

Univerzitet u Beogradu
Gradjevinski fakultet

**Propagacija neodredjenosti kod
zatvorenih hidrotehničkih modela**

Magistarska teza

Nemanja Branislavljević, dipl. gradj. inž.

Beograd, 2008. godine

Rezime

Matematičko modeliranje hidrotehničkih pojava i procesa, u današnje vreme, predstavlja nezaobilazni korak kako u inženjerskoj, tako i u naučnoj praksi. Široki spektar problema koje je moguće opisati matematičkim modelima usmerio je praksu modeliranja u pravcu projektovanja i programiranja determinističkih modela, tj. modela koji za ulazne vrednosti i parametre imaju jedinstvene i navodno tačne vrednosti, pa je i rezultat proračuna jedinstvena vrednost. Ne ulazeći u procenu tačnosti i preciznosti rezultata modela, intuitivno se može zaključiti da je ideja o determinističkoj postavci hidrotehničkog problema neadekvatna. Razlog se krije i u varijabilnosti i neodređenosti ulaznih vrednosti i parametara modela, kao i u aproksimativnom konceptu samog matematičkog modela. S obzirom na to da je korisnik modela zainteresovan za rezultat za koji će znati kolika je njegova neodređenost, neophodno je na neki način uskladiti deterministički oblik modela i tu potrebu za procenom neodređenosti rezultata. Upravo ova tema predstavlja put pomirenja determinističkog načina modeliranja i varijabilnosti i neodređenosti prirode.

U modernoj hidrotehničkoj praksi matematički (numerički) modeli predstavljeni su u obliku kompjuterskog kôda. Ova teza se bavi isključivo tzv. zatvorenim determinističkim modelima, tj. modelima koji se nalaze u obliku iskompajliranog *engine-a* sa dostupnim ulaznim podacima, parametrima modela, formatom izlaznih rezultata i sa dokumentacijom o tome šta i kako softver radi. Sam kompjuterski kôd, jednačine matematičkog modela ili metode njihovog rešavanja se u ovoj tezi smatraju nedodirljivim.

U radu se prikazuju i kratko objašnjavaju metode koje se direktno mogu primeniti kod zatvorenih hidrotehničkih modela u skladu sa načinom na koji je ulazna veličina ili parametar modela predstavljen u modelu. Akcenat je stavljen na koncepte već prihvaćene u hidrotehničkoj praksi, pa je izbor primera prilagodjen adekvatnom izboru softverskih rešenja. Takodje, dati su i komentari na rezultate primera.

Ovim radom je započeto istraživanje u jednoj obimnoj oblasti kao što je propagacija neodređenosti pregledom postojećih metoda i postupaka. Na-

stavak istraživanja se može usmeriti u pravcu pronalaženja najefikasnijih ili najtačnijih metoda za svaki tip hidrotehničkog modela.

Ključne reči: Neodređenost modela, Zatvoreni modeli, Monte Karlo metoda, Tejlorov red, Rasplinuti skupovi

Abstract

Mathematical modeling of hydraulic and hydrologic processes is nowadays inevitable in both engineering and scientific practice. Due to a wide spectrum of problems that can be described through mathematical models, modeling practice is oriented towards projecting and programming deterministic models, i.e. models that use unique and supposedly crisp values as input data and parameters and thus have unique values as the result of the calculation. Notwithstanding the estimates of accuracy and preciseness of the model results, it can intuitively be concluded that the idea of a deterministic modeling of hydraulic and hydrologic problems is not adequate. The reason for this can be found in variability and uncertainty of model's input data and parameters, as well as in the approximate character of the used model's concept. Considering that the model user is primarily interested in the result with the value of its uncertainty, it is necessary to provide a way to balance deterministic form of the model with the need for uncertain result. It is this topic that represents a way to reconcile deterministic way of modeling and variability and uncertainty of the nature.

In contemporary hydraulic and hydrologic practice, mathematical (numerical) models are presented by computer codes. This thesis deals exclusively with so-called closed deterministic models, i.e. models in form of compiled engines with available input data, model parameters and results and with documentation on what and how the software is working, while the computer code itself, equations of the mathematical model or methods of their processing remain untouchable.

The thesis presents and briefly explains methods which can be applied directly to hydraulic and hydrologic closed models without intervening in the code itself, and in a manner compatible with the way in which the input value or parameter is presented in the model. The emphasis is on the concepts already accepted in hydraulic and hydrologic practice, so the examples were adjusted to the adequate choice of software solutions. Commentaries to the results of the examples were also given. This paper presents the beginning of research in a complex area such as propagation of uncertainties by reviewing

the existing methods and procedures. Continuance of the research can be directed towards finding the most efficient or most accurate methods for each type of hydraulic and hydrologic models.

Key words: model uncertainty, closed models, Monte Carlo, FOSM, fuzzy sets

Sadržaj

1	Uvod	8
1.1	Matematičko modeliranje i neodređenost	8
1.2	Grupe neodređenosti	10
1.3	Propagacija neodređenosti	12
1.4	Pregled sadržaja teze	12
2	Podele matematičkih modela	14
2.1	Stohastički modeli	15
2.2	Deterministički modeli	17
2.3	Zatvoreni modeli	19
2.4	Karakteristike hidrotehničkih modela	23
2.5	Ciljevi propagacije neodređenosti	26
3	Neodređene veličine	30
3.1	Interval	31
3.2	Raspodela verovatnoće	32
3.3	Rasplinuti skupovi	33
4	Metode propagacije neodređenosti	36
4.1	Analitički postupak propagacije neodređenosti	37
4.2	Metode analize neodređenosti	40
4.2.1	Metode neprobabilističkog tipa	41
4.2.2	Metode probabilističkog tipa, statističke metode	41
4.2.3	Metode probabilističkog tipa, nestatističke metode	41
4.2.4	Posibilističke metode	42
4.3	Metode propagacije korišćene u ovoj tezi	42
5	Intervalna matematika	45
5.1	Osnovni principi intervalne matematike	46
5.2	Prednosti i mane intervalne matematike	49

6	Monte Karlo metoda	52
6.1	Monte Karlo metoda za analizu neodređenosti	53
6.2	Karakteristike Monte Karlo metode	55
6.3	Monte Karlo - Prikaz rezultata	56
6.4	Prednosti i mane	59
6.5	Stratified Sampling	61
6.6	Latin Hypercube	65
6.7	Antithetic variates	70
6.8	Metoda Kvazi Monte Karlo	74
6.9	Metropolis Monte Karlo	75
6.10	Controle Variates Monte Karlo	77
6.11	Metode u kojima se zamenjuje originalni model	81
6.11.1	Surface Response tehnika	81
6.11.2	Veštačka inteligencija	82
6.12	Višedimenzionalne raspodele	83
7	Aproksimacija u tejlorov red	85
7.1	Princip propagacije neodređenosti preko aproksimacije modela Tejlorovim redom	86
7.2	Računanje parcijalnih izvoda	87
7.2.1	Metoda centralnih razlika	87
7.2.2	Metoda jednostranih razlika	87
7.2.3	Nedostaci metoda određivanja parcijalnih izvoda	88
7.3	Metode bazirane na razvoju modela u Tejlorov red	88
7.3.1	Analiza prvog reda i prvog momenta	89
7.3.2	Analiza drugog reda i prvog momenta	89
7.3.3	Analiza prvog reda i drugog momenta	89
7.3.4	Analiza drugog reda i drugog momenta	89
7.4	Analiza modela sa više promenljivih	90
7.5	Prednosti i mane	90
8	Metoda α-preseka	95
8.1	Princip α -presek metode	95
8.2	Monotoni i nemonotoni modeli	97
9	Zaključak	103
	Literatura	105

Glava 1

Uvod

Kratak pregled Glave 1:

Matematičko modeliranje u hidrotehnici predstavlja opisivanje prirodnih pojava matematičkim jednačinama. Parametri i ulazne veličine matematičkih modela su u stvarnosti retko egzaktni i tačni veličine. Međutim, klasičan pristup modeliranju hidrotehničkih procesa, pretpostavlja ih kao takve. Modeliranje kod koga se ulazne veličine i parametri modela prihvataju kao egzaktni, a preslikavanje ulaza u izlaz iz modela kroz određene jednačine je jedinstveno, naziva se determinističko modeliranje. Nasuprot determinističkom pristupu, ukoliko je stohastička komponenta ulaznih veličina i parametara modela izuzetno izražena, moguće je model predstaviti i u stohastičkom obliku što je zbog komplikovanog načina rešavanja izuzetno retka praksa. Ukoliko je model determinističkog tipa, a ulazni podaci i parametri modela nisu egzaktni prirode, potrebno je primeniti postupke propagacije neodređenosti, da bi se dobio adekvatan (neodređen) rezultat. Pošto moderan pristup modeliranju podrazumeva matematičke modele u obliku zatvorenog kompjuterskog kôda razvoj postupaka propagacije neodređenosti predstavlja dodatni izazov jer se kod takvih (zatvorenih) modela dozvoljava jedino pristup ulaznim vrednostima, parametrima i rezultatima modela.

1.1 Matematičko modeliranje i neodređenost

Matematičko modeliranje se može predstaviti kao niz postupaka koji preslikavaju ulazne, najčešće osmotrene veličine u rezultate modela. Primena matematičkih modela ima niz aspekata, pre svega ekonomskih (u najvećem

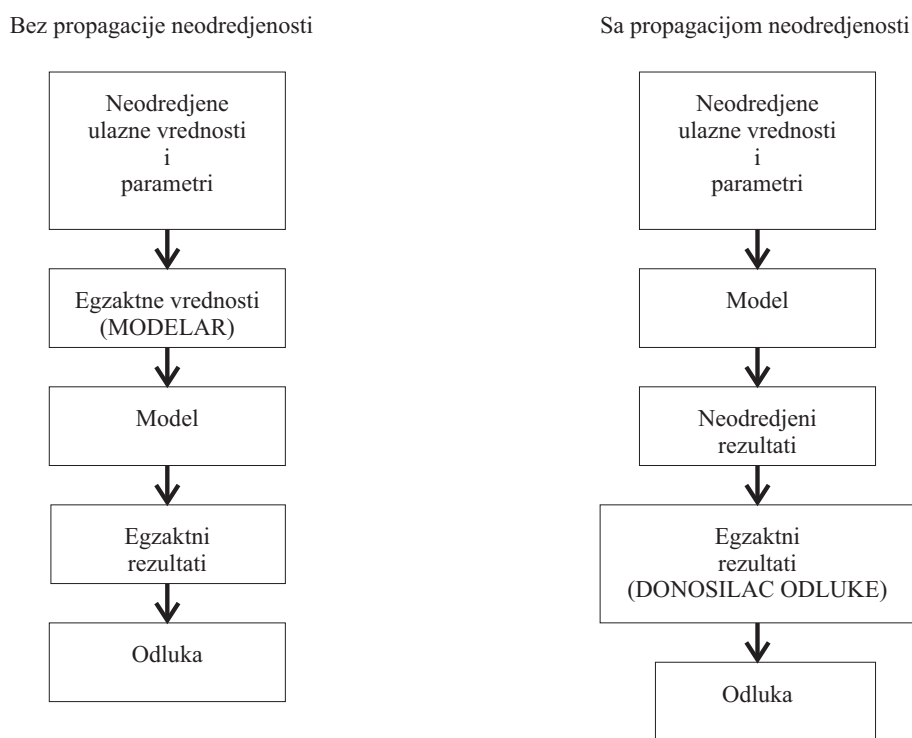
broju slučajeva je modeliranje jeftinije od eksperimenta ili merenja), ali ne smeju se zaboraviti ni ostali, od kojih su neki: prognostička uloga modela, nemogućnost da se neki eksperimenti uopšte obave, edukativna uloga modela, itd. Razvoj matematičkog modela neke fizičke pojave se može sagledati iz više uglova. Jedan od uglova posmatranja se odnosi na genezu modela preko sagledavanja pojave koja se želi opisati kroz prizmu trenutnog znanja, formiranja skupa matematičkih zavisnosti, kalibracije, verifikacije i upotrebe modela. Drugi pogled na modeliranje se odnosi na razvijanje konceptualnih pogleda na razmatranu pojavu i njenu aproksimaciju matematičkim jednačinama. Kako prateće grane nauke napreduju (kao što su metrologija, matematika, programiranje, elektronika, itd.), zahtevi prakse i teorije i u pogledu matematičkog modeliranja rastu i menjaju se.

Matematički model se može simbolički predstaviti u obliku $M(S, \Theta)$, gde S predstavlja strukturu modela, a Θ skup parametara modela. Ova struktura preslikava skup ulaznih podataka X u skup rezultata modela Y . U modernoj hidrotehničkoj praksi (isključujući naučna dostignuća) struktura modela koji opisuje specifičnu hidrotehničku pojavu je uglavnom utkana u softversko rešenje koje predstavlja numerički model. Prema tome, gotova softverska rešenja otvaraju prostor sve većim i komplikovanijim zahtevima hidrotehničke prakse, ali onemogućava potpunu kontrolu nad korišćenim softverskim paketom.

Veliki nedostatak gotovih hidrotehničkih softverskih rešenja je odsustvo kontrole kvaliteta rešenja. Iako moderni gafički interfejsi daje sve bolji uvid u rezultate, čime se mogućnost grešaka smanjuje, ostaje nepopunjen prostor kontrole kvaliteta rezultata u odnosu na kvalitet ulaznih podataka. Jedan od načina da se dočara i opiše kvalitet nekog podatka je upravo njegova predstava u nekom od oblika neodređenih veličina. Ukoliko se ulazni podaci predstave kao neodredjene veličine, neodređeni rezultati (takodje u obliku neodređenih veličina) dali bi upotrebljivu informaciju o kvalitetu i tako bi se otvorio prostor njihovom kvalitativno boljem tumačenju.

Jedna od osnovnih uloga modela je podrška kod donošenja odluka. U praksi, onaj ko pravi modele, uglavnom ne donosi odluke, a onaj ko donosi odluke koristi samo rezultate modela (i najčešće nije zainteresovan za proces modeliranja). Standardna praksa ne podrazumeva proces propagacije neodređenosti ulaznih veličina i parametara modela, već se procene egzaktnih vrednosti ulaza i parametara modela obavljaju pre modeliranja. Donosilac odluke nije uključen u proces procene egzaktnih vrednosti koje su korišćene u modelu, pa ostaje uskraćen za informacije koje se odnose na blisku okolinu rešenja.

Na slici 1.1 prikazana su dva moguća puta za upotrebu modela u procesu odlučivanja. Prvi, bez propagacije neodređenosti, ne vidi dodatne informa-



Slika 1.1: Proces odlučivanja na osnovu rezultata modela

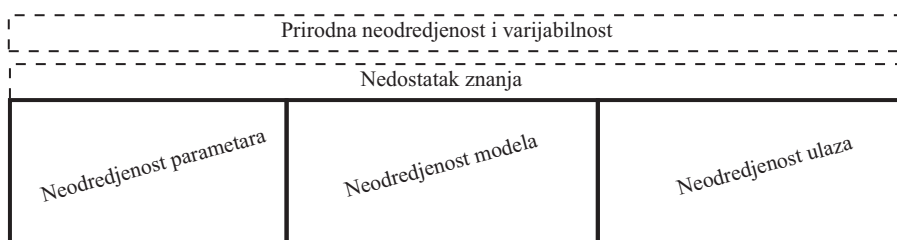
cije koje bi se dobile ukoliko bi se neodredjene ulazne vrednosti ili parametri zadržali kao neodredjeni i tokom modeliranja. Na taj način se gubi uvid u ponašanje modela u okolini dobijenog rešenja. Drugi put, sa propagacijom neodredjenosti, daje kao rezultat neodredjenu veličinu koja pokriva i određenu oblast oko neke najverovatnije vrednosti ulaznih vrednosti i parametara. Na taj način, ne samo da se odluka donosi na osnovu rezultata koji u sebi nosi dodatne informacije, nego se stiče i utisak o grešci koja se pravi.

1.2 Grupe neodredjenosti

Neodredjenosti, koje direktno utiču na matematičko modeliranje, se mogu podeliti u dve velike grupe [11], [19], [24], slika 1.2:

1. Prirodna neodredjenost i varijabilnost, kojom se predstavlja slučajnost prirodnih procesa, i
2. Neodredjenost koja se odnosi na nedostatak znanja o nekoj pojavi. Ova grupa neodredjenosti se dalje može podeliti na:

- (a) neodredjenost matematičkog modela, koja postoji zbog konceptualizacije opisanog prirodnog procesa (npr. prevodjenje kontinualnog procesa u diskretan proces prostor-vreme),
- (b) neodredjenost parametara matematičkog modela, i
- (c) neodredjenost ulaznih podataka, koja se odlikuje greškama merenja, finansijskim i realnim ograničenjima ili nečim trećim.



Slika 1.2: Podela vrsta neodredjenosti usled nedostatika znanja

Prirodna neodredjenost i varijabilnost je neizbežni pratilac svakog prirodnog procesa. Nju je nemoguće ukloniti, već se prevazilazi konceptualizovanjem problema i približnim modeliranjem pojave. Najbolji primer prirodne varijabilnosti je turbulencija koju je nemoguće odrediti egzaktno, ali adekvatni modeli daju potrebne informacije o njenom intenzitetu, rasporedu u prostoru, energiji, itd. Prirodna neodredjenost predstavlja deo prirode za koju se slobodno može reći da možda nikad neće postojati aparat za njeno potpuno razotkrivanje (prema Hajzenberg-ovom principu neodredjenosti i kvantnoj teoriji). Kvantna teorija, trenutno jedna od važećih teorija fizike, polazi od postulata da u jednom vremenskom trenutku nije moguće odrediti i položaj neke čestice i njenu količinu kretanja već se te karakteristike čestice opisuju upotrebom verovatnoće.

Nasuprot neodredjenosti koja se odnosi na varijabilnost prirode, postoji i neodredjenost koja nastaje usled nedostatka znanja o nekoj pojavi ili problemu. Ni nju nije moguće potpuno otkloniti, ali ju je moguće smanjiti. Razlog se u ovom slučaju ne krije u prirodnim ograničenjima, kao kod prirodne varijabilnosti, već u ekonomskim faktorima. Smanjenje neodredjenosti usled nedostatka znanja se postiže metodama kao što su dodatna merenja, detaljno shvatanje nekog prirodnog procesa ili upotrebom sofisticiranije opreme ili metoda pri modeliranju. Medjutim, najčešće se žrtvuje detaljnost modela zarad neke koristi. Ta korist se ogleda pre svega u formiranju modela upotrebom ograničenih resursa koji se mogu obezbediti za izradu modela, ali i od trenutnih mogućnosti nauke i tehnike.

1.3 Propagacija neodredjenosti kroz matematičke modele

Ukoliko se prirodne veličine (koje predstavljaju ulaze i parametre modela) prihvate kao neodredjene, potrebno je da se matematički aparat koji se u modeliranju koristi njima i prilagodi. To dovodi do formiranja tzv. stohastičkih modela. Oblasti fizike, kao što je kvantna mehanika, zasnovane su na ovom tipu modela, dok je u hidrotehničkoj praksi zaživeo nešto drugačiji način modeliranja. Deterministički modeli, modeli kod kojih su ulazne vrednosti i parametri jedinstvene veličine, prepoznati su kao praktični i primenljivi u velikom broju modeliranih situacija. Osnovni problem determinističkih modela je što on može da funkcioniše isključivo ako su ulazne veličine i parametri određeni, a oni to u suštini nisu. Zbog toga je potrebno napraviti sponu koja bi pomirila neodredjene veličine i determinističke modele. Ta spona se ogleda u metodama propagacije neodredjenosti koje su primenljive kod determinističkih modela.

Pored toga što se ova teza bavi isključivo determinističkim modelima, potrebno je naglasiti da se oni posmatraju u zatvorenom obliku. To je model u obliku iskompajliranog kôda kod koga nije moguća intervencija ni u pogledu formiranja i izmene jednačina (nije moguće menjati matematički model), a ni u pogledu numeričkog rešavanja (nije moguće menjati ni numerički model). Kod ove klase modela moguća je promena samo ulaznih veličina i parametara modela. Pošto je veliki broj hidrotehničkih modela u modernoj praksi dostupan baš u ovom obliku, pogodno ih je posebno razmatrati sa gledišta neodredjenosti.

1.4 Pregled sadržaja teze

U literaturi je moguće naći brojne podele matematičkih modela. U poglavlju 2 ove teze predstavljena je kratka klasifikacija matematičkih modela relevantna za temu kojom se teza bavi. Detaljnije su predstavljeni stohastički i deterministički modeli. Zatim, u istom poglavlju predstavljen je koncept zatvorenih modela sa primerom gde je neodredjena ulazna veličina u vidu intervala uvedena u model pre formiranja numeričkog modela. Nakon toga, predstavljena je podela modela prema načinu kako se ulazi preslikavaju u rezultate modela, koncentrisano na hidrotehničke modele. Pored toga, predstavljeni su i ciljevi propagacije neodredjenosti ilustrovani prigodnim primerom.

U poglavlju 3 navedeni su i objašnjeni oblici neodredjenih veličina. Osnovne odlike intervala, statističkih raspodela i rasplnutih (fuzzy) skupova pre-

dstavljene su u ovom poglavlju.

U poglavlju 4 izdvojene su metode koje se mogu primeniti kod zatvorenih hidrotehničkih modela. Na početku je objašnjena analitička propagacija neodredjenosti, dok su potom metode podeljene u tri velike grupe: neprobabilističke, probabilističke i posibilističke metode.

Poglavlje 5 daje informacije o osnovama intervalske matematike, predstavnika neprobabilističkih metoda. poglavlje 6 predstavlja najpopularniju tehniku propagacije neodredjenosti, tehniku Monte Karlo (eng. *Monte Carlo*) sa popularnim varijacijama. Brojni primeri koji se odnose na razne vrste zatvorenih hidrotehničkih modela predstavljani su u ovom poglavlju.

Naredno, poglavlje 7, uvodi čitaoca u metodu momenata, metodu za brzu i efikasnu procenu propagacije neodredjenosti. U poglavlju 8 predstavljena je metoda α -presek koja je predstavnik posibilističkog pristupa, dok poglavlje 9 čini zaključak istraživanja.

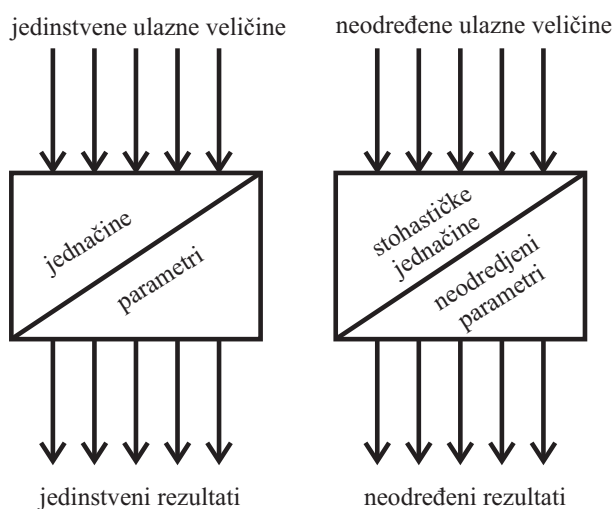
Glava 2

Podjele matematičkih modela

Kratak pregled Glave 2:

Matematički modeli se mogu podeliti na više načina. Za temu kojom se bavi ova teza presudna je podjela na stohastičke i determinističke modele. Pored ove podjele ova teza se ograničava samo na tzv. zatvorene modele.

Jedna od podjela matematičkih modela je podjela na stohastičke i determinističke. Ove dve grupe se razlikuju u mnogo aspekata. Osnovni aspekt je da deterministički modeli koriste određene (jedinственe) vrednosti ulaza i parametara, dok su stohastički modeli bazirani na neodređenim vrednostima, i jednačine ove grupe modela su prilagodjene neodređenim ulaznim veličinama i parametrima, slika 2.1.



Slika 2.1: Determinističko i stohastičko modeliranje

2.1 Stohastički modeli

Matematički modeli kod kojih je dominantan neki stohastički proces nazivaju se stohastički modeli. Ovi modeli se obično predstavljaju jednačinama sa dodatnim članovima koji modeliraju stohastički (slučajni) deo opisivane pojave. Dominantna su dva procesa: *Viner* (eng. *Wiener*) kontinualni stohastički proces i *Poasonov* (eng. *Poisson*), koji je diskretan. U praksi se u zavisnosti od problema primenjuju oba ili samo jedan [2]. Metode rešavanja stohastičkih matematičkih modela se uglavnom svode na *Markovljeve* modele koji se odlikuju korelacijom narednog koraka u odnosu na prethodni.

$$R_t = D_t + W_t + P_t \quad (2.1)$$

Jednačina 2.1 predstavlja tzv. *Levijev* (eng. *Levy*) proces R_t koji je razložen na determinističku komponentu D_t , komponentu predstavljenu *Vinerovim* procesom W_t i komponentu *Poasonovog* procesa P_t . Prema tome, obična diferencijalna jednačina pomoću koje se može predstaviti neki model:

$$dX = \mu(X)dt \quad (2.2)$$

u stohastičkom obliku je [2]:

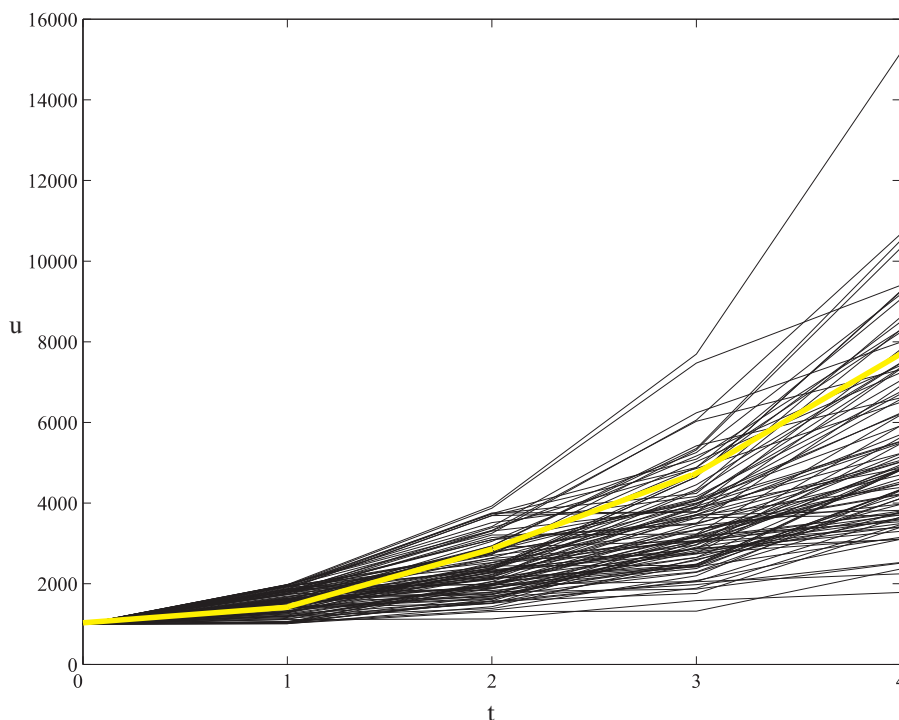
$$dX = \mu(X)dt + \sigma(X)dW_t + \epsilon(X)dq_\lambda \quad (2.3)$$

gde su dW_t - infinitezimalna verzija *Vinerovog* procesa, dq_λ infinitezimalni *Poasonov* proces, $\mu(X)$ predstavlja determinističku komponentu dok $\sigma(X)$ i $\epsilon(X)$ predstavljaju stohastičke komponente modela. Potrebno je podvući da je ovo jedini način da se stohastička diferencijalna jednačina zapiše jer ni *Wiener-ov* ni *Poasonov* proces nisu diferencijabilni.

Postoje brojni primeri primene stohastičkih diferencijalnih jednačina u hidrotehnici, pre svega u oblasti podzemnih voda, ali i u drugim kao što je proces difuzionog širenja zagađenja ili turbulencija. Na slici 2.2 prikazan je rezultat modela eksponencijalnog rasta populacije rešenog *Monte Karlo* metodom [33]. Model je predstavljen diferencijalnom jednačinom:

$$\frac{du(t)}{dt} - k(t)u(t) = 0 \quad (2.4)$$

sa početnim uslovom $u(0) = 1000$. Parametar $k(t)$ predstavlja stohastičku komponentu koja stohastički karakter prenosi i na zavisno promenljivu $u(t)$ koja predstavlja stanje populacije. Ako se pretpostavi da stohastički parametar k zavisi od slučajnog broja ξ , $k = k(t, \xi)$, onda stohastička diferencijalna jednačina glasi:



Slika 2.2: Grafički prikaz *Monte Karlo* rešenja stohastičkog modela rasta populacije i determinističkog rešenja (puna linija)

$$\frac{du(t, \xi)}{dt} - k(t, \xi)u(t, \xi) = 0 \quad (2.5)$$

Jedan od načina da se jednačina 2.5 reši je svakako *Monte Karlo* metoda. U ovom primeru, za vremensku uniformnu raspodelu parametra $0 \leq k \leq 1$, diferencijalna jednačina je rešena *Ojlerovom* metodom prvog reda tačnosti sa vremenskim korakom $\Delta t = 1$:

$$u^{i+1} = u^i + k^i u^i \Delta t \quad (2.6)$$

Na slici 2.2 je prikazan rezultat *Monte Karlo* simulacije za više scenarija promene parametra k kroz vreme.

Pored stohastičkih diferencijalnih jednačina u klasu stohastičkih modela spadaju i pojedini sistemski modeli. Naime, statistička obrada hidroloških serija podrazumeva modeliranje osobina osmotrenih serija statističkim parametrima (srednje vrednosti, varijanse, koeficijenti korelacije, itd.) i statističkim raspodelama.

2.2 Deterministički modeli

Znatno brojniju grupu u hidrotehničkoj praksi čine deterministički modeli. Razlozi su brojni. Jedan od njih je svakako ekonomski aspekt. Rad sa neodređenim vrednostima, kako to zahtevaju stohastički modeli izuzetno je skup, kako u ljudskim resursima tako i u potrošenom računarskom vremenu. Zatim tu je i nemogućnost primene brojnih matematičkih tehnika u rešavanju postavljenih matematičkih modela. Ukoliko bi se prethodni primer gledao kao deterministički:

$$\frac{du(t)}{dt} - ku(t) = 0 \quad (2.7)$$

postoji analitičko rešenje, koje glasi:

$$u(t) = u_0 e^{kt} \quad (2.8)$$

koje je u diskretnim vrednostima vremena za parametar $k = 0.5$, prikazano na slici 2.2.

Čak iako model nije analitički rešiv, primena brojnih numeričkih postupaka ili ne može biti primenjena kod stohastičkih modela, ili zahteva značajne modifikacije. Treći, ali važan razlog popularnosti determinističkih hidrotehničkih modela je što su i računari, koji se kod modeliranja neizostavno koriste, determinističke mašine, pa se i kod rešavanja stohastičkih modela mora primeniti neki metod diskretizacije, što dovodi do približnog rešenja.

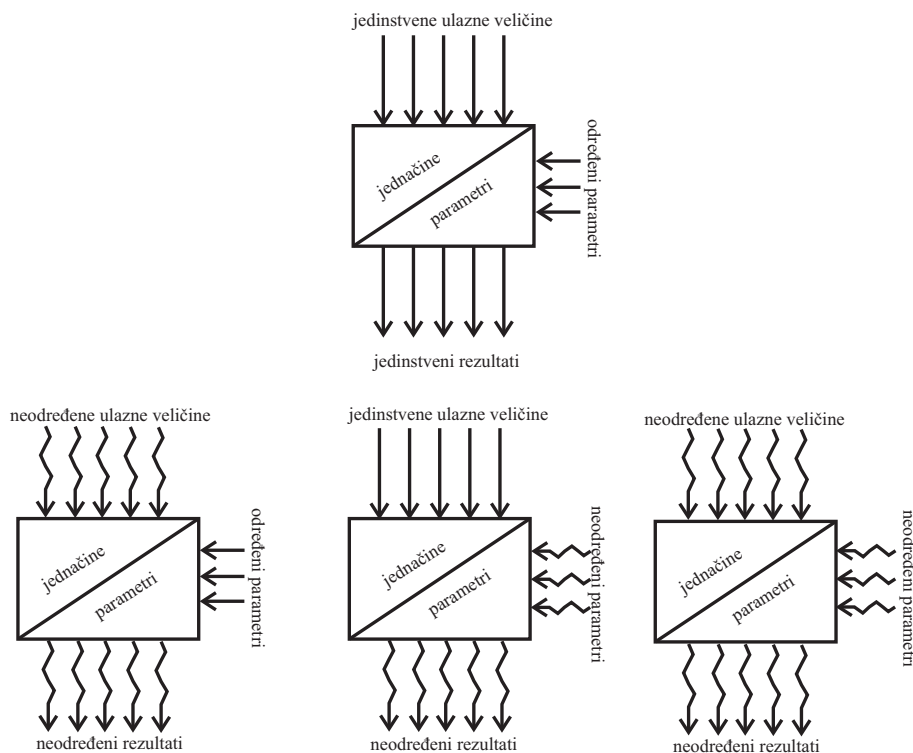
Povrh svega, pre pojave računara razvijeni su brojni hidraulički i hidrološki postupci rešavanja problema, koji bi se morali napustiti, što iz čisto socijalnih razloga nije moguće.

