел истицања из резервоара. Применом оваквог модела користи се стварна геометрија резервоара. Поступак извођења овог модела је приказан у наставку:

Крећемо од једначине континуитета за резервоар:

$$\frac{dZ_1}{dt} = - \frac{dQ}{dA_R(t)} \quad (3.11)$$

Када дискретизујемо једначину за временски корак Δt добија се:

$$Z_1^{n+1} = Z_1^n - \Delta t \frac{Q}{A_R} \quad (3.12)$$

Енергетска једначина за цев:

$$Z_1 = Z_2 + \Delta E_{lin} \quad (3.13)$$

$$Z_1 = Z_2 + \lambda \frac{L}{D_c} \frac{Q^2}{2g A_c^2} \quad (3.14)$$

$$Z_1 = Z_2 + \lambda \frac{L}{D_c} \frac{Q^2}{2g \frac{D_c^4 \pi^2}{16}} \quad (3.15)$$

$$Z_1 = Z_2 + \frac{8 \lambda L}{g \pi^2 D_c^5} Q^2 \quad (3.16)$$

Претпоставља се ламинаран режим у цеви:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (3.17)$$

$$Re = \frac{\rho V D_c}{\mu} = \frac{V D_c}{\nu} = \frac{\frac{Q}{D_c^2 \pi} D_c}{\nu} = \frac{4Q}{D_c \pi \nu} = \frac{4Q}{\nu D_c \pi} \quad (3.18)$$

$$\lambda = \frac{64 \nu D_c \pi}{4Q} = \frac{16 \nu D_c \pi}{Q} \quad (3.19)$$

Па следи из једначина 3.16 и 3.19:

$$Z_1 = Z_2 + \frac{8 \frac{16 v D_c \pi L}{Q}}{g \pi^2 D_c^5} Q^2 \quad (3.20)$$

$$Z_1 = Z_2 + \frac{128 v L Q}{g \pi D_c^4} Q^2 \quad (3.21)$$

$$Q = \frac{g \pi D_c^4}{128 v L} (Z_1 - Z_2) \quad (3.22)$$

$$Z_1^{n+1} = Z_1^n - \frac{\Delta t}{A_R} \frac{g \pi D_c^4}{128 v L} (Z_1 - Z_2) \quad (3.23)$$

$$Z_1^{n+1} = Z_1^n \left(1 - \frac{\Delta t}{A_R} \frac{g \pi D_c^4}{128 v L} \right) + \frac{\Delta t}{A_R} \frac{g \pi D_c^4}{128 v L} Z_2 \quad (3.24)$$

$$Z_1^{n+1} = A Z_1^n + U \quad (3.25)$$

$$A = \left(1 - \frac{\Delta t}{A_R} \frac{g \pi D_c^4}{128 v L} \right) \quad (3.26)$$

$$U = \frac{\Delta t}{A_R} \frac{g \pi D_c^4}{128 v L} Z_2 \quad (3.27)$$

Једначина (3.25) је основна једначина математичког модела предикције.

3.3.3. Поставка модела

У овом примеру геометријски подаци:

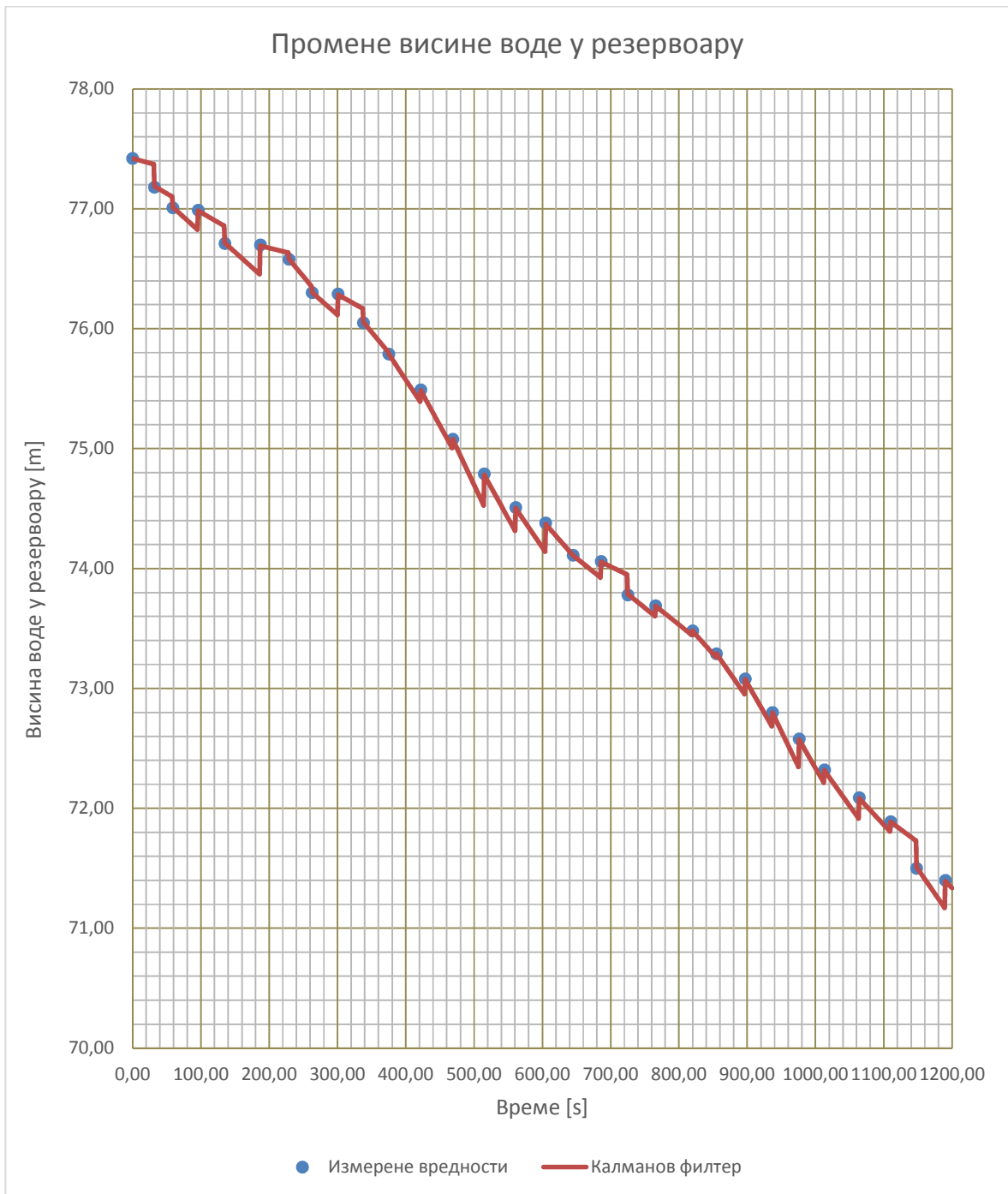
- Величина отвора $D_c = 2,75 \text{ mm}$
- Дужина цеви $L = 57,5 \text{ cm}$
- Површина резервоара $A_R = 1288 \text{ cm}^2$

За којефицијент вискозности воде узето је $\nu = 1 * 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

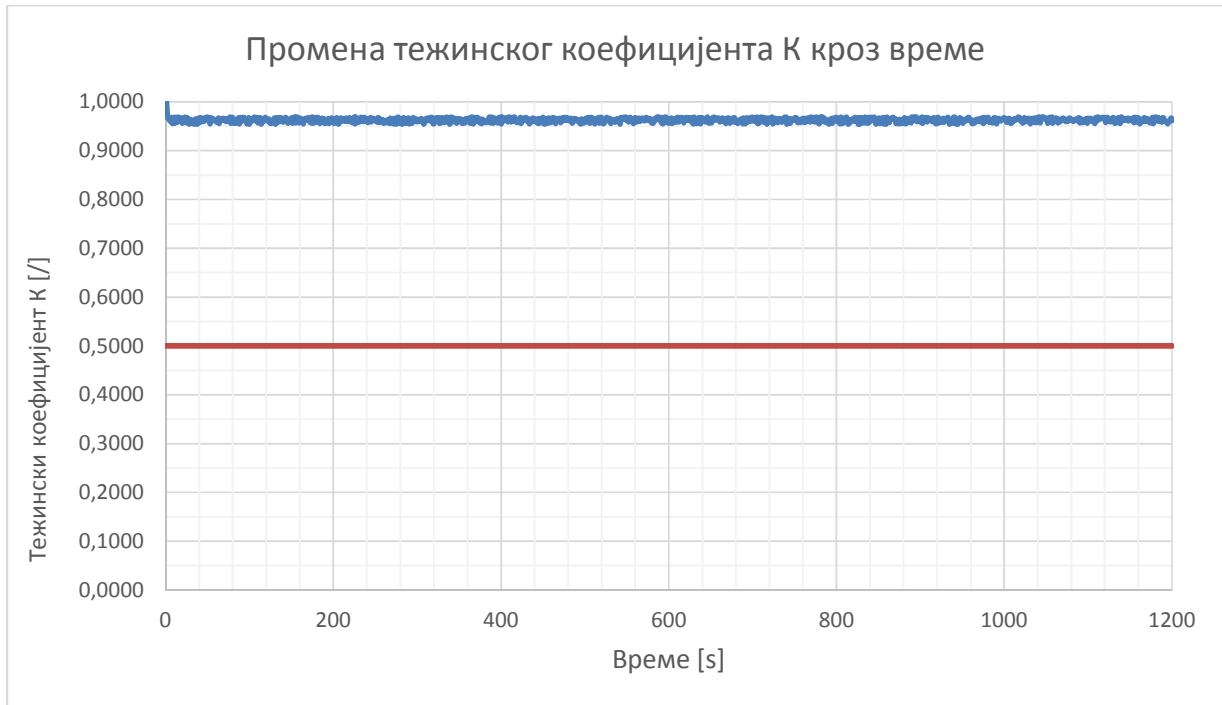
Временски корак модела је $\Delta t = 1 \text{ s}$.

3.4. Резултати

У оквиру Калмановог филтера узето је да је мерна неодређеност R јако мала, јер се ниво воде мерио уз помоћ мерене игле, на основу тога је усвојено $R = 0,002 \text{ m}^2$. Због јако мале мерне неодређености усвојен је и мали шум математичког модела предикције $S = 0,0001 \text{ m}^2$. Мали шум математичког модела предикције је усвојен тако да тежински фактор K не би тежио 1, што би за резултат имало занемаривање података математичког модела предикције.

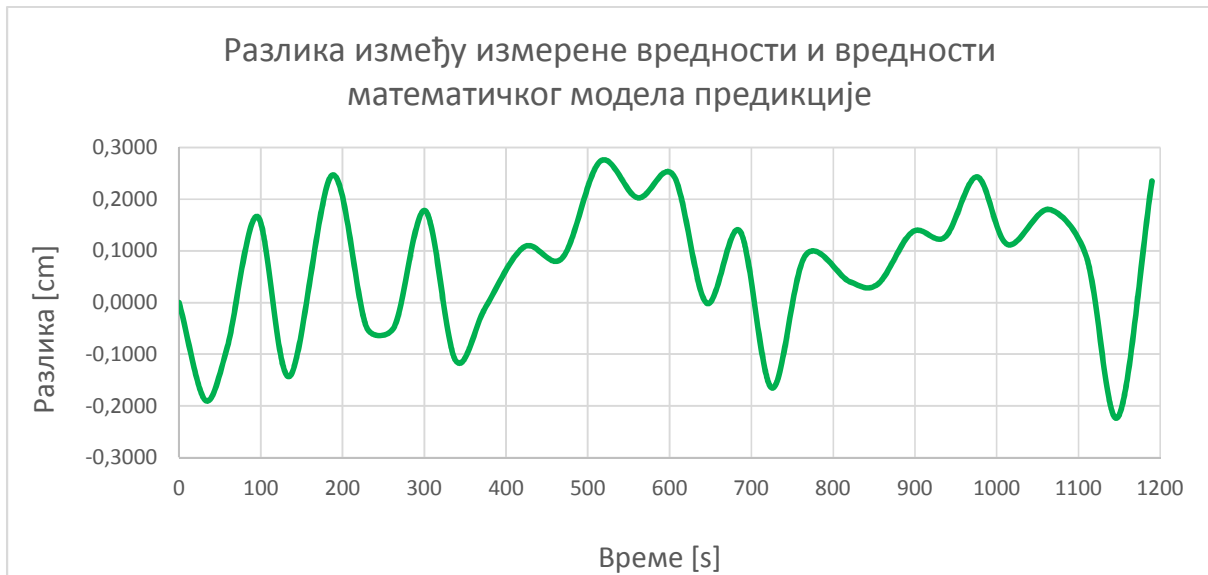


Слика 3.13 Промена нивоа воде у резервоару добијена асимилацијом уз помоћ Калмановог филтера – лабораторисјки пример



Слика 3.14 Промена тежинског коефицијента – лабораторисјки пример

Овде је занимљиво погледати и разлику између математичког модела предикције и измерених вредности (у тренуцима када имамо мерења):



Слика 3.15 Разлика између измерених вредности и вредности математичког модела предикције – лабораторисјки пример

Средња квадратна грешка између математичког модела и измерених података (RMSE) је 0,84.

4. НАПРЕДНЕ МЕТОДЕ КОЈЕ СЕ ЗАСНИВАЈУ НА КАЛМАНОВОМ ФИЛТЕРУ

Као што је већ неколико пута поменуто Калманов филтер ради само са линеарним системима, и дефинисан је преко једначина:

$$X_k = AX_{k-1} + BU_k + \omega_k \quad (4.1)$$

$$Y_k = C X_m + v_k \quad (4.2)$$

Међутим ако је систем нелинеаран онда ове једначине у општем случају постају:

$$X_k = f(X_{k-1}, U_k) + \omega_k \quad (4.3)$$

$$Y_k = g(X_m) + v_k \quad (4.4)$$

Калманов филтер претпоставља Гаусову, нормалну расподелу пре и после линеарне трансформације.



Слика 4.1 Расподела вероватноће пре и после линеарне трансформације [2]



Слика 4.2 Расподела вероватноће пре и после нелинеарне трансформације [2]

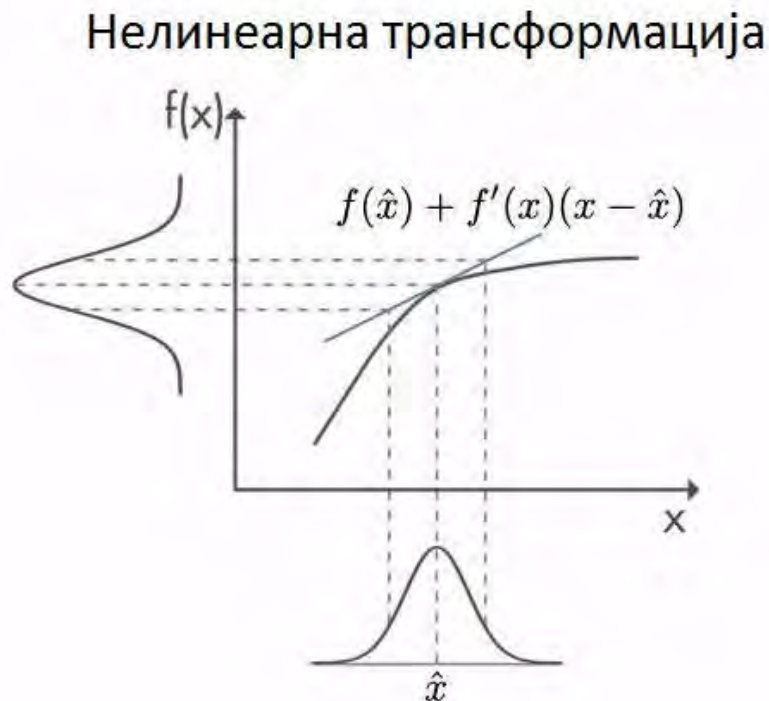
Код нелинеарних системе то није случај, и за њих Каламанов филтер неће конвергирати и због тога се не може користити. Овај проблем условио је и развијање напреднијих метода асимилације података које се заснивају на принципу Калмановог филтера, али могу да раде и са нелинеарним системима. Постоји више таквих метода овде ће бити наведе само неке од њих:

- Проширени Калманов филтер (Extended Kalman Filter)
- Безмирисни Калманов филтер (Unscented Kalman Filter)
- Филтер честица (Particle Filter)

Свака од ових метода ће бити укратко описана у наставку.

4.1. Проширени Калманов филтер (Extended Kalman Filter)

Проширени Калманов филтер се заснива на линеаризацији нелинеарне функције око средње вредности тренутног стања.



Слика 4.3 Линеаризација нелинеарне функције, помоћу проширеног Калмановог филтера [2]

У сваком временском кораку ради се локална линеаризација и тако добијене Јакобијске матрице (Jacobian matrix), се користе у предикцији и у израчунавању нових вредности.

Систем:

$$X_k = f(X_{k-1}, U_k) + \omega_k \quad (4.5)$$

$$Y_k = g(X_m) + v_k \quad (4.6)$$

Јакобијске матрице:

$$F = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k-1}, u_k} \quad (4.7)$$

$$G = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\hat{x}_k} \quad (4.8)$$

Линеаризација система:

$$\Delta X_k \approx F \Delta X_{k-1} + \omega_k \quad (4.9)$$

$$\Delta Y_k \approx G \Delta X_m + v_k \quad (4.10)$$

Када се може добро апроксимирати линеаризацијом, проширени Каламанов филтер је добра опција за процену тренутног стања. Међутим и проширени Калманов филтер има своје недостатке:

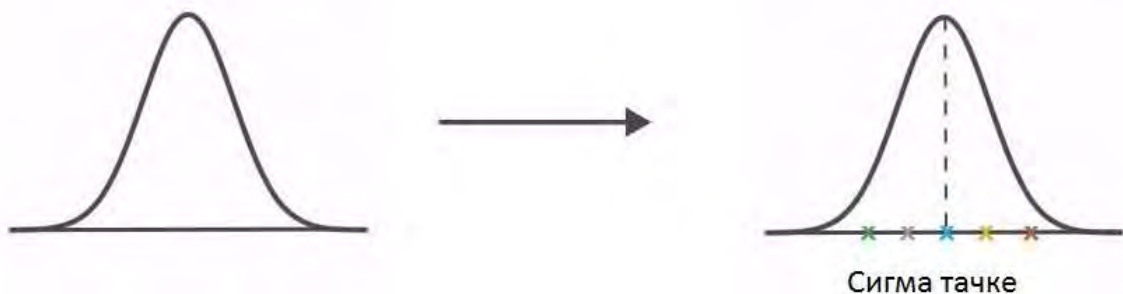
- Тешко рачунање Јакобијских матрица (тј. њихово аналитичко одређивање)
- Високи процесорски захтеви (high computational cost), ако се Јакобијске матрице рачунају нумерички
- Проширени Калманов филтер ради само на диференцијабилним моделима (ако нису диференцијабилни Јакобијске матрице се не могу израчунати)
- Проширени Калманов филтер није оптималан ако је систем изразито нелинеаран



Слика 4.4 Случај када линеаризација није валидна [2]

4.2. Безмирисни Калманов филтер (Unscented Kalman Filter)

За разлику од проширеног Калмановог филтера који апроксимује (линеаризује) функцију, безмирисни Калманов филтер апроксимује функцију расподеле. Под овим се подразумева, да безмирисни Калманов филтер одређује минимални број тачака за узорак тако да је њихова средња вредности и коваријанса иста као и код функције расподеле. Ове тачке се називају Сигма тачке и симетрично су распоређене у односу на средњу вредност.



Слика 4.5 Апроксимирање функције расподеле помоћу безмирисног Калмановог филтера [2]

Свака Сигма тачка се онда провлачи кроз нелинеарни модел система. Средња вредност и коваријанса нелинеарно трансформисаних тачака се рачуна и на основу тога се добија емпиријска Гаусова расподела. Ова расподела се даље користи за израчунавање нове процене.

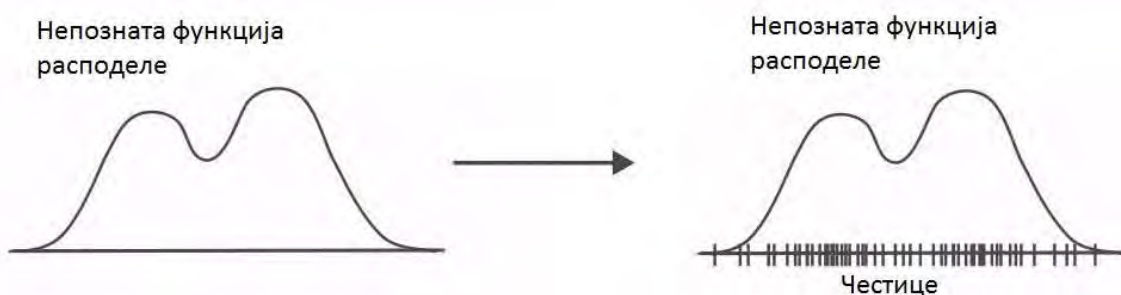


Слика 4.6 Добијање емпиријске Гаусове расподеле [2]

Треба напоменути да у алгоритму обичног (линеарног) Калмановог филтера, матрица коваријансе процеса P се рачуна користећи P из предходног корака која се убацује у једначину и добија се матрица коваријансе предикције која се после коригује користећи и измерене вредности. У безмирисном Калмановом филтеру матрица коваријансе процеса P не рачуна се на исти начин, добија се емпиријски.

4.3. Филтер честица (Particle Filter)

Још један алгоритам за процену стања у нелинеарним системима јесте и филтер честица. Он је заснован на сличном принципу као и безмирисни калманов филтер. Такође користи тачке у функције расподеле (сигма тачке код безмирисног Калмановог филтера) које се овде називају честице. Разлика је у томе што филтер честица може да апроксимује било коју функцију расподеле, није ограничен само Гаусову расподелу (тј. нормалну расподелу). Да би апроксимирао функцију расподелу, која није експлицитно исказана, број честица (тачака) које филтер користи је значајно већи него код безмирисног Калмановог филтера.



Слика 4.7 Апроксимирање функције расподеле помоћу филтера честица [2]

Због великог броја честица, филтер честица захтева и значајне процесорске капацитете.

4.4. Преглед напредних метода асимилације

У табели испод су приказане напредне методе оптималне процене са приказом модела који користе, претпостављене функције расподеле као и процесорским захтевима.

Табела 4.1 Преглед метода оптималне процене

Метода оптимална процене	Математички модел	Претпостављена функција расподеле	Процесорски захтеви
Калманов филтер	Линеаран	Гаусова	Ниски
Проширени Калманов филтер	Локално линеаран	Гаусова	Ниски (ако се јакобијанска матрица рачуна аналитички) Средњи (ако се јакобијанска матрица рачуна нумерички)
Безмирисни Калманов филтер	Нелинеаран	Гаусова	Средњи
Филтер честица	Нелинеаран	Било која	Високи

5. ЗАКЉУЧАК

Калманов филтер представља алгоритам асимилације података, који на основу измерених података и математичког модела предикције даје оптималну процену тренутног стања система. Калманов филтер се може применити само код система који су линеарни, тј. тамо где је математички модел предикције линеаран. Поред тога што захтева линеаран математички модел, Калманов филтер претпоставља и да је случајно променљива која описује стање система нормално распоређена (Гаусова функција расподеле) и код мерења и код математичког модела предикције.

Карактеристични параметри Калмановог филтера:

Тежински фактор K (Калманов прираштај) параметар који нам приказује које поверење Калманов филтер даје измереним вредностима, а које вредностима математичког модела. Ако је $K = 0$, филтер има потпуно поверење у математички модел предикције, а измерене вредности занемарује. Ако је $K = 1$ филтер има потпуно поверење у измерене вредности, а математички модел предикције занемарује. Када је $K = 0.5$ филтер даје подједнако поверење измереним вредностима и математичком моделу предикције.

Неодређеност мерења R (матрица коваријансе мерних уређаја) параметар који зависи од мерне опреме. Представља карактеристику уређаја и произвођач је даје у својој спецификацији. Што је већа неодређеност то ће тежински коефицијент бити мањи ($R \uparrow \rightarrow K \downarrow$), тј. Калманов филтер ће више поверења имати у математички модел предикције.

Шум математичког модела предикције S представља неодређеност, математичког модела предикције. Како ниједан математички модел није апсолутно савршен, сви поседује одређену меру неповерења. Шум математичког модела предикције S мора постојати у оквиру Калмановог филтера. Да не постоји шум математичког модела предикције, тежински коефицијент би тежио нули ($K \rightarrow 0$) и тиме давао скоро апсолутно поверење математичком моделу предикције (и самим тим Калманов филтер би изгубио своју сврху). Шум математичког модела предикције у оквиру себе треба да обухвати и све стохастичке појаве које се дешавају у процесу, због тога S не би требало да буде константна величина.

Утицај временске разлике између математичког модела предикције и мерења. Што су разлике у временском кораку између математичког модела предикције и мерења веће, то ће и разлике између измерене вредности и моделоване вредности бити веће. Треба тежити да ова разлика буде што мања како би се у континуитету добијали употребљиви подаци. Не постоји јасна граница колику разлику временских корака Калманов филтер допушта, то зависи искључиво од конкретног проблема који се решава и од тога какве податке желимо да добијемо из система.

У случају да имамо систем који се не може линеаризовати, или се не може довољно тачно линеаризовати треба користити неку од напреднијих метода оптималне процене уместо Калмановог филтера. Неке од напреднијих метода оптималне процене, које се заснивају на Калмановом филтеру су:

- Проширени Калманов филтер
- Безмирисни Калманов филтер
- Филтер честица

6. ЛИТЕРАТУРА

- [1] **Милош Станић и Душан Продановић**, Уклапање података мерења у хидролошке моделе – Теоријске основе, Београд 2010
- [2] **Michel van Biezen**, Special Topic – The Kalman Filter; [приступљено 19.08.2019]; доступно на: <https://www.youtube.com/watch?v=CaCcOwJPytQ&list=PLX2gX-ftPVXU3oUFNATxGXY90AULiqnWT>
- [3] **Melda Ulusoy**, Understanding Kalman Filters; [приступљено 19.08.2019]; доступно на: <https://www.youtube.com/watch?v=mwn8xhgNpFY>
- [4] **Adam Kucharski**, Understanding the unseen, 2012; [приступљено 19.08.2019]; доступно на: <https://plus.maths.org/content/comment/reply/5778>
- [5] **Michael Galarnyk**, Normal Distributionm, 2018; [приступљено 19.08.2019]; доступно на: (<https://towardsdatascience.com/understanding-the-68-95-99-7-rule-for-a-normal-distribution-b7b7cbf760c2>)
- [6] **Петрић Филип**, Утицај режима течења у цеви на губитак енергије на трење, Београд

ПРИЛОЗИ

Асимилација података у хидротхници применом Калмановог филтера

Нумерички прилози

У оквиру овог поглавља табеларно су дати резултати свих 11 комбинација за нумерички пример примене Калмановог филтера.