Osnovna odlika determinističkih modela, za razliku od stohastičkih je da će za isti skup ulaznih vrednosti i parametara, model pri svakoj simulaciji dati isti rezultat. To znatno pojednostavljuje tumačenje rezultata modela, ali i unosi značajno pojednostavljenje kod procene, prirodno varijabilnih, ulaznih vrednosti i parametara modela.

Na ovom mestu se moraju razgraničiti termini egzaktne i jedinstvene vrednosti. Egzaktna veličina je ona veličina koja je apsolutno tačna i ima jednu jedinstvenu vrednost. Intuitivno je jasno da sve veličine sa kojima se računa su samo najverovatnija procena egzaktne veličine i da nose u sebi neku dozu greške. Ako se proračun sprovodi sa veličinom koja nije apsolutno tačna ali je predstavljena jednim brojem, tada se govori o jedinstvenoj vrednosti (eng. *crisp value*).

Uz pretpostavku da su jednačine modela ispravno postavljene i rešene, i da je model konceptualno adekvatan problemu kog opisuje, rezultat modela

zavisi isključivo od ulaznih vrednosti i parametara modela. Iako jedinstvenost ulaznih podataka i parametara modela dozvoljava upotrebu složenog matematičkog aparata, ona sprečava uvid u ponašanje modela ukoliko se njihove vrednosti za malo promene. To znači da model vidi rezultat koji se odnosi na jedinstvene ulazne vrednosti i parametre, ali je "slep" u odnosu na slučaj kada se oni ne mogu predstaviti jedinstvenim vrednostima.



Slika 2.3: Modeliranje sa jedinstvenim i neodređenim ulaznim veličinama i parametrima

Na slici 2.3 prikazane su sve moguće kombinacije modeliranja sa jedinstvenim i neodređenim parametrima i ulaznim vrednostima. Kod klasičnog pristupa, jedinstvene ulazne vrednosti i parametri daju jedinstven rezultat modela. Ukoliko postoji želja da se dobije varijabilnost kod rezultata modela potrebno je da ulazne veličine i/ili parametri modela budu varijabilni.

U analizi uticaja neodređenosti ulaznih podataka i parametara modela potrebno je definisati oblike u kojima ih je moguće predstaviti, a zatim i postupke kojima je moguće, preko modela, preslikati ih u rezultate. Ukoliko su u pitanju deterministički modeli sa neodređenim ulaznim vrednostima i parametrima zahteva se specifičan matematički aparat. Naime, potrebno je neodređene veličine najpre na specifičan način razložiti na jedinstvene vre-

dnosti koje je deterministički model spreman da primi, a zatim iz rezultata koji su takodje u obliku jedinstvenih vrednosti izvući informacije o neodređenosti. Sve to je dodatno otežano ukoliko jednačine modela nisu dostupne, tj. ukoliko je model zatvoren.

Preslikavanje neodređenih ulaza i parametara modela u neodređene rezultate naziva se još i propagacija neodređenosti (eng. *uncertainty propagation* ili *sensitivity analysis*).

Pored propagacije neodređenosti, informaciju o neodređenosti rezultata može dati i analiza osetljivosti. Ona predstavlja matematičke postupke za procenu reakcije modela ukoliko se ulazne veličine ili parametri malo promene. Međutim, analiza osetljivosti ne daje dovoljno informacija da se odredi neodređenost rezultata već samo može uputiti eksperta na uticaj pojedinih veličina na izlazni rezultat i okvirnu veličinu neodređenosti.

2.3 Koncept zatvorenih determinističkih modela

Tokom 20. veka, sa pojavom računara koji su ušli u masovnu upotrebu, postavljen je standard o obliku u kom se koriste matematički modeli. Taj oblik zahteva prevodjenje jednačina matematičkog modela u neki programski jezik i izvršavanje kôda na računaru. Zatvaranjem (kompajliranjem) kôda, dobija se izvršni kôd koji je razvijen tako da je u najvećem broju slučajeva prilagodjen sličnim hidrotehničkim problemima (tečenje vode u otvorenim tokovima, tečenje pod pritiskom, strujanje podzemnih voda, itd.). Bez obzira na vrstu modela, zatvoreni matematički modeli omogućavaju interakciju sa korisnikom isključivo preko ulaznih vrednosti i parametara.

Ovde je potrebno naglasiti razliku između ulaznih vrednosti i parametara modela. Osnovna uloga modela je da, nakon kalibracije i verifikacije, verno predstavlja opisivanu pojavu. Tome najviše doprinose pravilno izabrane jednačine modela i dobro podešene vrednosti parametara. U velikom broju slučajeva, parametri predstavljaju konceptualizovane vrednosti (ponekad čak i bez fizičkog značenja) kojima se model kalibracijom podešava da daje što tačnije rezultate. Oni značajno utiču na tačnost rezultata modela i njihovim adekvatnim izborom može se uticati čak i na osetljivost modela. Dakle, parametri su komponente modela koje su stalnijeg karaktera i menjaju se samo u procesu kalibracije ili redizajniranja modela.

Nasuprot parametrima, ulazne vrednosti predstavljaju podatke koji se unose u model pri njegovoj eksploataciji i nesumljivo je da tačnost rezultata modeliranja zavisi od tačnosti ulaznih vrednosti. Njihova uloga je da unesu

početne i granične uslove u model, a rezultat proizilazi njihovim preslikavanjem preko jednačina modela pojačanih parametrima. Ukoliko su parametri modela podjednako dostupni kao i ulazne vrednosti (pri čemu se ne misli samo na mogućnost ubacivanja u model već se misli i na fizička ograničenja kao što je $g = 9.81 \text{ m/s}^2$), kod analize neodređenosti je moguće neki parametar proglasiti ulaznom veličinom za razmatrani model.

U ovom radu na slici 2.3 nije razmotrena mogućnost da jednačine modela imaju neodređen karakter. Sâm konceptualni pristup formiranja jednačina modela (jednačine predstavljaju samo približnu sliku pojave koja se modelira) već unosi neodređenost (prelaz kontinualnog u diskretni domen, približno rešene jednačine, empirijske jednačine, itd.). Iako je uticaj konceptualizacije problema i načina rešavanja matematičkog modela često izuzetno značajan, ovaj rad se fokusira isključivo na uticaj ulaznih veličina i parametara modela ukoliko se oni ne mogu predstaviti u jedinstvenom obliku.

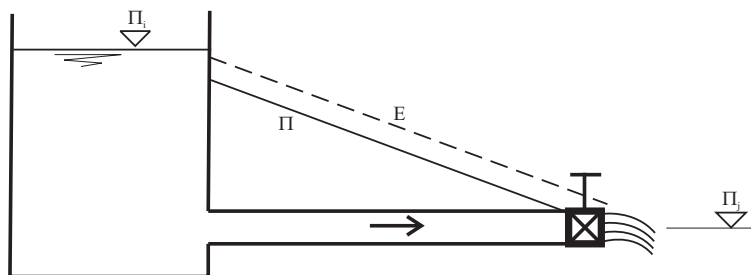
Primer zatvorenog hidrotehničkog determinističkog modela

Razlog zbog koga je neophodno naglasiti da se model posmatra kao zatvoreni ilustrovan je primerom matematičkog modela krutog udara [21], [35] primenjenog na proces uspostavljanja ustaljenog isticanja kroz cev iz rezervoara sa fiksiranom pijezometarskom kotom Π_j :

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{gA}{L} (\Pi_i - \Pi_j) - \frac{2\lambda}{D^3\pi} Q^2 \quad (2.9)$$

gde su Q - protok, A - površina poprečnog preseka cevi, L - dužina cevi, D - prečnik cevi i λ - koeficijent trenja cevi.

Na kraju cevi, nakon potpunog otvaranja zatvarača, je omogućeno slobodno isticanje na koti $Z = \Pi_j$, slika 2.4.



Slika 2.4: Skica isticanja iz rezervoara

Parametri modela (dužina cevi L i prečnik cevi D i gustina vode ρ) su usvojeni potpuno proizvoljno i to kao egzaktno veličine, $L = 100 \text{ m}$,

$D = 200$ mm uz zanemarivanje lokalnih gubitaka. Koeficijent trenja λ je predstavljen kao neodređena veličina i to u obliku intervala¹ $[\lambda_o - \varepsilon, \lambda_o + \varepsilon]$, gde je λ_o sredina intervala i iznosi $\lambda_o = 0.02$, a ε podatak o neodređenosti koji je pretpostavljen da iznosi $\varepsilon = 0.002$ (10 % od nominalne vrednosti).

Kod zatvorenih modela pretpostavlja se da je način rešavanja diferencijalne jednačine krutog udara zatvoren u kompjuterskom kôdu i da se model posmatra u skladu sa numeričkim postupcima i načinom rešavanja matematičkog modela (čime se dobija numerički model). Ukoliko to nije slučaj [12], tj. ukoliko se jednačine udara prilagode neodređenosti ulaznih veličina, može se javiti razlika u interpretaciji neodređenih rezultata. Da bi se ilustrovala ta razlika, u nastavku će se uporediti četiri varijante rešenja krutog udara.

Numerički postupak odabran za rešavanje navedenog matematičkog modela krutog udara je eksplicitni *Ojlerov* metod prvog reda tačnosti. Numerički model A se može predstaviti jednačinom 2.10:

$$A : Q^{n+1} = Q^n + \Delta t \left(\frac{gA}{L} (\Pi_i - \Pi_j) - \frac{2\lambda}{D^3\pi} (Q^n)^2 \right) \quad (2.10)$$

Bez ulaska u analizu stabilnosti, uz činjenicu da je koeficijent trenja (λ) neodređena veličina i protok (Q) isto mora biti neodređena veličina (ovde se posmatra samo kao rezultat numeričkog modela od druge iteracije pa nadalje). U zavisnosti od predstavljanja protoka iz iteracije u iteraciju, moguće su i sledeće varijante numeričkog modela:

$$B : Q^{n+1} = Q^n + \Delta t \left(\frac{gA}{L} (\Pi_i - \Pi_j) - \frac{2\lambda}{D^3\pi} (\overline{Q^n})^2 \right) \quad (2.11)$$

$$C : Q^{n+1} = \overline{Q^n} + \Delta t \left(\frac{gA}{L} (\Pi_i - \Pi_j) - \frac{2\lambda}{D^3\pi} (Q^n)^2 \right) \quad (2.12)$$

ili

$$D : Q^{n+1} = \overline{Q^n} + \Delta t \left(\frac{gA}{L} (\Pi_i - \Pi_j) - \frac{2\lambda}{D^3\pi} (\overline{Q^n})^2 \right) \quad (2.13)$$

gde $\overline{Q^n}$ predstavlja sredinu intervala dobijenog kao rezultat u $(n - 1)$ -voj iteraciji.

Nakon rešavanja numeričkog modela² rezultati su prikazani na slici 2.5. Prva varijanta (varijanta A), predstavljena jednačinom 2.10 (metoda bez

¹Za informaciju o intervalima kao načinu predstavljanja neodređenih veličina pogledati poglavlje 5, o intervalima kao neodređenim veličinama i intervalskoj matematici.

²Rešenje je u vidu tri niza vrednosti protoka koji predstavljaju sredinu intervala, gornju i donju granicu.

osrednjavanja), ukazuje na stalno povećavanje neodredjenosti. Čak i kada model konvergira u stabilno stacionarno rešenje, neodredjenost nastavlja da raste tako da model počne u jednom trenutku da divergira. To se događa usled superponiranja neodredjenog trenja i neodredjenog protoka iz prethodne iteracije.

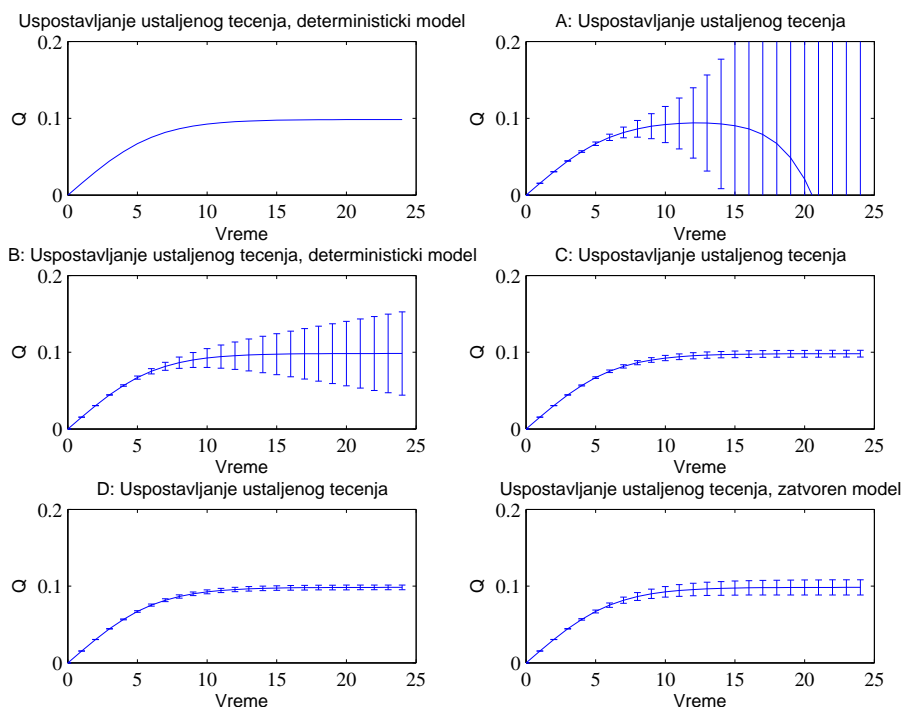
Druga varijanta (varijanta *B*, jednačina 2.11), sa jednim osredjenim protokom iz prethodne iteracije, dovodi do stabilnog rešenja. Međutim, iz koraka u korak, čak i kada se rešenje ustali, neodredjenost nastavlja da raste oko ustaljene vrednosti. Iako se neodredjeni protok i neodredjeno trenje superponiraju, sredina rezultata u obliku intervala ostaje stabilna jer je propagacija u obliku sabiranja neodredjenih veličina.

Treća varijanta, (varijanta *C*, jednačina 2.12), daje stabilno rešenje i stabilnu fiksnu neodredjenost kad se rešenje ustali. Ovo se događa zbog prirode problema. Naime, kad se uspostavi stacionarni protok, izjednače se sve sile koje deluju na posmatrani deo fluida. Zbog toga izvod (dQ/dt) postaje jednak nuli i u narednoj iteraciji neodredjenost iako potiče i od koeficijenta trenja i od protoka biva ravnomerno raspoređena oko sredine intervala.

Četvrta varijanta (varijanta *D*, jednačina 2.13), predstavlja varijantu sličnu trećoj pri čemu se neodredjenost prenosi samo od strane neodredjenog koeficijenta trenja (protoci su u oba člana jednačine gde se pojavljuju osrednjeni). Protoci su osrednjeni i može se primetiti da je neodredjenost (što je bilo i očekivano) najmanja.

Na slici 2.5 prikazan je i rezultat analize propagacije neodredjenosti kada bi model bio zatvoren (dole desno) pa nije moguće menjati način osrednjavanja protoka u iteracijama. Pretpostavljeno je da je neodredjeni koeficijent trenja moguće ubaciti kao parametar modela samo u vidu jedinstvene vrednosti i to za ceo period ustaljivanja protoka. Propagacija je sprovedena tako što je model rešen dva puta za krajeve intervala neodredjenog koeficijenta trenja, za $\lambda - \epsilon$ i $\lambda + \epsilon$. Vidi se da je neodredjenost nešto veća nego kod varijante *C* i *D*.

ati primer predstavlja deo analize neodredjnosti koja zahteva otvorene modele i neće biti razmatrana u ovom radu. On samo ilustruje razlike između otvorenih i zatvorenih modela. Bilo bi interesantno ispitati različite modele kako se ponašaju kod primene numeričkih metoda višeg reda tačnosti ili implicitnih numeričkih metoda. Takođe, ovim primerom je pokazan uticaj različitog predstavljanja neodredjenih članova numeričkog modela, kao i različiti rezultati koji se mogu dobiti. Dalje će biti razmatrani isključivo zatvoreni deterministički modeli i mogućnosti primene različitih tehnika propagacije neodredjenosti nad njima.



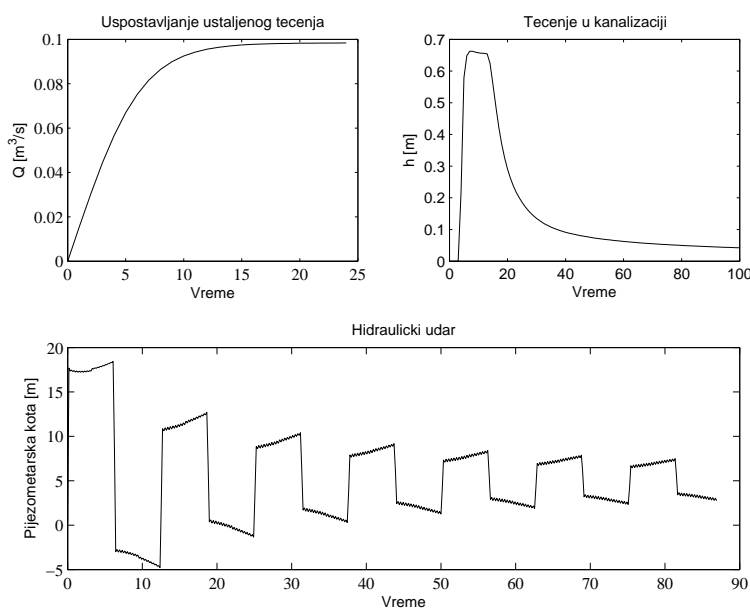
Slika 2.5: Rezultat propagacije neodredjnosti za model krutog udara

2.4 Karakteristike hidrotehničkih modela

Hidrotehnički modeli se mogu podeliti prema prirodnim procesima koje opisuju. Svaka hidraulička i hidrološka pojava koja se modelira ima određena pojednostavljenja i konceptualni pristup koji donosi, za posmatrani proces, specifične rezultate. Kod razvoja modela, prva provera se odnosi na logičnost dobijenih rezultata. Naknadno, podešavanjem parametara, u procesu kalibracije, rezultati se mogu približiti osmotrenim vrednostima.

Pošto propagacija neodredjenosti predstavlja preslikavanje neodredjenih ulaza i parametara preko modela, izuzetno je važno kako funkcija preslikavanja, tj. kako model izgleda, slika 2.6. Po situacijama koje opisuju, modeli hidrotehničkih procesa se mogu podeliti u nekoliko grupa (tipova modela) sa različitim i karakterističnim funkcijama preslikavanja:

1. Modeli ustaljenih procesa bez ekstremuma u razmatranom prostoru rešenja (monotoni modeli), slika 2.6, gore levo
2. Modeli ustaljenih procesa sa ekstremumima u razmatranom prostoru rešenja (nemonotoni modeli)



Slika 2.6: Primeri modela različitih procesa

3. Modeli kvaziustaljenih procesa
4. Modeli neustaljenih procesa (blago promenljivi procesi), slika 2.6, gore desno
5. Modeli neustaljenih procesa (proces sa naglim, tranzijentnim promenama), slika 2.6, dole
6. Modeli višestepenih procesa (modeli sa više stanja koja se opisuju različitim jednačinama)
7. Modeli sa diskretizacijom i u prostoru i u vremenu

Osnovna odlika prve grupe modela je da je rešenje modela monotono u odnosu na parametre i ulazne veličine modela. Pretpostavka da se radi o jednom ovakvom modelu može značajno olakšati proces analize neodređenosti pre svega kod metoda intervala i metoda rasplnutih skupova (eng. *fuzzy α -cut* metoda). Primer jednog monotonom modela u hidrotehničkoj praksi se može naći kod zavisnosti pritiska od potrošnje u modelima vodovodnih distributivnih mreža. Naime, ukoliko potrošnja raste, pritisak opada i obrnuto. Ne postoji način da se povećavanjem potrošnje poveća i pritisak jer bi to bilo u suprotnosti sa energetsom jednačinom postavljenom za svaku cev u mreži.

Drugi tip modela pretpostavlja da prostor rešenja ovakvog modela sadrži lokalne ekstremume. Ova odlika upućuje na primenu posebnih dodatnih alata

u vidu specifične intervalske matematike kod metode intervala ili optimizacionih metoda kod metode rasplnutih skupova. Ukoliko se opet posmatraju modeli vodovodnih distributivnih mreža, apsolutna vrednost protoka u cevima kod prstenastih mreža predstavlja nemonoton rezultat u odnosu na potrošnju [6]. Zbog karakteristika prstenastih mreža voda može promeniti smer, pa se samim tim apsolutna vrednost protoka može smanjivati do nule, a zatim povećati.

Treći tip modela posmatra neustaljenost razmatranog fenomena kao niz ustaljenih stanja, povezanih dodatnim jednačinama (obično jednačinama bilansa mase). Analiza neodređenosti kod ovakvog tipa modela pretpostavlja zajedničko početno stanje, međutim rešenje modela zavisi od rešenja ustaljenih stanja u medjukoracima. Ovakvi modeli imaju odlike *Markovljevih* stohastičkih modela gde naredno stanje zavisi od rezultata prethodnog. Zbog toga je potrebno voditi računa i o generisanim slučajnim brojevima koji bi služili za *Monte Karlo* tehniku propagacije neodređenosti. Ukoliko se opet koncentrišemo na modele vodovodnih distributivnih mreža, najčešći način modeliranja produženog rada sistema je upravo kvaziustaljen princip. Sukcesivnim ponavljanjem simulacija ustaljenog tečenja, pri čemu se za svaku narednu simulaciju uzimaju kao ulazni podaci rezultati iz prethodne, postiže se efekat simulacije neustaljenog tečenja.

Neustaljeni procesi sa blagim promenama predstavljaju tip modela koji kao rezultat ima blage prelaze rešenja iz jednog vremenskog koraka u drugi. Jedan od očiglednih primera je primena dinamičkog talasa primenjenog na modelu kanalizacionog sistema. Osnovna razlika modela blago promenljivih neustaljenih procesa i modela brzo promenljivih ustaljenih procesa (hidraulički udar) je razlika u uticaju inercije i ostalih komponenti procesa kao što su otpori. Kod blago promenljivih procesa uravnoteženi su inercijalni i uticaji otpora, dok su kod modela pojava sa naglim promenama inercijalni uticaji istog reda veličine ili dominantniji od uticaja otpora. Modeli koji opisuju procese ovog tipa zahtevaju poseban tretman u propagaciji neodređenosti koji se, za razliku od ostalih tipova modela, odlikuje i specifičnim tumačenjem rezultata. Razlog tome je, pre svega, uticaj neodređenih ulaza i parametara na vremensku komponentu rezultata (promena je izražena i u amplitudi i u fazi).

Višestepeni procesi u hidrotehničkoj praksi predstavljaju se specifičnom vrstom modela. Kod višestepenih modela, različite situacije za koje se formira jedinstven model, prikazuju se različitim jednačinama. Na taj način dolazi se do modela koji nije diferencijabilan, pa zahteva specifičan tretman kod analize propagacije neodređenosti. Model upravljanja ustavom, kada dolazi do potapanja ustave od strane nizvodnog graničnog uslova, može se uzeti kao primer ovog tipa modela.

Pored gore opisanih tipova modela, poslednji na spisku je tip modela koji je diskretizovan i po vremenu i po prostoru. Ovakvi modeli imaju osobinu da se specifični fenomeni mogu pratiti na nivou jedne (ili grupe) ćelije diskretizovanog prostora, ali da se pri tumačenju rezultata mora voditi računa o fenomenima koji se javlju u celokupnom strujnom polju. Ukoliko se razmatrana veličina na nivou jedne ćelije nalazi pod uticajem nekog fenomena, rezultati propagacije neodredjenosti mogu biti različiti od onih koji se dobijaju ako fenomena nema. Osnovni primer predstavljaju modeli računске mehanike fluida (eng. *Computational Fluid Dynamics*) koji se rešavaju specifičnim numeričkim postupcima.

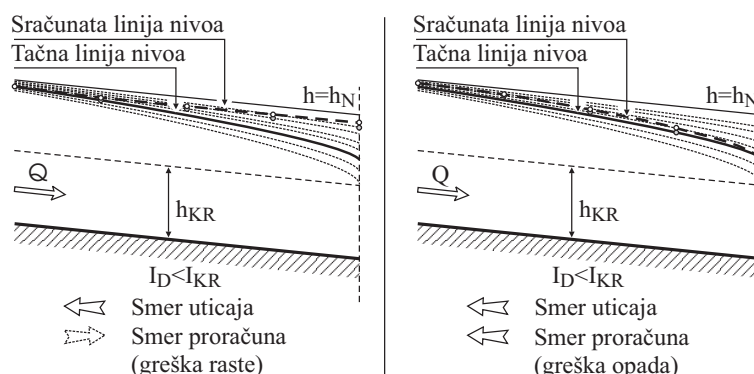
2.5 Ciljevi propagacije neodredjenosti

Propagacija neodredjenosti predstavlja širok pojam u procesu upotrebe determinističkih modela sa neodredjenim ulaznim vrednostima i parametrima. Ono što se očekuje kao rezultat propagacije je svakako rezultat modela u neodredjenom obliku. U zavisnosti od toga koja je komponenta neodredjenog rezultata od najvećeg interesa, propagacija neodredjenosti može imati tri cilja:

- što tačnije i efikasnije računanje jedinstvenog reprezentativnog rešenja,
- procena neodredjenosti rezultata (rezultat se može predstaviti u vidu raspodele, intervala, rasplinutog skupa i sl.), ili
- računanje optimalnog rešenja u odnosu na neki unapred postavljen kriterijum.

Ponekad je veličina neodredjenosti rezultata modela u drugom planu, a ono što se od analize očekuje je jedinstveno (reprezentativno), što tačnije determinističko rešenje iako su ulazne vrednosti ili parametri modela neodredjeni. Zato je potrebno odabrati takave metode proračuna koje ne povećavaju neodredjenost već je po mogućnosti smanjuju. Primer jednog takvog proračuna je proračun linije nivoa kod mirnog tečenja [26]. Na slici 2.7 je prikazano kako greška proračuna linije nivoa zavisi od smera proračuna. Ukoliko se računa u nizvodnom pravcu (suprotno od smera uticaja) greška se akumulira, dok ukoliko se računa u smeru uticaja greška se koriguje u toku proračuna.

Drugi cilj propagacije neodredjenosti podrazumeva uvođenje novih parametara modela koji će predstavljati njegovu meru neodredjenosti. To može biti standardna devijacija svake od ulaznih veličina, širina baze rasplinutog skupa ili širina intervala. Reprezentativna vrednost se može izraziti kao



Slika 2.7: Smer proračuna linije nivoa kod mirnog tečenja [26]

srednja vrednost ako je rezultat u obliku raspodele verovatnoće ili sredina intervala ako je rezultat u obliku intervala.

Ukoliko se očekivana vrednost računa iz niza rezultata modela kao aritmetička sredina $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$, standardna greška ocene srednje vrednosti se može izračunati pomoću izraza:

$$S_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2.14)$$

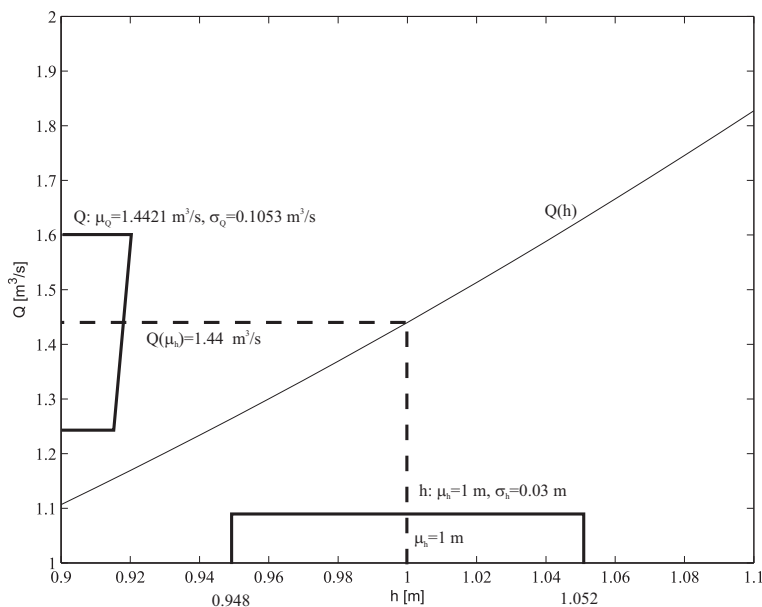
Kada se izračuna jedinstveno (reprezentativno) rešenje modela u formi srednje vrednosti, ona se mora navesti zajedno sa apsolutnom greškom srednje vrednosti, u obliku $\mu \pm S_{\bar{x}}$ kako bi se dobio neki uvid u veličinu neodređenosti rezultata. Zbog toga je izuzetno bitno kod ispunjavanja drugog cilja da se, ukoliko je to moguće, što više smanji standardna devijacija, a zadrži nepristrasna ocena očekivane vrednosti.

Treći cilj podrazumeva da se u okviru neodređenog rešenja nalazi neka optimalna vrednost rezultata. Na žalost, ovaj cilj u velikom broju slučajeva nema rešenje.

Ciljevi propagacije neodređenosti na primeru Tompsonovog preli-va

Prva dva cilja prikazana su na modelu zavisnosti protoka od visine prelivnog mlaza na *Tompsonovom* (eng. *Thompson*) prelivu. Ova zavisnost je teoretskog karaktera i zbog specifične izrade preli-va često je potrebno popraviti koeficijent preli-va kalibracijom. Za *Tompsonov* preliv, odnos protoka i visine prelivnog mlaza se može opisati jednačinom:

$$Q = 1.44h^{5/2} \quad (2.15)$$



Slika 2.8: Zavisnost protoka od visine prelivnog mlaza kod Thompsonovog preliva

Pretpostavlja se da je visina prelivnog mlaza neodređena veličina koja prati uniformnu raspodelu sa parametrima raspodele $\mu_h = 1$ m i $\sigma_h = 0.03$ m. Ukoliko se izračuna protok, a neodređena visine prelivnog mlaza se predstavi kao srednja vrednost, dobija se $Q(\mu_h) = 1.44$ m³/s.

Propagacija neodređenosti je obavljena *Monte Karlo* metodom. Nakon 1000 simulacija modela, protok u obliku raspodele verovatnoće ima srednju vrednost $\mu_Q = 1.4421$ m³/s sa standardnom greškom ocene srednje vrednosti $S_{\bar{x}} = \frac{0.1053}{\sqrt{1000}} = 0.0033$ m³/s, jer je standardna devijacija rezultata $\sigma_Q = 0.1053$ m³/s. Finalni rezultat se može napisati kao $Q = 1.4421 \pm 0.0033$ m³/s

Prvi cilj predstavlja računanje srednje vrednosti neodređenog protoka. Iako je razlika mala, jasno se vidi da simulacija modela sa srednjom vrednosti ulaznog podataka, visine prelivnog mlaza, daje drugačije rešenje nego kada se odluka o reprezentativnom protoku odloži do posle propagacije neodređenosti. U slučaju bez propagacije neodređenosti dobijen je protok $Q(\mu_h) = 1.44$ m³/s, dok je protok koji je dobijen analizom rezultata *Monte Karlo* metode $\mu_Q = 1.4421$ m³/s. Veličina razlike pre svega zavisi od nelinearnosti modela, ali i od neodređenosti ulazne vrednosti (visine prelivnog

mlaza). Takodje se na slici 2.8, gde je ceo postupak grafički prikazan, može primetiti da se uniformna raspodela visine prelivnog mlaza ne preslikava u uniformnu raspodelu protoka što je takodje posledica nelinearnosti modela.