Варијанта 1

Параметри Калмановог филтера $R = 0,05m$, $S = 0,000m^2$, $\pm s = 0,000m^2$, $\Delta T_{mer} = 1s$, $\Delta T_{mod} = 1s$

Време	Измерене вредности	Предикција						Каламанов филтер			RMSE	
		P_{k-1}	C	h_{k-1}	h_p	S	P_p	K	h_{kal}	P	err	$h_{mer} - h_{kal}$
[s]	[m]	[m ²]	[/]	[m]	[m]	[m ²]	[m ²]	[/]	[m]	[m ²]	[m ²]	[m]
0	3,068		0,770						3,000	0,025	0,000	0,000
1	2,956	0,025	0,732	3,000	2,959	0,000	0,025	0,909	2,956	0,002	0,000	0,000
2	2,887	0,002	0,695	2,956	2,917	0,000	0,002	0,476	2,903	0,001	0,000	-0,016
3	2,861	0,001	0,660	2,903	2,866	0,000	0,001	0,323	2,864	0,001	0,000	-0,004
4	2,683	0,001	0,627	2,864	2,830	0,000	0,001	0,244	2,794	0,001	0,012	-0,111
5	2,671	0,001	0,596	2,794	2,761	0,000	0,001	0,196	2,743	0,000	0,005	-0,072
6	2,561	0,000	0,566	2,743	2,712	0,000	0,000	0,164	2,687	0,000	0,016	-0,126
7	2,536	0,000	0,538	2,687	2,657	0,000	0,000	0,141	2,640	0,000	0,011	-0,104
8	2,472	0,000	0,511	2,640	2,612	0,000	0,000	0,123	2,594	0,000	0,015	-0,122
9	2,401	0,000	0,485	2,594	2,567	0,000	0,000	0,110	2,549	0,000	0,022	-0,148
10	2,436	0,000	0,461	2,549	2,523	0,000	0,000	0,099	2,515	0,000	0,006	-0,079
11	2,276	0,000	0,438	2,515	2,490	0,000	0,000	0,090	2,471	0,000	0,038	-0,195
12	2,343	0,000	0,416	2,471	2,448	0,000	0,000	0,083	2,439	0,000	0,009	-0,097
13	2,215	0,000	0,395	2,439	2,417	0,000	0,000	0,076	2,402	0,000	0,035	-0,187
14	2,141	0,000	0,376	2,402	2,381	0,000	0,000	0,071	2,364	0,000	0,050	-0,223
15	2,108	0,000	0,357	2,364	2,344	0,000	0,000	0,066	2,328	0,000	0,049	-0,221
16	1,996	0,000	0,339	2,328	2,310	0,000	0,000	0,062	2,290	0,000	0,086	-0,294
17	1,978	0,000	0,322	2,290	2,272	0,000	0,000	0,058	2,255	0,000	0,077	-0,277
18	2,016	0,000	0,306	2,255	2,238	0,000	0,000	0,055	2,226	0,000	0,044	-0,210
19	1,883	0,000	0,291	2,226	2,210	0,000	0,000	0,052	2,192	0,000	0,096	-0,310
20	1,833	0,000	0,276	2,192	2,177	0,000	0,000	0,050	2,160	0,000	0,107	-0,327
21	1,810	0,000	0,262	2,160	2,145	0,000	0,000	0,047	2,129	0,000	0,102	-0,320
22	1,802	0,000	0,249	2,129	2,116	0,000	0,000	0,045	2,101	0,000	0,090	-0,300
23	1,666	0,000	0,237	2,101	2,088	0,000	0,000	0,043	2,070	0,000	0,164	-0,404
24	1,721	0,000	0,225	2,070	2,057	0,000	0,000	0,041	2,043	0,000	0,104	-0,322
25	1,695	0,000	0,214	2,043	2,032	0,000	0,000	0,040	2,018	0,000	0,104	-0,323
26	1,531	0,000	0,203	2,018	2,007	0,000	0,000	0,038	1,989	0,000	0,209	-0,457
27	1,505	0,000	0,193	1,989	1,978	0,000	0,000	0,037	1,961	0,000	0,207	-0,455
28	1,475	0,000	0,183	1,961	1,950	0,000	0,000	0,036	1,933	0,000	0,210	-0,458
29	1,407	0,000	0,174	1,933	1,924	0,000	0,000	0,034	1,906	0,000	0,249	-0,499
30	1,394	0,000	0,165	1,906	1,897	0,000	0,000	0,033	1,880	0,000	0,236	-0,486
31	1,450	0,000	0,157	1,880	1,871	0,000	0,000	0,032	1,858	0,000	0,166	-0,408
32	1,310	0,000	0,149	1,858	1,850	0,000	0,000	0,031	1,833	0,000	0,274	-0,523
33	1,364	0,000	0,142	1,833	1,825	0,000	0,000	0,030	1,811	0,000	0,200	-0,447
34	1,271	0,000	0,135	1,811	1,803	0,000	0,000	0,029	1,788	0,000	0,267	-0,517
35	1,255	0,000	0,128	1,788	1,781	0,000	0,000	0,028	1,766	0,000	0,261	-0,511
36	1,176	0,000	0,121	1,766	1,759	0,000	0,000	0,028	1,743	0,000	0,322	-0,567
37	1,168	0,000	0,115	1,743	1,736	0,000	0,000	0,027	1,721	0,000	0,306	-0,553
38	1,127	0,000	0,110	1,721	1,715	0,000	0,000	0,026	1,700	0,000	0,328	-0,573
39	1,115	0,000	0,104	1,700	1,694	0,000	0,000	0,026	1,679	0,000	0,318	-0,564
40	1,017	0,000	0,099	1,679	1,673	0,000	0,000	0,025	1,657	0,000	0,409	-0,640
41	1,024	0,000	0,094	1,657	1,652	0,000	0,000	0,024	1,637	0,000	0,375	-0,612
42	1,007	0,000	0,089	1,637	1,632	0,000	0,000	0,024	1,617	0,000	0,372	-0,610
43	1,029	0,000	0,085	1,617	1,612	0,000	0,000	0,023	1,598	0,000	0,325	-0,570
44	0,905	0,000	0,081	1,598	1,594	0,000	0,000	0,023	1,578	0,000	0,453	-0,673
45	0,939	0,000	0,077	1,578	1,574	0,000	0,000	0,022	1,560	0,000	0,385	-0,621
46	0,855	0,000	0,073	1,560	1,556	0,000	0,000	0,022	1,541	0,000	0,471	-0,686
47	0,925	0,000	0,069	1,541	1,537	0,000	0,000	0,021	1,524	0,000	0,358	-0,599
48	0,803	0,000	0,066	1,524	1,520	0,000	0,000	0,021	1,505	0,000	0,494	-0,703
49	0,798	0,000	0,062	1,505	1,502	0,000	0,000	0,020	1,488	0,000	0,475	-0,689
50	0,723	0,000	0,059	1,488	1,484	0,000	0,000	0,020	1,469	0,000	0,557	-0,746
51	0,682	0,000	0,056	1,469	1,466	0,000	0,000	0,020	1,451	0,000	0,591	-0,769
52	0,728	0,000	0,053	1,451	1,448	0,000	0,000	0,019	1,434	0,000	0,499	-0,706
53	0,702	0,000	0,051	1,434	1,431	0,000	0,000	0,019	1,417	0,000	0,511	-0,715
54	0,695	0,000	0,048	1,417	1,415	0,000	0,000	0,018	1,401	0,000	0,499	-0,706
55	0,654	0,000	0,046	1,401	1,399	0,000	0,000	0,018	1,385	0,000	0,535	-0,731
56	0,649	0,000	0,044	1,385	1,383	0,000	0,000	0,018	1,370	0,000	0,520	-0,721
57	0,546	0,000	0,041	1,370	1,367	0,000	0,000	0,018	1,353	0,000	0,651	-0,807
58	0,644	0,000	0,039	1,353	1,351	0,000	0,000	0,017	1,339	0,000	0,483	-0,695
59	0,526	0,000	0,037	1,339	1,337	0,000	0,000	0,017	1,323	0,000	0,634	-0,796
60	0,573	0,000	0,035	1,323	1,321	0,000	0,000	0,017	1,308	0,000	0,541	-0,736
											RMSE	3,864

Асимилација података у хидротхници применом Калмановог филтера

Варијанта 2

Параметри Калмановог филтера $R = 0,05m$, $S = 0,001m^2$, $\pm s = 0,0005m^2$, $\Delta T_{mer} = 1s$, $\Delta T_{mod} = 1s$

Време	Измерене вредности	Предикција						Каламанов филтер			RMSE	
		P_{k-1}	C	h_{k-1}	h_p	S	P_p	K	h_{kal}	P	err	$h_{mer} - h_{kal}$
[s]	[m]	[m ²]	[l]	[m]	[m]	[m ²]	[m ²]	[l]	[m]	[m ²]	[m ²]	[m]
0	3,068		0,770						3,000	0,025		0,000
1	2,956	0,025	0,732	3,000	2,959	0,0008	0,026	0,909	2,956	0,002	0,000	0,000
2	2,887	0,002	0,695	2,956	2,917	0,0006	0,003	0,484	2,903	0,002	0,000	-0,016
3	2,861	0,002	0,660	2,903	2,866	0,0014	0,003	0,382	2,864	0,002	0,000	-0,003
4	2,683	0,002	0,627	2,864	2,829	0,0014	0,003	0,423	2,767	0,002	0,007	-0,084
5	2,671	0,002	0,596	2,767	2,734	0,0006	0,002	0,427	2,707	0,001	0,001	-0,036
6	2,561	0,001	0,566	2,707	2,676	0,0012	0,003	0,361	2,635	0,002	0,005	-0,073
7	2,536	0,002	0,538	2,635	2,605	0,0007	0,002	0,399	2,577	0,001	0,002	-0,041
8	2,472	0,001	0,511	2,577	2,549	0,0012	0,003	0,366	2,521	0,002	0,002	-0,048
9	2,401	0,002	0,485	2,521	2,494	0,0008	0,003	0,401	2,457	0,002	0,003	-0,056
10	2,436	0,002	0,461	2,457	2,431	0,0011	0,003	0,376	2,433	0,002	0,000	0,003
11	2,276	0,002	0,438	2,433	2,409	0,0006	0,002	0,394	2,356	0,001	0,006	-0,080
12	2,343	0,001	0,416	2,356	2,333	0,0014	0,003	0,352	2,337	0,002	0,000	0,006
13	2,215	0,002	0,395	2,337	2,315	0,0013	0,003	0,413	2,273	0,002	0,003	-0,058
14	2,141	0,002	0,376	2,273	2,253	0,0011	0,003	0,422	2,205	0,002	0,004	-0,065
15	2,108	0,002	0,357	2,205	2,186	0,0011	0,003	0,402	2,154	0,002	0,002	-0,047
16	1,996	0,002	0,339	2,154	2,135	0,0011	0,003	0,396	2,080	0,002	0,007	-0,084
17	1,978	0,002	0,322	2,080	2,062	0,0008	0,002	0,397	2,029	0,001	0,003	-0,051
18	2,016	0,001	0,306	2,029	2,012	0,0009	0,002	0,367	2,013	0,001	0,000	0,003
19	1,883	0,001	0,291	2,013	1,997	0,0014	0,003	0,370	1,955	0,002	0,005	-0,072
20	1,833	0,002	0,276	1,955	1,940	0,0007	0,003	0,419	1,895	0,001	0,004	-0,062
21	1,810	0,001	0,262	1,895	1,880	0,0008	0,002	0,371	1,854	0,001	0,002	-0,044
22	1,802	0,001	0,249	1,854	1,840	0,0007	0,002	0,366	1,826	0,001	0,001	-0,025
23	1,666	0,001	0,237	1,826	1,813	0,0008	0,002	0,352	1,761	0,001	0,009	-0,096
24	1,721	0,001	0,225	1,761	1,749	0,0005	0,002	0,355	1,739	0,001	0,000	-0,018
25	1,695	0,001	0,214	1,739	1,727	0,0011	0,002	0,326	1,717	0,002	0,000	-0,021
26	1,531	0,002	0,203	1,717	1,705	0,0009	0,002	0,382	1,639	0,002	0,012	-0,108
27	1,505	0,002	0,193	1,639	1,628	0,0011	0,003	0,380	1,581	0,002	0,006	-0,076
28	1,475	0,002	0,183	1,581	1,571	0,0006	0,002	0,396	1,533	0,001	0,003	-0,058
29	1,407	0,001	0,174	1,533	1,524	0,0010	0,002	0,351	1,483	0,002	0,006	-0,076
30	1,394	0,002	0,165	1,483	1,473	0,0015	0,003	0,378	1,444	0,002	0,002	-0,049
31	1,450	0,002	0,157	1,444	1,435	0,0008	0,003	0,426	1,441	0,002	0,000	0,009
32	1,310	0,002	0,149	1,441	1,433	0,0007	0,002	0,376	1,387	0,001	0,006	-0,077
33	1,364	0,001	0,142	1,387	1,379	0,0005	0,002	0,355	1,374	0,001	0,000	-0,009
34	1,271	0,001	0,135	1,374	1,366	0,0013	0,003	0,330	1,335	0,002	0,004	-0,064
35	1,255	0,002	0,128	1,335	1,327	0,0009	0,003	0,403	1,298	0,002	0,002	-0,044
36	1,176	0,002	0,121	1,298	1,291	0,0005	0,002	0,383	1,247	0,001	0,005	-0,071
37	1,168	0,001	0,115	1,247	1,241	0,0015	0,003	0,337	1,216	0,002	0,002	-0,048
38	1,127	0,002	0,110	1,216	1,210	0,0010	0,003	0,423	1,175	0,002	0,002	-0,048
39	1,115	0,002	0,104	1,175	1,169	0,0010	0,003	0,398	1,147	0,002	0,001	-0,033
40	1,017	0,002	0,099	1,147	1,142	0,0008	0,002	0,386	1,094	0,001	0,006	-0,077
41	1,024	0,001	0,094	1,094	1,089	0,0014	0,003	0,367	1,065	0,002	0,002	-0,041
42	1,007	0,002	0,089	1,065	1,060	0,0013	0,003	0,421	1,038	0,002	0,001	-0,031
43	1,029	0,002	0,085	1,038	1,033	0,0010	0,003	0,419	1,031	0,002	0,000	-0,003
44	0,905	0,002	0,081	1,031	1,027	0,0008	0,002	0,393	0,979	0,001	0,005	-0,074
45	0,939	0,001	0,077	0,979	0,975	0,0010	0,002	0,373	0,961	0,002	0,000	-0,022
46	0,855	0,002	0,073	0,961	0,957	0,0013	0,003	0,385	0,918	0,002	0,004	-0,063
47	0,925	0,002	0,069	0,918	0,914	0,0015	0,003	0,410	0,919	0,002	0,000	0,007
48	0,803	0,002	0,066	0,919	0,915	0,0013	0,003	0,432	0,866	0,002	0,004	-0,064
49	0,798	0,002	0,062	0,866	0,863	0,0008	0,003	0,422	0,836	0,002	0,001	-0,037
50	0,723	0,002	0,059	0,836	0,832	0,0005	0,002	0,381	0,791	0,001	0,005	-0,068
51	0,682	0,001	0,056	0,791	0,787	0,0010	0,002	0,340	0,752	0,001	0,005	-0,070
52	0,728	0,001	0,053	0,752	0,749	0,0009	0,002	0,373	0,741	0,002	0,000	-0,013
53	0,702	0,002	0,051	0,741	0,738	0,0012	0,003	0,377	0,724	0,002	0,000	-0,022
54	0,695	0,002	0,048	0,724	0,722	0,0011	0,003	0,402	0,711	0,002	0,000	-0,016
55	0,654	0,002	0,046	0,711	0,708	0,0015	0,003	0,398	0,687	0,002	0,001	-0,033
56	0,649	0,002	0,044	0,687	0,684	0,0008	0,003	0,428	0,669	0,002	0,000	-0,020
57	0,546	0,002	0,041	0,669	0,667	0,0013	0,003	0,382	0,621	0,002	0,006	-0,074
58	0,644	0,002	0,039	0,621	0,619	0,0008	0,003	0,414	0,629	0,002	0,000	0,015
59	0,526	0,002	0,037	0,629	0,627	0,0007	0,002	0,376	0,589	0,001	0,004	-0,063
60	0,573	0,001	0,035	0,589	0,587	0,0012	0,003	0,357	0,582	0,002	0,000	-0,009
										RMSE	0,407	

Асимилација података у хидротхници применом Калмановог филтера

Варијанта 3

Параметри Калмановог филтера $R = 0,05m$, $S = 0,01m^2$, $\pm s = 0,001m^2$, $\Delta T_{mer} = 1s$, $\Delta T_{mod} = 1s$

Време	Измерене вредности	Предикција						Каламанов филтер			RMSE	
		P_{k-1}	C	h_{k-1}	h_p	S	P_p	K	h_{kal}	P	err	$h_{mer} - h_{kal}$
[s]	[m]	[m ²]	[l]	[m]	[m]	[m ²]	[m ²]	[l]	[m]	[m ²]	[m ²]	[m]
0	3,068		0,770						3,000	0,025	0,000	0,000
1	2,956	0,025	0,732	3,000	2,959	0,0101	0,035	0,909	2,956	0,003	0,000	0,000
2	2,887	0,003	0,695	2,956	2,917	0,0107	0,014	0,561	2,900	0,006	0,000	-0,013
3	2,861	0,006	0,660	2,900	2,864	0,0101	0,016	0,709	2,862	0,005	0,000	-0,001
4	2,683	0,005	0,627	2,862	2,827	0,0095	0,014	0,654	2,733	0,005	0,002	-0,050
5	2,671	0,005	0,596	2,733	2,700	0,0093	0,014	0,663	2,681	0,005	0,000	-0,009
6	2,561	0,005	0,566	2,681	2,649	0,0093	0,014	0,657	2,591	0,005	0,001	-0,030
7	2,536	0,005	0,538	2,591	2,562	0,0091	0,014	0,659	2,545	0,005	0,000	-0,009
8	2,472	0,005	0,511	2,545	2,516	0,0099	0,015	0,655	2,487	0,005	0,000	-0,015
9	2,401	0,005	0,485	2,487	2,460	0,0091	0,014	0,669	2,421	0,005	0,000	-0,020
10	2,436	0,005	0,461	2,421	2,395	0,0102	0,015	0,652	2,422	0,005	0,000	0,014
11	2,276	0,005	0,438	2,422	2,397	0,0095	0,015	0,674	2,316	0,005	0,002	-0,040
12	2,343	0,005	0,416	2,316	2,293	0,0107	0,016	0,657	2,325	0,005	0,000	0,017
13	2,215	0,005	0,395	2,325	2,303	0,0105	0,016	0,680	2,243	0,005	0,001	-0,028
14	2,141	0,005	0,376	2,243	2,222	0,0098	0,015	0,669	2,168	0,005	0,001	-0,027
15	2,108	0,005	0,357	2,168	2,148	0,0096	0,014	0,663	2,121	0,005	0,000	-0,014
16	1,996	0,005	0,339	2,121	2,102	0,0101	0,015	0,661	2,032	0,005	0,001	-0,036
17	1,978	0,005	0,322	2,032	2,014	0,0092	0,014	0,670	1,990	0,005	0,000	-0,012
18	2,016	0,005	0,306	1,990	1,973	0,0101	0,015	0,653	2,001	0,005	0,000	0,015
19	1,883	0,005	0,291	2,001	1,985	0,0102	0,015	0,673	1,916	0,005	0,001	-0,033
20	1,833	0,005	0,276	1,916	1,901	0,0103	0,015	0,667	1,856	0,005	0,001	-0,022
21	1,810	0,005	0,262	1,856	1,841	0,0104	0,015	0,671	1,820	0,005	0,000	-0,010
22	1,802	0,005	0,249	1,820	1,806	0,0103	0,015	0,671	1,803	0,005	0,000	-0,002
23	1,666	0,005	0,237	1,803	1,790	0,0101	0,015	0,670	1,707	0,005	0,002	-0,041
24	1,721	0,005	0,225	1,707	1,694	0,0098	0,015	0,668	1,712	0,005	0,000	0,009
25	1,695	0,005	0,214	1,712	1,700	0,0093	0,014	0,664	1,697	0,005	0,000	-0,002
26	1,531	0,005	0,203	1,697	1,686	0,0103	0,015	0,657	1,584	0,005	0,003	-0,053
27	1,505	0,005	0,193	1,584	1,574	0,0105	0,016	0,674	1,527	0,005	0,000	-0,022
28	1,475	0,005	0,183	1,527	1,517	0,0095	0,015	0,671	1,489	0,005	0,000	-0,014
29	1,407	0,005	0,174	1,489	1,480	0,0107	0,016	0,657	1,432	0,005	0,001	-0,025
30	1,394	0,005	0,165	1,432	1,423	0,0095	0,015	0,680	1,403	0,005	0,000	-0,009
31	1,450	0,005	0,157	1,403	1,395	0,0105	0,015	0,655	1,431	0,005	0,000	0,019
32	1,310	0,005	0,149	1,431	1,423	0,0101	0,015	0,678	1,346	0,005	0,001	-0,036
33	1,364	0,005	0,142	1,346	1,338	0,0103	0,015	0,664	1,355	0,005	0,000	0,009
34	1,271	0,005	0,135	1,355	1,348	0,0105	0,016	0,672	1,296	0,005	0,001	-0,025
35	1,255	0,005	0,128	1,296	1,289	0,0098	0,015	0,672	1,266	0,005	0,000	-0,011
36	1,176	0,005	0,121	1,266	1,259	0,0094	0,014	0,663	1,204	0,005	0,001	-0,028
37	1,168	0,005	0,115	1,204	1,197	0,0091	0,014	0,659	1,178	0,005	0,000	-0,010
38	1,127	0,005	0,110	1,178	1,172	0,0107	0,015	0,655	1,142	0,005	0,000	-0,015
39	1,115	0,005	0,104	1,142	1,137	0,0100	0,015	0,681	1,122	0,005	0,000	-0,007
40	1,017	0,005	0,099	1,122	1,116	0,0097	0,015	0,661	1,051	0,005	0,001	-0,034
41	1,024	0,005	0,094	1,051	1,045	0,0101	0,015	0,664	1,031	0,005	0,000	-0,007
42	1,007	0,005	0,089	1,031	1,026	0,0093	0,014	0,668	1,014	0,005	0,000	-0,006
43	1,029	0,005	0,085	1,014	1,009	0,0103	0,015	0,655	1,022	0,005	0,000	0,007
44	0,905	0,005	0,081	1,022	1,017	0,0091	0,014	0,675	0,941	0,005	0,001	-0,036
45	0,939	0,005	0,077	0,941	0,937	0,0092	0,014	0,650	0,939	0,005	0,000	0,001
46	0,855	0,005	0,073	0,939	0,935	0,0096	0,014	0,659	0,882	0,005	0,001	-0,027
47	0,925	0,005	0,069	0,882	0,878	0,0091	0,014	0,664	0,909	0,005	0,000	0,016
48	0,803	0,005	0,066	0,909	0,906	0,0109	0,016	0,654	0,838	0,005	0,001	-0,036
49	0,798	0,005	0,062	0,838	0,835	0,0107	0,016	0,684	0,810	0,005	0,000	-0,012
50	0,723	0,005	0,059	0,810	0,807	0,0105	0,016	0,670	0,750	0,005	0,001	-0,028
51	0,682	0,005	0,056	0,750	0,747	0,0097	0,015	0,672	0,703	0,005	0,000	-0,021
52	0,728	0,005	0,053	0,703	0,700	0,0097	0,015	0,660	0,718	0,005	0,000	0,009
53	0,702	0,005	0,051	0,718	0,716	0,0107	0,016	0,664	0,707	0,005	0,000	-0,005
54	0,695	0,005	0,048	0,707	0,704	0,0095	0,015	0,678	0,698	0,005	0,000	-0,003
55	0,654	0,005	0,046	0,698	0,695	0,0108	0,016	0,656	0,668	0,005	0,000	-0,014
56	0,649	0,005	0,044	0,668	0,666	0,0105	0,016	0,681	0,654	0,005	0,000	-0,005
57	0,546	0,005	0,041	0,654	0,652	0,0095	0,015	0,669	0,581	0,005	0,001	-0,035
58	0,644	0,005	0,039	0,581	0,579	0,0096	0,014	0,659	0,622	0,005	0,000	0,022
59	0,526	0,005	0,037	0,622	0,619	0,0104	0,015	0,664	0,558	0,005	0,001	-0,031
60	0,573	0,005	0,035	0,558	0,556	0,0094	0,015	0,673	0,567	0,005	0,000	0,006
										RMSE	0,174	

Асимилација података у хидротхници применом Калмановог филтера

Варијанта 4

Параметри Калмановог филтера $R = 0,05m$, $S = 0,1m^2$, $\pm s = 0,01m^2$, $\Delta T_{mer} = 1s$, $\Delta T_{mod} = 1s$

Време	Измерене вредности	Предикција						Каламанов филтер			RMSE	
		P_{k-1}	C	h_{k-1}	h_p	S	P_p	K	h_{kal}	P	err	$h_{mer} - h_{kal}$
[s]	[m]	[m ²]	[l]	[m]	[m]	[m ²]	[m ²]	[l]	[m]	[m ²]	[m ²]	[m]
0	3,068		0,770						3,000	0,025		0,000
1	2,956	0,025	0,732	3,000	2,959	0,1077	0,133	0,909	2,956	0,012	0,000	0,000
2	2,887	0,012	0,695	2,956	2,917	0,1012	0,113	0,828	2,892	0,019	0,000	-0,005
3	2,861	0,019	0,660	2,892	2,855	0,0901	0,110	0,886	2,860	0,012	0,000	0,001
4	2,683	0,012	0,627	2,860	2,825	0,1079	0,120	0,833	2,707	0,020	0,001	-0,024
5	2,671	0,020	0,596	2,707	2,674	0,0986	0,119	0,889	2,672	0,013	0,000	0,000
6	2,561	0,013	0,566	2,672	2,640	0,0964	0,110	0,840	2,574	0,018	0,000	-0,013
7	2,536	0,018	0,538	2,574	2,544	0,1024	0,120	0,875	2,537	0,015	0,000	-0,001
8	2,472	0,015	0,511	2,537	2,509	0,1095	0,124	0,857	2,477	0,018	0,000	-0,005
9	2,401	0,018	0,485	2,477	2,450	0,0950	0,113	0,877	2,407	0,014	0,000	-0,006
10	2,436	0,014	0,461	2,407	2,381	0,0950	0,109	0,847	2,428	0,017	0,000	0,008
11	2,276	0,017	0,438	2,428	2,403	0,1088	0,125	0,869	2,293	0,016	0,000	-0,017
12	2,343	0,016	0,416	2,293	2,270	0,0993	0,116	0,868	2,333	0,015	0,000	0,010
13	2,215	0,015	0,395	2,333	2,311	0,1051	0,120	0,860	2,229	0,017	0,000	-0,013
14	2,141	0,017	0,376	2,229	2,208	0,0958	0,113	0,871	2,150	0,015	0,000	-0,009
15	2,108	0,015	0,357	2,150	2,130	0,1010	0,115	0,853	2,111	0,017	0,000	-0,003
16	1,996	0,017	0,339	2,111	2,092	0,1086	0,126	0,872	2,009	0,016	0,000	-0,012
17	1,978	0,016	0,322	2,009	1,991	0,0968	0,113	0,866	1,980	0,015	0,000	-0,002
18	2,016	0,015	0,306	1,980	1,963	0,1094	0,125	0,858	2,008	0,018	0,000	0,008
19	1,883	0,018	0,291	2,008	1,992	0,0986	0,116	0,876	1,896	0,014	0,000	-0,014
20	1,833	0,014	0,276	1,896	1,881	0,0953	0,110	0,852	1,840	0,016	0,000	-0,007
21	1,810	0,016	0,262	1,840	1,826	0,1031	0,119	0,866	1,812	0,016	0,000	-0,002
22	1,802	0,016	0,249	1,812	1,798	0,0930	0,109	0,864	1,801	0,015	0,000	0,000
23	1,666	0,015	0,237	1,801	1,788	0,0947	0,109	0,855	1,683	0,016	0,000	-0,018
24	1,721	0,016	0,225	1,683	1,671	0,1011	0,117	0,864	1,714	0,016	0,000	0,007
25	1,695	0,016	0,214	1,714	1,702	0,0978	0,114	0,864	1,696	0,015	0,000	-0,001
26	1,531	0,015	0,203	1,696	1,685	0,0941	0,110	0,861	1,553	0,015	0,000	-0,021
27	1,505	0,015	0,193	1,553	1,542	0,0935	0,109	0,859	1,510	0,015	0,000	-0,005
28	1,475	0,015	0,183	1,510	1,500	0,0907	0,106	0,860	1,479	0,015	0,000	-0,003
29	1,407	0,015	0,174	1,479	1,469	0,1001	0,115	0,856	1,416	0,017	0,000	-0,009
30	1,394	0,017	0,165	1,416	1,407	0,1060	0,123	0,869	1,396	0,016	0,000	-0,002
31	1,450	0,016	0,157	1,396	1,387	0,1027	0,119	0,866	1,442	0,016	0,000	0,008
32	1,310	0,016	0,149	1,442	1,433	0,0929	0,109	0,865	1,326	0,015	0,000	-0,017
33	1,364	0,015	0,142	1,326	1,319	0,1070	0,122	0,855	1,358	0,018	0,000	0,007
34	1,271	0,018	0,135	1,358	1,350	0,1089	0,127	0,876	1,281	0,016	0,000	-0,010
35	1,255	0,016	0,128	1,281	1,273	0,1076	0,123	0,863	1,257	0,017	0,000	-0,003
36	1,176	0,017	0,121	1,257	1,250	0,1027	0,120	0,871	1,185	0,015	0,000	-0,010
37	1,168	0,015	0,115	1,185	1,179	0,0948	0,110	0,860	1,169	0,015	0,000	-0,002
38	1,127	0,015	0,110	1,169	1,163	0,0958	0,111	0,860	1,132	0,016	0,000	-0,005
39	1,115	0,016	0,104	1,132	1,126	0,0952	0,111	0,861	1,116	0,015	0,000	-0,002
40	1,017	0,015	0,099	1,116	1,111	0,1002	0,116	0,860	1,030	0,016	0,000	-0,013
41	1,024	0,016	0,094	1,030	1,025	0,1050	0,121	0,866	1,024	0,016	0,000	0,000
42	1,007	0,016	0,089	1,024	1,019	0,0936	0,110	0,866	1,009	0,015	0,000	-0,002
43	1,029	0,015	0,085	1,009	1,004	0,1087	0,123	0,854	1,025	0,018	0,000	0,004
44	0,905	0,018	0,081	1,025	1,020	0,1002	0,118	0,878	0,919	0,014	0,000	-0,014
45	0,939	0,014	0,077	0,919	0,915	0,0972	0,112	0,852	0,936	0,016	0,000	0,004
46	0,855	0,016	0,073	0,936	0,932	0,1056	0,122	0,868	0,865	0,016	0,000	-0,010
47	0,925	0,016	0,069	0,865	0,861	0,0935	0,110	0,866	0,917	0,015	0,000	0,009
48	0,803	0,015	0,066	0,917	0,913	0,0998	0,114	0,855	0,819	0,017	0,000	-0,016
49	0,798	0,017	0,062	0,819	0,815	0,1075	0,124	0,869	0,801	0,016	0,000	-0,002
50	0,723	0,016	0,059	0,801	0,797	0,0921	0,108	0,867	0,733	0,014	0,000	-0,010
51	0,682	0,014	0,056	0,733	0,729	0,1011	0,116	0,853	0,689	0,017	0,000	-0,007
52	0,728	0,017	0,053	0,689	0,686	0,0910	0,108	0,872	0,722	0,014	0,000	0,005
53	0,702	0,014	0,051	0,722	0,719	0,1053	0,119	0,847	0,705	0,018	0,000	-0,003
54	0,695	0,018	0,048	0,705	0,702	0,1033	0,122	0,880	0,696	0,015	0,000	-0,001
55	0,654	0,015	0,046	0,696	0,693	0,1052	0,120	0,854	0,660	0,017	0,000	-0,006
56	0,649	0,017	0,044	0,660	0,657	0,1092	0,127	0,875	0,650	0,016	0,000	-0,001
57	0,546	0,016	0,041	0,650	0,648	0,1095	0,125	0,864	0,560	0,017	0,000	-0,014
58	0,644	0,017	0,039	0,560	0,558	0,1069	0,124	0,872	0,633	0,016	0,000	0,011
59	0,526	0,016	0,037	0,633	0,631	0,1006	0,116	0,864	0,541	0,016	0,000	-0,014
60	0,573	0,016	0,035	0,541	0,539	0,1055	0,121	0,864	0,568	0,017	0,000	0,005
										RMSE	0,072	