Drugi cilj propagacije neodređenosti je određivanje vrednosti standardne devijacije i dobijanje informacije o veličini neodređenosti izračunatog protoka. Kao reprezent se može uzeti standardna devijacija $\sigma_Q = 0.1053 \text{ m}^3/\text{s}$.

Da bi treći cilj imao rešenje, model mora biti nemonoton, tj. mora imati lokani ekstremum u oblasti neodređenih ulaznih vrednosti i rešenja. Primer ostvarenja trećeg cilja propagacije neodređenosti je prikazan u radu [9].

Analitičko rešenje propagacije neodređenosti na primeru Tompsonovog preliva

Ukoliko se zavisnost protoka i nivoa prikaže funkcijom $g(x)$, dobija se:

$$g(x) = 1.44x^{5/2} \quad (2.16)$$

Matematičko očekivanje rezultata propagacije neodređenosti na funkciji $g(x)$ za ulaznu slučajnu promenljivu x po uniformnoj raspodeli sa parametrima $\mu_x = 1 \text{ m}$ i $\sigma_x = 0.03 \text{ m}$ iznosi:

$$E[g(x)] = \int_a^b 1.44x^{5/2} \frac{1}{b-a} dx = \frac{2.88}{7} \frac{b^{7/2} - a^{7/2}}{b-a} = 1.4424 \text{ m}^3/\text{s} \quad (2.17)$$

gde su $a = 0.948$ i $b = 1.052$ granice uniformne raspodele.

Na sličan način se može dobiti i matematičko očekivanje kvadrata funkcije koje je onda jednako $E[g(x)^2] = 2.0923$. Standardna devijacija rezultata propagacije neodređenosti na funkciji $g(x)$ se zatim može izračunati kao $\sigma = \sqrt{E[g(x)^2] - E[g(x)]^2} = 0.10804 \text{ m}^3/\text{s}$.

Glava 3

Način predstavljanja neodređenih veličina

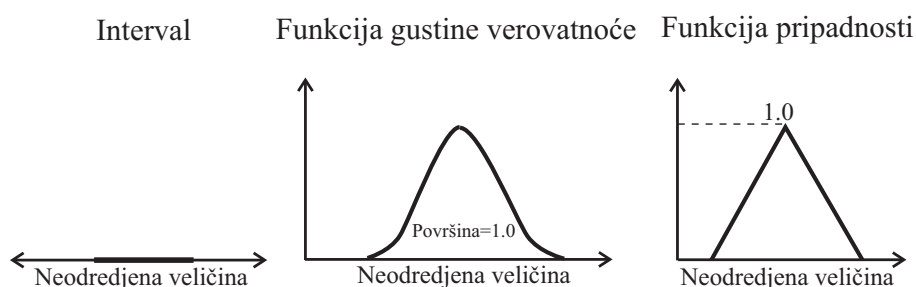
Kratak pregled Glave 3:

Da bi mogle biti proučavane, neodređene veličine se na neki način moraju matematički zapisati. Najjednostavniji prikaz neodređene veličine je svakako interval. On predstavlja granice u kojima se neka veličina nalazi. Za razliku od intervala, najsloženiji je prikaz pomoću raspodele verovatnoće. Ona preslikava neodređenu veličinu u interval verovatnoće $[0, 1]$. Ukoliko je nemoguće formalno opisati neodređenu veličinu, najpodesniji prikaz bi bio opisni ili lingvistički. U tom slučaju, moguće je primeniti i posibilistički pristup i koncept rasplinutih (fuzzy) skupova.

Razlika između jedinstvenih i neodređenih veličina se može opisati na sledeći način: jedinstvene veličine se mogu napisati jednom vrednošću (brojem), dok je, u zavisnosti od nivoa informacija kojima raspolažemo, moguće na više načina predstaviti neodređene veličine (slika 3.1):

- pomoću intervala,
- raspodele verovatnoće,
- rasplinutog (fuzzy) skupa, ili
- drugi načini (npr. teorija slučajnih skupova).

Prva tri oblika se suštinski razlikuju pre svega po matematičkoj interpretaciji, a zatim i po vrsti i količini informacija koje u sebi poseduju [9], [19].



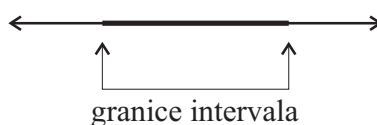
Slika 3.1: Intervali, raspodela verovatnoće i rasplinuti skup kao neodredjene veličine

Treba biti svestan da su informacije utkane u neodredjenu veličinu, pa je za predstavljanje neodredjene veličine određenim oblikom potrebno u startu i obezbediti različitu količinu informacija, a i specifičan matematički aparat za manipulaciju i analizu.

Najmanju količinu informacija u sebi čuva interval, a najveću raspodela. Rasplinuti (fuzzy) skup predstavlja alternativni, tzv. posibilitistički pristup kojim je moguće opisati pristrasnost i nejasnost neke veličine. Svaki od tri navedena oblika predviđa specifične postupke za procenu propagacije neodredjenosti koji zahtevaju poznavanje i nekih dodatnih matematičkih alata, kao što su: analiza osetljivosti, optimizacione metode, intervalska matematika, *Bajesovo* (eng. *Bayes*) zaključivanje, itd.

3.1 Interval

Ukoliko je neodredjenost veličine nepoznata ali se znaju njene granice, najjednostavniji način prikaza neodredjenih veličina je pomoću intervala. Kako interval ne daje više informacija o neodredjenoj veličini do granica u kojima se ona može nalaziti (slika 3.2), ne može se postaviti pitanje šta se dešava unutar intervala (ne treba mešati interval sa uniformnom raspodelom).



Slika 3.2: Neodredjena veličina kao interval

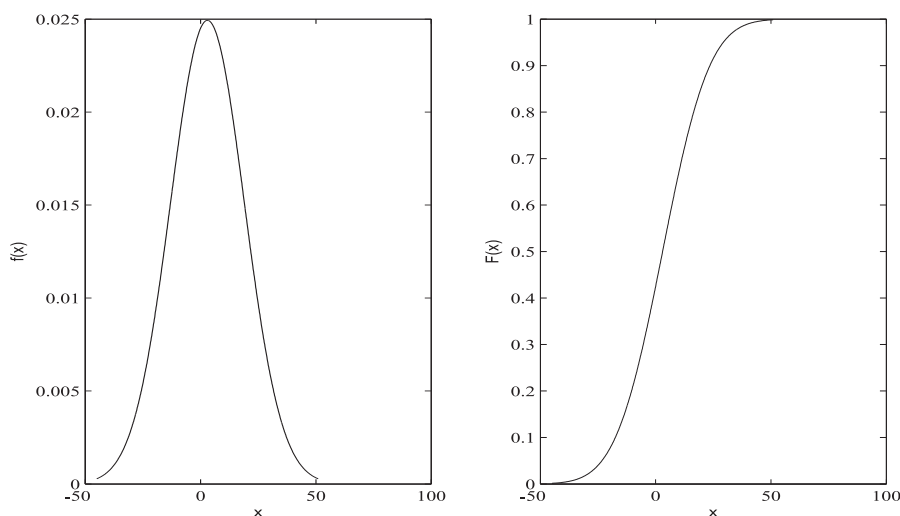
Granice intervala mogu biti otvorene ili zatvorene u zavisnosti da li se i same granice uključuju u niz vrednosti koje veličina može posedovati. Rezolu-

cija intervala takodje može biti proizvoljna (ukoliko je promenljiva diskretna), ali ne sme biti rupa unutar intervala (interval mora biti kontinualan). Ukoliko se formira interval koji se mora posmatrati samo kao skup relativno različitih vrednosti, dolazi se u opasnost da se u tom slučaju radi o varijabilnosti neke veličine, a ne o neodredjenosti veličine, jer neodredjenost predstavlja kontinualnu pojavu.

3.2 Raspodela verovatnoće

Potreba da se verovatnoća neke pojave prikaže matematički proizvela je pojam raspodele verovatnoće. Raspodela verovatnoće je funkcija koja preslikava neki događaj A iz skupa svih mogućih događaja Ω u interval $[0, 1]$.

Postoje empirijske i teorijske funkcije raspodele. Osnovna razlika je u tome što se empirijske dobijaju obradom merenih ili osmotrenih podataka, dok su teorijske raspodele unapred date funkcije. Modeliranjem empirijskih raspodela teorijskim omogućava se stohastički prikaz neke veličine, čime se daje mogućnost da se generišu slučajni brojevi koji bi služili u metodi *Monte Karlo*.



Slika 3.3: Normalna raspodela

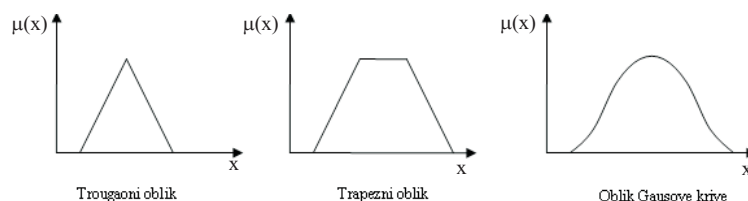
Pored funkcije raspodele postoji i funkcija gustine raspodele (slika 3.3), gde funkcija raspodele predstavlja integral funkcije gustine raspodele.

3.3 Rasplinuti skupovi

Teorija rasplnutih (fuzzy) skupova [36] predstavlja proširenje klasične teorije skupova dodavanjem svakom članu skupa takozvane funkcije pripadnosti. Funkcija pripadnosti, koja se uglavnom obeležava sa μ , omogućava članu skupa da prevaziđe ograničenje klasične teorije skupova koje mu dozvoljava samo pripadnost ili nepripadnost skupu, već daje mogućnost da neka veličina ima i određeni stepen pripadnosti. Funkcija pripadnosti $\mu(x)$ definiše se kao:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako } x \in A \\ 0, & \text{ako } x \notin A \\ 0 \leq p \leq 1, & \text{ako je delimično } \in A \end{cases} \quad (3.1)$$

Korišćenjem funkcije pripadnosti se u teoriju rasplnutih skupove uključuje i klasična teorija skupova. Oblast koju pokriva klasična teorija skupova je za oblast vrednosti funkcije pripadnosti $\mu = 0$ i $\mu = 1$, koje označavaju pripadanje i/ili nepripadanje određenom skupu. Za vrednosti μ između nule i jedinice neka vrednost ima delimičnu pripadnost skupu.



Slika 3.4: Tipovi fuzzy skupova funkcije pripadnosti

Rasplinuti skup daje određenu dozu fleksibilnosti koja omogućava predstavljanje veličina koje nemaju definisanu granicu, veličina u koje treba uneti određenu dozu pristrasnosti ili predrasude, a što je slučaj i sa neodređenim veličinama. U delu matematike koji se odnosi na fuzzy skupove postoje definisane sve osnovne operacije nad njima, pa su, na primer, negacija, unija i presek rasplnutih skupova definisani jednačinama:

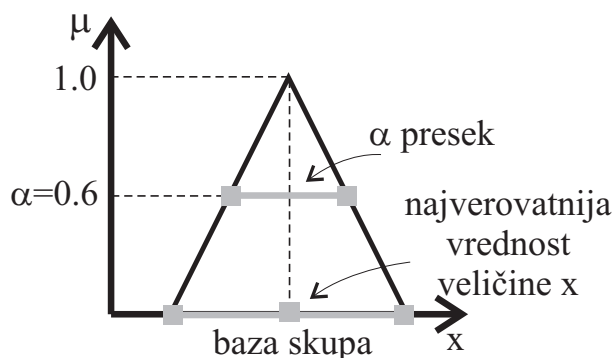
$$\begin{aligned} \mu_{A'}(x) &= 1.0 - \mu_A(x) \\ \mu_{A \cap B}(x) &= \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \\ \mu_{A \cup B}(x) &= \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ukoliko se za prikaz neke neodredjene veličine ne raspolaže sa dovoljnom količinom informacija za formiranje statističke raspodele, alternativu daju tzv. rasplinuti (fuzzy) skupovi. Oni, pored očigledne impresije o neodredjenoj

veliĉini daju i mogućnost predstavljanja konceptualnih veliĉina sa koje je nejasno kako uopšte i prikupiti podatke za formiranje statistiĉke raspodele (na primer, ĉvorna potrošnja kod modeliranja distributivnih vodovodnih mreža).

Funkcija pripadnosti rasplinutog skupa moŹe biti razliĉitih oblika. Najjednostavniji je oblik trougla, dok moŹe biti i u obliku trapeza, ili neke druge krive linije, kao Źto je prikazano na slici 3.4. Kada je funkcija pripadnosti u normalizovanoj formi, maksimalna vrednost ove funkcije je 1, dok je minimalna jednaka 0. To znaĉi da postoji jedna ili viŹe vrednosti za koje vaŹi $\mu(x) = 1$. Te vrednosti (vrednosti za koje je $\mu(x) = 1$) se zovu najverovatnije vrednosti ili najverovatniji intervali (slika 3.5). Pored vrednosti/intervala kod kojih je $\mu(x) = 1$, postoje intervali kod kojih je $\mu(x) > 0$. Najveći od njih, za $\mu(x) = 0$, se zove baza skupa.

Interval koji se dobija za odredjenu vrednost pripadnosti (odredjenu vrednost μ) zove se α -presek rasplinutog skupa za $\mu(x) = \alpha$ (slika 3.5). To znaĉi da se rasplinuti skup moŹe predstaviti kao niz α -preseka koji u suŹtini predstavljaju intervale. SloŹenost predstave rasplinutog skupa, na ovaj naĉin, zavisi od broja α -preseka, dok je najstroŹenija predstava pomoću funkcije pripadnosti (kada ona predstavlja kontinualnu funkciju).



Slika 3.5: Primer α -preseka za $\alpha = 0.6$

Definisanjem α preseka dolazi se do zakljuĉka da je rasplinuti skup moguće prikazati i posmatrati kao niz intervala sa definisanim atributom u vidu vrednosti funkcije pripadnosti. Na taj naĉin se analiza neodredjenosti rasplinutim skupovima svodi na analizu propagacije neodredjenosti pomoću intervala za razliĉite vrednosti funkcije pripadnosti.

Ne postoje formalna uputstva o naĉinima kako se mogu odrediti nivoi pripadnosti neke vrednosti rasplinutom skupu (tj. kako se moŹe odrediti funkcija pripadnosti rasplinutog skupa). Uglavnom svi predloŹeni naĉini zavise od subjektivnog osećaja i pretpostavki. Prema tome, subjektivnim delovanjem se dolazi do funkcije pripadnosti koja predstavlja egzaktni i upotrebljiv ele-

ment, što je i glavna prednost oblasti matematike koja se bavi rasplnutim skupovima. To je i osnova fuzzy načina razmišljanja: kako matematički opisati nešto što je najlakše opisati lingvistički, npr. MALO, PUNO, POLAKO, BRZO, ...

Glava 4

Metode propagacije neodredjenosti koje se mogu primeniti kod zatvorenih hidrotehničkih modela

Kratak pregled Glave 4:

Metode propagacije neodredjenosti predstavljaju napredne postupke preslikavanja neodredjenih ulaznih vrednosti i parametara preko determinističkih modela u neodredjene rezultate. Neki od postupaka zahtevaju da su jednačine modela dostupne i moguće ih je menjati, dok se neke mogu primeniti i na modele zatvorenog tipa. Osnovna podela je na neprobabilističke, probabilističke i posibilističke metode. Prva klasa predstavlja upotrebu metoda intervalske matematike i procene neodredjenosti na osnovu osetljivosti modela, dok se druge dve klase odnose na statistički pristup i postupke prilagodjene rasplintim skupovima. Primena i uspešnost metoda zavisi kako od raspoloživih ulaznih podataka tako i od vrste modela.

Osnovni zadatak, koji obezbeđuje ispunjenje svih ciljeva iz odeljka 2.5, analize neodredjenosti kod determinističkih zatvorenih modela je svakako proizvesti rezultat u neodredjenom obliku iz neodredjenih ulaznih podataka i/ili parametara modela. Ukoliko su jednačine i postupak njihovog rešavanja dostupne (nisu sakrivene u kompjuterskom kôdu) moguće je pristupiti analitičkoj propagaciji neodredjenosti. U tom slučaju, pored načina rešavanja, potrebno je omogućiti i efikasan postupak pronalaženja izvoda veličina u modelu.

4.1 Analitički postupak propagacije neodređenosti

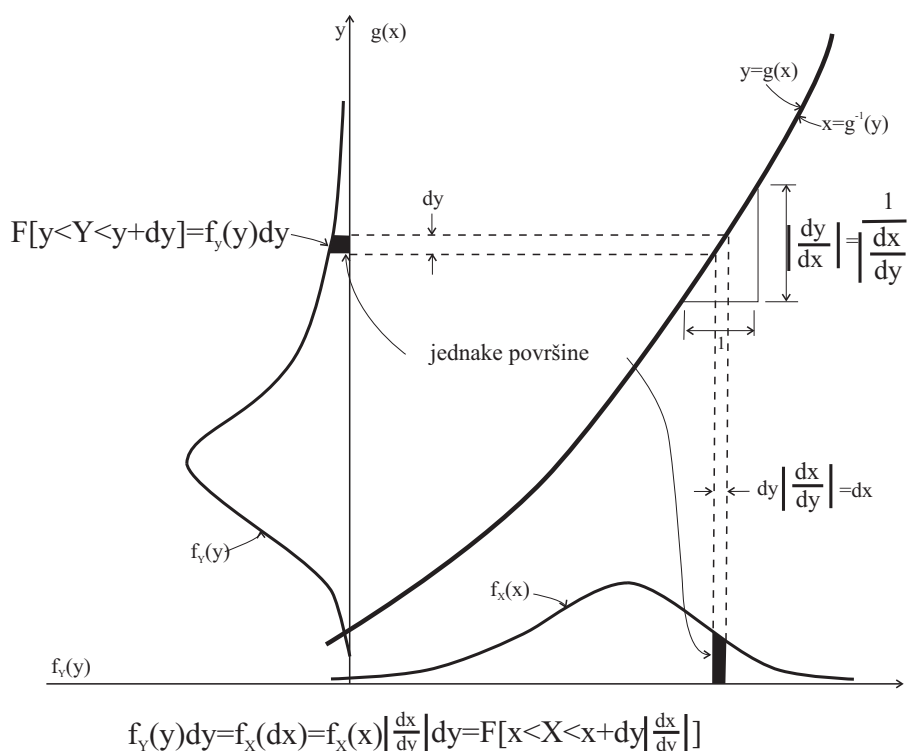
Neodređena ulazna veličina X predstavljena je funkcijom raspodele $F_X(x)$. Model je predstavljen determinističkom funkcijom sa jednom promenljivom $Y = g(X)$. Za svako x može se naći oblast Ω_y takva da je:

$$\Omega_y = \{x : g(x) \leq y\} \quad (4.1)$$

Opšte rešenje funkcije raspodele slučajne F_Y promenljive Y može se dobiti iz:

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[y \in \Omega_y] = \int_{\Omega_y} f_X(x) dx \quad (4.2)$$

Postupak je prikazan i na slici 4.1.



Slika 4.1: Propagacija neodređenosti kroz transformaciju raspodele jednodimenzionalne funkcije slučajne promenljive (modela) [32]

Ukoliko se problem proširi na funkciju više promenljivih, potrebno je odrediti višedimenzionalnu raspodelu rezultata modela. Za funkciju dve

promenljive $Z = g(x, y)$, sa datom dvodimenzionalnom raspodelom ulaznih vrednosti X i Y i ako se za svaku tačku u prostoru funkcije $g(x, y)$ može naći oblast:

$$\Omega_z = \{x, y : g(x, y) \leq z\} \quad (4.3)$$

statistička raspodela slučajne promenljive Z se može odrediti iz:

$$F_Z(z) = P[Z \leq z] = P[(x, y) \in \Omega_z] = \iint_{\Omega_z} f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (4.4)$$

Važno je uvideti da je za računanje gore navedenih integrala potrebno poznavanje svih tačaka funkcija $Y = g(x)$ i $Z = g(x, y)$. Njihovo određivanje je u principu jako neefikasno, pogotovu kod zatvorenih modela gde je onemogućena analitička integracija. Takodje, izuzetno je važan i efikasan metod računanja izvoda inverznog oblika modela koji se zahteva u postupku, (slika 4.1).

Analitička propagacija neodredjenosti na primeru tečenja sa slobodnom površinom

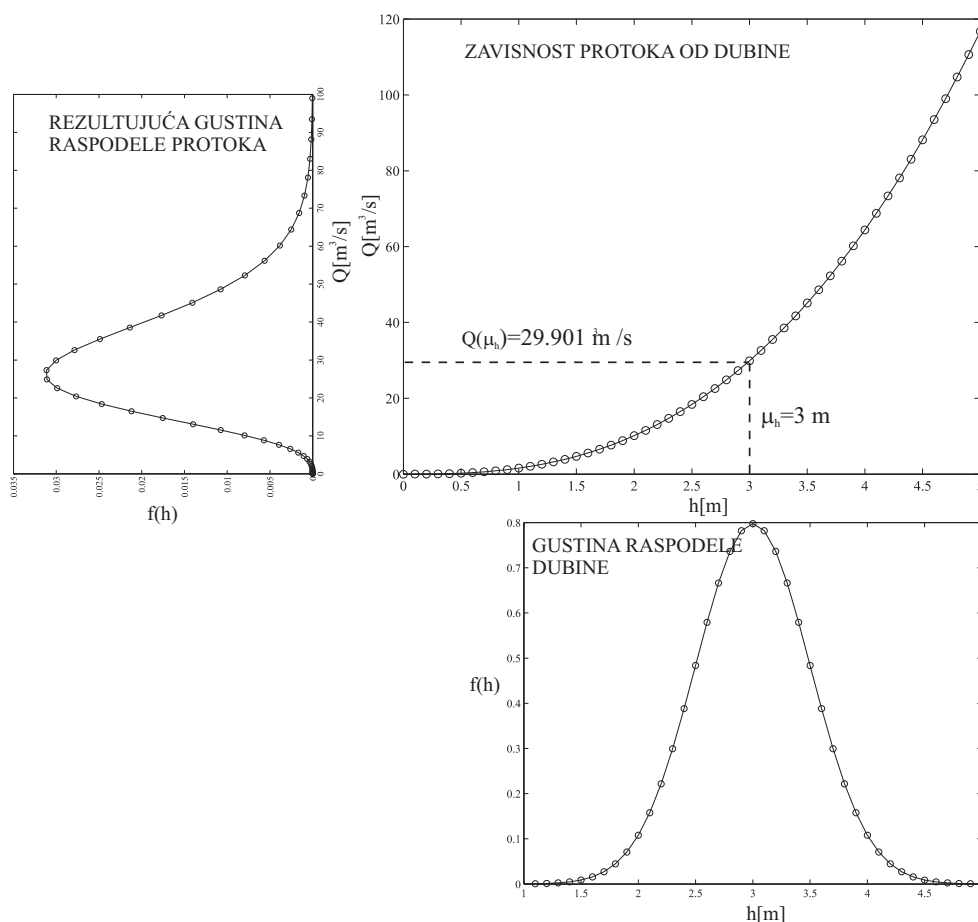
Jednačina jednolikog tečenja u otvorenom kanalu, *Šezi-Maningova* (eng. *Chezy-Manning*) jednačina je primer jednodimenzionalne monotone zavisnosti protoka od dubine:

$$Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} \sqrt{I_d} \quad (4.5)$$

gde su Q -protok, n -Manningov koeficijent otpora, A -površina poprečnog preseka za normalnu dubinu, R -hidraulički radijus pri normalnoj dubini i I_d -nagib dna kanala. Zbog jednostavnosti pretpostavlja se trougaoni oblik poprečnog preseka kanala, nagiba stranica 1 : 1, jer je u tom slučaju moguće dobiti eksplicitno, analitičko rešenje za normalnu dubinu. Sredjena jednačina za nagibe stranica 1 : 1 se može predstaviti u obliku:

$$Q = \frac{1}{2} \frac{1}{n} h^{8/3} \sqrt{I_d} \quad (4.6)$$

Ukoliko se pretpostavi da su parametri modela, nagib dna kanala i *Manningov* koeficijent otpora konstante, a ulazna veličina h (normalna dubina) neodređena veličina, u pitanju je jednodimenzionalni model koji preslikava normalnu dubinu u protok u kanalu. Monotonost modela se ogleda u činjenici da kad nivo raste, raste i protok, što se, za parametre modela $n = 0.014 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$, $I_d = 0.002$, i promenu dubine od 0 do 5 m može videti na slici 4.2.



Slika 4.2: Zavisnost protoka od dubine u trougaonom kanalu preko Šezi-Maningove jednačine sa gustinama raspodele dubine i protoka

Pretpostavlja se da je normalna dubina neodređena veličina sa određenom raspodelom. Za potrebe primera odabrana je normalna raspodela sa parametrima $\mu_h = 3$ m i $\sigma_h = 0.5$ m, čija se funkcija gustine može videti na slici 4.2. Za srednju vrednost dubine $\mu_h = 3$ m, dobija se protok koji iznosi $Q(\mu_h) = 29.901$ m³/s

Jednačina gustine normalne raspodele sa gore navedenim parametrima se može izraziti jednačinom 4.7.

$$f_h(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_h} e^{-\frac{(h-\mu_h)^2}{2\sigma_h^2}} \quad (4.7)$$

A izvod modela 4.6, jednačinom:

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{I_d}}{n} h^{5/3} \quad (4.8)$$

Jednačina gustine raspodele rezultata modela, tj. protoka se može izračunati jednačinom:

$$f_Q(Q) = \frac{dh}{dQ} \times f_h(h) \quad (4.9)$$

Rezultat propagacije je prikazan na slici 4.2.

Ovim primerom prikazano je analitičko određivanje propagacije neodredjenosti kada je neodredjena ulazna veličina u obliku raspodele verovatnoće. Da bi došla do izražaja efikasnost ovog postupka, pre svega je potreban diferencijabilni model i ukoliko je moguće eksplicitno rešiv. Ukoliko to nije slučaj, potrebno je sprovesti numeričko računanje izvoda koje je prikazano u jednom od narednih poglavlja.

4.2 Metode analize neodredjenosti kod zatvorenih modela

Metoda analitičke propagacije neodredjenosti nije podesna u slučaju zatvorenih modela. Za to postoji više razloga. Osnovni razlog je što kod složenih modela koji se dugo rešavaju nije realno očekivati da se mogu odrediti svi parovi ulaznih vrednosti i rezultata modela koji su nam potrebni za dovoljno tačno diferenciranje. Zbog toga je potrebno izdvojiti metode koje su posebno podesne za zatvorene modele.

Metode analize neodredjenosti koje su podesne kod zatvorenih hidrotehničkih modela mogu se podeliti u nekoliko grupa:

1. Metode neprobabilističkog tipa. U ovu klasu metoda se mogu svrstati intervalna matematika i analiza neodredjenosti procenjena na osnovu parametara osetljivosti modela.
2. Metode probabilističkog tipa, koje se dalje mogu podeliti na dve grupe:
 - (a) statističke metode, i
 - (b) nestatističke metode.

Od statističkih metoda najpoznatija je *Monte Karlo* metoda, dok se od nestatističkih mogu izdvojiti metode bazirane na razvoju modela u *Tejlorov* red.

3. Posibilističke metode ili metode bazirane na rasplnutim skupovima.

4.2.1 Metode neprobabilističkog tipa

Prvu grupu obuhvataju metode bazirane na predstavi neodredjenih veličina intervalima (poglavlje 3.1). Intervali, iako nose informacije samo o maksimalnoj i minimalnoj vrednosti neodredjene veličine uz neophodna ograničenja nude izuzetno brz i elegantan pristup proceni granica neodredjenosti. Naime, ukoliko je model neprekidan i ukoliko u oblasti neodredjenih ulaznih veličina i rezultata ne egzistiraju ekstremumi, intervalskom matematikom se na izuzetno jednostavan način može doći do neodredjenog rešenja modela u obliku intervala. Ukoliko to nije slučaj i ukoliko u oblasti neodredjenih ulaznih veličina i parametara postoje ekstremumi, neophodne su dodatne analize, pre svega u pogledu pronalaženja i odredjivanja tih ekstremuma (u poglavlju 2.4 je navedena podela hidrotehničkih modela u kojoj se razdvajaju grupe modela sa ekstremumima i bez ekstremuma).

4.2.2 Metode probabilističkog tipa, statističke metode

Druga grupa metoda, probabilističkog tipa sa statističkim pristupom, je bazirana na kontrolisanom generisanju ulaznih veličina bez cilja da se iscrpe sve moguće kombinacije parova ulaznih vrednosti i rezultata modela. Na ovaj način je moguće analizom dobijenog niza rezultata dobiti informaciju o neodredjenosti izlaza. Obično se to obavi predstavljanjem rezultata koji se posmatra kao slučajna veličina nekom teorijskom raspodelom ili se samo računaju momenti koji se odnose na neodredjenost (varijansa, standardna devijacija ili koeficijent varijacije). Osnovni predstavnik ovakvih metoda je *Monte Karlo* (eng. *Monte Carlo*) metoda, koja će se u ovom radu uzimati i kao referentna pri evaluaciji ostalih tehnika.

4.2.3 Metode probabilističkog tipa, nestatističke metode

Primer druge grupe metoda, probabilističkog tipa sa nestatističkim pristupom, predstavlja upotreba postupaka lokalne linearizacije modela, najčešće razvojem modela u *Tejlorov* (eng. *Taylor*) red. Izvode za potrebe formiranja *Tejlorovog reda* je moguće odrediti u diskretnom obliku. Ova grupa metoda bazirana je samo na lokalnoj analizi neodredjenosti što znači da su kod modela koji imaju značajne vrednosti izvoda moguće i značajne greške. Zbog toga ova grupa metoda nije preporučljiva kod modela sa većom osetljivošću i većom propagacijom neodredjenosti. Glavni predstavnici su metode FOSM, SOSM, itd.

4.2.4 Posibilističke metode

U novije vreme postaju veoma popularne metode bazirane na rasplnutim skupovima predstavljaju okosnicu analize neodredjenosti. Ove metode su posebno pogodne u slučajevima gde se neodredjenost javlja usled nedostatka znanja o nekom procesu ili veličini. Predstava pomoću rasplnutog skupa omogućava da se u analizu neodredjenosti unese neka činjenica koja unosi neodredjenost. Iako ova grupa metoda možda nije najefikasnija u opštem slučaju, u pojedinim, ne tako retkim slučajevima može znatno pojednostaviti i ubrzati proces propagacije neodredjenosti (pre svega kod monotonihih modela).

4.3 Metode propagacije korišćene u ovoj tezi

U odeljku 2.4 predstavljeni su tipovi hidrotehničkih modela. Podela je napravljena pre svega na ustaljene i neustaljene procese. Ustaljeni hidrotehnički procesi predstavljaju procese koji ne zavise od vremena, tj. $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ za svaku veličinu koja ima svoju ulogu u pojavi. Neustaljeni procesi imaju određenu dinamiku vezanu za vreme (imaju odlike procesa drugog reda). Modeli, podeljeni na isti način u svojoj strukturi, ukoliko su ustaljeni, nemaju parametar vezan za vreme, dok ga neustaljeni imaju. Kod analize neodredjenosti neustaljenih modela postoji pravilo da se neodredjenost rezultata modela neustaljenih procesa ne mogu posmatrati pojedinačno, već se mora voditi računa o celoj vremenskoj seriji rezultata. Samo u pojedinim slučajevima gde ne postoji fazni pomak kod rešenja moguće je podeliti vremenski domen na vremenske preseke i svaki presek posmatrati posebno. Odstupanje od pravila je moguće i u slučajevima kada se posmatraju izdvojeni fenomeni u vremenu (na primer vrh poplavnog talasa ili minimalni pritisak kod hidrauličkog udara). Kod ustaljenih procesa vremenska zavisnost ne postoji pa je moguće ne gledati vremenski aspekt procesa i moguće je fokusirati se na neodredjenost u jednom vremenskom i prostornom preseku.

U skladu sa podelom modela na tipove, korisno je izdvojiti i karakteristike tih modela koje direktno utiču na izbor i način primene određene metode propagacije neodredjenosti:

1. Modeli ustaljenih procesa

- diferencijabilni nemonotoni (model profila brzina između dve ploče)
- diferencijabilni monotoni (tečenje u otvorenim kanalima, tečenje u rekama, ...)