Асимилација података у хидротхници применом Калмановог филтера

Варијанта 5

Параметри Калмановог филтера $R = 0,005m$, $S = 0,01m^2$, $\pm s = 0,001m^2$, $\Delta T_{mer} = 1s$, $\Delta T_{mod} = 1s$

Време	Измерене вредности	Предикција						Каламанов филтер			RMSE	
		P_{k-1}	C	h_{k-1}	h_p	S	P_p	K	h_{kal}	P	err	$h_{mer} - h_{kal}$
[s]	[m]	[m ²]	[/]	[m]	[m]	[m ²]	[m ²]	[/]	[m]	[m ²]	[m ²]	[m]
0	3,068		0,770						3,000	0,025		0,000
1	2,956	0,025	0,732	3,000	2,959	0,011	0,036	0,999	2,956	0,000	0,000	0,000
2	2,887	0,000	0,695	2,956	2,917	0,010	0,010	0,587	2,899	0,004	0,000	-0,012
3	2,861	0,004	0,660	2,899	2,863	0,010	0,014	0,994	2,861	0,000	0,000	0,000
4	2,683	0,000	0,627	2,861	2,826	0,010	0,010	0,768	2,716	0,002	0,001	-0,033
5	2,671	0,002	0,596	2,716	2,683	0,010	0,012	0,989	2,672	0,000	0,000	0,000
6	2,561	0,000	0,566	2,672	2,640	0,010	0,010	0,840	2,574	0,002	0,000	-0,013
7	2,536	0,002	0,538	2,574	2,544	0,010	0,012	0,985	2,536	0,000	0,000	0,000
8	2,472	0,000	0,511	2,536	2,508	0,009	0,009	0,878	2,477	0,001	0,000	-0,004
9	2,401	0,001	0,485	2,477	2,450	0,010	0,011	0,978	2,402	0,000	0,000	-0,001
10	2,436	0,000	0,461	2,402	2,376	0,009	0,010	0,903	2,430	0,001	0,000	0,006
11	2,276	0,001	0,438	2,430	2,406	0,011	0,012	0,974	2,280	0,000	0,000	-0,003
12	2,343	0,000	0,416	2,280	2,256	0,009	0,010	0,925	2,336	0,001	0,000	0,006
13	2,215	0,001	0,395	2,336	2,314	0,010	0,011	0,967	2,218	0,000	0,000	-0,003
14	2,141	0,000	0,376	2,218	2,197	0,009	0,010	0,936	2,145	0,001	0,000	-0,004
15	2,108	0,001	0,357	2,145	2,125	0,009	0,010	0,961	2,108	0,000	0,000	-0,001
16	1,996	0,000	0,339	2,108	2,089	0,011	0,011	0,940	2,002	0,001	0,000	-0,006
17	1,978	0,001	0,322	2,002	1,984	0,010	0,011	0,964	1,978	0,000	0,000	0,000
18	2,016	0,000	0,306	1,978	1,961	0,009	0,010	0,938	2,013	0,001	0,000	0,003
19	1,883	0,001	0,291	2,013	1,996	0,010	0,010	0,959	1,887	0,000	0,000	-0,005
20	1,833	0,000	0,276	1,887	1,872	0,011	0,011	0,945	1,836	0,001	0,000	-0,002
21	1,810	0,001	0,262	1,836	1,821	0,010	0,011	0,961	1,810	0,000	0,000	0,000
22	1,802	0,000	0,249	1,810	1,796	0,009	0,010	0,944	1,801	0,001	0,000	0,000
23	1,666	0,001	0,237	1,801	1,788	0,010	0,011	0,955	1,671	0,000	0,000	-0,005
24	1,721	0,000	0,225	1,671	1,659	0,010	0,010	0,950	1,718	0,001	0,000	0,003
25	1,695	0,001	0,214	1,718	1,706	0,011	0,011	0,955	1,696	0,001	0,000	0,000
26	1,531	0,001	0,203	1,696	1,685	0,009	0,010	0,953	1,539	0,000	0,000	-0,007
27	1,505	0,000	0,193	1,539	1,528	0,010	0,011	0,949	1,506	0,001	0,000	-0,001
28	1,475	0,001	0,183	1,506	1,496	0,009	0,010	0,956	1,476	0,000	0,000	-0,001
29	1,407	0,000	0,174	1,476	1,467	0,010	0,011	0,945	1,410	0,001	0,000	-0,003
30	1,394	0,001	0,165	1,410	1,401	0,011	0,011	0,960	1,395	0,000	0,000	0,000
31	1,450	0,000	0,157	1,395	1,386	0,009	0,010	0,949	1,447	0,001	0,000	0,003
32	1,310	0,001	0,149	1,447	1,438	0,010	0,010	0,953	1,316	0,000	0,000	-0,006
33	1,364	0,000	0,142	1,316	1,308	0,010	0,011	0,951	1,361	0,001	0,000	0,003
34	1,271	0,001	0,135	1,361	1,354	0,010	0,011	0,954	1,274	0,000	0,000	-0,004
35	1,255	0,000	0,128	1,274	1,267	0,010	0,010	0,952	1,255	0,000	0,000	-0,001
36	1,176	0,000	0,121	1,255	1,248	0,009	0,010	0,952	1,179	0,000	0,000	-0,003
37	1,168	0,000	0,115	1,179	1,173	0,010	0,011	0,949	1,168	0,001	0,000	0,000
38	1,127	0,001	0,110	1,168	1,162	0,009	0,010	0,956	1,128	0,000	0,000	-0,002
39	1,115	0,000	0,104	1,128	1,123	0,011	0,011	0,946	1,115	0,001	0,000	0,000
40	1,017	0,001	0,099	1,115	1,110	0,010	0,010	0,960	1,021	0,000	0,000	-0,004
41	1,024	0,000	0,094	1,021	1,016	0,009	0,010	0,943	1,024	0,001	0,000	0,000
42	1,007	0,001	0,089	1,024	1,019	0,010	0,011	0,958	1,008	0,000	0,000	0,000
43	1,029	0,000	0,085	1,008	1,003	0,011	0,011	0,948	1,027	0,001	0,000	0,001
44	0,905	0,001	0,081	1,027	1,023	0,010	0,010	0,960	0,910	0,000	0,000	-0,005
45	0,939	0,000	0,077	0,910	0,906	0,010	0,010	0,942	0,937	0,001	0,000	0,002
46	0,855	0,001	0,073	0,937	0,933	0,010	0,011	0,959	0,858	0,000	0,000	-0,003
47	0,925	0,000	0,069	0,858	0,854	0,010	0,010	0,945	0,921	0,001	0,000	0,004
48	0,803	0,001	0,066	0,921	0,918	0,009	0,010	0,958	0,807	0,000	0,000	-0,005
49	0,798	0,000	0,062	0,807	0,804	0,010	0,011	0,941	0,799	0,001	0,000	0,000
50	0,723	0,001	0,059	0,799	0,795	0,009	0,010	0,962	0,725	0,000	0,000	-0,003
51	0,682	0,000	0,056	0,725	0,722	0,010	0,011	0,939	0,684	0,001	0,000	-0,002
52	0,728	0,001	0,053	0,684	0,681	0,011	0,012	0,963	0,726	0,000	0,000	0,002
53	0,702	0,000	0,051	0,726	0,723	0,010	0,010	0,945	0,703	0,001	0,000	-0,001
54	0,695	0,001	0,048	0,703	0,701	0,010	0,011	0,958	0,695	0,000	0,000	0,000
55	0,654	0,000	0,046	0,695	0,692	0,011	0,011	0,946	0,656	0,001	0,000	-0,002
56	0,649	0,001	0,044	0,656	0,654	0,009	0,010	0,960	0,649	0,000	0,000	0,000
57	0,546	0,000	0,041	0,649	0,647	0,010	0,010	0,941	0,552	0,001	0,000	-0,006
58	0,644	0,001	0,039	0,552	0,550	0,010	0,011	0,960	0,640	0,000	0,000	0,004
59	0,526	0,000	0,037	0,640	0,638	0,010	0,010	0,946	0,532	0,001	0,000	-0,006
60	0,573	0,001	0,035	0,532	0,530	0,010	0,010	0,955	0,571	0,000	0,000	0,002
										RMSE	0,045	

Асимилација података у хидротхници применом Калмановог филтера

Варијанта 6

Параметри Калмановог филтера $R = 0,01m$, $S = 0,01m^2$, $\pm s = 0,001m^2$, $\Delta T_{mer} = 1s$, $\Delta T_{mod} = 1s$

Време [s]	Измерене вредности [m]	Предикција						Каламанов филтер			RMSE	
		P_{k-1} [m ²]	C [l]	h_{k-1} [m]	h_p [m]	S [m ²]	P_p [m ²]	K [l]	h_{kal} [m]	P [m ²]	err [m ²]	$h_{mer} - h_{kal}$ [m]
0	3,068		0,770						3,000	0,025		0,000
1	2,956	0,025	0,732	3,000	2,959	0,0104	0,035	0,996	2,956	0,000	0,000	0,000
2	2,887	0,000	0,695	2,956	2,917	0,0092	0,009	0,585	2,899	0,004	0,000	-0,013
3	2,861	0,004	0,660	2,899	2,863	0,0108	0,015	0,975	2,861	0,000	0,000	0,000
4	2,683	0,000	0,627	2,861	2,826	0,0106	0,011	0,787	2,714	0,002	0,001	-0,031
5	2,671	0,002	0,596	2,714	2,680	0,0109	0,013	0,959	2,672	0,001	0,000	0,000
6	2,561	0,001	0,566	2,672	2,640	0,0105	0,011	0,845	2,573	0,002	0,000	-0,012
7	2,536	0,002	0,538	2,573	2,543	0,0107	0,012	0,945	2,536	0,001	0,000	0,000
8	2,472	0,001	0,511	2,536	2,508	0,0101	0,011	0,873	2,477	0,001	0,000	-0,005
9	2,401	0,001	0,485	2,477	2,450	0,0101	0,011	0,932	2,404	0,001	0,000	-0,003
10	2,436	0,001	0,461	2,404	2,379	0,0096	0,010	0,886	2,430	0,001	0,000	0,007
11	2,276	0,001	0,438	2,430	2,405	0,0101	0,011	0,921	2,286	0,001	0,000	-0,010
12	2,343	0,001	0,416	2,286	2,263	0,0109	0,012	0,899	2,335	0,001	0,000	0,008
13	2,215	0,001	0,395	2,335	2,313	0,0109	0,012	0,923	2,223	0,001	0,000	-0,008
14	2,141	0,001	0,376	2,223	2,202	0,0095	0,010	0,904	2,147	0,001	0,000	-0,006
15	2,108	0,001	0,357	2,147	2,127	0,0110	0,012	0,910	2,109	0,001	0,000	-0,002
16	1,996	0,001	0,339	2,109	2,090	0,0093	0,010	0,915	2,004	0,001	0,000	-0,008
17	1,978	0,001	0,322	2,004	1,986	0,0107	0,012	0,898	1,979	0,001	0,000	-0,001
18	2,016	0,001	0,306	1,979	1,962	0,0107	0,012	0,922	2,012	0,001	0,000	0,004
19	1,883	0,001	0,291	2,012	1,995	0,0098	0,011	0,903	1,894	0,001	0,000	-0,011
20	1,833	0,001	0,276	1,894	1,878	0,0109	0,012	0,912	1,837	0,001	0,000	-0,004
21	1,810	0,001	0,262	1,837	1,823	0,0108	0,012	0,913	1,811	0,001	0,000	-0,001
22	1,802	0,001	0,249	1,811	1,797	0,0102	0,011	0,912	1,801	0,001	0,000	0,000
23	1,666	0,001	0,237	1,801	1,788	0,0091	0,010	0,908	1,677	0,001	0,000	-0,011
24	1,721	0,001	0,225	1,677	1,664	0,0091	0,010	0,902	1,716	0,001	0,000	0,006
25	1,695	0,001	0,214	1,716	1,704	0,0109	0,012	0,907	1,696	0,001	0,000	-0,001
26	1,531	0,001	0,203	1,696	1,685	0,0103	0,011	0,917	1,544	0,001	0,000	-0,013
27	1,505	0,001	0,193	1,544	1,533	0,0107	0,012	0,905	1,508	0,001	0,000	-0,003
28	1,475	0,001	0,183	1,508	1,498	0,0099	0,011	0,917	1,477	0,001	0,000	-0,002
29	1,407	0,001	0,174	1,477	1,468	0,0092	0,010	0,902	1,413	0,001	0,000	-0,006
30	1,394	0,001	0,165	1,413	1,404	0,0101	0,011	0,909	1,395	0,001	0,000	-0,001
31	1,450	0,001	0,157	1,395	1,386	0,0100	0,011	0,910	1,444	0,001	0,000	0,006
32	1,310	0,001	0,149	1,444	1,436	0,0097	0,011	0,908	1,321	0,001	0,000	-0,012
33	1,364	0,001	0,142	1,321	1,313	0,0101	0,011	0,908	1,359	0,001	0,000	0,005
34	1,271	0,001	0,135	1,359	1,352	0,0103	0,011	0,911	1,278	0,001	0,000	-0,007
35	1,255	0,001	0,128	1,278	1,271	0,0092	0,010	0,910	1,256	0,001	0,000	-0,001
36	1,176	0,001	0,121	1,256	1,249	0,0096	0,011	0,902	1,183	0,001	0,000	-0,007
37	1,168	0,001	0,115	1,183	1,176	0,0104	0,011	0,912	1,169	0,001	0,000	-0,001
38	1,127	0,001	0,110	1,169	1,163	0,0095	0,011	0,909	1,130	0,001	0,000	-0,003
39	1,115	0,001	0,104	1,130	1,124	0,0100	0,011	0,905	1,116	0,001	0,000	-0,001
40	1,017	0,001	0,099	1,116	1,110	0,0091	0,010	0,912	1,025	0,001	0,000	-0,008
41	1,024	0,001	0,094	1,025	1,020	0,0110	0,012	0,898	1,024	0,001	0,000	0,000
42	1,007	0,001	0,089	1,024	1,019	0,0107	0,012	0,923	1,008	0,001	0,000	-0,001
43	1,029	0,001	0,085	1,008	1,003	0,0106	0,012	0,901	1,026	0,001	0,000	0,002
44	0,905	0,001	0,081	1,026	1,022	0,0097	0,011	0,919	0,915	0,001	0,000	-0,009
45	0,939	0,001	0,077	0,915	0,910	0,0097	0,011	0,898	0,936	0,001	0,000	0,003
46	0,855	0,001	0,073	0,936	0,932	0,0093	0,010	0,915	0,861	0,001	0,000	-0,007
47	0,925	0,001	0,069	0,861	0,857	0,0104	0,011	0,898	0,918	0,001	0,000	0,007
48	0,803	0,001	0,066	0,918	0,915	0,0107	0,012	0,920	0,812	0,001	0,000	-0,009
49	0,798	0,001	0,062	0,812	0,808	0,0091	0,010	0,905	0,799	0,001	0,000	-0,001
50	0,723	0,001	0,059	0,799	0,796	0,0107	0,012	0,906	0,730	0,001	0,000	-0,007
51	0,682	0,001	0,056	0,730	0,726	0,0096	0,011	0,917	0,686	0,001	0,000	-0,004
52	0,728	0,001	0,053	0,686	0,683	0,0094	0,010	0,899	0,723	0,001	0,000	0,005
53	0,702	0,001	0,051	0,723	0,720	0,0099	0,011	0,912	0,704	0,001	0,000	-0,002
54	0,695	0,001	0,048	0,704	0,701	0,0107	0,012	0,906	0,695	0,001	0,000	-0,001
55	0,654	0,001	0,046	0,695	0,693	0,0101	0,011	0,916	0,657	0,001	0,000	-0,003
56	0,649	0,001	0,044	0,657	0,655	0,0094	0,010	0,903	0,649	0,001	0,000	-0,001
57	0,546	0,001	0,041	0,649	0,647	0,0109	0,012	0,909	0,555	0,001	0,000	-0,009
58	0,644	0,001	0,039	0,555	0,553	0,0105	0,012	0,915	0,636	0,001	0,000	0,008
59	0,526	0,001	0,037	0,636	0,634	0,0105	0,011	0,908	0,536	0,001	0,000	-0,010
60	0,573	0,001	0,035	0,536	0,534	0,0104	0,011	0,914	0,570	0,001	0,000	0,003
										RMSE	0,056	

Асимилација података у хидротхници применом Калмановог филтера

Варијанта 7

Параметри Калмановог филтера $R = 0,1m, S = 0,01m^2, \pm s = 0,001m^2, \Delta T_{mer} = 1s, \Delta T_{mod} = 1s$

Време	Измерене вредности	Предикција						Каламанов филтер			RMSE	
		P_{k-1}	C	h_{k-1}	h_p	S	P_p	K	h_{kal}	P	err	$h_{mer} - h_{kal}$
[s]	[m]	[m ²]	[l]	[m]	[m]	[m ²]	[m ²]	[l]	[m]	[m ²]	[m ²]	[m]
0	3,068		0,770						3,000	0,025		0,000
1	2,956	0,025	0,732	3,000	2,959	0,0099	0,035	0,714	2,957	0,010	0,000	-0,001
2	2,887	0,010	0,695	2,957	2,918	0,0104	0,020	0,499	2,902	0,010	0,000	-0,016
3	2,861	0,010	0,660	2,902	2,866	0,0104	0,021	0,505	2,863	0,010	0,000	-0,002
4	2,683	0,010	0,627	2,863	2,828	0,0100	0,020	0,505	2,755	0,010	0,005	-0,072
5	2,671	0,010	0,596	2,755	2,722	0,0103	0,020	0,500	2,697	0,010	0,001	-0,025
6	2,561	0,010	0,566	2,697	2,665	0,0099	0,020	0,503	2,613	0,010	0,003	-0,052
7	2,536	0,010	0,538	2,613	2,583	0,0098	0,020	0,499	2,559	0,010	0,001	-0,023
8	2,472	0,010	0,511	2,559	2,531	0,0090	0,019	0,497	2,502	0,010	0,001	-0,030
9	2,401	0,010	0,485	2,502	2,475	0,0098	0,019	0,487	2,439	0,010	0,001	-0,038
10	2,436	0,010	0,461	2,439	2,413	0,0100	0,020	0,497	2,425	0,010	0,000	0,012
11	2,276	0,010	0,438	2,425	2,400	0,0104	0,020	0,500	2,338	0,010	0,004	-0,062
12	2,343	0,010	0,416	2,338	2,315	0,0099	0,020	0,505	2,329	0,010	0,000	0,014
13	2,215	0,010	0,395	2,329	2,307	0,0102	0,020	0,499	2,261	0,010	0,002	-0,046
14	2,141	0,010	0,376	2,261	2,240	0,0094	0,020	0,502	2,190	0,010	0,002	-0,049
15	2,108	0,010	0,357	2,190	2,171	0,0109	0,021	0,492	2,140	0,010	0,001	-0,032
16	1,996	0,010	0,339	2,140	2,121	0,0104	0,021	0,512	2,057	0,010	0,004	-0,061
17	1,978	0,010	0,322	2,057	2,039	0,0092	0,019	0,505	2,008	0,010	0,001	-0,030
18	2,016	0,010	0,306	2,008	1,991	0,0109	0,020	0,490	2,003	0,010	0,000	0,013
19	1,883	0,010	0,291	2,003	1,987	0,0107	0,021	0,511	1,934	0,010	0,003	-0,051
20	1,833	0,010	0,276	1,934	1,918	0,0098	0,020	0,508	1,875	0,010	0,002	-0,042
21	1,810	0,010	0,262	1,875	1,861	0,0090	0,019	0,497	1,835	0,010	0,001	-0,026
22	1,802	0,010	0,249	1,835	1,822	0,0101	0,020	0,488	1,812	0,010	0,000	-0,010
23	1,666	0,010	0,237	1,812	1,799	0,0095	0,020	0,501	1,732	0,010	0,004	-0,066
24	1,721	0,010	0,225	1,732	1,719	0,0110	0,021	0,494	1,720	0,010	0,000	0,001
25	1,695	0,010	0,214	1,720	1,708	0,0108	0,021	0,512	1,702	0,010	0,000	-0,006
26	1,531	0,010	0,203	1,702	1,690	0,0094	0,020	0,510	1,609	0,010	0,006	-0,078
27	1,505	0,010	0,193	1,609	1,599	0,0100	0,020	0,492	1,553	0,010	0,002	-0,047
28	1,475	0,010	0,183	1,553	1,543	0,0100	0,020	0,500	1,509	0,010	0,001	-0,034
29	1,407	0,010	0,174	1,509	1,499	0,0093	0,019	0,500	1,453	0,010	0,002	-0,046
30	1,394	0,010	0,165	1,453	1,444	0,0107	0,020	0,491	1,420	0,010	0,001	-0,025
31	1,450	0,010	0,157	1,420	1,411	0,0106	0,021	0,508	1,431	0,010	0,000	0,019
32	1,310	0,010	0,149	1,431	1,422	0,0100	0,020	0,507	1,365	0,010	0,003	-0,056
33	1,364	0,010	0,142	1,365	1,357	0,0100	0,020	0,499	1,361	0,010	0,000	0,003
34	1,271	0,010	0,135	1,361	1,353	0,0102	0,020	0,500	1,312	0,010	0,002	-0,041
35	1,255	0,010	0,128	1,312	1,305	0,0090	0,019	0,502	1,280	0,010	0,001	-0,025
36	1,176	0,010	0,121	1,280	1,273	0,0108	0,020	0,488	1,225	0,010	0,002	-0,050
37	1,168	0,010	0,115	1,225	1,219	0,0107	0,021	0,510	1,193	0,010	0,001	-0,025
38	1,127	0,010	0,110	1,193	1,187	0,0097	0,020	0,508	1,156	0,010	0,001	-0,029
39	1,115	0,010	0,104	1,156	1,151	0,0107	0,021	0,496	1,133	0,010	0,000	-0,018
40	1,017	0,010	0,099	1,133	1,127	0,0099	0,020	0,508	1,071	0,010	0,003	-0,054
41	1,024	0,010	0,094	1,071	1,066	0,0091	0,019	0,499	1,045	0,010	0,000	-0,021
42	1,007	0,010	0,089	1,045	1,040	0,0109	0,021	0,489	1,024	0,010	0,000	-0,017
43	1,029	0,010	0,085	1,024	1,019	0,0097	0,020	0,512	1,024	0,010	0,000	0,004
44	0,905	0,010	0,081	1,024	1,020	0,0100	0,020	0,496	0,963	0,010	0,003	-0,058
45	0,939	0,010	0,077	0,963	0,959	0,0095	0,019	0,499	0,949	0,010	0,000	-0,010
46	0,855	0,010	0,073	0,949	0,945	0,0106	0,020	0,494	0,900	0,010	0,002	-0,046
47	0,925	0,010	0,069	0,900	0,897	0,0098	0,020	0,507	0,911	0,010	0,000	0,014
48	0,803	0,010	0,066	0,911	0,907	0,0102	0,020	0,498	0,855	0,010	0,003	-0,053
49	0,798	0,010	0,062	0,855	0,852	0,0095	0,020	0,502	0,825	0,010	0,001	-0,027
50	0,723	0,010	0,059	0,825	0,822	0,0109	0,021	0,494	0,773	0,010	0,003	-0,050
51	0,682	0,010	0,056	0,773	0,770	0,0109	0,021	0,511	0,725	0,010	0,002	-0,043
52	0,728	0,010	0,053	0,725	0,722	0,0101	0,020	0,511	0,725	0,010	0,000	0,003
53	0,702	0,010	0,051	0,725	0,722	0,0109	0,021	0,501	0,712	0,010	0,000	-0,010
54	0,695	0,010	0,048	0,712	0,709	0,0095	0,020	0,511	0,702	0,010	0,000	-0,007
55	0,654	0,010	0,046	0,702	0,699	0,0094	0,019	0,494	0,677	0,010	0,001	-0,023
56	0,649	0,010	0,044	0,677	0,675	0,0096	0,019	0,493	0,662	0,010	0,000	-0,013
57	0,546	0,010	0,041	0,662	0,660	0,0106	0,020	0,495	0,604	0,010	0,003	-0,057
58	0,644	0,010	0,039	0,604	0,601	0,0110	0,021	0,508	0,623	0,010	0,000	0,021
59	0,526	0,010	0,037	0,623	0,621	0,0096	0,020	0,512	0,572	0,010	0,002	-0,046
60	0,573	0,010	0,035	0,572	0,571	0,0095	0,019	0,495	0,572	0,010	0,000	0,001
										RMSE	0,286	

Асимилација података у хидротхници применом Калмановог филтера

Варијанта 8

Параметри Калмановог филтера $R = 0,02m$, $S = 0,002m^2$, $\pm s = 0,0002m^2$, $\Delta T_{mer} = 1s$, $\Delta T_{mod} = 1s$