- nediferencijabilni (modeli sa prekidom, dvostepeni modeli - ustava, hidraulički udar)
2. Kvaziustaljeni modeli (nivo u rezervoaru kod modela vodovodne distributivne mreže)
 3. Modeli neustaljenih procesa
 - modeli sa brzim promenama (hidraulički udar)
 - modeli sa sporim promenama (poplavni talas, tečenje u kanalizaciji)

Matematički modeli ustaljenih procesa daju jedno rešenje za jedan skup ulaznih podataka i za jedan vremenski presek. Kod ovakvih modela moguće je zamisliti i predstaviti zavisnost rezultata od neodredjene ulazne veličine ili parametra. Ta zavisnost određuje rezultat propagacije neodredjenosti i upravo preko nje se ulazna neodredjena veličina preslikava u neodredjeni rezultat. To je upravo slučaj sa već prikazanom zavisnosti $Q - h$ kod primera tečenja u otvorenom kanalu (u ovom poglavlju).

Kod analize neodredjenosti ovakvih modela postoje razlike u tretiranju monotonih i nemonotonih zavisnosti. Osnovni problem je postojanje lokalnih ekstremuma koji utiče i na izbor metode kao i na rezultat. Pre svega tu je problem koji se javlja kod upotrebe intervalske matematike, a zatim i problem gomilanja rešenja kod Monte Carlo metode. Ne sme se zanemariti ni činjenica da je izvod u lokalnom ekstremumu jednak nuli što može značajno uticati na rezultat momentnih metoda.

Promena režima tečenja ili graničnih uslova čest su problem upravljanja u hidrotehnici. Opisivanje takve vrste procesa najpodesnije je funkcijama sa prekidima gde do neke granice važi jedan zakon, a nadalje drugi. Ovakvi modeli se mogu smatrati nediferencijabilnim. Kao primer, u ovom radu je prikazana analiza neodredjenosti na modelu upravljanja ustavom uz postojanje nizvodnog graničnog uslova.

Modeli neustaljenih procesa uvode novu nezavisnu promenljivu - vreme. Oni se mogu podeliti u dve velike grupe: kvaziustaljene i neustaljene procese. Kvaziustaljeni procesi imaju tu odliku da se rešavaju od prethodnog do narednog vremenskog koraka kao niz ustaljenih procesa. Ulazne vrednosti narednog vremenskog koraka zavise od rezultata prethodnog, ali se ne vidi uticaj koraka pre prethodnog kao ni narednog koraka. Kod neustaljenih hidrodinamičkih procesa jednačine se moraju rešavati simultano. Bilo koji granični ili početni uslov utiče na ceo proces. U slučaju ove dve grupe modela potrebno je uzeti u obzir cele nizove rešenja, a ne samo članove od interesa za analizu.

Prikazane tri metode (*Monte Karlo*, metoda momenata i α -presek metoda kod rasplnutih skupova) spadaju u grupu probabilističkih (prve dve) i possibilističkih (treća metoda). Osnovna varijanta *Monte Karlo* analize, bazirane na velikom broju simulacija modela predstavlja baznu metodu za analizu neodredjenosti, dok su brojne varijacije ove metode prilagodjene odredjenim zahtevima i modelima. Da bi metode bile prikazane, u ovoj tezi je napravljen izbor hidrotehničkih modela u skladu sa njihovom primenom i oblikom u kom se dobijaju rezultati.

Iako su neki modeli u obliku analitičkih izraza, za potrebe ovog rada su tretirani kao zatvoreni modeli. To je slučaj sa svim jednostavnim modelima koji imaju za cilj da prikažu neku metodu i deluju ilustrativno. Jasno je da se nakon razmatranja na jednostavnom modelu ista metoda može primeniti i na nekom znatno komplikovanijem, ali sličnom po navedenim kriterijumima. Zbog toga, kod izbora primera nije se ulazilo u suštinu modela već samo u oblik rezultata modela.

Potrebno je još naglasiti da su prikazane metode analize neodredjenosti potpuno opšteg tipa, nezavisne od vrste i tipa modela uopšte. Hidrotehnički modeli su samo jedna grupa kod koje se mogu primeniti prikazane metode i postupci.

Glava 5

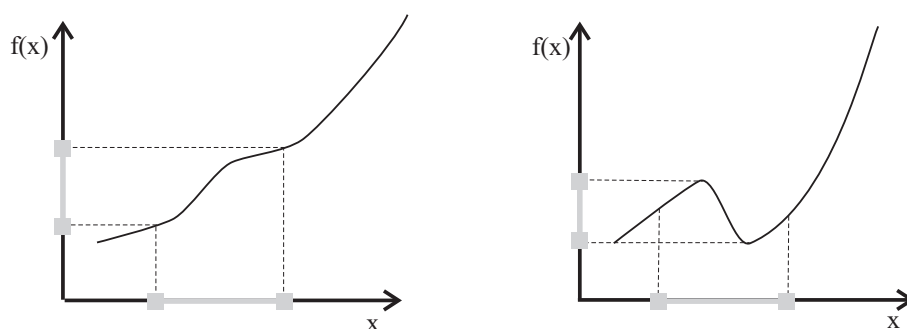
Intervalna matematika

Kratak pregled Glave 5:

Intervalna matematika predstavlja oblast matematike koja se bavi računom sa promenljivama u obliku intervala. Razvijeno je niz pravila intervalske matematike i ona predstavlja osnovu alata koji je potreban u analizi neodređenosti sa veličinama u obliku intervala. Pored pravila računanja sa intervalima, mogući su i brojni izuzeci. Neki od njih navedeni su u ovom poglavlju. Pored opisa izuzetaka, predloženi su i načini kako da se problemi koje oni nose u sebi prevaziđu.

Intervalna matematika je alat koji, kada je ulazna veličina predstavljena intervalom, u najvećem broju slučajeva rešava problem propagacije neodređenosti kod hidrotehničkih modela. Za to je prvo potrebno prikazati neodređenu veličinu u obliku intervala. Osnovne operacije intervalne matematike daju mogućnost izračunavanja granica intervala rešenja modela, ali ne i informacije o uzroku ili vrsti neodređenosti. Isto tako, ne postoji, niti se propagira, informacija o vrednostima unutar intervala. Zbog toga je potrebno da ulazni intervali budu kontinualni, jer se tako omogućava da se prenese kontinualnost na neodređeno rešenje u istom obliku.

Ograničenje intervalne matematike je što se ona odnosi samo na monotone modele, (slika 5.1 primer na slici levo), kod kojih u intervalu ne postoje ekstremumi. U slučaju nemonotonih modela (primer na desnom delu slike 5.1) mora se pribeći optimizacionim metodama za pronalaženje granica neodređenih rezultata zato što minimum i maksimum funkcije u okviru intervala ne moraju odgovarati granicama intervala neodređene ulazne veličine. Na slici 5.1 se vidi da ako se krajevi intervala ulazne veličine uzmu u proračun, dobija se interval rešenja koji ne obuhvata lokalne ekstremume funkcije unutar datog intervala.



Slika 5.1: Propagacija intervala na monotonom i nemonotonom modelu

5.1 Osnovni principi intervalne matematike

Za veličine u obliku intervala postoje specifične aritmetičke procedure. Na primer, ukoliko su $[a_l, a_u]$ i $[b_l, b_u]$ dve veličine u obliku intervala, osnovne operacije intervalske matematike primenjene na njih bi se mogle izraziti formulama:

$$\text{sabiranje: } a + b = [a_l + b_l, a_u + b_u]$$

$$\text{oduzimanje: } a - b = [a_l - b_u, a_u - b_l]$$

$$\text{množenje: } a \times b = [\min(a_l b_l, a_l b_u, a_u b_l, a_u b_u), \max(a_l b_l, a_l b_u, a_u b_l, a_u b_u)]$$

$$\text{delenje: } a/b = a \times \frac{1}{b} = [a_l, a_u] \times \left[\frac{1}{b_u}, \frac{1}{b_l} \right]; 0 \notin [b_l, b_u]$$

Ukoliko je model na kome se primenjuje intervalska matematika monoton, tj. nema ekstremuma u prostoru ograničenom granicama ulaznih vrednosti u obliku intervala, postupak je pravolinijski. Dovoljno je preslikati granice intervala preko monotonog modela. Međutim, navedena pravila treba shvatiti kao specijalne slučajeve. U opštem slučaju mora se voditi računa i o obliku u kom se funkcija nalazi. Recimo da se posmatra jednostavan eksplicitni model u obliku funkcije (slika 5.2):

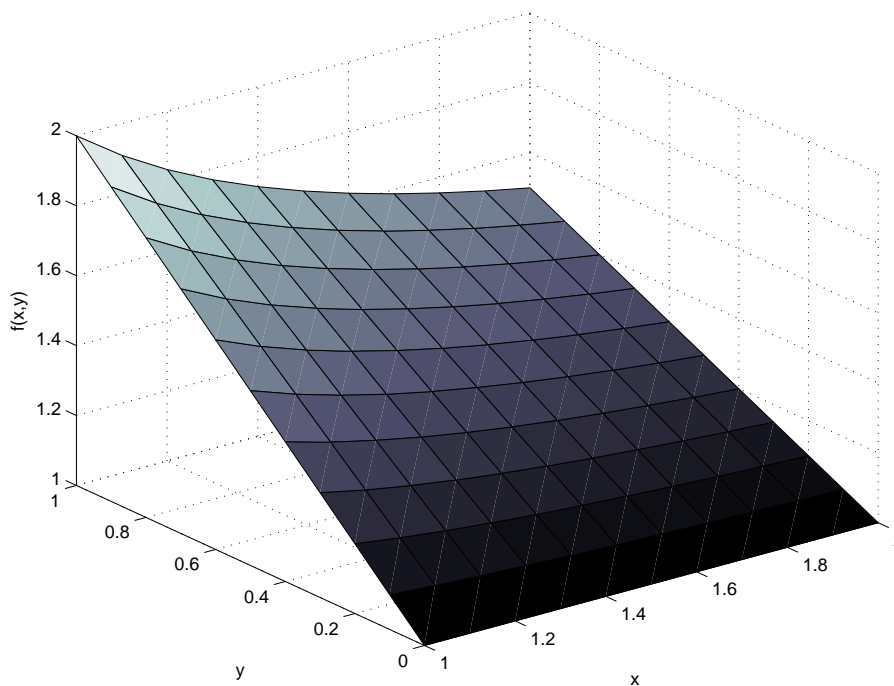
$$f(x, y) = f_1(x, y) = \frac{x + y}{x} \quad (5.1)$$

koja se može predstaviti i u obliku:

$$f_2(x, y) = 1 + \frac{y}{x} \quad (5.2)$$

Funkcije f_1 i f_2 bi trebalo da budu ekvivalentne za x različito od nule. Ukoliko su ulazne vrednosti modela $f(x, y)$ neodređene veličine u obliku

intervala i to u granicama $x = [1, 2]$ i $y = [0, 1]$, potrebno je preslikati granice preko funkcija f_1 i f_2 :



Slika 5.2: Izgled funkcije $f(x, y) = \frac{x+y}{x}$

Ukoliko se primeni intervalna matematika na celim intervalima mogućih vrednosti promenljivih x i y , dobijaju se sledeći rezultati:

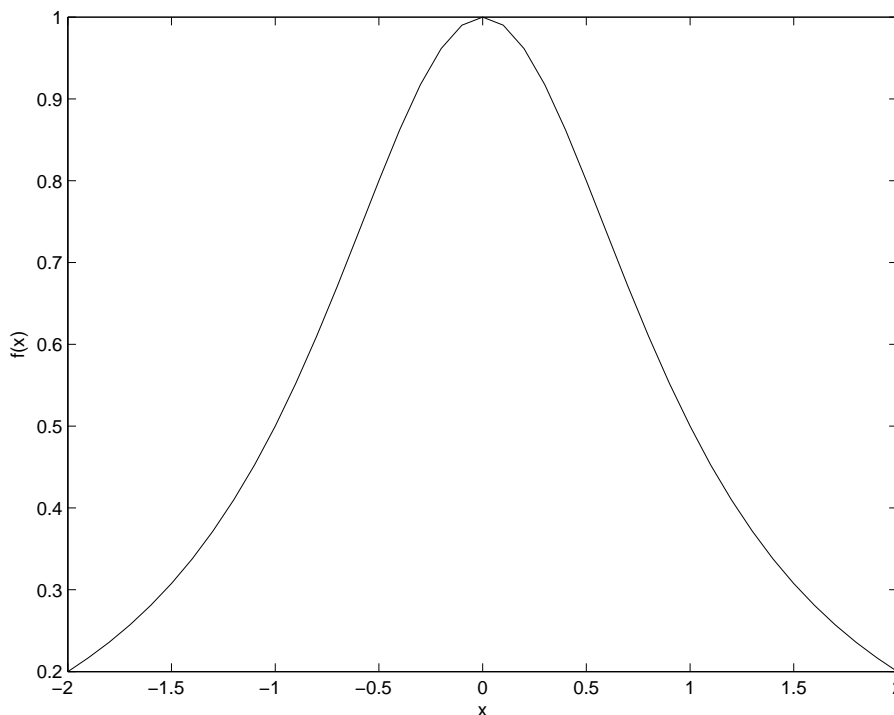
$$f_1([1, 2], [0, 1]) = \frac{[1, 3]}{[1, 2]} = [\min(1, 3, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}), \max(1, 3, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})] = [\frac{1}{2}, 3] \quad (5.3)$$

$$f_2([1, 2], [0, 1]) = [1, 2] \quad (5.4)$$

Crtanjem funkcije $f(x, y)$ (slika 5.2) može se videti da funkcija f_2 daje prave rezultate, dok funkcija f_1 daje rešenja za granice intervala koja ne odgovaraju. Jedan od načina da se izbegne pravljenje ovakvih grešaka je reformulisanje samog modela tako da se svaka promenljiva pojavljuje samo jednom u članu jednačine.

Drugi veliki problem svodi se na dobijanje intervala koji u sebi imaju vrednosti u kojima modeli nisu definisani. Na primer funkcija sledećeg oblika (slika 5.3):

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (5.5)$$



Slika 5.3: Izgled funkcije $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2}$

je definisana za x u intervalu $[-2, 2]$. Ista funkcija, da bi mogli primeniti već navedena pravila intervalske matematike, treba biti prikazana u obliku:

$$f(x) = \frac{1}{1+x \times x} \quad (5.6)$$

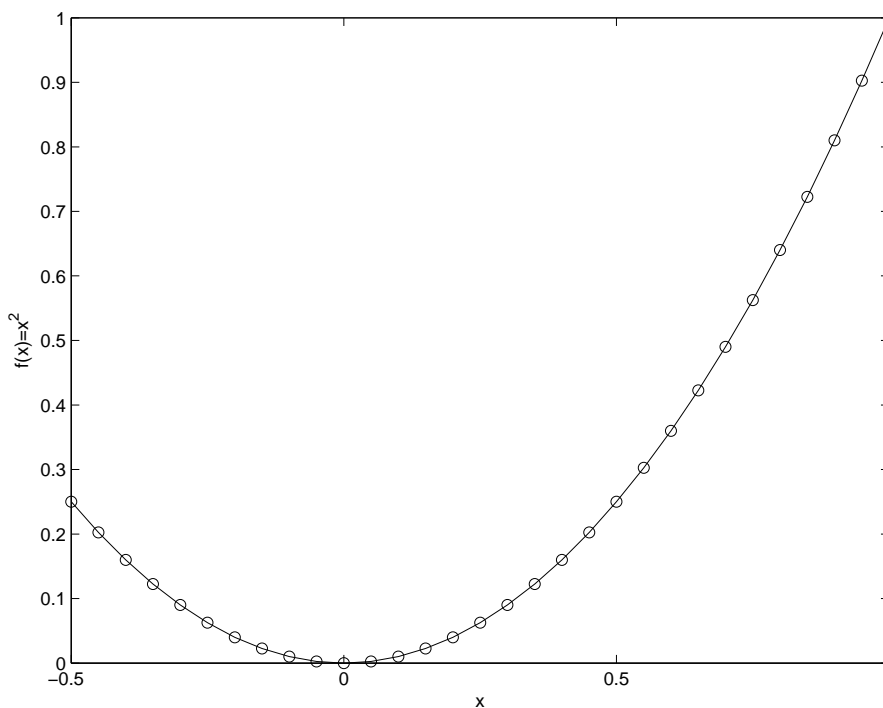
Rešenje u datom intervalu je:

$$f([-2, 2]) = \frac{[1, 1]}{[1, 1] + [-2, 2] \times [-2, 2]} = \frac{[1, 1]}{[-3, 5]} \quad (5.7)$$

Medjutim, dalji račun nije moguć iz razloga što mora da se isključi nula iz intervala $[-3, 3]$ jer rešenje sa nulom u imeniocu nije definisano. Posmatrajući originalnu funkciju, potpuno je jasno da je funkcija definisana na celom intervalu promenljive x (slika 5.3). Rešenje ovakvog problema može se naći u definisanju unarnog operatora kvadriranja (koji bi isključio vrednosti manje od nule), i koji bi dao sledeći rezultat:

$$f([-2, 2]) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{[1, 1]}{[1, 1] + [0, 4]} = \left[\frac{1}{5}, 1\right] \quad (5.8)$$

Treći veliki problem javlja se kod nemonotonih modela. To su modeli koji u posmatranom intervalu imaju neki ekstremum, bilo minimum ili maksimum. U slučaju funkcije $f(x) = x^2$, slika 5.4, i intervala $[-0.5, 1]$ preslikavanjem granica intervala dobijaju se granice $[0.25, 1]$, dok je tačno rešenje $[0, 1]$.



Slika 5.4: Izgled funkcije $f(x) = x^2$

Do tačnog rešenja jedino je moguće doći ispitivanjem ekstremuma i njegovo određivanje na posmatranom intervalu. Kod jednostavnih funkcija to je moguće postići nekom od analitičkih metoda i analizom prvog i drugog izvoda, međutim kod komplikovanijih modela, mora se pribeći upotrebi optimizacionih metoda prilagodjenih za pronalaženje ekstremuma.

5.2 Prednosti i mane intervalne matematike

Glavna prednost pristupa analizi neodređenosti pomoću intervalne matematike je jednostavnost postupka. Međutim, mora se приметiti da interval

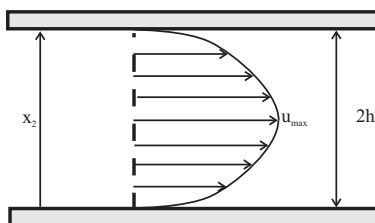
ne nosi neke određene informacije o neodređenoj veličini već samo one najosnovnije koje se ogledaju u granicama veličine. Ako postoje dodatne informacije o neodređenoj ulaznoj veličini, postupak propagacije primenjen intervalnom matematikom bi te podatke sakrio. Povrh svega, nemonotoni modeli zahtevaju drugačiji pristup čak i kada je neodređena veličina predstavljena intervalom, pa je pre analize neodređenosti potrebno sprovesti i analizu postojanja ekstremuma.

Propagacija neodređenosi intervalskom matematikom na primeru profila brzina laminarnog tečenja između dve ploče

Jedan od teoretskih hidrotehničkih problema je i određivanje rasporeda brzina kod tečenja između dve ploče [18] (slika 5.5). Laminarno tečenje omogućava teoretsko izvodjenje jednačine tečenja koja u bezdimenzionalnom obliku glasi:

$$\frac{u}{u_m} = 2 \frac{x_2}{h} - \left(\frac{x_2}{h} \right)^2 \quad (5.9)$$

gde su $2h$ - rastojanje između ploča, u - brzina na rastojanju x_2 od jedne od ploča i u_m - maksimalna brzina koja se dobija za $x_2 = h$.



Slika 5.5: Laminarno tečenje između dve ploče

Ukoliko je potrebno proveriti brzinu toka u merenjima, u blizini mesta gde se javlja maksimalna brzina u_m javlja se problem pozicije mernog uredjaja. Prikazano u neodređenom, bezdimenzionalnom obliku u vidu intervala, moguće je da se merna sonda nalazi bilo gde u intervalu $x_2/h \in [0.90, 1.1]$. Standardnim postupkom, bez analize da li postoji ekstremum u pretpostavljenom intervalu, dobila bi se bezdimenzionalna vrednost za brzinu $u/u_m \in [0.96, 0.96]$, odnosno, interval neodređenosti je nula - što rezultuje apsolutno tačnim merenjem brzine iako ne znamo baš u kojoj se tački nalazila sonda. Naravno, analiza postojanja ekstremuma govori da jedna od granica intervala bezdimenzionalne brzine u preseku mora biti u tački gde je $u/u_m = 1$, pa je ispravno rešenje $u/u_m \in [0.96, 1]$.

Pošto kod zatvorenih modela nije moguća intervencija u okviru jednačina modela, celokupna analiza je znatno otežana dodatnim ispitivanjem rezultata modela pre svega u pogledu monotonosti modela, postojanja i broja ekstremuma i definisanosti modela u granicama intervala.

Glava 6

Monte Karlo metoda

Kratak pregled Glave 6:

U širok spektar problema koji pokrivaju metode sa ovim imenom (Monte Karlo je opšti naziv za sve matematičke i numeričke postupke gde se koristi generisanje slučajnih brojeva) spada i propagacija neodređenosti. Monte Karlo predstavlja osnovnu metodu propagacije neodređenosti i zbog toga se koristi kao referentna za proveru i validaciju drugih metoda [16]. Princip ove metode je generisanje nizova slučajnih brojeva koji predstavljaju ulazne vrednosti modela, simuliranje modela sa generisanim ulaznim podacima i analiza dobijenih rezultata. Analiza rezultata se uglavnom svodi na statističku obradu i utvrđivanje statističkih parametara koji u sebi nose informaciju o neodređenosti.

Monte Karlo (eng. *Monte Carlo*) metoda [16] je masovno ušla u upotrebu krajem II svetskog rata na projektu razvoja prve atomske bombe. U isto vreme su se pojavili i prvi računari što je predušlov za njenu efikasnu primenu.

Iako ne postoji jedinstven *Monte Karlo* algoritam, postupak se svodi na nekoliko osnovnih koraka: najpre definisanje domena ulaznih vrednosti ili parametara modela, generisanje niza slučajnih brojeva koji ih predstavljaju, simulacije modela sa generisanim vrednostima i analiza rezultata simulacija. Analiza rezultata zavisi od cilja propagacije neodređenosti i podrazumeva računanje statističkih parametara niza rezultata [27] i izvodjenje zaključaka o veličini njihove neodređenosti, propagirane srednje vrednosti ili optimalnog rešenja.

Ukoliko generisane slučajne brojeve koji odgovaraju ulazu modela $f(\xi)$ označimo sa $[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots, \xi_N]$, niz rezultata modela $f_i(\xi_i)$ takodje predstavlja niz slučajnih brojeva sa matematičkim očekivanjem μ . Matematičko

očekivanje se može računati kao aritmetička sredina, koja ujedno predstavlja i prvi statistički moment raspodele niza rezultata modela:

$$\mu = \bar{f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i \quad (6.1)$$

Srednja vrednost daje odgovor na drugi cilj propagacije neodređenosti, poglavlje 2.5, iako on nije kompletan: nedostaje još podatak o grešci. Standardna devijacija, što je statistički momentat, najčešće se upotrebljava kao pokazatelj neodređenosti odnosno greške u poznavaju tačne vrednosti veličine. Standardna devijacija niza rezultata simulacija modela se može izračunati pomoću izraza:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f_i - \mu)^2} \quad (6.2)$$

Ona govori da, ukoliko niz rezultata prati npr. normalnu raspodelu, 68% članova niza će biti u okviru intervala $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ i čak 95% u intervalu $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$.

Često se kao pokazatelj neodređenosti koristi i koeficijent varijacije koji predstavlja vrednost standardne devijacije (σ) u odnosu na srednju vrednost (μ):

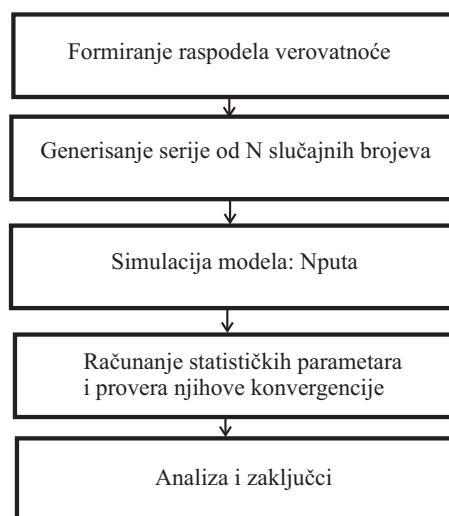
$$C_v = \frac{\sigma}{\mu} \quad (6.3)$$

Ostali momenti niza slučajnih brojeva dobijenih *Monte Karlo* simulacijama ne koriste se često, mada bi se morao izdvojiti koeficijent asimetrije zbog potrebe za asimetričnim raspodelama koje su široko rasprostranjene kod prirodnih, pogotovu hidrotehničkih procesa (log-normalna raspodela, itd.):

$$C_s = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^3}{n \sigma^3} \quad (6.4)$$

6.1 Monte Karlo metoda za analizu neodređenosti

Monte Karlo metoda je našla primenu u mnogim oblastima nauke. Tu su pre svega probabilističke metode računanja integrala, analiza rizika, analiza finansijskih tokova, itd. Ukoliko se *Monte Karlo* metoda koristi za analizu neodređenosti, postupak osnovne metode se, kao što je već rečeno, može opisati u nekoliko koraka prikazanih na slici 6.1:

Slika 6.1: Koraci *Monte Karlo* metode

1. formiranje raspodela ulaznih veličina i/ili parametara modela,
2. generisanje slučajnih brojeva iz raspodela ulaznih veličina (parametara) generatorima slučajnih brojeva,
3. simulacije modela i čuvanje rezultata,
4. računanje statističkih parametara niza rezultata modela i određivanje teorijske raspodele niza rezultata, i
5. analiza i zaključci.

Gore predstavljeni koraci *Monte Karlo* propagacije neodređenosti odgovaraju takozvanom osnovnom ili *Grubom* (eng. *Crude*) *Monte Karlo* algoritmu. Često, zbog specifičnosti matematičkih i numeričkih modela, ova vrsta *Monte Karlo* propagacije neodređenosti predstavlja krupan zalogaj čak i za savremene računare pre svega zbog spore konvergencije, a pod konvergencijom *Monte Karlo* metode se podrazumeva postizanje stabilnih vrednosti momenata iz niza rezultata simulacija. Zbog toga su razvijene varijacije *Monte Karlo* metode koje su predstavljene u narednim poglavljima.

6.2 Karakteristike *Monte Karlo* metode propagacije neodređenosti i način poredjenja sa varijacijama

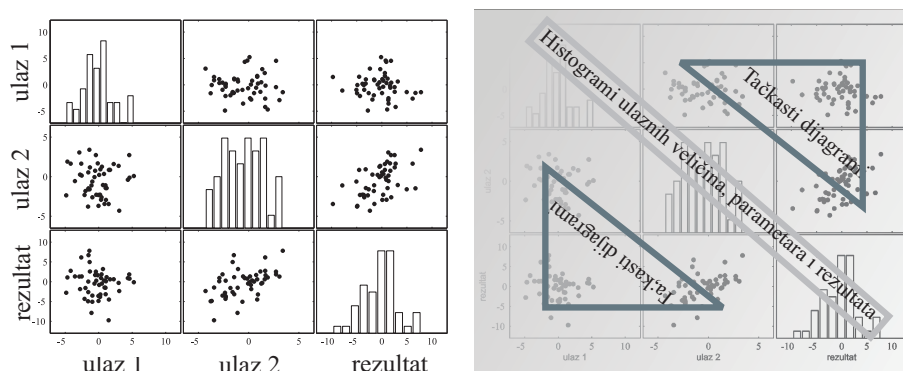
Indikator uspešnosti nekog *Monte Karlo* algoritma je angažovanje računara tokom analize. Uspešnost se može proceniti merejem vremena potrebnog za konvergenciju nekog od statističkih momenata ili brojanjem potrebnog broja simulacija modela. Ukoliko je cilj propagacije da se odredi veličina neodređenosti rezultata modela, prati se konvergencija drugog momenta (standardna devijacija σ , varijansa σ^2) ili koeficijenta varijacije $C_v = \sigma/\mu$, ali je moguće postići konvergenciju i nekog višeg momenta (npr. koeficijenta asimetrije) ukoliko je on izražen (što zavisi od fizike problema i osobina modela). Ukoliko je cilj da se odredi srednja vrednost veličina rezultata, korisno je smanjiti standardnu grešku. To se postiže ili većim brojem simulacija ili smanjenjem standardne devijacije niza rezultata algoritmima prikazanim dalje u tekstu.

Rangiranje varijacija *Monte Karlo* analiza se može obaviti upoređivanjem kako utrošenih računarskih resursa, tako i upoređivanjem rezultata simulacije. Najčešći obrazac za upoređivanje dve varijante *Monte Karlo* propagacije neodređenosti je svakako:

$$m = \frac{\sigma_1^2 n_2}{\sigma_2^2 n_1} \quad (6.5)$$

gde su σ_1 i σ_2 standardne devijacije dobijene pomoću dve različite varijante *Monte Karlo* analize na istom modelu, a n_1 i n_2 broj simulacija modela. Ukoliko je $m > 1$ prva varijanta se bolje rangira od druge. Ukoliko se pak želi proveriti efikasnost jedne varijante *Monte Karlo* metode, onda su σ_1 i σ_2 dobijene standardne devijacije za n_1 i n_2 simulacija modela.

Prikaz konvergencije može se dobiti ukoliko se kao mera konvergencije *Monte Karlo* analize prihvati veličina σ_i/σ_n , gde σ_i predstavlja standardnu devijaciju niza od i rezultata, a σ_n standardnu devijaciju ukupnog niza rezultata. Napominje se da se samo pretpostavlja da je σ_n konvergirana vrednost standardne devijacije niza rezultata. Stvarna konvergencija se postiže tek kada $n \Rightarrow \infty$.



Slika 6.2: Matrični dijagram za potrebe prikaza podataka *Monte Karlo* propagacije neodredjenosti

6.3 Prikaz rezultata *Monte Karlo* propagacije neodredjenosti

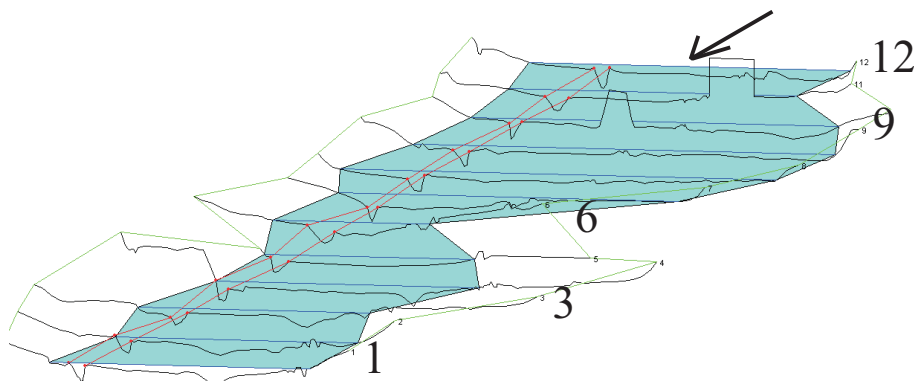
Glavna karakteristika *Monte Karlo* propagacije neodredjenosti je veliki broj generisanih ulaznih vrednosti, parametara i rezultata modela. Sve te podatke je korisno prikazati na zajedničkom dijagramu. Međutim, veliki problem predstavlja dimenzionalnost koja se ogleda u broju tipova podataka. Dovoljno je imati dve ulazne vrednosti i jedan rezultat pa je za njihov zajednički prikaz potrebno upotrebiti trodimenzionalni dijagram, a to je i granica vizuelizacije svih podataka odjednom.

Ukoliko se podaci *Monte Karlo* propagacije prikazuju specifičnim, matričnim dijagramom, prikazanim na slici 6.2, dvodimenzionalni prikaz omogućava ne samo uvid u raspodele ulaznih vrednosti, parametara i rezultata (histogrami na glavnoj dijagonali), već i utisak o korelaciji na dvodimenzionalnim dijagramima ostalih polja matričnog dijagrama, koristeći tačkaste dijagrame.

Delovi matričnog dijagrama, levo i desno od dijagonale, rezervisani su za dijagrame odnosa svih veličina koje igraju neku ulogu u *Monte Karlo* propagaciji neodredjenosti. Glavna dijagonala predstavlja ujedno i osu simetrije, pa se dijagrami nalaze u simetričnoj formi.