Време	Измерене вредности	Предикција						Калманов филтер			RMSE	
		P_{k-1}	C	h_{k-1}	h_p	S	P_p	K	h_{kal}	P	err	$h_{mer} - h_{kal}$
[s]	[m]	[m ²]	[l]	[m]	[m]	[m ²]	[m ²]	[l]	[m]	[m ²]	[m ²]	[m]
0	3,068		0,770						3,000	0,025		0,000
1	2,956	0,025	0,732	3,000	2,959	0,002	0,027	0,984	2,956	0,000	0,000	0,000
2	2,887	0,000	0,695	2,956	2,917	0,002	0,002	0,516	2,901	0,001	0,000	-0,015
3	2,861	0,001	0,660	2,901	2,865	0,002	0,003	0,736	2,862	0,001	0,000	-0,001
4	2,683	0,001	0,627	2,862	2,827	0,002	0,003	0,670	2,731	0,001	0,002	-0,048
5	2,671	0,001	0,596	2,731	2,697	0,002	0,003	0,712	2,679	0,001	0,000	-0,007
6	2,561	0,001	0,566	2,679	2,647	0,002	0,003	0,687	2,588	0,001	0,001	-0,027
7	2,536	0,001	0,538	2,588	2,558	0,002	0,003	0,703	2,543	0,001	0,000	-0,007
8	2,472	0,001	0,511	2,543	2,514	0,002	0,003	0,675	2,486	0,001	0,000	-0,014
9	2,401	0,001	0,485	2,486	2,459	0,002	0,003	0,682	2,419	0,001	0,000	-0,018
10	2,436	0,001	0,461	2,419	2,394	0,002	0,003	0,705	2,424	0,001	0,000	0,013
11	2,276	0,001	0,438	2,424	2,399	0,002	0,003	0,693	2,314	0,001	0,001	-0,038
12	2,343	0,001	0,416	2,314	2,291	0,002	0,003	0,676	2,326	0,001	0,000	0,017
13	2,215	0,001	0,395	2,326	2,304	0,002	0,003	0,682	2,243	0,001	0,001	-0,028
14	2,141	0,001	0,376	2,243	2,222	0,002	0,003	0,687	2,166	0,001	0,001	-0,025
15	2,108	0,001	0,357	2,166	2,147	0,002	0,003	0,679	2,120	0,001	0,000	-0,013
16	1,996	0,001	0,339	2,120	2,101	0,002	0,003	0,686	2,029	0,001	0,001	-0,033
17	1,978	0,001	0,322	2,029	2,011	0,002	0,003	0,685	1,988	0,001	0,000	-0,011
18	2,016	0,001	0,306	1,988	1,971	0,002	0,003	0,698	2,002	0,001	0,000	0,013
19	1,883	0,001	0,291	2,002	1,986	0,002	0,003	0,680	1,916	0,001	0,001	-0,033
20	1,833	0,001	0,276	1,916	1,901	0,002	0,003	0,685	1,855	0,001	0,000	-0,021
21	1,810	0,001	0,262	1,855	1,840	0,002	0,003	0,684	1,819	0,001	0,000	-0,009
22	1,802	0,001	0,249	1,819	1,806	0,002	0,003	0,692	1,803	0,001	0,000	-0,001
23	1,666	0,001	0,237	1,803	1,790	0,002	0,003	0,700	1,703	0,001	0,001	-0,037
24	1,721	0,001	0,225	1,703	1,690	0,002	0,003	0,690	1,712	0,001	0,000	0,010
25	1,695	0,001	0,214	1,712	1,700	0,002	0,003	0,688	1,697	0,001	0,000	-0,001
26	1,531	0,001	0,203	1,697	1,685	0,002	0,003	0,696	1,578	0,001	0,002	-0,047
27	1,505	0,001	0,193	1,578	1,567	0,002	0,003	0,702	1,524	0,001	0,000	-0,019
28	1,475	0,001	0,183	1,524	1,514	0,002	0,003	0,685	1,487	0,001	0,000	-0,012
29	1,407	0,001	0,174	1,487	1,478	0,002	0,003	0,696	1,429	0,001	0,000	-0,022
30	1,394	0,001	0,165	1,429	1,419	0,002	0,003	0,695	1,402	0,001	0,000	-0,008
31	1,450	0,001	0,157	1,402	1,393	0,002	0,003	0,674	1,432	0,001	0,000	0,019
32	1,310	0,001	0,149	1,432	1,423	0,002	0,003	0,700	1,344	0,001	0,001	-0,034
33	1,364	0,001	0,142	1,344	1,336	0,002	0,003	0,690	1,355	0,001	0,000	0,009
34	1,271	0,001	0,135	1,355	1,348	0,002	0,003	0,677	1,296	0,001	0,001	-0,025
35	1,255	0,001	0,128	1,296	1,289	0,002	0,003	0,709	1,264	0,001	0,000	-0,010
36	1,176	0,001	0,121	1,264	1,258	0,002	0,003	0,676	1,202	0,001	0,001	-0,027
37	1,168	0,001	0,115	1,202	1,196	0,002	0,003	0,704	1,176	0,001	0,000	-0,008
38	1,127	0,001	0,110	1,176	1,170	0,002	0,003	0,683	1,141	0,001	0,000	-0,014
39	1,115	0,001	0,104	1,141	1,135	0,002	0,003	0,706	1,121	0,001	0,000	-0,006
40	1,017	0,001	0,099	1,121	1,115	0,002	0,003	0,674	1,049	0,001	0,001	-0,032
41	1,024	0,001	0,094	1,049	1,044	0,002	0,003	0,687	1,030	0,001	0,000	-0,006
42	1,007	0,001	0,089	1,030	1,025	0,002	0,003	0,684	1,013	0,001	0,000	-0,006
43	1,029	0,001	0,085	1,013	1,008	0,002	0,003	0,679	1,022	0,001	0,000	0,007
44	0,905	0,001	0,081	1,022	1,018	0,002	0,003	0,681	0,941	0,001	0,001	-0,036
45	0,939	0,001	0,077	0,941	0,937	0,002	0,003	0,688	0,938	0,001	0,000	0,001
46	0,855	0,001	0,073	0,938	0,934	0,002	0,003	0,680	0,880	0,001	0,001	-0,026
47	0,925	0,001	0,069	0,880	0,876	0,002	0,003	0,706	0,911	0,001	0,000	0,014
48	0,803	0,001	0,066	0,911	0,907	0,002	0,003	0,693	0,835	0,001	0,001	-0,032
49	0,798	0,001	0,062	0,835	0,831	0,002	0,003	0,696	0,808	0,001	0,000	-0,010
50	0,723	0,001	0,059	0,808	0,805	0,002	0,003	0,674	0,750	0,001	0,001	-0,027
51	0,682	0,001	0,056	0,750	0,746	0,002	0,003	0,686	0,702	0,001	0,000	-0,020
52	0,728	0,001	0,053	0,702	0,699	0,002	0,003	0,688	0,719	0,001	0,000	0,009
53	0,702	0,001	0,051	0,719	0,716	0,002	0,003	0,677	0,707	0,001	0,000	-0,004
54	0,695	0,001	0,048	0,707	0,704	0,002	0,003	0,702	0,698	0,001	0,000	-0,003
55	0,654	0,001	0,046	0,698	0,695	0,002	0,003	0,693	0,667	0,001	0,000	-0,013
56	0,649	0,001	0,044	0,667	0,664	0,002	0,003	0,703	0,653	0,001	0,000	-0,005
57	0,546	0,001	0,041	0,653	0,651	0,002	0,003	0,689	0,579	0,001	0,001	-0,033
58	0,644	0,001	0,039	0,579	0,577	0,002	0,003	0,706	0,624	0,001	0,000	0,020
59	0,526	0,001	0,037	0,624	0,622	0,002	0,003	0,690	0,556	0,001	0,001	-0,030
60	0,573	0,001	0,035	0,556	0,554	0,002	0,003	0,694	0,567	0,001	0,000	0,006
										RMSE	0,163	

Асимилација података у хидротхници применом Калмановог филтера

Варијанта 9

Параметри Калмановог филтера $R = 0,02m$, $S = 0,002m^2$, $\pm s = 0,0002m^2$, $\Delta T_{mer} = 2s$, $\Delta T_{mod} = 1s$

Време	Измерене вредности	Предикција						Каламанов филтер		
		P_{k-1}	C	h_{k-1}	h_p	S	P_p	K	h_{kal}	P
[s]	[m]	[m ²]	[/]	[m]	[m]	[m ²]	[m ²]	[/]	[m]	[m ²]
0	3,068		0,770						3,000	0,025
1	0,000	0,025	0,732	3,000	2,959	0,0021	0,027	0,984	2,959	0,000
2	2,887	0,000	0,695	2,959	2,921	0,0018	0,002	0,516	2,903	0,001
3	0,000	0,001	0,660	2,903	2,866	0,0019	0,003	0,732	2,866	0,001
4	2,683	0,001	0,627	2,866	2,832	0,0022	0,003	0,668	2,732	0,001
5	0,000	0,001	0,596	2,732	2,699	0,0021	0,003	0,713	2,699	0,001
6	2,561	0,001	0,566	2,699	2,668	0,0021	0,003	0,692	2,594	0,001
7	0,000	0,001	0,538	2,594	2,564	0,0020	0,003	0,696	2,564	0,001
8	2,472	0,001	0,511	2,564	2,536	0,0020	0,003	0,691	2,492	0,001
9	0,000	0,001	0,485	2,492	2,465	0,0020	0,003	0,693	2,465	0,001
10	2,436	0,001	0,461	2,465	2,439	0,0021	0,003	0,687	2,437	0,001
11	0,000	0,001	0,438	2,437	2,413	0,0021	0,003	0,703	2,413	0,001
12	2,343	0,001	0,416	2,413	2,390	0,0019	0,003	0,694	2,357	0,001
13	0,000	0,001	0,395	2,357	2,335	0,0022	0,003	0,683	2,335	0,001
14	2,141	0,001	0,376	2,335	2,314	0,0018	0,003	0,706	2,192	0,001
15	0,000	0,001	0,357	2,192	2,172	0,0019	0,003	0,673	2,172	0,001
16	1,996	0,001	0,339	2,172	2,153	0,0019	0,003	0,690	2,045	0,001
17	0,000	0,001	0,322	2,045	2,027	0,0019	0,003	0,683	2,027	0,001
18	2,016	0,001	0,306	2,027	2,010	0,0018	0,003	0,687	2,014	0,001
19	0,000	0,001	0,291	2,014	1,998	0,0022	0,003	0,681	1,998	0,001
20	1,833	0,001	0,276	1,998	1,983	0,0018	0,003	0,707	1,877	0,001
21	0,000	0,001	0,262	1,877	1,862	0,0022	0,003	0,673	1,862	0,001
22	1,802	0,001	0,249	1,862	1,849	0,0019	0,003	0,709	1,815	0,001
23	0,000	0,001	0,237	1,815	1,802	0,0019	0,003	0,679	1,802	0,001
24	1,721	0,001	0,225	1,802	1,790	0,0019	0,003	0,687	1,743	0,001
25	0,000	0,001	0,214	1,743	1,731	0,0018	0,003	0,686	1,731	0,001
26	1,531	0,001	0,203	1,731	1,719	0,0021	0,003	0,679	1,592	0,001
27	0,000	0,001	0,193	1,592	1,581	0,0018	0,003	0,700	1,581	0,001
28	1,475	0,001	0,183	1,581	1,571	0,0021	0,003	0,673	1,507	0,001
29	0,000	0,001	0,174	1,507	1,497	0,0021	0,003	0,708	1,497	0,001
30	1,394	0,001	0,165	1,497	1,488	0,0019	0,003	0,692	1,423	0,001
31	0,000	0,001	0,157	1,423	1,414	0,0021	0,003	0,684	1,414	0,001
32	1,310	0,001	0,149	1,414	1,406	0,0022	0,003	0,702	1,338	0,001
33	0,000	0,001	0,142	1,338	1,330	0,0020	0,003	0,698	1,330	0,001
34	1,271	0,001	0,135	1,330	1,323	0,0021	0,003	0,688	1,287	0,001
35	0,000	0,001	0,128	1,287	1,280	0,0019	0,003	0,702	1,280	0,001
36	1,176	0,001	0,121	1,280	1,273	0,0020	0,003	0,677	1,207	0,001
37	0,000	0,001	0,115	1,207	1,201	0,0020	0,003	0,700	1,201	0,001
38	1,127	0,001	0,110	1,201	1,195	0,0019	0,003	0,686	1,148	0,001
39	0,000	0,001	0,104	1,148	1,142	0,0020	0,003	0,689	1,142	0,001
40	1,017	0,001	0,099	1,142	1,137	0,0019	0,003	0,689	1,054	0,001
41	0,000	0,001	0,094	1,054	1,049	0,0018	0,003	0,687	1,049	0,001
42	1,007	0,001	0,089	1,049	1,044	0,0019	0,003	0,680	1,019	0,001
43	0,000	0,001	0,085	1,019	1,014	0,0020	0,003	0,684	1,014	0,001
44	0,905	0,001	0,081	1,014	1,010	0,0022	0,003	0,691	0,937	0,001
45	0,000	0,001	0,077	0,937	0,933	0,0019	0,003	0,703	0,933	0,001
46	0,855	0,001	0,073	0,933	0,929	0,0020	0,003	0,680	0,878	0,001
47	0,000	0,001	0,069	0,878	0,875	0,0020	0,003	0,697	0,875	0,001
48	0,803	0,001	0,066	0,875	0,871	0,0021	0,003	0,688	0,824	0,001
49	0,000	0,001	0,062	0,824	0,820	0,0019	0,003	0,699	0,820	0,001
50	0,723	0,001	0,059	0,820	0,817	0,0019	0,003	0,681	0,753	0,001
51	0,000	0,001	0,056	0,753	0,750	0,0020	0,003	0,689	0,750	0,001
52	0,728	0,001	0,053	0,750	0,747	0,0018	0,003	0,692	0,734	0,001
53	0,000	0,001	0,051	0,734	0,731	0,0019	0,003	0,676	0,731	0,001
54	0,695	0,001	0,048	0,731	0,728	0,0021	0,003	0,687	0,705	0,001
55	0,000	0,001	0,046	0,705	0,703	0,0019	0,003	0,699	0,703	0,001
56	0,649	0,001	0,044	0,703	0,700	0,0020	0,003	0,677	0,665	0,001
57	0,000	0,001	0,041	0,665	0,663	0,0020	0,003	0,693	0,663	0,001
58	0,644	0,001	0,039	0,663	0,661	0,0022	0,003	0,691	0,649	0,001
59	0,000	0,001	0,037	0,649	0,647	0,0020	0,003	0,704	0,647	0,001
60	0,573	0,001	0,035	0,647	0,645	0,0019	0,003	0,688	0,595	0,001