Gruba *Monte Karlo* metoda na primeru ustaljenog tečenja u prirodnim kanalima

Gruba ili osnovna *Monte Karlo* propagacija neodredjenosti je prikazana na primeru propagacije neodredjenosti kod modela ustaljenog tečenja u otvorenim prirodnim tokovima. Poznato je da neodredjenost *Maningovog* koeficijenta otpora, pored geometrije i ostalih parametara, znatno utiče na izračunatu



Slika 6.3: Grafički prikaz modelirane deonice reke Jadar

dubinu/kotu vode u toku. Za potrebe ovog primera korišćen je model reke Jadar, slika 6.3, modeliran u programskom paketu HEC2. Računaju se dubine u unapred definisanim poprečnim preseccima korita, u kojima se definiše geometrija toka. Definisani su ulazni podaci o geometriji kanala, graničnom uslovu (nizvodna dubina vode, pošto se radi o mirnom režimu tečenja) i protoku, dok su pretpostavljene različite raspodele *Maningovog* koeficijenta trenja za glavno korito i inundacije. Raspodele *Maningovih* koeficijenata otpora su *unifomne* sa parametrima $\mu_n = 0.1 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ i $\sigma_n = 0.0055 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ za inundacije, dok je za glavno korito $\mu_n = 0.4 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ i $\sigma_n = 0.023 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$. Vrednosti odgovaraju niskom žbunju i rastinju za inundacije i šljunku srednje krupnoće za glavno korito.

Rečna deonica je modelirana u dužini od 1650 metara sa 12 rečnih profila, dok je nizvodni granični uslov na mostu kod Osečine u vidu kritične dubine. Srednja vrednost protoka je određena hidrološkom analizom i ona iznosi $147 \text{ m}^3/\text{s}$. Rezultat hidrauličkog modela je kota nivoa usvakom od poprečnih preseka.

Za srednje vrednosti raspodela *Maningovih* koeficijenata rezultati, kote nivoa za četiri odabrana poprečna preseka, su prikazani u tabeli 6.1.

Tabela 6.1: Rezultati nivoa za srednje vrednosti *Maningovog* koeficijenta

	presekk 3	presekk 6	presekk 9	presekk 12
kote u razmatranim preseccima [m]	505.14	510.22	514.22	518.93

Monte Karlo simulacija obavljena je uz pomoć generisanih 100 slučajnih *Maningovih* koeficijenata za glavno korito, levu i desnu inundaciju. Pretpo-

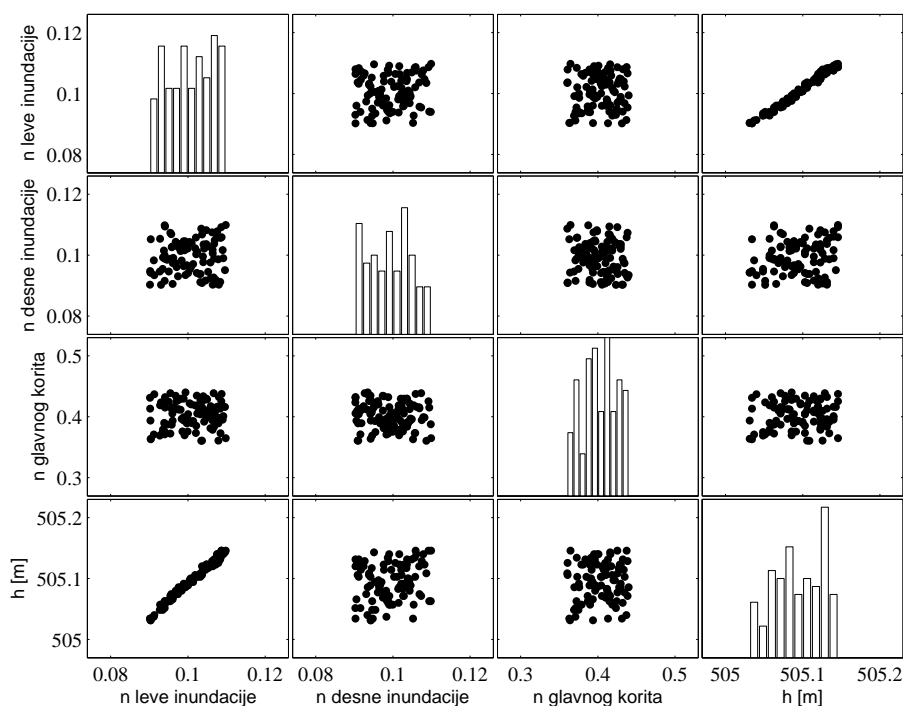
Slika 6.4: Rezultati *Monte Karlo* analize za presek broj 3

Tabela 6.2: Statistički parametri ulaznih vrednosti i rezultata za presek 3 iz 100 simulacija

	n leve inundacije [$m^{-1/3}s$]	n desne inundacije [$m^{-1/3}s$]	n glavnog korita [$m^{-1/3}s$]	kota nivoa [m]
μ	0.10	0.10	0.40	505.09
σ	0.01	0.01	0.02	0.03

stavlja se da su vrednosti *Maningovih* koeficijenata isti za sve profile duž obala i glavnog korita. Za treći poprečni presek, rezultat *Monte Karlo* propagacije neodređenosti je prikazan na slici 6.4. Na njoj su, van glavne dijagonale, prikazani dijagrami svih ulaznih parametara (tri *Maningova* koeficijenta otpora) i rezultata (kote nivoa u preseku 3). Na glavnoj dijagonali prikazani su histogrami generisanih slučajnih ulaznih veličina, prema unapred odredjenim raspodelama i histogram dobijenih rezultata.

Statistički parametri *Maningovih* koeficijenata i kote nivoa, posle 100 simulacija, mogu se videti u tabeli 6.2.

Standardna devijacija kote nivoa iznosi $\sigma_3 = 0.03$ m, dok apsolutna greška srednje vrednosti za treći profil iznosi $S_{\bar{x}} = \frac{0.03}{\sqrt{100}}$ m, pa je srednja vrednost

nivoa trećeg profila $\mu_3 = 505.09 \pm 0.003$ m. Tok *Monte Karlo* propagacije neodređenosti je prikazan na slici 6.5. Iz dijagrama se vidi se da je potrebno nešto više od 40 simulacija modela da bi se postigla konvergencija parametara. Da bi se eliminisao uticaj generisanja slučajnih brojeva potrebno je generisati više krivih kao na slici 6.5 (ponekad i više stotina) i izračunati njihovu srednju vrednost.

Konvergencija drugog i trećeg momenta niza rezultata (standardne devijacije i koeficijenta asimetrije) prikazana je na slici 6.6. Vidi se da je za konvergenciju koeficijenta asimetrije potrebno više simulacija nego za standardnu devijaciju i isti trend bi se nastavio kada bi proverili četvrti moment (spljoštenost).

Nakon *Monte Karlo* propagacije neodređenosti, rezultati za izabrana 4 preseka prikazani su u Tabeli 6.3.

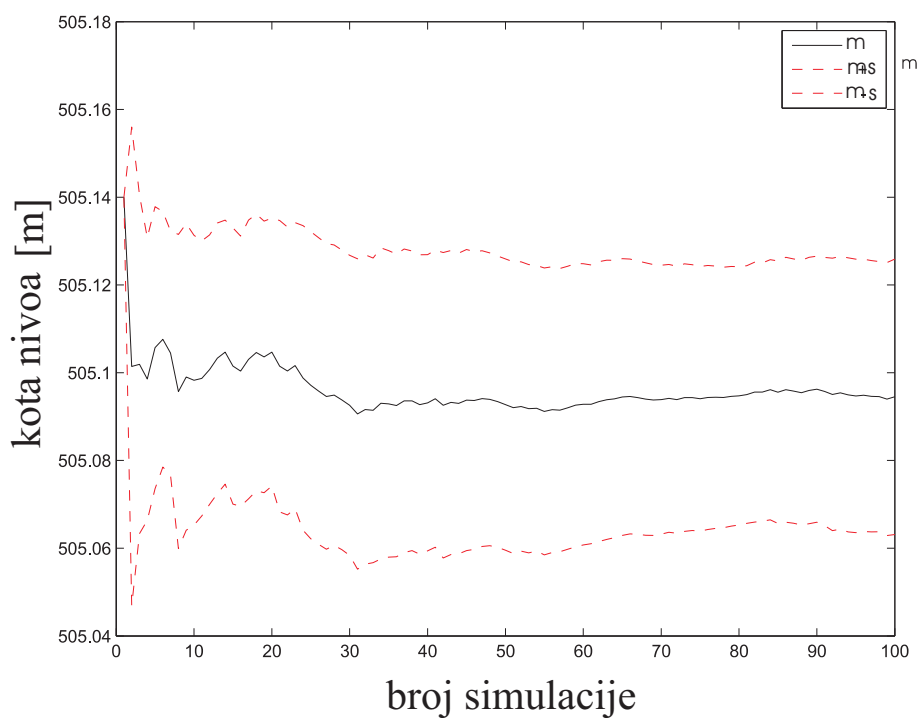
Tabela 6.3: Rezultati *Grube Monte Karlo* propagacije neodređenosti za sve razmatrane profile

	presek 3	presek 6	presek 9	presek 12
μ [m]	505.9	510.16	514.19	518.88
σ [m]	0.0302	0.0343	0.0191	0.0346
$S_{\bar{x}}$ [m]	0.003	0.0034	0.0019	0.0035

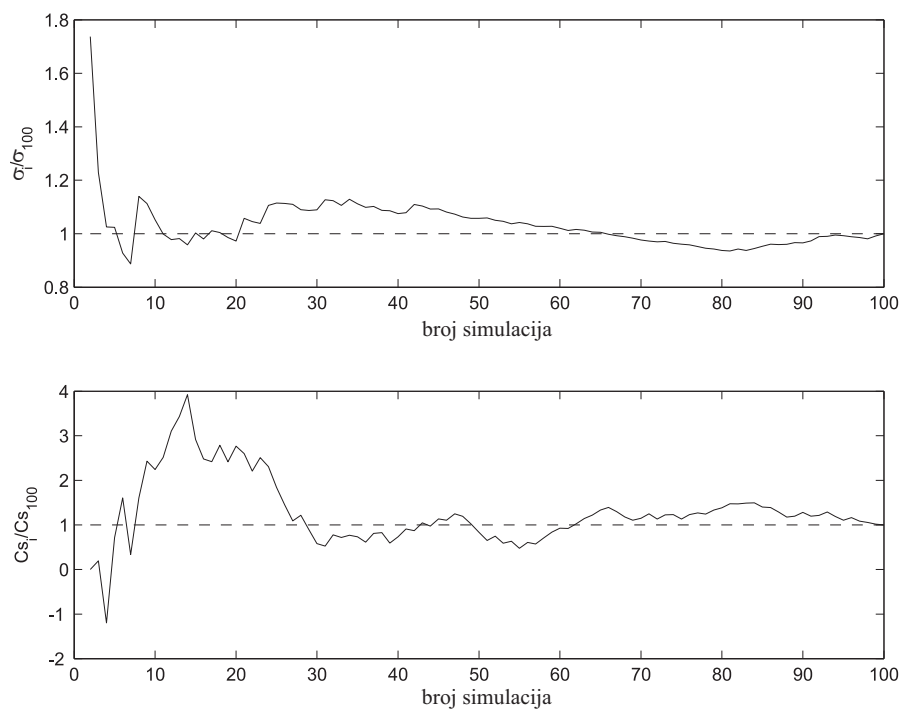
Ovaj primer pripada grupi stacionarnih diferencijabilnih monotonih modela. Iz rezultata, slika 6.4, se može videti da je izuzetno snažna korelacija između *Maningovog* koeficijenta leve inundacije i kote vode u reci (dijagram u gornjem desnom ili donjem levom uglu slike 6.4 koji se odnosi na n leve inundacije i izračunate kote). To se mora shvatiti kroz analizu fizičkih uslova modelirane pojave (velika širina leve inundacije) i nikako se ne sme pretpostavljati da to stalno važi. Na slici 6.3 modelirane rečne deonice može se videti da najveći deo vodene zapremine i zauzima levu obalu. Rezultati propagacije neodređenosti ukazuju i na smanjenje standardne devijacije na devetom profilu. To se može opravdati time što je u devetom preseku vodeno ogledalo najšire pa je i osetljivost nivoa na promenu koeficijenta otpora najmanje.

6.4 Prednosti i mane *Grube Monte Karlo* propagacije neodređenosti

Iako na prvi pogled izgleda superiorno, velika mana *Grube Monte Karlo* propagacije neodređenosti se upravo odnosi i na njenu suštinu: potrebno je



Slika 6.5: Tok Monte Karlo simulacije za presek broj 3



Slika 6.6: Konvergencija standardne devijacije i koeficijenta asimetrije za presek broj 3

model simulirati nekoliko, ponekad i neprihvatljivo mnogo puta. Za modele koji su i za današnje računare prezahtevni i kod kojih čak i jedna simulacija troši previše računarskih resursa, veliki broj simulacija predstavlja prepreku. Iz navedenog razloga, još u vreme kada se raspolagalo sa računarima neuporedivo manje snage i memorijskih kapaciteta, razvijene su varijacije *Monte Karlo* metode koje koriste razne manipulacije kako modelom tako i načinom generisanja slučajnih brojeva da bi sebroj *Monte Karlo* analiza smanjio. Varijante *Monte Karlo* metode se mogu podeliti u nekoliko grupa:

- metode koje se odnose na specifično generisanje slučajnih brojeva,
- upotreba efekata *Markovljevog* lanca,
- transformacija modela sa ciljem da se smanji varijansa rezultata, i
- regresione metode i veštačka inteligencija koji zamenjuju razmatrani model računarski manje zahtevnim

6.5 Specifično generisanje slučajnih brojeva - Stratified Sampling (SSMC)

Jedna od varijacija metode *Monte Karlo* koja se odnosi na specifično generisanje slučajnih brojeva je *Stratified Sampling Monte Karlo (SSMC)*. Kod ove varijante *Monte Karlo* metode, domen ulaznih vrednosti je potrebno podeliti na n intervala. Granice intervala se mogu obeležiti sa α_i i za njih važi $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$. Dalje se *Gruba Monte Karlo* metoda primenjuje na svaki interval posebno. U zavisnosti od prirode problema, ponekad je podesno da se intervali posmatraju i analiziraju posebno. To je svakako slučaj kod višestepenih modela gde nije realno globalno posmatrati celu oblast rezultata modela.

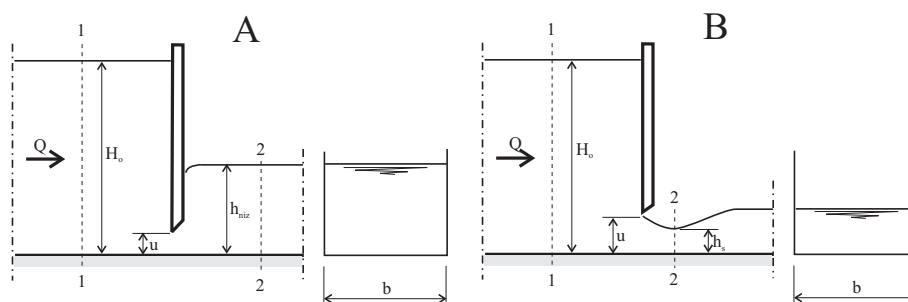
Osnovna prednost ove varijante *Monte Karlo* algoritma je smanjenje broja generisanih slučajnih brojeva. Ukoliko je za konvergenciju *Grube Monte Karlo* algoritma potrebno N slučajnih brojeva, dovoljno je generisati N/n brojeva i transformisati ulazne vrednosti prema formuli koja u slučaju uniformne raspodele glasi: $h_k = \alpha_k + (\alpha_{k+1} - \alpha_k)\xi$, gde je h_k - niz slučajnih brojeva koji odgovara intervalu $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, a ξ niz generisanih N/n slučajnih brojeva u intervalu $[0, 1]$.

Deljenjem ukupne oblasti na delove postiže se ne samo smanjenje broja generisanih slučajnih brojeva, već su oni i pravilnije rasporedjeni što, pored smanjenja standardne devijacije (a samim tim i standardne greške srednje vrednosti), može dovesti do brže konvergencije. Ova metoda je izgubila na

popularnosti rastom računarskih kapaciteta, pa je danas zadržala uglavnom samo teorijsku vrednost. Medjutim, ponegde je potrebno primeniti ovu metodu iz čisto praktičnih razloga. Jedan od njih je svakako kada se *Monte Karlo* primeni na višestepene modele kao što je model upravljanja ustavom.

SSMC na primeru modela ustave

SSMC metoda je primenjena na model upravljanja ustavom (slika 6.7). Posmatra se oštroična ustava sa konstantnim uzvodnim nivoom H_o . Nizvodno od ustave, zbog specifičnih graničnih uslova javlja se, za veliku otvorenost ustave odbačen hidraulički skok (crtež B), dok je pri malim otvorima ustave isticanje potopljeno (crtež A). To navodi na formulaciju dvostepenog modela sa prekidom na mestu gde je otvorenost ustave takva da se ona potapa.



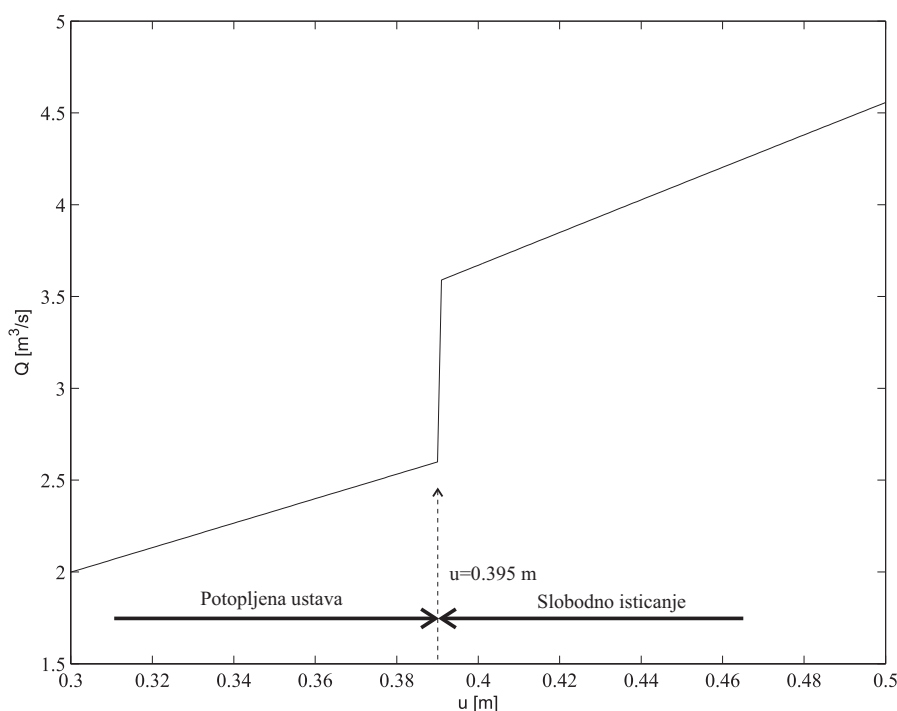
Slika 6.7: Model regulisanja protoka ustavom

Jednačine su odvojene činjenicom da, ukoliko se dogodi da nizvodni granični uslov potopi ustavu sa nizvodne strane, protok se dobija pomoću energetske jednačine postavljene između preseka uzvodno od ustave i nizvodnog graničnog uslova. Ukoliko ustava sa nizvodne strane nije potopljena nizvodnim konstantnim graničnim uslovom, protok kroz ustavu se može izračunati postavljanjem energetske jednačine između preseka uzvodno od ustave i preseka u suženom preseku neposredno iza ustave. Širina korita je $b = 1.5$ m, dok je koeficijent kontrakcije mlaza $C_A = 0.65$ (dubina u suženom preseku neposredno iza ustave se računa kao $h_s = C_A u$).

Pretpostavlja se da je otvorenost ustave neodređena i da se može predstaviti ravnomernom raspodelom sa parametrima $\mu_u = 0.4$ m i $\sigma_u = 0.057$ m. Dijagram otvorenosti ustave i protoka kroz kanal predstavljeni su na slici 6.8.

Za srednju vrednost otvorenosti ustave $\mu_u = 0.4$ m, protok, koji je izračunat za slučaj da otvor ustave nije potopljen, iznosi $Q = 3.67$ m³/s.

Obzirom da je model dvostepen i da se za otvorenost ustave manju od 0.39 m javlja potopljeno tečenje, malom greškom u otvorenosti ustave može se napraviti velika greška u procenjenom protoku. Zbog toga je potrebno



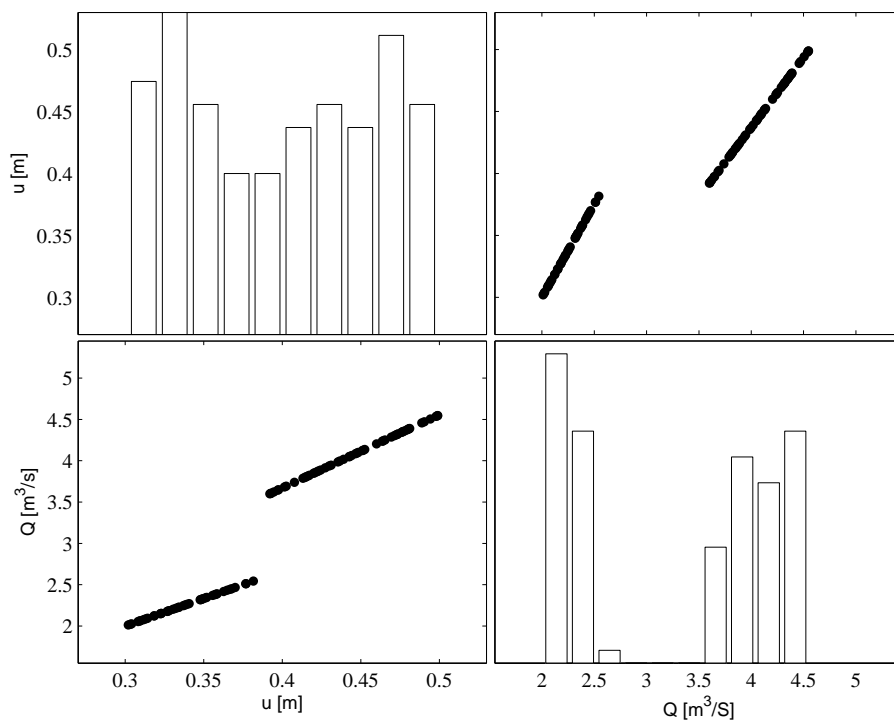
Slika 6.8: Zavisnost otvorenosti ustave i protoka (dvostepeni model)

razdvojiti ulazne nizove slučajnih brojeva na dva intervala. Na to navodi i rezultat *Grube Monte Karlo* propagacije neodređenosti prikazan na slici 6.9. Može se jasno uočiti kako je histogram računatih protoka podeljen na dva dela.

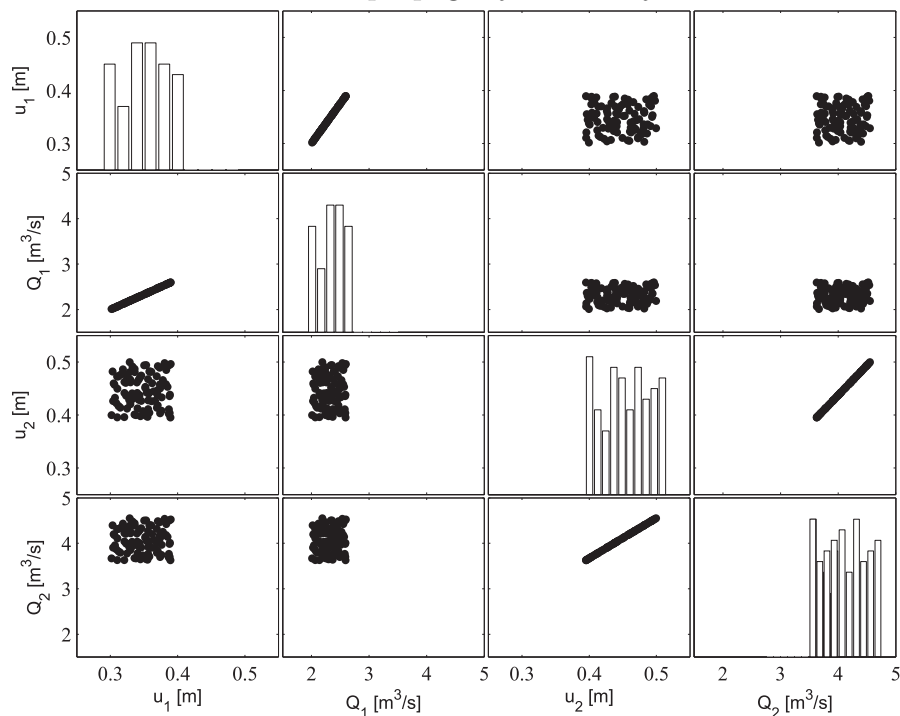
Kada se primeni *SSMC* algoritam i kada se neodređena otvorenost ustave u podeli na dva intervala, i to $[0.3, 0.395]$ i $[0.395, 0.5]$, primenjivanjem *Grubog Monte Karlo* algoritma na ove intervale posebno, ne samo da su računarski resursi smanjeni za generisanje polovine slučajnih brojeva¹, već je i analiza podeljena na dva dela jer je integralno posmatranje problema nerealan. Rezultati, u vidu generisanih vrednosti i rezultata modela, su prikazani na slici 6.10.

Statistički parametri dobijenih rezultata, koji se mogu videti u tabeli 6.4, govore da je, gledajući standardnu devijaciju, neodređenost protoka veoma slična kod oba stepena modela. Standardna greška srednje vrednosti se računa po formuli $S_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{50}}$. Kod *Grube Monte Karlo* simulacije neodređenost protoka bi bila znatno veća usled grupisanja rezultata u zoni

¹generisan je niz od 50 slučajnih brojeva u intervalu $[0, 1]$ koji su dalje upotrebljeni za formiranje razdvojenih nizova ulaznih vrednosti



Slika 6.9: Gruba Monte Karlo propagacija neodređenosti za model ustave



Slika 6.10: Rezultat SSMC algoritma za model ustave

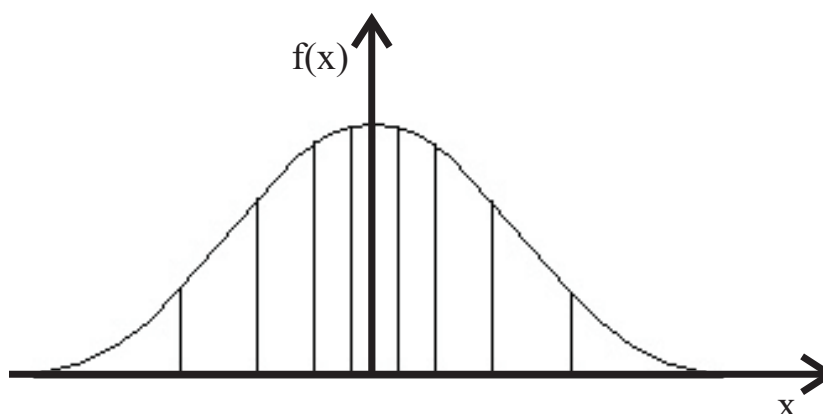
Tabela 6.4: Rezultati *SSMC* algoritma na modelu ustave

	u_1 [m]	Q_1 [m ³ /s]	u_2 [m]	Q_2 [m ³ /s]
μ	0.35	3.49	0.45	4.11
σ	0.03	0.29	0.03	0.28
$S_{\bar{x}}$	0.0042	0.041	0.0042	0.396

otvorenosti ustave koja je bliska potapanju.

6.6 Specifično generisanje slučajnih brojeva - Latin Hypercube (LHMC)

Jedna od podvarijanti tehnike *SSMC* je *Latin Hypercube Monte Karlo* (*LHMC*) algoritam, koja je dobila ime po specifičnom rasporedu generisanja ulaznih vrednosti modela iz razmatrane statističke raspodele.



Slika 6.11: *LHMC* metoda: funkcija gustine normalne raspodele podeljena na intervale iste verovatnoće

Za razliku od *SSMC* *LHMC* obezbedjuje ravnomernije generisanje slučajnih brojeva tako što domen neodređenih ulaznih podataka deli na intervale podjednake verovatnoće (slika 6.11). Kod uniformne raspodele *LHMC* predstavlja varijantu *SSMC* sa intervalima jednake dužine. Kod ostalih raspodela potrebno je funkciju gustine raspodele podeliti na segmente jednakih površina ispod funkcije gustine raspodele. Za samo jednu ulaznu veličinu umesto da se generiše N podataka iz cele funkcije gustine raspodele, pažljivim biranjem uzima se po jedna vrednost iz svakog od N segmenata funkcije gustine raspodele.

Za M ulaznih veličina i N generisanih podataka po ulaznoj veličini, potrebno je podeliti prostor mogućih vrednosti ulaznih veličina na $N \times M$ ćelija, gde svaka ćelija ima istu verovatnoću pojave. Za dve ulazne veličine prostor je kvadrat, za tri kocka, a za više od tri hiperkocka, odakle potiče i ime ove metode.

Postoje dva načina generisanja podataka iz ovako formirane strukture. Prvi način ima za cilj da održi raznovrsnost podataka koji se generišu. To podrazumeva formiranje tzv. Latinskih matrica, gde se u svakom redu i koloni nalaze svi brojevi po određenom rasporedu. Ovakav način generisanja održava pokrivenost celog prostora mogućih vrednosti ulaznih podataka. Osnovni nedostatak ovakvog generisanja je što se zanemaruje mogućnost pojavljivanja ekstremnih vrednosti parametara u isto vreme. Time se naglasak stavlja na redovno stanje ulaznih parametara, dok se retki događaji zanemaruju.

Drugi način generisanja daje potpunu slobodu kombinovanju regiona iz kog će se generisati podaci, dokle god se svaki podatak uzme iz posebnog regiona funkcije gustine raspodele. Ovakvo je veovatnoća kombinovanja ekstremnih vrednosti ulaznih parametara veća i moguće je očekivati verodostojnije rezultate koji se odnose na redje, ekstremne događaje.

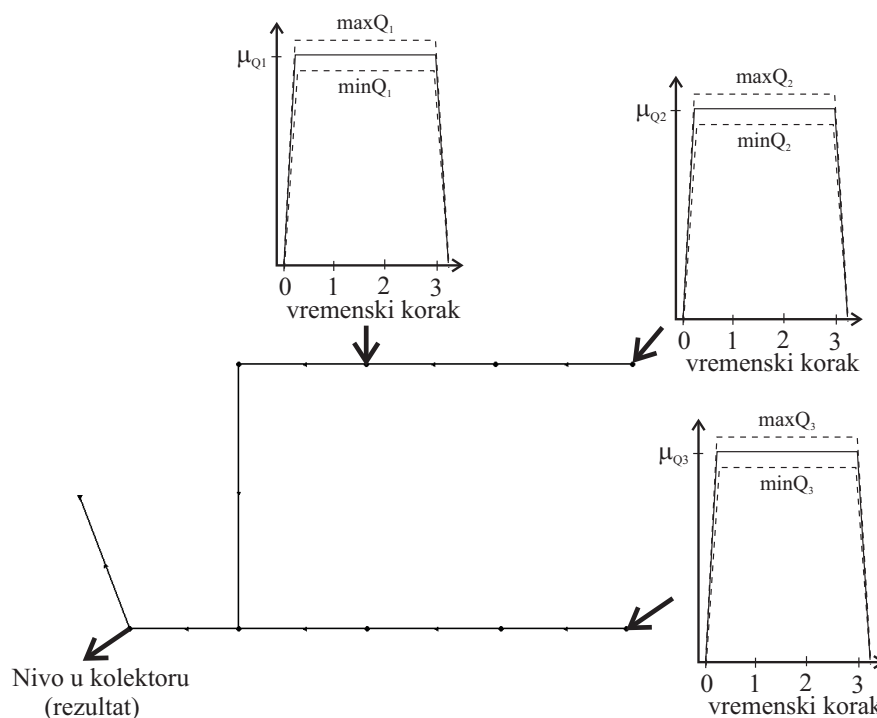
Treba biti svestan činjenice da, iako *LHMC* metod generisanja podataka omogućava i do pet puta bržu *Monte Karlo* simulaciju u odnosu na standardni način generisanja, ovakva simulacija daje samo približne rezultate.