Асимилација података у хидротхници применом Калмановог филтера

Варијанта 10

Параметри Калмановог филтера $R = 0,02m$, $S = 0,002m^2$, $\pm s = 0,0002m^2$, $\Delta T_{mer} = 5s$, $\Delta T_{mod} = 1s$

Време	Измерене вредности	Предикција						Каламанов филтер		
		P_{k-1}	C	h_{k-1}	h_p	S	P_p	K	h_{kal}	P
[s]	[m]	[m ²]	[/]	[m]	[m]	[m ²]	[m ²]	[/]	[m]	[m ²]
0	3,068		0,770						3,000	0,025
1	0,000	0,025	0,732	3,000	2,959	0,0022	0,027	0,984	2,959	0,000
2	0,000	0,000	0,695	2,959	2,921	0,0021	0,003	0,517	2,921	0,001
3	0,000	0,001	0,660	2,921	2,884	0,0021	0,003	0,752	2,884	0,001
4	0,000	0,001	0,627	2,884	2,849	0,0021	0,003	0,675	2,849	0,001
5	2,671	0,001	0,596	2,849	2,816	0,0018	0,003	0,706	2,714	0,001
6	0,000	0,001	0,566	2,714	2,682	0,0019	0,003	0,671	2,682	0,001
7	0,000	0,001	0,538	2,682	2,653	0,0019	0,003	0,691	2,653	0,001
8	0,000	0,001	0,511	2,653	2,624	0,0018	0,003	0,680	2,624	0,001
9	0,000	0,001	0,485	2,624	2,597	0,0019	0,003	0,682	2,597	0,001
10	2,436	0,001	0,461	2,597	2,571	0,0020	0,003	0,685	2,479	0,001
11	0,000	0,001	0,438	2,479	2,454	0,0018	0,003	0,694	2,454	0,001
12	0,000	0,001	0,416	2,454	2,431	0,0018	0,003	0,678	2,431	0,001
13	0,000	0,001	0,395	2,431	2,409	0,0018	0,003	0,683	2,409	0,001
14	0,000	0,001	0,376	2,409	2,388	0,0019	0,003	0,681	2,388	0,001
15	2,108	0,001	0,357	2,388	2,369	0,0021	0,003	0,690	2,188	0,001
16	0,000	0,001	0,339	2,188	2,170	0,0021	0,003	0,697	2,170	0,001
17	0,000	0,001	0,322	2,170	2,152	0,0019	0,003	0,694	2,152	0,001
18	0,000	0,001	0,306	2,152	2,135	0,0021	0,003	0,682	2,135	0,001
19	0,000	0,001	0,291	2,135	2,119	0,0019	0,003	0,701	2,119	0,001
20	1,833	0,001	0,276	2,119	2,103	0,0019	0,003	0,680	1,920	0,001
21	0,000	0,001	0,262	1,920	1,905	0,0022	0,003	0,689	1,905	0,001
22	0,000	0,001	0,249	1,905	1,891	0,0021	0,003	0,704	1,891	0,001
23	0,000	0,001	0,237	1,891	1,878	0,0019	0,003	0,693	1,878	0,001
24	0,000	0,001	0,225	1,878	1,866	0,0020	0,003	0,681	1,866	0,001
25	1,695	0,001	0,214	1,866	1,854	0,0021	0,003	0,691	1,744	0,001
26	0,000	0,001	0,203	1,744	1,733	0,0019	0,003	0,699	1,733	0,001
27	0,000	0,001	0,193	1,733	1,722	0,0019	0,003	0,683	1,722	0,001
28	0,000	0,001	0,183	1,722	1,712	0,0021	0,003	0,690	1,712	0,001
29	0,000	0,001	0,174	1,712	1,702	0,0020	0,003	0,699	1,702	0,001
30	1,394	0,001	0,165	1,702	1,693	0,0019	0,003	0,687	1,488	0,001
31	0,000	0,001	0,157	1,488	1,479	0,0020	0,003	0,682	1,479	0,001
32	0,000	0,001	0,149	1,479	1,471	0,0022	0,003	0,692	1,471	0,001
33	0,000	0,001	0,142	1,471	1,463	0,0020	0,003	0,704	1,463	0,001
34	0,000	0,001	0,135	1,463	1,455	0,0018	0,003	0,684	1,455	0,001
35	1,255	0,001	0,128	1,455	1,448	0,0020	0,003	0,681	1,316	0,001
36	0,000	0,001	0,121	1,316	1,310	0,0022	0,003	0,694	1,310	0,001
37	0,000	0,001	0,115	1,310	1,303	0,0020	0,003	0,703	1,303	0,001
38	0,000	0,001	0,110	1,303	1,297	0,0019	0,003	0,689	1,297	0,001
39	0,000	0,001	0,104	1,297	1,291	0,0021	0,003	0,687	1,291	0,001
40	1,017	0,001	0,099	1,291	1,286	0,0021	0,003	0,699	1,098	0,001
41	0,000	0,001	0,094	1,098	1,093	0,0021	0,003	0,698	1,093	0,001
42	0,000	0,001	0,089	1,093	1,088	0,0019	0,003	0,693	1,088	0,001
43	0,000	0,001	0,085	1,088	1,083	0,0019	0,003	0,684	1,083	0,001
44	0,000	0,001	0,081	1,083	1,079	0,0020	0,003	0,683	1,079	0,001
45	0,939	0,001	0,077	1,079	1,074	0,0021	0,003	0,692	0,981	0,001
46	0,000	0,001	0,073	0,981	0,977	0,0022	0,003	0,701	0,977	0,001
47	0,000	0,001	0,069	0,977	0,973	0,0019	0,003	0,701	0,973	0,001
48	0,000	0,001	0,066	0,973	0,969	0,0020	0,003	0,682	0,969	0,001
49	0,000	0,001	0,062	0,969	0,966	0,0021	0,003	0,696	0,966	0,001
50	0,723	0,001	0,059	0,966	0,963	0,0019	0,003	0,698	0,795	0,001
51	0,000	0,001	0,056	0,795	0,792	0,0018	0,003	0,683	0,792	0,001
52	0,000	0,001	0,053	0,792	0,789	0,0020	0,003	0,679	0,789	0,001
53	0,000	0,001	0,051	0,789	0,786	0,0018	0,003	0,692	0,786	0,001
54	0,000	0,001	0,048	0,786	0,784	0,0020	0,003	0,676	0,784	0,001
55	0,654	0,001	0,046	0,784	0,781	0,0019	0,003	0,696	0,693	0,001
56	0,000	0,001	0,044	0,693	0,690	0,0020	0,003	0,685	0,690	0,001
57	0,000	0,001	0,041	0,690	0,688	0,0019	0,003	0,692	0,688	0,001
58	0,000	0,001	0,039	0,688	0,686	0,0019	0,003	0,682	0,686	0,001
59	0,000	0,001	0,037	0,686	0,684	0,0020	0,003	0,685	0,684	0,001
60	0,573	0,001	0,035	0,684	0,682	0,0021	0,003	0,694	0,606	0,001

Асимилација података у хидротхници применом Калмановог филтера

Варијанта 11

Параметри Калмановог филтера $R = 0,02m$, $S = 0,002m^2$, $\pm s = 0,0002m^2$, $\Delta T_{mer} = 10s$, $\Delta T_{mod} = 1s$.

Време	Измерене вредности	Предикција						Каламанов филтер		
		P_{k-1}	C	h_{k-1}	h_p	S	P_p	K	h_{kal}	P
[s]	[m]	[m ²]	[l]	[m]	[m]	[m ²]	[m ²]	[l]	[m]	[m ²]
0	3,068		0,770						3,000	0,025
1	0,000	0,025	0,732	3,000	2,959	0,0021	0,027	0,984	2,959	0,000
2	0,000	0,000	0,695	2,959	2,921	0,0021	0,003	0,516	2,921	0,001
3	0,000	0,001	0,660	2,921	2,884	0,0018	0,003	0,753	2,884	0,001
4	0,000	0,001	0,627	2,884	2,849	0,0021	0,003	0,652	2,849	0,001
5	0,000	0,001	0,596	2,849	2,816	0,0021	0,003	0,711	2,816	0,001
6	0,000	0,001	0,566	2,816	2,784	0,0019	0,003	0,687	2,784	0,001
7	0,000	0,001	0,538	2,784	2,754	0,0020	0,003	0,688	2,754	0,001
8	0,000	0,001	0,511	2,754	2,726	0,0019	0,003	0,692	2,726	0,001
9	0,000	0,001	0,485	2,726	2,699	0,0022	0,003	0,686	2,699	0,001
10	2,436	0,001	0,461	2,699	2,673	0,0022	0,003	0,706	2,506	0,001
11	0,000	0,001	0,438	2,506	2,482	0,0021	0,003	0,696	2,482	0,001
12	0,000	0,001	0,416	2,482	2,458	0,0018	0,003	0,696	2,458	0,001
13	0,000	0,001	0,395	2,458	2,436	0,0020	0,003	0,677	2,436	0,001
14	0,000	0,001	0,376	2,436	2,416	0,0019	0,003	0,697	2,416	0,001
15	0,000	0,001	0,357	2,416	2,396	0,0020	0,003	0,681	2,396	0,001
16	0,000	0,001	0,339	2,396	2,377	0,0018	0,003	0,698	2,377	0,001
17	0,000	0,001	0,322	2,377	2,359	0,0020	0,003	0,676	2,359	0,001
18	0,000	0,001	0,306	2,359	2,342	0,0021	0,003	0,699	2,342	0,001
19	0,000	0,001	0,291	2,342	2,326	0,0018	0,003	0,694	2,326	0,001
20	1,833	0,001	0,276	2,326	2,310	0,0019	0,003	0,678	1,987	0,001
21	0,000	0,001	0,262	1,987	1,972	0,0020	0,003	0,686	1,972	0,001
22	0,000	0,001	0,249	1,972	1,959	0,0021	0,003	0,696	1,959	0,001
23	0,000	0,001	0,237	1,959	1,945	0,0021	0,003	0,693	1,945	0,001
24	0,000	0,001	0,225	1,945	1,933	0,0022	0,003	0,697	1,933	0,001
25	0,000	0,001	0,214	1,933	1,921	0,0021	0,003	0,702	1,921	0,001
26	0,000	0,001	0,203	1,921	1,910	0,0022	0,003	0,694	1,910	0,001
27	0,000	0,001	0,193	1,910	1,899	0,0019	0,003	0,704	1,899	0,001
28	0,000	0,001	0,183	1,899	1,889	0,0020	0,003	0,682	1,889	0,001
29	0,000	0,001	0,174	1,889	1,879	0,0021	0,003	0,696	1,879	0,001
30	1,394	0,001	0,165	1,879	1,870	0,0019	0,003	0,698	1,538	0,001
31	0,000	0,001	0,157	1,538	1,529	0,0020	0,003	0,684	1,529	0,001
32	0,000	0,001	0,149	1,529	1,521	0,0021	0,003	0,697	1,521	0,001
33	0,000	0,001	0,142	1,521	1,513	0,0022	0,003	0,693	1,513	0,001
34	0,000	0,001	0,135	1,513	1,506	0,0020	0,003	0,702	1,506	0,001
35	0,000	0,001	0,128	1,506	1,498	0,0020	0,003	0,688	1,498	0,001
36	0,000	0,001	0,121	1,498	1,492	0,0019	0,003	0,695	1,492	0,001
37	0,000	0,001	0,115	1,492	1,485	0,0018	0,003	0,680	1,485	0,001
38	0,000	0,001	0,110	1,485	1,479	0,0022	0,003	0,681	1,479	0,001
39	0,000	0,001	0,104	1,479	1,473	0,0020	0,003	0,708	1,473	0,001
40	1,017	0,001	0,099	1,473	1,468	0,0019	0,003	0,686	1,159	0,001
41	0,000	0,001	0,094	1,159	1,154	0,0020	0,003	0,686	1,154	0,001
42	0,000	0,001	0,089	1,154	1,149	0,0021	0,003	0,693	1,149	0,001
43	0,000	0,001	0,085	1,149	1,144	0,0020	0,003	0,695	1,144	0,001
44	0,000	0,001	0,081	1,144	1,139	0,0021	0,003	0,690	1,139	0,001
45	0,000	0,001	0,077	1,139	1,135	0,0020	0,003	0,700	1,135	0,001
46	0,000	0,001	0,073	1,135	1,131	0,0018	0,003	0,686	1,131	0,001
47	0,000	0,001	0,069	1,131	1,127	0,0020	0,003	0,678	1,127	0,001
48	0,000	0,001	0,066	1,127	1,124	0,0018	0,003	0,695	1,124	0,001
49	0,000	0,001	0,062	1,124	1,120	0,0019	0,003	0,675	1,120	0,001
50	0,723	0,001	0,059	1,120	1,117	0,0019	0,003	0,693	0,844	0,001
51	0,000	0,001	0,056	0,844	0,841	0,0018	0,003	0,682	0,841	0,001
52	0,000	0,001	0,053	0,841	0,838	0,0022	0,003	0,680	0,838	0,001
53	0,000	0,001	0,051	0,838	0,835	0,0019	0,003	0,709	0,835	0,001
54	0,000	0,001	0,048	0,835	0,832	0,0021	0,003	0,677	0,832	0,001
55	0,000	0,001	0,046	0,832	0,830	0,0020	0,003	0,704	0,830	0,001
56	0,000	0,001	0,044	0,830	0,827	0,0022	0,003	0,689	0,827	0,001
57	0,000	0,001	0,041	0,827	0,825	0,0020	0,003	0,703	0,825	0,001
58	0,000	0,001	0,039	0,825	0,823	0,0020	0,003	0,688	0,823	0,001
59	0,000	0,001	0,037	0,823	0,821	0,0020	0,003	0,696	0,821	0,001
60	0,573	0,001	0,035	0,821	0,819	0,0020	0,003	0,689	0,649	0,001