***LHMC* na primeru tečenja u kanalizacionom sistemu**

Primer *LHMC* algoritma prikazan je na modelu tečenja u kanalizacionom sistemu. Za potrebe ovog primera upotrebljen je softverski paket *EPASWMM* [31] i primer tečenja sa slobodnom površinom u mreži kanala. Detalji oko primera mogu se naći u dokumentaciji za *EPASWMM* [31] (primer broj 2, "Example 1 of Extran Manual"). Izgled razmatranog kanalizacionog sistema je prikazan na slici 6.12:

Na slici se može videti geometrija sistema kao i izgled i mesta ulaznih hidrograma. Na izlazu iz sistema se nalazi mesto gde se posmatra nivo u kolektoru, što je i rezultat koji nas interesuje. Uz definisanu fiksnu geometriju, kao neodredjene veličine izabrani su maksimumi trapeznih hidrograma dotoka.

Ulazne veličine su u obliku uniformne raspodele sa parametrima $\mu_{Q_1} = 0.35 \text{ m}^3/\text{s}$, $\sigma_{Q_1} = 0.04 \text{ m}^3/\text{s}$, $\mu_{Q_2} = 0.42 \text{ m}^3/\text{s}$, $\sigma_{Q_2} = 0.082 \text{ m}^3/\text{s}$, $\mu_{Q_3} = 0.38 \text{ m}^3/\text{s}$, $\sigma_{Q_3} = 0.04 \text{ m}^3/\text{s}$. Ukoliko se obavi simulacija samo sa srednjim vrednostima pikova ulaznih hidrograma dobija se jednoznačno rešenje nivoograma oticaja u razmatranom čvoru. Rezultat je prikazan na slici 6.13:



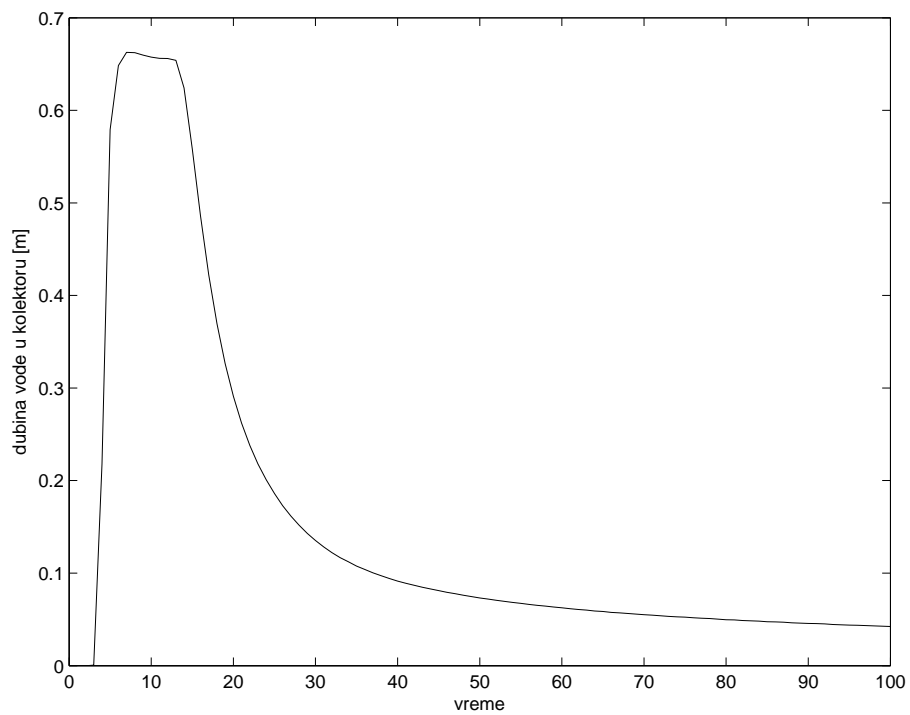
Slika 6.12: Primer iz 2 EPASWMM uputstva

Ovaj model spada u grupu neustaljenih, diferencijabilnih i monotonih modela, što se može zaključiti iz prirode problema koji opisuje (pretpostavlja se da model dobro oponaša tečenje u kanalizacionom sistemu). Iako možda na prvi pogled deluje da rezultat nije monotona funkcija mora se obratiti pažnja da on nije monoton samo u odnosu na vremensku skalu. Pojedinačni rezultati su monotoni i ako se posmatra neki vremenski presek on je u direktnoj korelaciji sa pikovima ulaznih hidrograma.

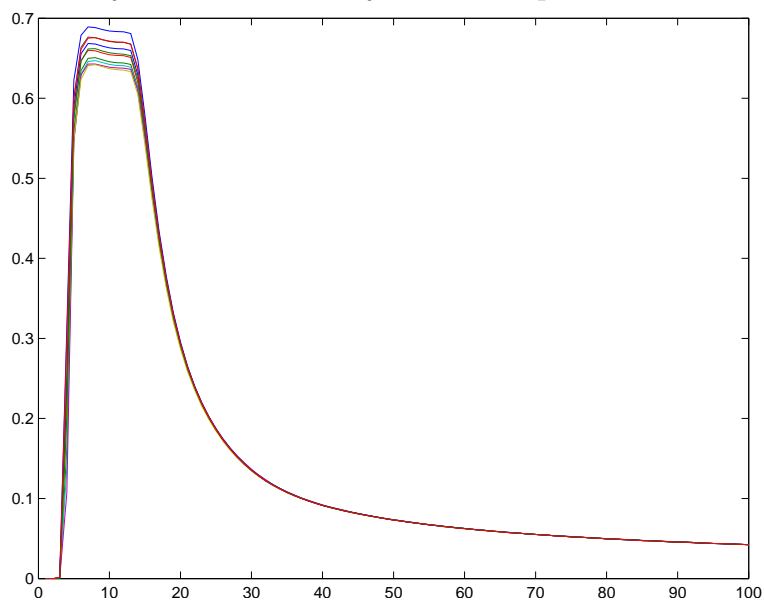
Nakon 100 simulacija modela sa *LHMC* generisanim ulaznim vrednostima dobija se rezultat u vidu niza nivograma (slika 6.14).

Kod tečenja u kanalizacionim sistemima moguća je i amplitudna i fazna razlika kod rezultata simulacije. U ovom slučaju pretpostavlja se da to nije tako jer je vreme putovanja talasa relativno kratko u odnosu na vremenski korak (15 minuta), pa je moguće posmatrati rezultate u zasebnim vremenskim trenucima jer ne postoji deformacija talasa i u vremenskom domenu. U opštem slučaju potrebno je odabrati fenomen koji je moguće izdvojiti iz ukupnog rešenja i samo njega posmatrati ili uzeti u obzir i fazne razlike talasa (što nije nimalo lak zadatak).

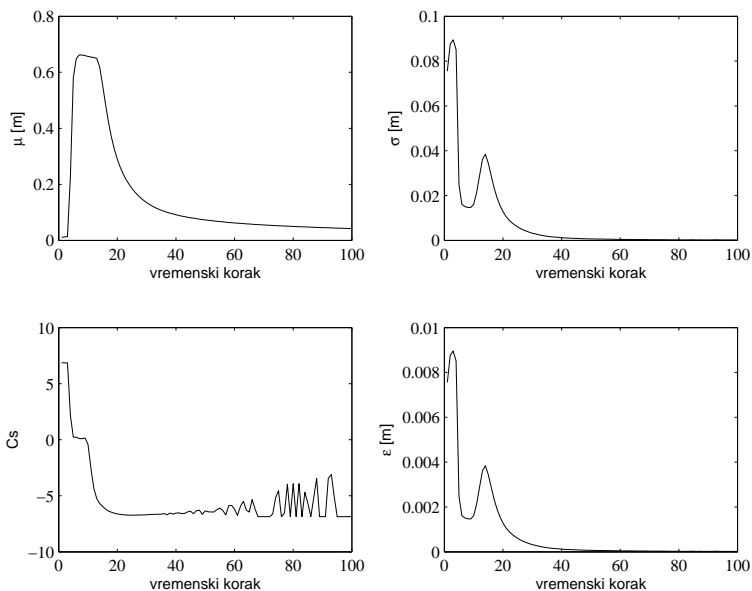
Rezultati propagacije neodređenosti na slici 6.15 pokazuju da pretpo-



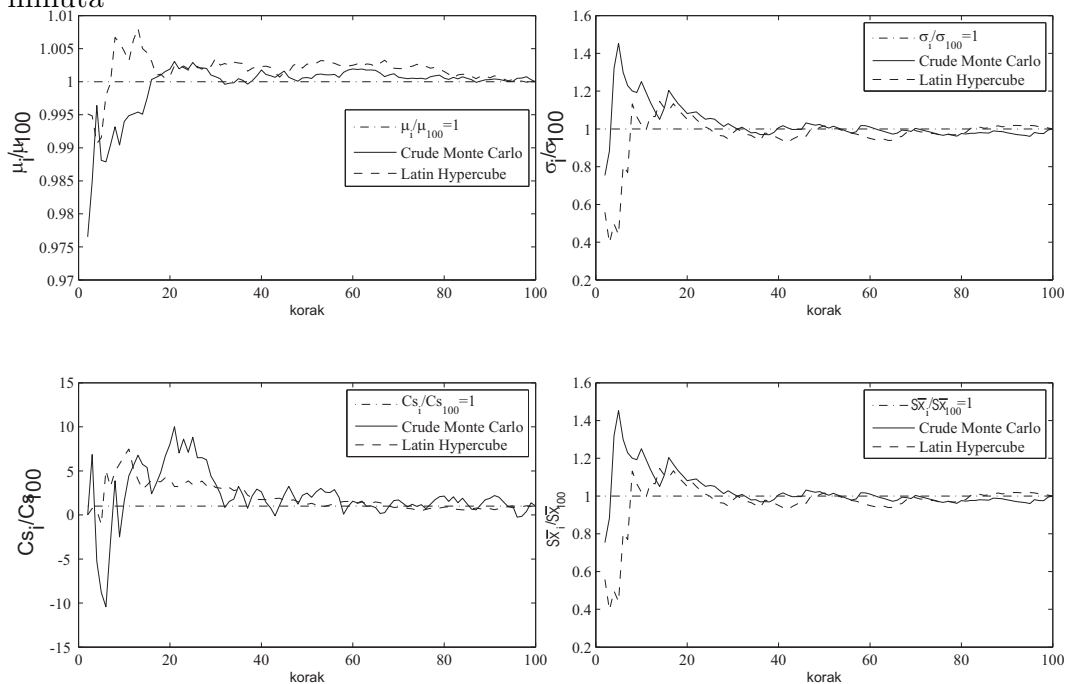
Slika 6.13: Rešenje modela za srednje vrednosti pikova ulaznih hidrograma



Slika 6.14: Prvih 10 simulacija modela



Slika 6.15: Statistički parametri za svaki od vremenskih koraka od po 15 minuta



Slika 6.16: Konvergencija *Grube Monte Karlo* metode i *LHMC*

stavka da ne postoji fazna razlika u rezultujućim poplavnim talasima ne stoji za uzlaznu granu nivograma. Visoka standardna devijacija za uzlaznu granu nivograma (slika 6.15, gore-desno) ukazuje da je talas ipak fazno pomeren. Kako je u ranijem tekstu navedeno, *LHMC* bi trebalo da brže konvergira od *Grube Monte Karlo* metode. Da bi to utvrdili nacrtan je dijagram konvergenције i za *Grubu Monte Karlo* i za *LHMC* (dijagram 6.16). Od svih vremenskih koraka odabran je korak u kom se kod najvećeg broja simulacija javljaju vrhovi talasa. Kada su u pitanju konvergenције srednje vrednosti i standardne devijacije (slika 6.16, gore levo i gore desno) konvergenција *Grube Monte Karlo* je čak i nešto brža od *LHMC* algoritma, dok je kod koeficijenta varijacije (slika 6.16, dole levo) situacija obrnuta. Kod standardne greške brzina konvergenције je relativno izjednačena.

6.7 Specifično generisanje slučajnih brojeva - Antithetic variates (AVMC)

Manipulacijom slučajnih brojeva moguće je značajno smanjiti broj simulacija u *Monte Karlo* analizi, a i rezultujuću standardnu devijaciju, što je veoma korisno za ispunjavanje cilja pronalaženja srednje vrednosti sa najmanjom standardnom greškom. Već navedene tehnike, *SSMC* i *LHMC* nemaju mogućnost smanjivanja standardne devijacije već samo smanjenja broja generisanja slučajnih brojeva. Kod metode *Antithetic variates Monte Karlo (AVMC)*, ukoliko se vodi računa o korelaciji generisanih slučajnih brojeva, može se pokazati da se varijansa, a samim tim i standardna devijacija, značajno smanjuju.

Posmatra se model $f(x)$ i dva niza slučajnih brojeva $X = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$ i $Y = [y_1, y_2, y_3, \dots, y_n]$ sa matematičkim očekivanjima $E[f(X)] = \mu_X$ i $E[f(Y)] = \mu_Y$ koja su jednaka, $\mu_X = \mu_Y$. Ukoliko se matematičko očekivanje funkcije $f(x)$ računa pomoću niza slučajnih vrednosti $[f(X) + f(Y)]/2$, čiji članovi takodje imaju karakteristike slučajnih brojeva, dobija se očekivana vrednost:

$$E \left[\frac{f(X) + f(Y)}{2} \right] = \frac{E(f(X)) + E(f(Y))}{2} = \frac{\mu_X + \mu_Y}{2} = \mu_X = \mu_Y \quad (6.6)$$

i varijansa:

$$\text{var} \left[\frac{f(X) + f(Y)}{2} \right] = [\text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y)] / 4 \quad (6.7)$$

Može se videti da ukoliko se izaberu dva niza slučajnih brojeva iz iste raspodele, koji su korelisani sa negativnim koeficijentom korelacije, varijansa će biti manja, a srednja vrednost će biti nepromenjena. Pošto je jedan od ciljeva propagacije neodredjenosti i da se odredi tačna varijansa ili standardna devijacija i to $var(X)$ ili $var(Y)$, ako su jednake (a ne moraju biti), potrebno ih je izračunati pomoću formule:

$$var [X] = var [Y] = \frac{2var \left[\frac{f(X)+f(Y)}{2} \right] - cov(X, Y)}{2} \quad (6.8)$$

Najjednostavniji način da se dobiju dva niza sa negativnom kovarijansom je ukoliko se od niza X formira niz $Y = 1 - X$.

AVMC na primeru modela hidrauličkog udara

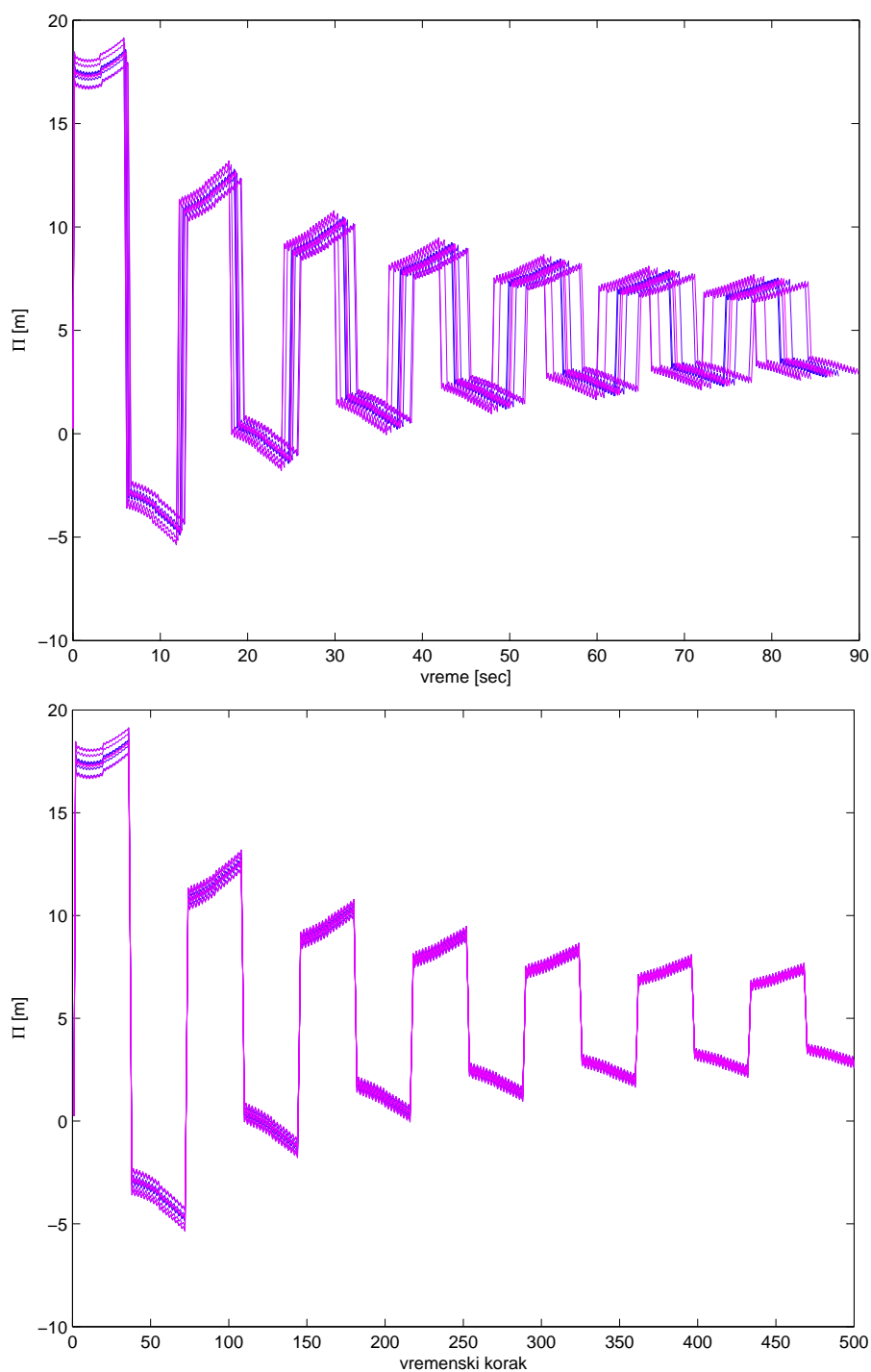
Model hidrauličkog udara uzet je kao primer za ovu varijantu *Monte Karlo* metode. On spada u grupu nediferencijabilnih modela sa naglim promenama u rezultatima. Modelirano je naglo zatvaranje zatvarača na kraju cevi koja izlazi iz rezervoara sa fiksnom piježometarskom kotom $\Pi = 5$ m. Matematički model je rešen metodom karakteristika i grupa od 10 karakterističnih rešenja za odabrani set parametara, sa proizvoljno odabranom brzinom propagacije talasa pritiska, je prikazana na slici 6.7 (gornja slika).

Sa slike se vidi da u vremenskim preseccima gde se naglo menja pritisak rezultat nije diferencijabilan. To je posledica faznog pomaka rešenja i zbog toga nije moguće kao u prethodnom primeru propagaciju neodredjenosti sprovesti za svaki vremenski korak posebno.

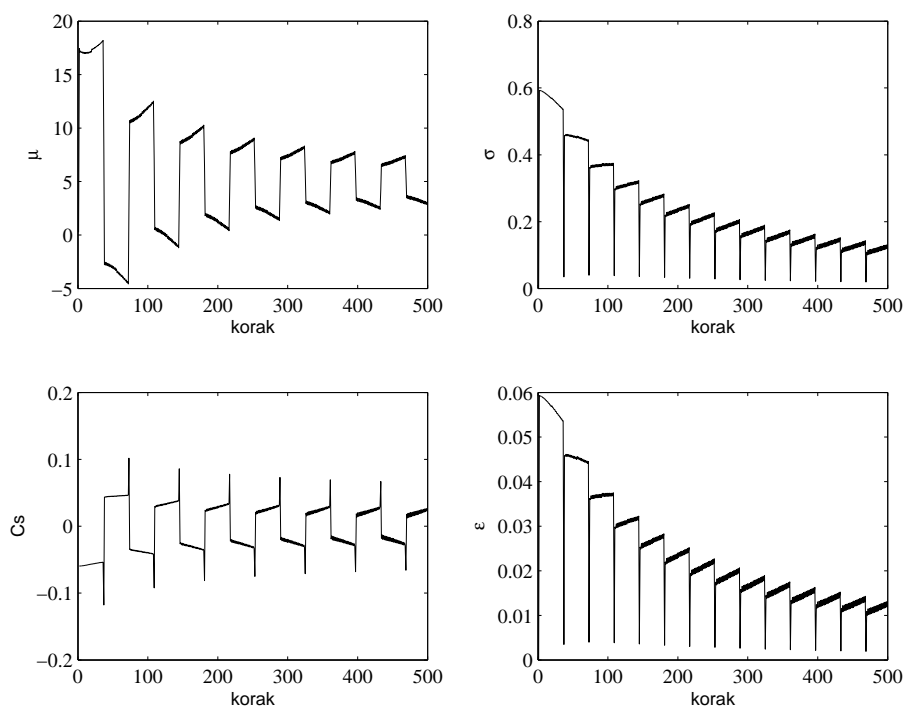
S obzirom da je vrednost vremenskog koraka funkcija dužine segmenta cevi i brzine propagacije talasa $dt = dx/a$, ukoliko se rezultat posmatra relativno u odnosu na vremenski korak (ukoliko se rešenja normalizuju po vremenu, slika 6.7, donji dijagram) moguće je rešenja dovesti u istu vremensku ravan. Na taj način je moguće sprovesti analizu samo veličina piježometarskih kota, ali ne i vremena kada se te veličine javljaju.

Sprovedena je *AVMC* analiza sa jednim neodredjenim parametrom - brzinom prostiranja talasa kroz vodu. Ona je opisana uniformnom raspodelom sa parametrima $\mu_a = 850$ m/s i $\sigma_a = 29$ m/s. Generisano je 50 članova niza slučajnih brojeva ulaza i formiran je niz X . Niz Y je formiran uz pomoć formule $Y = 1 - X$.

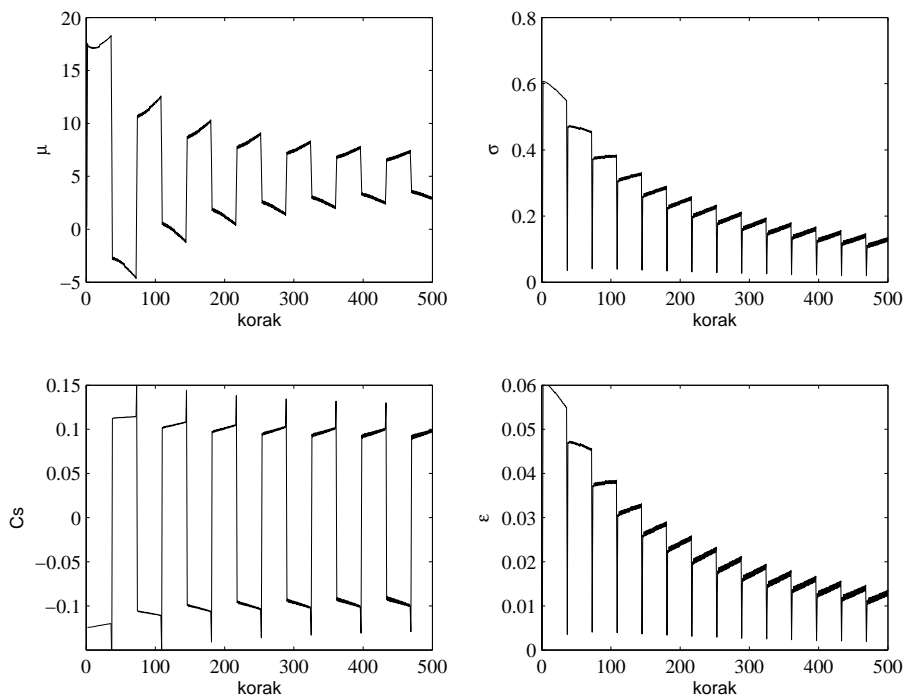
Rezultati propagacije su prikazani na slici 6.18. Kao kontrola, uradjena je i analiza pomoću *Grube Monte Karlo*, čiji su rezultati prikazani na slici 6.19. Rezultati *Grube Monte Karlo* metode su prikazani na slici 6.19. Upoređujući rezultate *Grube Monte Karlo* i *AVMC* algoritama, može se zaključiti da se



Slika 6.17: Karakteristični dijagram koji prikazuje pritiske neposredno iza zatvarača kod modela hidauličkog udara, 10 simulacija



Slika 6.18: Rezultati *AVMC* na modelu hidrauličkog udara

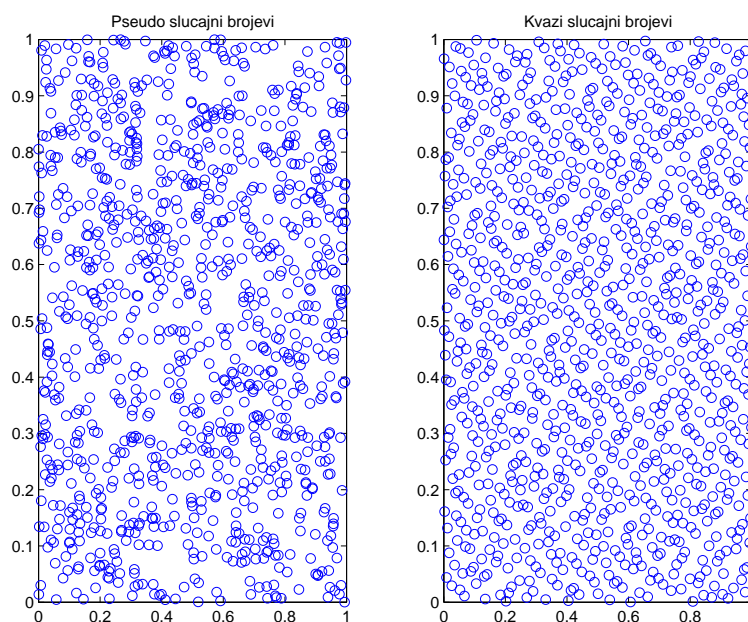


Slika 6.19: Rezultati *Grube Monte Karlo* metode na primeru hidrauličkog udara

najveća razlika javlja pri konvergenciji trećeg momenta. Drugi moment se neznatno razlikuje ($\sigma_{GrubeMC} = 0.603$ m, a $\sigma_{AVMC} = 0.595$ m) i razlog tome se može naći u činjenici da je za propagaciju neodređenosti sprovedeno dovoljno simulacija za njegovu konvergenciju.

6.8 Metoda Kvazi Monte Karlo (KMC)

Kvazi-slučajni brojevi predstavljaju napredniju verziju analitičkog generisanja niza slučajnih brojeva. Osnovna karakteristika serije od N kvazi slučajnih brojeva po uniformnoj raspodeli je što svaki podskup veličine od 0 do $(N-1)$ elemenata takodje predstavlja niz slučajnih brojeva po uniformnoj raspodeli. Ovakav način generisanja slučajnih brojeva predstavlja osnovu posebnog vida *Monte Karlo* tehnike, nazvane *Kvazi Monte Karlo (KMC)* tehnika.



Slika 6.20: *Haltonova* serija sa 1024 para slučajnih brojeva [17]

Jedna od najpoznatijih metoda generisanja kvazi-slučajnih brojeva je svakako *Haltonova* (eng. *Halton*) metoda (slika 6.20), predstavljena javnosti još 1960. godine kao alternativa generatorima Pseudo-slučajnih brojeva [17]. Osnovni koncept jednodimenzionalne *Haltonove* serija za prost broj $p > 2$, je da se prostor podeli od 0 do 1 na p segmenata i generiše po jedan slučajni broj u svakom segmentu. To znači da *Halton-ov* algoritam koristi sekvence

od po p uniformno raspodeljenih slučajnih brojeva do postizanja potpunog broja zahtevanih slučajnih brojeva.

6.9 Metropolis Monte Karlo algoritam (MMCA)

Metropolis Monte Karlo (MMCA) algoritam uvodi novi koncept u generisanje podataka koji se bazira na praćenju rezultata prethodnih simulacija uz ideju da se *Monte Karlo* algoritam ponaša po principu *Markovljevog* lanca [16]. *MMCA* se može opisati na sledeći način:

1. za tekuću generaciju se generiše slučajni niz ulaznih podataka $[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots, \xi_N]$ na osnovu rezultata modela $f'(\xi)$ u prethodnoj iteraciji,
2. obavi se simulacija i dobije se novi rezultat modela $f''(\xi)$,
3. generiše se slučajni broj U uniformne raspodele između 0 i 1
4. za dalju *Monte Karlo* analizu se zadržava rezultat $f''(\xi)$ ukoliko je $U \leq e^{-dh}$, gde je $dh = |f''(\xi) - f'(\xi)|$

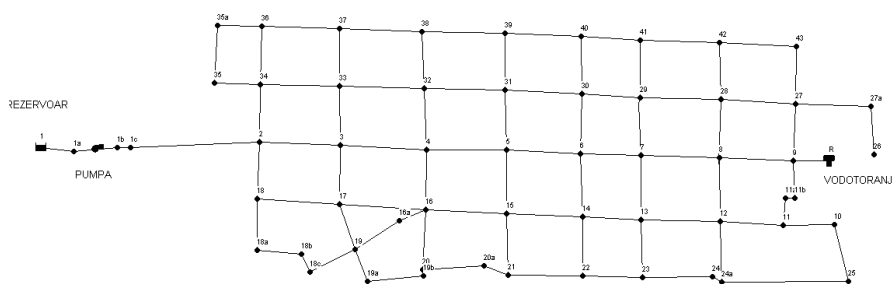
Na ovaj način omogućen je blag prelaz modela iz prethodnog u naredno stanje, a samim tim su sprečeni nagli skokovi u nizu rezultata modela, što dovodi do brže konvergencije standardne devijacije niza. Osnovna mana *MMCA* je što je ponekad, kada je standardna devijacija velika, potrebno izvršiti mnogo simulacija modela čija rešenja nisu ušla u finalni niz rezultata.

MMCA metoda na primeru modela kvaziustaljenog tečenja

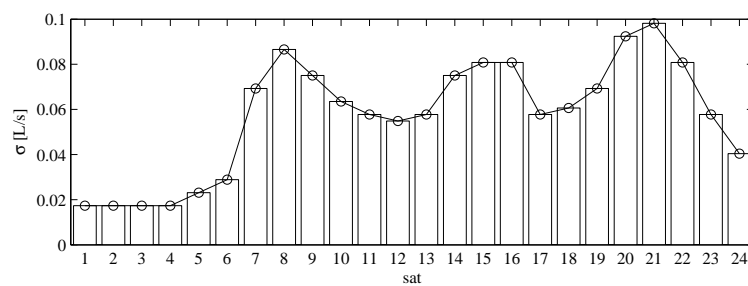
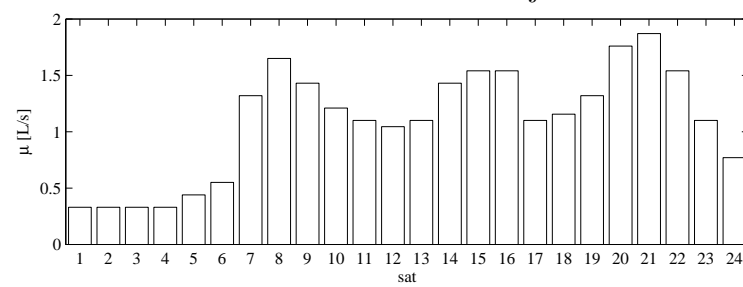
Kvaziustaljeni modeli predstavljaju značajnu klasu modela u hidrotehničkoj praksi. Model rada rezervoara distributivne vodovodne mreže naselja Jarkovac, slika 6.21, predstavlja model kvaziustaljenog tečenja gde se na račun neodređenih koeficijenata neravnomernosti simulira rad rezervoara. Vodom se naselje snabdeva pumpom, a vodotoranj, koji služi za dnevno izravnanje, se nalazi na drugom kraju grada, nasuprot pumpe. Model je napravljen u programskom paketu **EpaNet**, a komunikacija sa **MatLab** okruženjem ostvarena je pomoću **.dll** funkcija napisanih u programskom jeziku **C**.

Neodređena potrošnja predstavljena je uniformnom raspodelom za svaki časovni koeficijent neravnomernosti potrošnje u toku 24 sata, slika 6.22. Vremenska neodređenost nije razmatrana, mada bi verovatno bila izuzetno izražena.

Nakon propagacije neodređenosti *Grubom Monte Karlo* metodom sa 100 simulacija, sa istim generisanim slučajnim brojevima sproveden je i *MMCA*



Slika 6.21: Vodovodna mreža naslja Jarkovac



Slika 6.22: Parametri neodređenih časovnih koeficijenata potrošnje u primeru kvaziustaljenog tečenja u vodovodnoj mreži Jarkovac

algoritam. Rešenje modela je vremenska serija stanja u rezervoaru tokom 24 sata. Rešenje od značaja $f'(\xi)$ koje se koristi u *MMCA* algoritmu je nivo u rezervoaru nakon 24 sata. Rešenje od značaja u narednoj iteraciji *MMCA* algoritma, $f''(\xi)$, je takodje stanje u rezervoaru nakon 24 sata.

Tokom *MMCA* propagacije neodređenosti čak 60% rezultata simulacija nije ispunilo uslov koji se odnosio na nivo u rezervoaru nakon 24 sata rada, što se vidi na slici 6.23 (manje prikazanih simulacija).

Upravo nivo u rezervoaru koji ostaje za sledeći dan je i rezultat od interesa ove analize. S' obzirom da je model kvaziustaljenog tipa na prelazu iz jednog sata u sledeći, u situacijama kada se na kraju računskog koraka (koji iznosi 1 sat) menjaju piježometarske kote rezervoara i drugog kraja cevi koja u njega ulazi, mora postojati neka kontrola u algoritmu koja odlučuje da li se rezervoar puni ili prazni. Zbog toga postoje praznine u dijagramu koji predstavlja rad rezervoara, pa medjukoraci nisu merodavni. Vidi se i da što više simulacija odmiče praznine bivaju manje i uspostavlja se prirodni režim širenja neizvesnosti (neizvesnost se prostire ravnomerno). Rešenje na kraju razmatranog perioda je upravo ono koje je najpribližnije realnoj situaciji. Pretpostavlja se da bi se, ukoliko se uvede i neizvesnost po vremenu, razlika između susednih koeficijenata neravnomernosti smanjila i da bi se ovaj nepoželjan efekat uklonio.

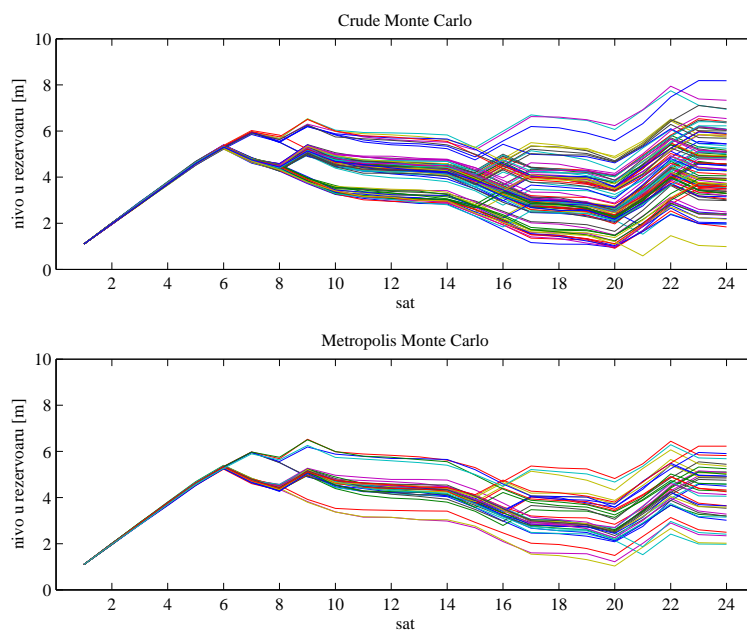
Tabela 6.5: Rezultati *Grube* i *MMCA* propagacije neodređenosti

	<i>Gruba Monte Karlo</i> metoda	<i>MMCA</i> metoda
$\mu[m]$	4.38	4.24
$\sigma[m]$	1.37	1.12
C_s	0.096	-0.388
$S_{\bar{x}}[m]$	0.138	0.18

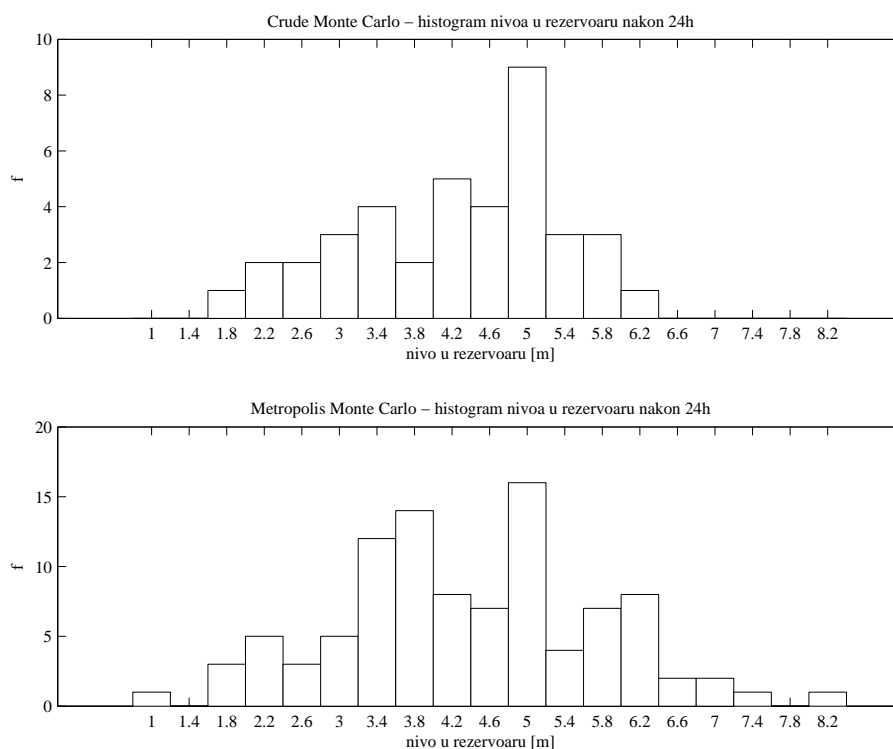
Rezultati *Grube Monte Karlo* i *MMCA* algoritma prikazani su u tabeli 6.5.

6.10 Transformacija modela - Controle Variates Monte Karlo (CVMC)

Ideja koja stoji iza niza tehnika ovog tipa je zasnovana na uvodjenju neke funkcije koja bi transformisala model i smanjila neodređenost rezultata modela. To se u *Monte Karlo* varijacijama ovog tipa postiže dovodjenjem izvoda funkcije modela što bliže nuli, tj. same funkcije u što "horizontalniji položaj". Ukoliko izaberemo funkciju h za koju znamo srednju vrednost μ



Slika 6.23: Propagacija neodređenih koeficijenata potrošnje *Grube* i *MMCA* metodom u primeru kvaziustaljenog tečenja u vodovodnoj mreži Jarkovac



Slika 6.24: Histogrami nivoa u rezervoaru nakon 24 sata za dve razmatrane metode (*Grube* i *MMCA*) u primeru kvaziustaljenog tečenja u vodovodnoj mreži Jarkovac

i varijansu σ^2 , onda se za bilo koji niz slučajnih brojeva X može definisati slučajna funkcija W_a , takva da je:

$$W_a = g(X) + a[h(X) - \mu] \quad (6.9)$$

gde je $g(X)$ model kod koga se primenjuje *Monte Karlo*, a -koeficijent transformacije i $h(X)$ -funkcija transformacije.

Očigledno je da se srednja vrednost ispitivane funkcije $g(x)$ može dobiti pomoću funkcije W_a , kao $E[W_a]$ čime se pokazuje da je srednja vrednost funkcije W_a nepristrasna ocena matematičkog očekivanja razmatrane funkcije $g(x)$. Varijansa W_a se može odrediti pomoću:

$$\text{var} [W_a] = \text{var} [g(X)] + a^2 \text{var} [h(X)] + 2acov [g(X), h(X)] \quad (6.10)$$

Nakon računanja prvog izvoda po promenljivoj a i izjednačavanja sa nulom moguće je odrediti najmanju varijansu od W_a . Vrednost koeficijenta a za koju je varijansa W_a najmanja iznosi:

$$a = -\frac{\text{cov} [g(X), h(X)]}{\text{var} [h(X)]} \quad (6.11)$$

Tada se može napisati:

$$W_a = g(X) - \frac{\text{cov} [g(X), h(X)]}{\text{var} [h(X)]} [h(X) - \mu] \quad (6.12)$$

$$\text{var} [W_a] = \text{var} [g(X)] - \frac{[\text{cov} [h(X), g(X)]]^2}{\text{var} [h(X)]} \quad (6.13)$$

Ovakvom transformacijom razmatrana funkcija je transformisana u "horizontalniji" položaj, čime se smanjuje rezultujuća varijansa. Za linearne funkcije $g(x)$ i linearnu funkciju $h(x)$ postoji a za koje propagacija neodređenosti preko funkcije W_a daje varijansu jednaku nuli. *CVMC* algoritam ima najveći doprinos kod cilja propagacije neodređenosti koji se odnosi na izračunavanje srednje vrednosti sa što manjom standardnom greškom srednje vrednosti jer se ocena matematičkog očekivanja koja se računa kao srednja vrednosti i pored transformacije modela zadržava kao nepristrasna.

CVMC na primeru tečenja sa slobodnom površinom

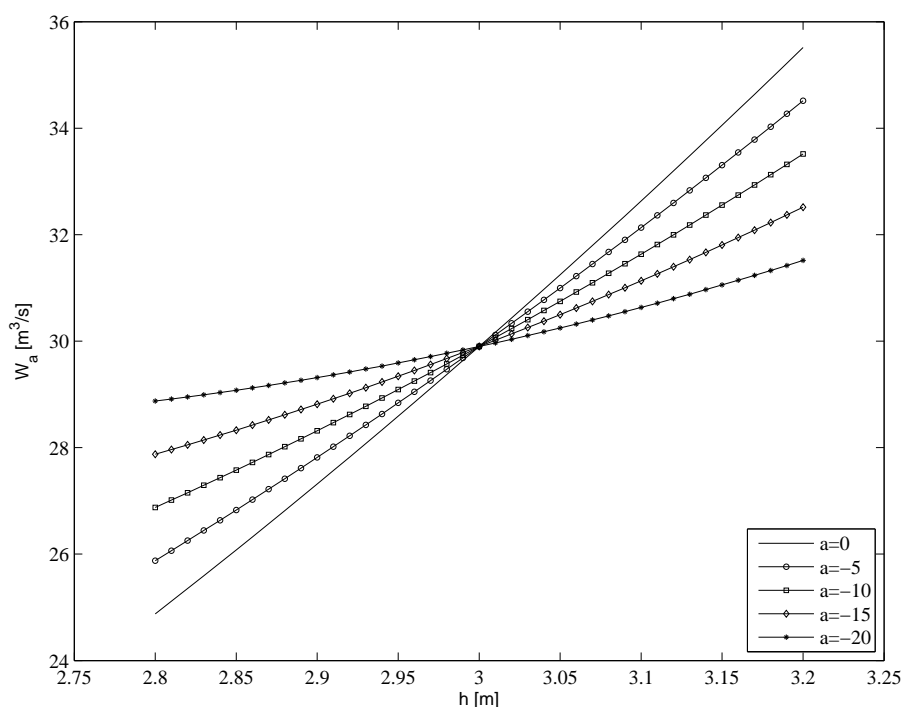
Ko primer za ovu podvarijantu *Monte Karlo* propagacije neodređenosti je već opisani model tečenja u kanalu trougaonog poprečnog preseka, nagiba stranica 1 : 1, kao u poglavlju 4.1. Analizom funkcije zavisnosti dubine

i protoka za funkciju transformacije je odabrana funkcija $h(x) = x$ iz dva razloga:

1. jednostavnost funkcije $h(x) = x$, i
2. funkcija zavisnosti protoka od dubine je iako nelinearna monotono rastuća

Dubina se, za razliku od prethodnog primera, predstavlja normalnom raspodelom samo sa parametrima: $\mu_h = 3$ m i $\sigma_h = 0.1155$ m. Srednja vrednost funkcije transformacije je jednaka srednjoj vrednosti neodredjene dubine $\mu_h = 3$ m.

Nakon transformacije funkcije zavisnosti protoka od dubine funkcijom $h(x) = x$, za različite parametre a , transformisana funkcija W_a je prikazana na slici 6.25. Sa slike se može videti da sa porastom parametra a funkcija prelazi u sve horizontalniji položaj. Obzirom da funkcija W_a nije linearna, nije moguće postići situaciju da postane potpuno horizontalna što bi dovelo do toga da rezultat propagacije neodredjenosti na toj funkciji da varijansu koja je jednaka nuli.



Slika 6.25: Funkcija W_a u zavisnosti od parametra a u primeru tečenja sa slobodnom površinom u kanalu trougaonog poprečnog preseka

Tabela 6.6: Rezultati *CVMC*

$\mu_{W_a} [m^3/s]$	30.03
$\sigma_{W_a} [m^3/s]$	0.24
$Cs_{W_a} [/]$	0.73
$S_{\bar{x}W_a} [m^3/s]$	0.024

Za vrednost parametra $a = -24.9$ varijansa funkcije W_a je najmanja. Ukoliko se primeni *CVMC* propagacija neodređenosti na funkciju W_a , dobijaju se rezultati prikazani u tabeli 6.6. Srednja vrednost W_a jednaka je srednjoj vrednosti protoka Q .

6.11 Metode u kojima se zamenjuje originalni model

Jedan od načina da se poboljša *Monte Karlo* algoritam je kroz intervenciju na samom modelu. Ukoliko je model isuviše komplikovan ili iz bilo kog razloga zahteva dugotrajnu simulaciju, skraćenje *Monte Karlo* propagacije neodređenosti se može postići zamenom modela nekim jednostavnijim i manje zahtevnim modelom koji daje slične rezultate. Ovakve metode izlaze iz koncepta zatvorenih modela, ali se moraju pomenuti kao jedna od alternativa. Da bi se formirali modeli koji će zameniti originalni zatvoreni model obično je potrebno izračunati određene parametre novih modela, tj. kalibrisati novi model.

Izdvajaju se metode regresije, i to *Surface Response* metoda i veštačka inteligencija u vidu neuralnih mreža. U ovom radu se nekoliko najznačajnijih metoda samo spominje, ali se se neće koristiti jer njihova primena strogo zavisi od specifičnosti problema.

6.11.1 Surface Response tehnika (SR)

Jedan od načina kako se može zameniti originalni model je i *Surface Response (SR)* Ova tehnika, prezentovana u radu [10], predstavlja način kako se u okolini tačke gde se model analizira, on predstavlja pomoću neke višedimenzionalne površi. Važno je odabrati dovoljan broj i dobar raspored reprezentativnih tačaka modela i na osnovu njih (kao da se radi o empirijskim podacima) proizvesti model koji je dalje moguće koristiti u *Monte Karlo* analizama. Najviše se koriste tzv. kvadratni i kubni model. Kvadratni model je oblika:

$$\begin{aligned}
y &= b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \dots \\
&+ b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + \dots \\
&+ b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2
\end{aligned} \tag{6.14}$$

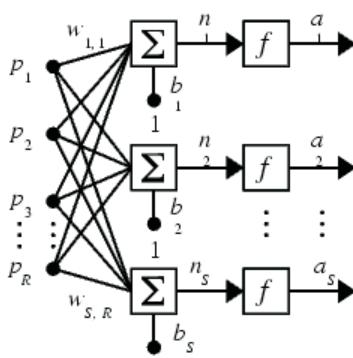
Za kubni oblik modela potrebno je u prethodnoj jednačini dodati i sledeće članove:

$$\begin{aligned}
&+ b_{123}x_1x_2x_3 + b_{112}x_1^2x_2 + b_{113}x_1^2x_3 + \dots \\
&b_{122}x_1x_2^2 + b_{133}x_1x_3^2 + b_{233}x_2^2x_3 + \dots \\
&b_{111}x_1^3 + b_{222}x_2^3 + b_{333}x_3^3
\end{aligned} \tag{6.15}$$

U navedenim jednačinama prisutni su svi članovi dok bi u praksi većina bila jednaka nuli. Inače, prikazani oblik jednačina je za tri parametra, dok bi za više parametara bio znatno komplikovaniji. Glavni problem kod ovakvog načina ubrzavanja *Monte Karlo* metode je određivanje koeficijenata b tako da *SR* model što više liči na originalni model.

6.11.2 Veštačka inteligencija

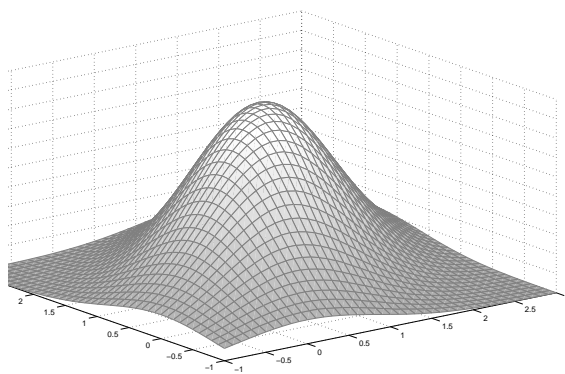
Pored regresionih metoda, zamena originalnog modela efikasno se u određenim situacijama može obaviti i upotrebom nekih od metoda veštačke inteligencije kao što su *Evolutional Polinomial Regression* [13] ili *Neuralne mreže* [14] (eng. *Artificial Neural Networks*). Na slici 6.26 je prikazana šema neuralne mreže sa jednim skrivenim slojem. I jedna i druga metoda predstavljaju modele crne ili sive kutije: potrebno je generisati nizove ulaznih podataka i rezultata originalnog modela, uz pomoć kojih bi se specifičnim postupcima učenja modeli istrenirali da daju odgovarajuće rezultate.



Slika 6.26: Neuralna mreža

6.12 Višedimenzionalne raspodele dve ili više promenljivih

Monte Karlo metoda može biti primenjena i na promenljive koje su međusobno zavisne. Za tu svrhu potrebno je kao ulaznu veličinu pripremiti višedimenzionalnu raspodelu zavisnih promenljivih. Na slici 6.27 dat je primer višedimenzionalne odnosno dvodimenzionalne raspodele.



Slika 6.27: Dvodimenzionalna Normalna raspodela

Funkcija gustine dvodimenzionalne normalne raspodele se može zapisati u obliku:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y} \right) \right] \quad (6.16)$$

gde je kovarijansna matrica normalne raspodele:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Dijagonalni elementi ove matrice predstavljaju varijanse slučajnih promenljivih x i y . Ukoliko su promenljive nezavisne, kovarijanse (vrednosti van dijagonale matrice) su jednake nuli. Koeficijent korelacije ρ predstavlja korelaciju između x i y , jer je:

$$\sigma_{xy} = \rho\sigma_x\sigma_y \quad (6.18)$$

Da bi se efikasno generisao niz međusobno korelisanih vrednosti predlaže se algoritam prikazan u radu [20], a primenjen u radu [22] za generisanje korelisanih čvornih potrošnji u modelu vodovodne mreže:

Neka je X matrica nekorelisanih slučajnih vrednosti sa N_s vrsta koji odgovara broju generisanih slučajnih vrednosti i N_v kolona koji odgovara broju ulaznih vrednosti ili parametara modela, a R' korelaciona matrica dimenzija $N_v \times N_v$. Procedura transformacije matrice X da bi se dobila matrica korelisanih vrednosti X' se može opisati sledećim koracima:

1. Izračunati korelacionu matricu korelacije R za matricu X
2. Primeniti *Cholesky* dekompoziciju na korelacione matrice R i R'
3. Izraziti matricu R' pomoću trougaone matrice P tako da je $R' = P \times P^T$
4. Izraziti matricu R pomoću trougaone matrice Q tako da je $R = Q \times Q^T$
5. Izračunati matricu $X_1 = X \times (P \times Q^1)^T$
6. Formirati matricu X' tako što se napravi novi raspored vrednosti po kolonama koji treba da odgovara rasporedu vrednosti u matrici X_1

Na gore opisan način se dobija matrica medjusobno korelisanih vrednosti kod koje svaki red predstavlja po jedan set ulaznih vrednosti ili parametara za jednu simulaciju *Monte Karlo* algoritma.

Glava 7

Propagacija neodredjenosti aproksimacijom modela pomoću Tejlorovog reda

Kratak pregled Glave 7:

Široko prihvaćen skup postupaka propagacije neodredjenosti su svakako i metode momenata. Ovaj skup metoda, nazvan još i metode perturbacija, predviđa razvoj modela u Tejlorov red u okolini tačke koja odgovara srednjoj vrednosti ulazne veličine. Na taj način se model aproksimira i omogućava elegantno preslikavanje drugog momenta raspodele u drugi moment rezultata. Kod izrazito nelinearnih modela ova metoda može biti veoma neprecizna pa je treba shvatiti samo kao aproksimativnu.

Oblast ulaznih parametara modela i rešenja modela se može predstaviti kao univerzum mogućih vrednosti. Opis i sagledavanje celog univerzuma ulaznih parametara i rešenja, ponekad je isuviše skup, a ponekad potpuno neizvodljiv poduhvat. Zbog toga je nekad dovoljno, a nekad smo i primorani, da model posmatramo samo oko određene karakteristične višedimenzionalne tačke, tj. mesta gde se tačno definisani skup ulaznih parametara preslikava u rešenje. Na ovaj način moguće je izolovati deo modela i posmatrati ga kao da ostatak ne postoji.

Za razliku od *Monte Karlo* metoda koje preslikavaju čitav domen neodredjenog ulaznog parametra u neodredjeni rezultat, razvojem modela u *Tejlorov red* model je moguće opisati samo oko jedne, odabrane tačke, i na taj način se posmatra samo bliska njena okolina.

7.1 Princip propagacije neodređenosti preko aproksimacije modela Tejlorovim redom

U zavisnosti od zahtevane tačnosti prikaza modela *Tejlorovim redom*, postoji više varijacija metode. Razvojem polinoma do drugog člana moguće je model opisati dovoljno dobro za potrebe efikasne propagacije neodređenosti, dok se razvoj na više članova retko primenjuje jer izrazi mogu biti veoma komplikovani.

Metode imaju sledeće korake:

1. Izbor neodređene ulazne veličine i njeno predstavljanje pomoću intervala ili neke teorijske raspodele (obično je to uniformna ili normalna raspodela)
2. Razvoj modela u *Tejlorov red* u okolini srednje vrednosti ulazne veličine
3. Direktno preslikavanje statističkih parametara ulaznih veličina ili parametara modela u neodređeni rezultat

Izbor neodređene ulazne veličine i procena njene neodređenosti predstavlja prvi korak ove metode. S obzirom da se neodređenost preslikava u okolini već unapred određene tačke modela, dovoljno je predstaviti neodređenu veličinu u obliku intervala. Ukoliko za to postoje mogućnosti, neodređena ulazna veličina se može predstaviti i pomoću normalne raspodele. Tada se drugi momenat raspodele preslikava oko srednje vrednosti neodređene veličine.

U okolini tačke a moguće je model $f(x)$ opisati pomoću *Tejlorovog reda* na sledeći način:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \quad (7.1)$$

Kraće se može zapisati na sledeći način:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (7.2)$$

Kod propagacije neodređenosti tačka a predstavlja srednju vrednost slučajne ulazne promenljive x .

7.2 Računanje parcijalnih izvoda

Postoji nekoliko standardnih postupaka za računanje parcijalnih izvoda potrebnih u *Tejlorovom redu* :

1. Ukoliko su jednačine modela dostupne i ako su diferencijabilne, moguće je izvode rešiti direktno (Sensitivity equation i Adjoint metode). Međutim i kod nekih modela kod kojih imamo dostupne jednačine nije moguće rešiti diferencirane jednačine, ili je potrebno pronaći novi pristup rešavanju što je jako nepraktično.
2. Kako kod većine zatvorenih modela nije moguće prići jednačinama, moguće je, doduše manje precizno, odrediti parcijalne izvode samo sa dostupnim ulaznim veličinama i rezultatima modela. Dva osnovna pristupa su:
 - (a) metoda centralnih razlika,
 - (b) metoda jednostranih razlika.
 - (c) Automatska diferencijacija (eng. *Automatic differentiation*) [28].

7.2.1 Metoda centralnih razlika

Višedimenzionalna tačka u prostoru (dimenzija zavisi od broja ulaznih vrednosti i parametara) se može predstaviti nizom vrednosti (k_1, k_2, \dots, k_m) . Parcijalni izvod (izvod samo po jednoj ulaznoj vrednosti ili parametru) metodom centralnih razlika po ulaznoj vrednosti ili parametru k_j , može se izračunati simulacijom modela u dve tačke, i to $(k_1, k_2, \dots, k_{j-h}, \dots, k_m)$ i $(k_1, k_2, \dots, k_{j+h}, \dots, k_m)$, gde je h neka mala vrednost. Simulacijama se dobijaju rešenja modela $u_{i,d}$ i $u_{i,l}$. Parcijalni izvod je dalje moguće dobiti pomoću jednačine:

$$\frac{\partial u_i}{\partial k_j} \approx \frac{u_{i,d} - u_{i,l}}{2h}, h \rightarrow 0 \quad (7.3)$$

7.2.2 Metoda jednostranih razlika

Kod metode jednostranih razlika, mogu se posmatrati levi i desni parcijalni izvod. Kod levog parcijalnog izvoda, model se simulira dva puta i to u tačkama $(k_1, k_2, \dots, k_{j-h}, \dots, k_m)$ i $(k_1, k_2, \dots, k_j, \dots, k_m)$, pri čemu se dobijaju dva rešenja $u_{i,0}$ i $u_{i,l}$, pa se izvod može izračunati pomoću formule:

$$\frac{\partial u_i}{\partial k_j} \approx \frac{u_{i,0} - u_{i,l}}{h}, h \rightarrow 0 \quad (7.4)$$

Kod desnog parcijalnog izvoda, model se simulira dva puta i to u tačkama $(k_1, k_2, \dots, k_j, \dots, k_m)$ i $(k_1, k_2, \dots, k_{j+h}, \dots, k_m)$, pri čemu se dobijaju dva rešenja $u_{i,d}$ i $u_{i,0}$, pa se izvod može izračunati pomoću formule:

$$\frac{\partial u_i}{\partial k_j} \approx \frac{u_{i,d} - u_{i,0}}{h}, h \rightarrow 0 \quad (7.5)$$

Da bi rešili parcijalne izvode u odnosu na m parametara modela metodom centralnih razlika, potrebno je simulirati model $2m$ puta, tj. po dva puta za svaki parametar. Za metodu jednostranih razlika, dovoljno je za m parametara modela simulirati model $m+1$ puta, tj. jednom za tačku u čijoj se okolini traži izvod, i m puta za svaki od parametara.

7.2.3 Nedostaci metoda određivanja parcijalnih izvoda

Osnovni nedostatak ovakvom pristupu je dodatni broj simulacija koji se ogleda u radu, kako računara tako i čoveka koji mora sve da isprogramira. Drugo ograničenje se nalazi u činjenici da se mora izabrati optimalna vrednost koraka h . Veliko h povlači i veliku grešku, pa se zahteva dovoljno malo h , a opet dovoljno veliko da se napravi razlika u rezultatu modela i da ona bude veća od reda veličine greške zaokruživanja. Za adekvatnu procenu koraka h potrebno je iskustvo koje se odnosi na osetljivost modela.

7.3 Metode bazirane na razvoju modela u Tejlorov red

U daljem tekstu su navedene četiri metode bazirane na razvoju modela u *Tejlorov red*. Metode su podeljene prema broju članova *Tejlorovog reda* i prema statističkim momentima koji u propagaciji učestvuju:

1. Analiza prvog reda i prvog momenta
2. Analiza drugog reda i prvog momenta
3. Analiza prvog reda i drugog momenta
4. Analiza drugog reda i drugog momenta

7.3.1 Analiza prvog reda i prvog momenta (eng. First Order First Moment (FOFM))

Ova metoda predstavlja trivijalno rešenje kod koga se zadržava samo prvi član *Tejlorovog reda*. Ona odražava tzv. determinističko rešenje i aproksimativno ispunjava jedino drugi cilj analize neodređenosti.

$$E[f(x)] = y(\bar{x}) \quad (7.6)$$

7.3.2 Analiza drugog reda i prvog momenta (eng. Second Order First Moment (SOFM))

Ova metoda zadržava prva dva člana od kojih je drugi drugi izvod u okolini tačke oko koje se opisuje model. Na ovaj način je poboljšana procena srednje vrednosti rezultata modela, drugi cilj propagacije neodređenosti (pronalaženje reprezentativnog rešenja) korigovanjem preslikane srednje vrednosti neodređenog ulaza.

$$E[f(x)] = y(\bar{x}) + \frac{1}{2} \text{var}[x] \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{\bar{x}} \quad (7.7)$$

SOFM transformacijom se posredno dobija informacija o neodređenosti modela. Ukoliko se uporedi sa rešenjem prethodne metode, razlika je informacija o zakrivljenosti modela (konveksnost i konkavnost).

7.3.3 Analiza prvog reda i drugog momenta (eng First Order Second Moment (FOSM))

Varijansa (standardna devijacija) se preslikava preko drugog člana *Tejlorovog reda* u varijansu rezultata modela u FOSM metodi. Na ovaj način se dobija informacija o neodređenosti rezultata u okolini srednje vrednosti tj. \bar{x} . Takodje, gubi se informacija o svemu što se u modelu nalazi u malo daljoj okolini od tačke oko koje se razvija *Tejlorov red*.

$$\text{var}[f(x)] = \text{var}[x] \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\bar{x}} \right]^2 \quad (7.8)$$

7.3.4 Analiza drugog reda i drugog momenta (eng. Second Order Second Moment (SOSM))

Ovde u igru ulazi i drugi izvod koji daje informaciju o konkavnosti ili konveksnosti, tj o brzini promene prvog izvoda. Ovako se može uticati na

tačnost ako je $var(x)$ veća veličina.

$$var [f(x)] = var [x] \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\bar{x}} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[var [x] \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{\bar{x}} \right]^2 \quad (7.9)$$

7.4 Analiza modela sa više promenljivih

Od svih pomenutih metoda propagacije neodredjenosti razvojem modela u *Tejlorov* red (*FOFM*, *SOFM*, *FOSM* i *SOSM*), *FOSM* metoda se najviše koristi. U *FOSM* analizi, neodredjenost parametra modela se prenosi kroz model koristeći aproksimaciju modela *Tejlorovim redom* oko srednje vrednosti svakog ulaznog parametra. Neodredjenost izlazne promenljive (rezultata) se može dobiti iz linearnog izraza:

$$var [f_k(x_1, \dots, x_n)] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_k(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right)^2 var [x_i] + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial f_k(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \frac{\partial f_k(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} cov [x_i, x_j] \quad (7.10)$$

gde je, $f_k(x_1, \dots, x_n)$ rezultat modela, $var [f_k(x_1, \dots, x_n)]$ označava varijansu izlazne promenljive, n je broj ulaznih promenljivih, $var[x_i]$ je varijansa ulaza x_i , i $cov[x_i, x_j]$ predstavlja kovarijansu izmedju ulaza x_i i x_j ($cov[x_i, x_j] = \sigma_{x_i x_j}$).

Izvod $\partial f_k(x_1, \dots, x_n) / \partial x_j$ predstavlja osetljivost rezultata modela u odnosu na promenu ulazne vrednosti ∂x_j (parcijalni izvod po promenljivoj ∂x_j).

Prvi član u jednačini 7.10 predstavlja doprinos neodredjenosti rezultata od neodredjenosti svake ulazne promenljive koje deluju nezavisno. Drugi član označava doprinos neodredjenosti rezultata od povezanosti parova ulaznih promenljivih.

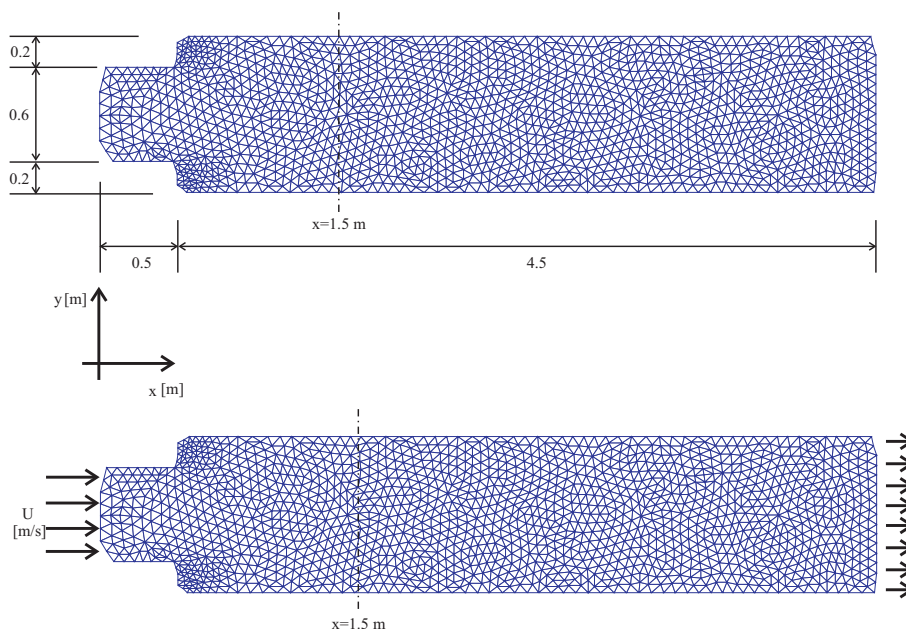
7.5 Prednosti i mane

Navedene metode predstavljaju približne metode propagacije neodredjenosti koje lokalno linearizuju model. Propagacija neodredjenosti se zatim obavlja i na osnovu preslikavanja neodredjenih ulaznih vrednosti (u obliku standardne devijacije, varijanse ili intervala). Iz rezultata preslikavanja se može steći utisak o neodredjenosti rezultata. Na žalost, informacije koje se odnose na originalni model (nelinearizovan) ostaju sakrivene njegovom linearnom interpretacijom. Zbog toga su metode koje se zasnivaju na razvoju

modela u Tejlorov red uobičajeno ograničene na probleme gde slučajne promenljive imaju relativno malo odstupanje (na pr. koeficijent varijacije je manji od 25%), a modeli su umereno nelinearni.

FOSM metoda na primeru *CFD* simulacije tečenja

Momentne metode testirane su na primeru *CFD* analize tečenja na mestu proširenja, koji je klasifikovan kao model diskretizovan po prostoru. Prostor tečenja, slika 7.1, ujedno i računski domen pokriven je sa 1574 čvora i 2980 trouglova, a Navijer-Stoksove (eng. *Navier-Stokes*) jednačine su rešene metodom konačnih zapremina.

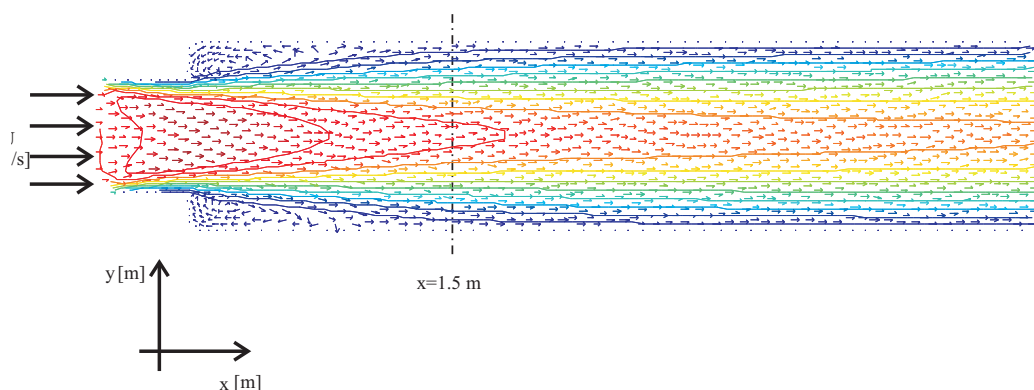


Slika 7.1: Računski domen tečenja u zoni proširenja

Za fiksnu geometriju i računski domen cilj je ispitati neodređenost profila brzina glavnih strujanja usled neodređenosti ulazne brzine U u preseku na $x = 1.5$ m, (prikazan na slici 7.1).

Neodređena ulazna brzina fluida predstavljena je uniformnom raspodelom sa parametrima $\mu_U = 3$ m/s i $\sigma_U = 0.58$ m/s. Determinističko rešenje ovog *CFD* modela za srednju vrednost ulazne brzine prikazano je na slici 7.2.

S obzirom da je ovaj problem mehanike fluida kompleksne prirode, rešenja i svaki računski element ima po tri izlazne veličine (brzine u oba pravca i pritisak), potrebno je odvojiti jedan detalj i samo njega posmatrati. Za potrebe ovog primera odabran je profil brzina preseka na poziciji $x = 1.5$ m.



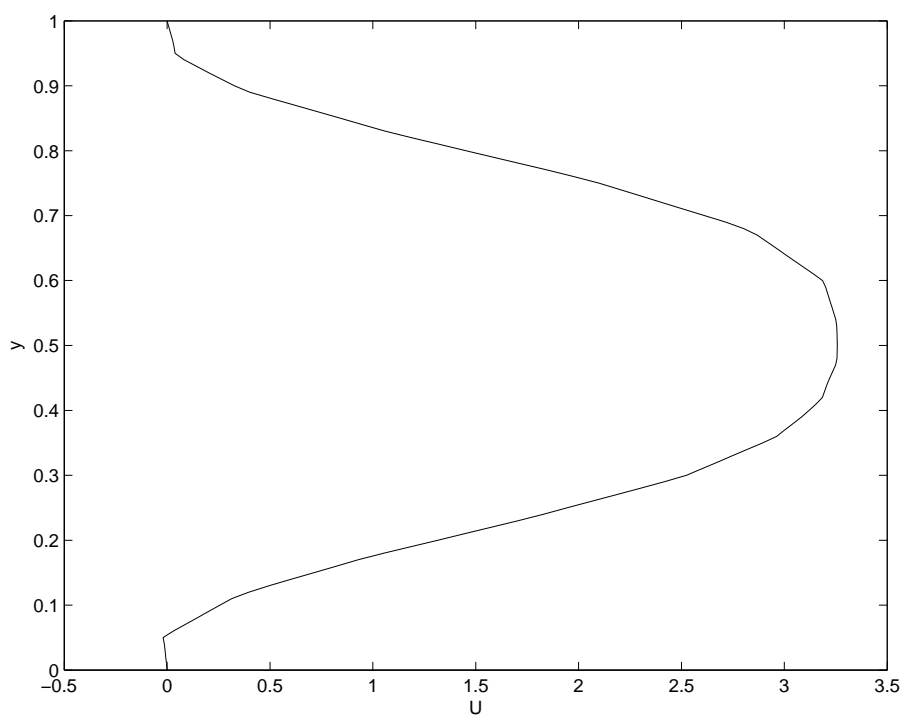
Slika 7.2: Rešenje za srednju vrednost neodredjene ulazne brzine

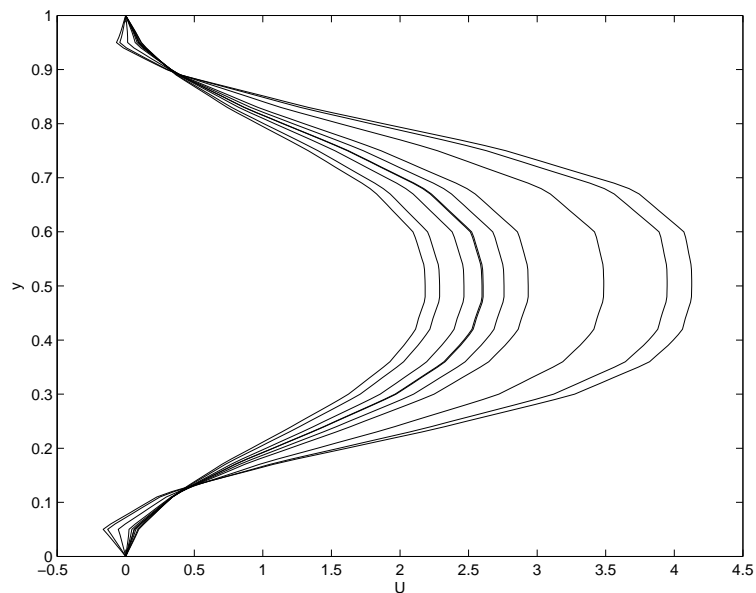
Za srednju vrednost ulazne brzine profil brzine na poziciji $x = 1.5$ m se nalazi blizu kraja zone recirkulacije, slika 7.3. Za brzine veće od $U = 3$ m/s, deo profila će se nalaziti u zoni recirkulacije sa negativnim brzinama, dok će za brzine manje od $U = 3$ m/s ceo profil biti van zone recirkulacije. Za deset slučajnih ulaznih brzina profili izgledaju kao na slici 7.4.

Rezultat primene FOSM metode propagacije neodredjenosti na odabrani profil brzina ($x = 1.5$ m) sa izračunatim parcijalnim izvodima metodom centralnih razlika sa $h = 0.01$ m/s, je prikazan na slici 7.5 isprekidanom linijom.

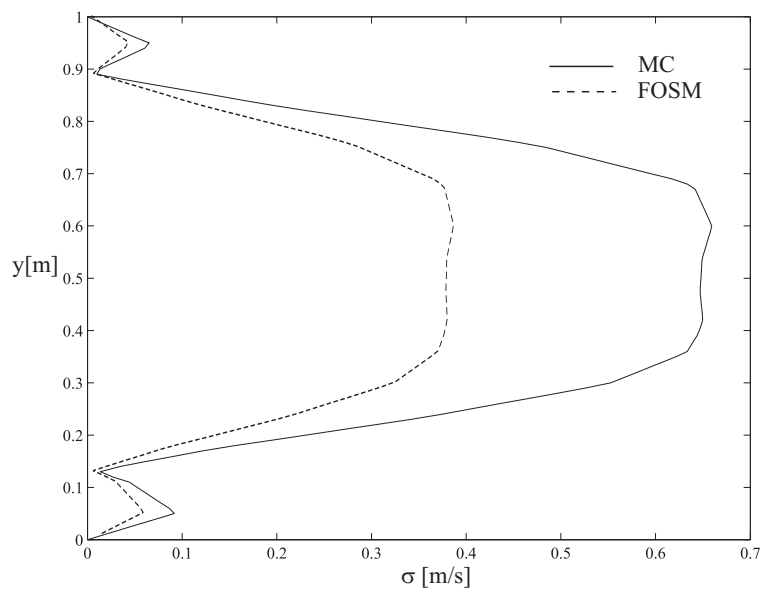
FOSM metoda upoređena je sa *Grubom Monte Karlo* metodom sa 150 simulacija. Rezultati analize (standardne devijacije) su prikazani na slici 7.5 punom linijom. Upoređujući rezultate, može se uočiti znatna razlika između procene neodredjenih brzina po poprečnom preseku računata po *Monte Karlo* i FOSM metodi. Prvenstveno je to slučaj kod brzina u okolini ose računskog domena. Razlog tome je velika neodredjenost rezultata u toj zoni. Pošto FOSM metoda predstavlja samo približni način ocene neodredjenosti prema vrednosti prvog izvoda u okolini srednje vrednosti ulaza, može se zaključiti se da u ovom slučaju nije adekvatna za analizu propagacije neodredjenosti.

Osnovna prednost FOSM u odnosu na *Monte Karlo* je njena brzina. Ovaj primer namerno je odabran da bi se prikazala glavna moć FOSM metode koja se ogleda u tome da je simulaciju modela dovoljno izvršiti svega nekoliko puta (u ovom slučaju dva puta). Da bi rezultat *Monte Karlo* algoritma konvergirao, ponekad je potrebno i više stotina simulacija što kod CFD modela predstavlja znatnu prepreku znajući da je za jednu simulaciju ponekad potrebno i više sati rada (u slučaju opisanog prostog primera model se izvršavao oko 30 sekundi).

Slika 7.3: Profil brzina na mestu $x = 1.5$ m



Slika 7.4: Profili brzina za deset slučajno odabranih ulaznih brzina



Slika 7.5: Rezultat FOSM i *Grube Monte Karlo* propagacije neodredjenosti za razmatrani profil brzina

Glava 8

Metoda α –preseka

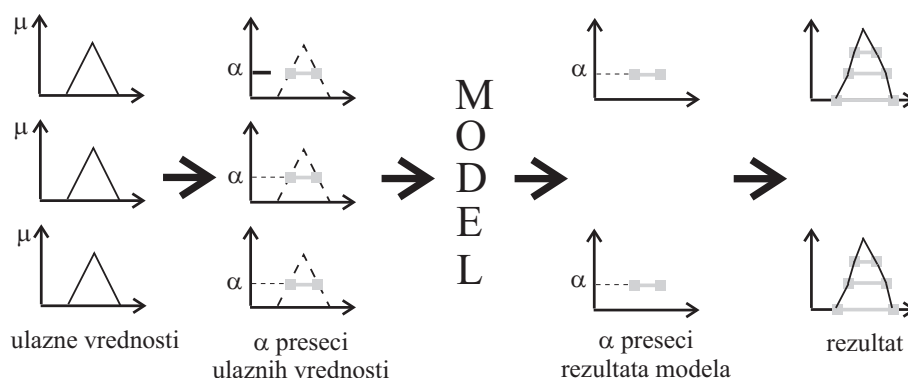
Kratak pregled Glave 8:

Prvi korak u procesu propagacije neodređenosti je uvek definisanje oblika i načina prezentacije neodređenosti za ulazne veličine ili parametare modela. Ponekad nije lako sprovesti ni taj prvi korak jer neodređenost ulaza/parametara nije sasvim jasna. Kada nema dovoljno podataka ili je potrebno izraziti neizvesnost, neodlučnost ili jednostavno sumnju u tačnost određenih veličina, raspodele verovatnoće ili intervali su uglavnom loš izbor. Tada na scenu stupaju rasplinuti (fuzzy) skupovi. Posebno razvijen matematički aparat, prvi put prikazan u radu Zadeha (1965) [36] pruža mogućnosti za računanje neodređenog rezultata determinističkog modela ponekad uz pomoć samo nekoliko simulacija.

Ukoliko se ulazna veličina predstavi u obliku rasplnutog (fuzzy) skupa potrebno je primeniti specifičan postupak transformacije rasplnutog skupa u niz intervala i preslikavanje intervala na razmatranom modelu. Zatim je potrebno rezultate, takodje u obliku intervala, složiti u novi rasplnuti skup koji predstavlja rešenje. Ta metoda naziva se α -presek (eng. α -cut) metoda [1], [25], [29], slika 8.1.

8.1 Princip α –presek metode

Ukoliko je neodređena veličina predstavljena u obliku rasplnutog skupa, adekvatan potupak propagacije neodređenosti je tzv. α -presek metoda. Kako ne postoji direktan način unošenja ulaznih vrednosti u obliku rasplnutog skupa u deterministički model, potreban je postupni metod kojim bi se

Slika 8.1: Šematski prikaz metode α -preseka

rasplinuti skup razložio na karakteristične intervale ili egzaktne vrednosti i kao takav propagirao modelom. Pošto rasplinuti skup nije isto što i raspodela verovatnoće, Monte Karlo metoda se ne može primeniti.

Kako rasplinuti skupovi predstavljaju proširenje klasične teorije skupova uvodjenjem funkcije pripadnosti, prezentacija ove funkcije može biti u više različitih oblika (poglavlje 3.3). Najpoznatiji i najčešći su trougaoni oblik, trapezni oblik ili oblik Gausove krive. Od oblika zavisi i broj parametara kojima se jedan rasplinuti skup može predstaviti. Za predstavljanje trougaonog rasplinutog skupa potrebno je najmanje tri, za trapezni četiri, dok je za neki složeniji oblik potrebno i više tačaka. Korišćenjem većeg broja tačaka može se prikazati čak i asimetrija neodređene veličine.

α -presek rasplinutog skupa se može zamisliti kao interval za određenu vrednost pripadnosti skupu. Taj interval određuje polaznu tačku za transformaciju rasplinutog skupa kroz model. S obzirom da je moguće podeliti rasplinuti skup na beskonačan broj α -preseka, potrebno je unapred odabrati najpogodniji broj preseka, jer se sa velikim brojem preseka analiza komplikuje, ali se dobija i detaljniji prikaz rezultata.

Procedura α -presek metode se može opisati pomoću sledećih koraka (slike 8.1):

- Formirati rasplinite skupove ulaznih veličina
- Izdeliti skupove sa α -presecima, čime se dobijaju skupovi intervala sa istom vrednošću pripadnosti
- Preslikati α -preseke na modelu primenom principa intervalske matematike ili optimizacionim metodama
- Formirati rezultat u obliku rasplinutog skupa, za odabrane vrednosti pripadnosti

Na slici 8.3 grafički je prikazano preslikavanje trougaonog fuzzy skupa preko monotonog jednodimenzionalnog modela. Ukoliko model nije monoton, i granice α -preseka se ne preslikavaju u ekstremume rezultata modela, već su ekstremumi unutar posmatranog intervala, tada je potrebno primeniti optimizacione metode ili neku tehniku otkrivanja ekstremuma modela.

8.2 Monotoni i nemonotoni modeli

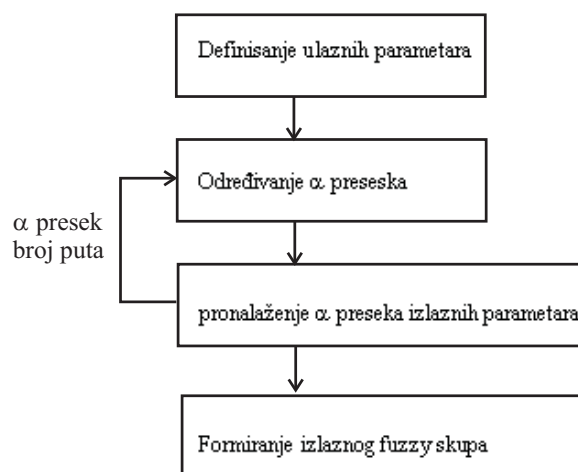
Ukoliko je model monoton, moguće je primeniti opšta pravila intervalske matematike na svaki α -presek posebno, slika 8.3. Međutim, ukoliko je model nemonoton, tj. postoji ekstremum u domenu nekog od intervala α -preseka, potrebno je primeniti optimizacionu metodu da bi se u okviru intervala našli ekstremumi koji se preslikavaju u α -preseke rezultata, [4], [5], [6]. Na slici 8.4 prikazano je preslikavanje trougaonog rasplnutog skupa na monotonom i na nemonotonom modelu sa jednom promenljivom. Kod monotonog modela preslikane granice intervala α -preseka ulaznog rasplnutog skupa čine granice intervala α -preseka rezultujućeg rasplnutog skupa. Kod nemonotonih modela se granice intervala ulaznog preseka ne preslikavaju u granice intervala rezultata. Da bi u tom slučaju bio određen rezultat u obliku α -preseka, potrebno je granice rezultata (minimum i maksimum rezultata), a to se može postići, između ostalog i optimizacionim metodama sa kriterijumskim funkcijama koje minimiziraju i maksimiziraju vrednost rezultata na posmatranom ulaznom intervalu.

Fuzzy α -presek metoda na primeru modela distributivne vodovodne mreže grada Bečej

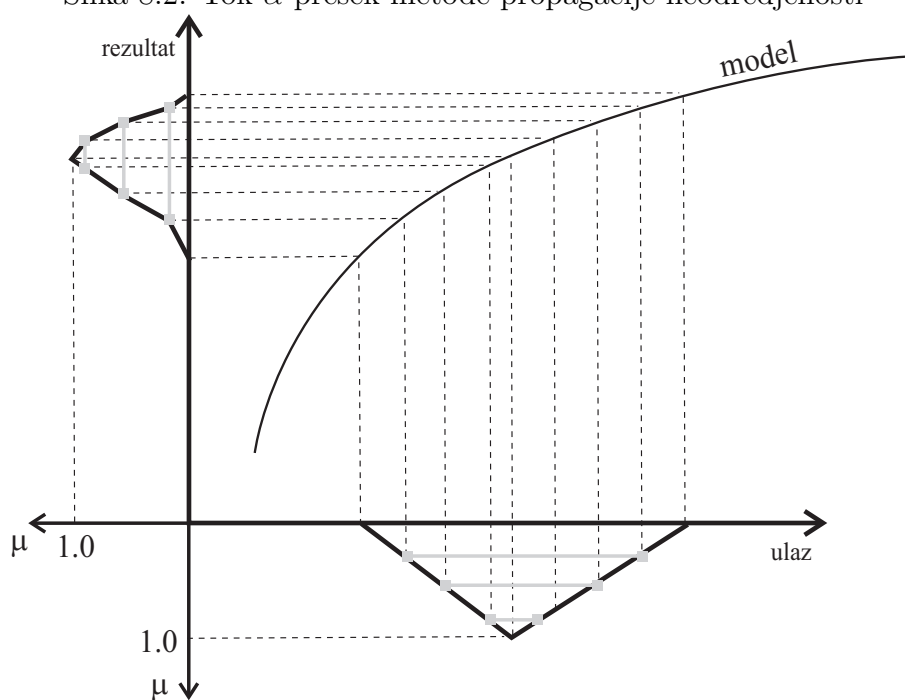
Model vodovodne distributivne mreže grada Bečej [7], [8] je predstavljen u programskom paketu EPANet. Mreža se sastoji od 453 čvora i 616 cevi. Pritisak u mreži se održava pomoću pumpe sa frekventnom kontrolom, koja se za potrebe modeliranja zamenjuje rezervoarom sa fiksnom kotom. Prosečan dotok u sistem je 90 L/s.

Model, razvijen u EPANet-u [30], upotrebljen je u vidu .dll-a kao engine u C++ programskom paketu. Svi podaci potrebni za rad programa su u toku simulacije držani u memoriji što je značajno ubrzalo rad programa. Biblioteka genetskih algoritama [34], takode napisana u jeziku C++ je korišćena za optimizaciju.

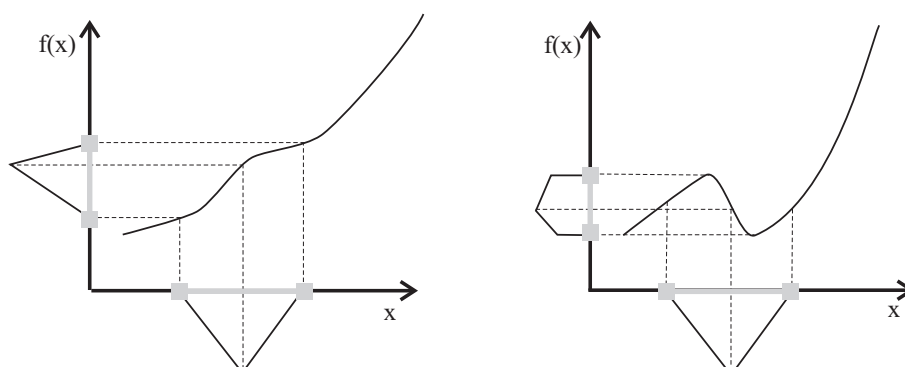
Kao najznačajniji neodređeni parametar odabrana je apsolutna hrapavost u cevima k [mm]. Posle prečnika cevi, koeficijent trenja ima najznačajniji uticaj na linijski pad pritiska, pa male greške u proceni mogu dovesti do



Slika 8.2: Tok α -presek metode propagacije neodredjenosti



Slika 8.3: Tok α -presek metode propagacije neodredjenosti na monotonom modelu sa jednom promenljivom

Slika 8.4: α -presek metoda na monotonom i nemonotonom modelu

bitnih neslaganja merenih i računatih vrednosti pritiska u nekom čvoru.

U daljoj analizi problema, zbog jednostavnije upotrebe pri programiranju, rasplinuti skupovi su predstavljeni trougaonim oblikom preko tri koeficijenta: najverovatnija vrednost a i koeficijenti c_1 i c_2 . Baza rasplinutog skupa je predstavljena pomnoženom najverovatnijom vrednosti koeficijentima c_1 i c_2 , čime se dobija baza u obliku intervala: $[a \times c_1, a \times c_2]$. Ceo postupak je prikazan na slici 8.6.

Kada se rasplinuti skup predstavi na predloženi način moguće je α -preseke (intervale) odrediti pomoću izraza:

$$\left[a \left(\alpha + \frac{c_1}{1 - c_1} \right) (1 - c_1), a \left(\frac{c_2}{c_2 - 1} - \alpha \right) (c_2 - 1) \right] \quad (8.1)$$

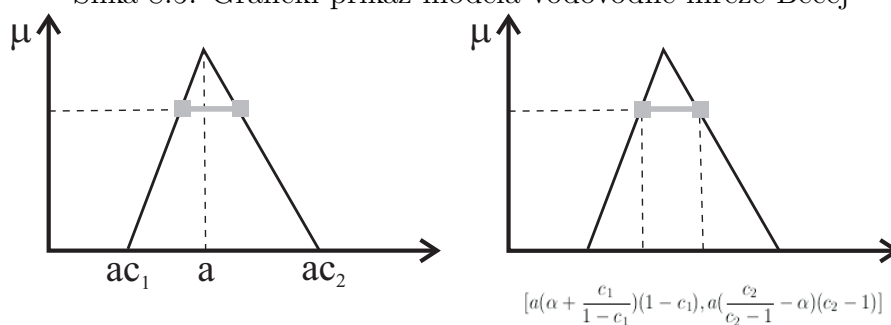
Treba uočiti da rasplinuti skupovi koji predstavljaju koeficijente trenja nisu simetrični. Starenjem, materijal od koga su sačinjene cevi ne može postati glatkiji (sa manjim koeficijentom trenja). Uzrok tome su taloženje na unutrašnjem zidu cevi, ali i korozija i razni drugi uticaji. Prema tome koeficijent c_1 će imati vrednost manju od jedan, za slučaj da je došlo do greške u proceni materijala ili godišta cevi, a c_2 veću od jedan. Najverovatnija vrednost je određena prema uputstvima proizvođača.

Kao prvi korak u pripremi podataka određeni su rasplinuti skupovi za svaku cev u mreži. Cevi u vodovodnom sistemu grada Bečeja su uglavnom starije od 10 godina, tako da je procenjeno da je koeficijent $c_1 = 0.1$, a $c_2 = 10$. Proračun je sproveden za 6 α -preseka (šest različitih vrednosti pripadnosti μ) $\alpha = [0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1]$.

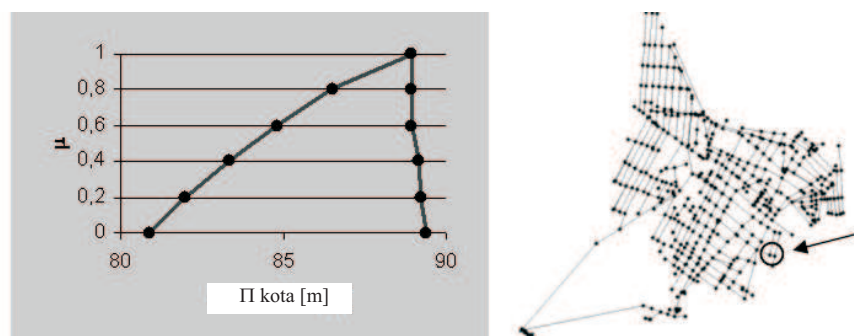
Kao izlazni parametri posmatrane su pijezometarske kote u čvorovima i protok u cevima. Kao reprezentativni odabran je čvor 366 i posle rekonstrukcije u oblik rasplinutog skupa iz 6 α -intervala, rezultat je prikazan na slici 8.7.



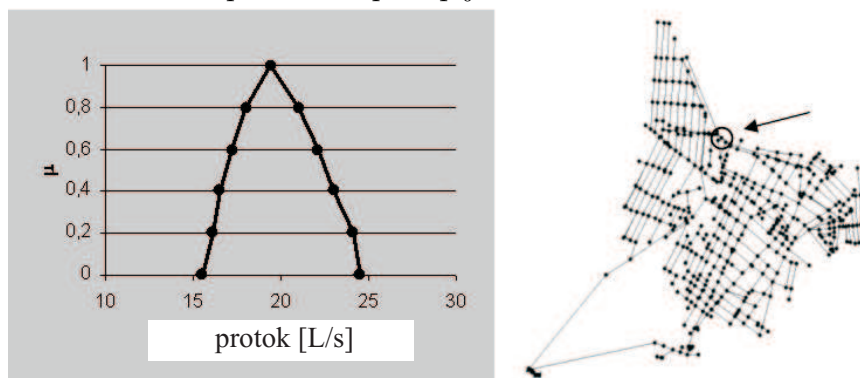
Slika 8.5: Grafički prikaz modela vodovodne mreže Bečej



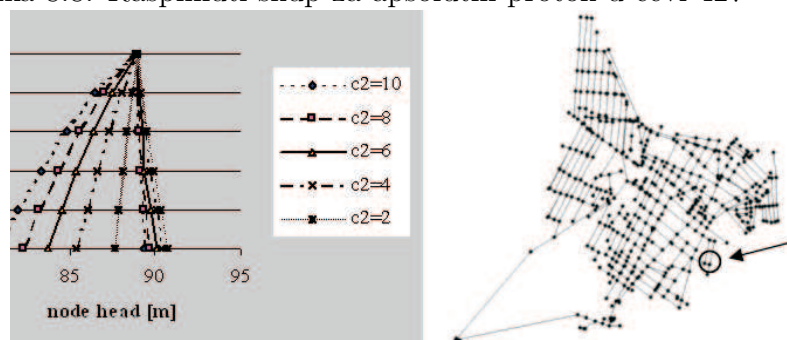
Slika 8.6: Parametri za predstavljanje trougaonog rasplinutog skupa i odgovarajućih α -preseka



Slika 8.7: Rasplinuti skup za pijeziometrijsku kotu u čvoru 366



Slika 8.8: Rasplinuti skup za apsolutni protok u cevi 427



Slika 8.9: Varijacija protoka u odnosu na koeficijent formiranja fuzzy skupa c_2

Može se primetiti da je neodredjenost pijezometarske kote u čvoru 366, ukoliko se posmatra baza rasplinutog skupa, oko 8 metara. Najverovatnija vrednost odgovara najverovatnijim vrednostima ulaznih rasplnutih skupova. Kako je zavisnost pritiska od koeficijenta trenja monotona funkcija, nije bilo potrebno koristiti optimizacionu metodu, već su intervali sračunati direktno.

Druga grupa izlaznih veličina (protoci u cevima) koji nisu monotoni u odnosu na hrapavost u cevima su određeni uz pomoć optimizacione metode. Korišćen je genetski algoritam¹ [15], (slika 8.8). Naime, za razliku od pritiska koji su monotoni u odnosu na hrapavost, apsolutni protok u prstenastim mrežama, kakav je i Bečej, to nije. Pritisak sigurno opada pri povećanju hrapavosti cevi (ili ostaje isti ukoliko nije osetljiv na promenu hrapavosti u nekoj cevi), dok protok pri promeni hrapavosti može da opada, a zatim kada voda promeni smer i da počne da raste. Ukoliko se upotrebe optimizacione metode, kao u ovom primeru, nije potrebna dodatna analiza ponašanja protoka u odnosu na promenu hrapavosti, već se optimizacioni algoritam "brineđa ekstremumi rezultujućeg α -preseka budu pronadjeni.

Sračunati rasplinuti skup za protok u cevi 427 odaje utisak simetričnosti iako su ulazni podaci o hrapavosti u cevima nesimetrični. To je posledica promene smera toka vode u cevima u prstenastim mrežama.

Da bi proverili koliko koeficijent c_2 utiče na izlaz modela, analizirana je pijezometarska kota za nekoliko vrednosti koeficijenta $c_2 = [10, 8, 6, 4, 2]$. Može se videti da koeficijent c_2 utiče na skupljanje obe strane rasplinutog skupa nesimetrično u odnosu na najverovatniju vrednost rasplinutog skupa (slika 8.9).

Ovaj primer značajan je pre svega zbog upotrebe rasplnutih skupova u propagaciji neodredjenosti. Za ocenu statističkih parametara hrapavosti cevi potrebno bi bilo izdvojiti veliki broj uzoraka cevi koje su imale slične uslove u toku svog životnog veka, što nije nimalo lak zadatak. Rasplnutim skupovima je opisana neodredjena hrapavost nizom intervala sa nedvosmislenim utiskom o najverovatnijoj vrednosti i o neodredjenosti ovog parametra.

Optimizacione metode ponekad mogu da budu izuzetno spore, i da zahtevaju brojne simulacije modela ne garantujući rešenje u vidu globalnog optimuma. Zbog toga metodu baziranu na rasplnutim skupovima treba kritički posmatrati u odnosu na *Monte Karlo* metodu ukoliko rezultati modela nisu monotoni u odnosu na ulazne vrednosti i parametre modela [1].

¹vrsta optimizacione metode koja se bazira na evoluciji gena, gde se pod genom podrazumeva jedno moguće rešenje sistema.

Glava 9

Zaključak

U procesu modeliranja hidrotehničkih pojava stalno je prisutan problem neodređenih ulaznih vrednosti i parametara modela kod upotrebe determinističkih modela. Ovom problemu je moguće pristupiti na dva načina. Ovaj način podrazumeva procenu egzaktnih, jedinstvenih vrednosti ulaznih veličina i modeliranje sa takvim vrednostima. Prvi način podrazumeva jedinstvene ulazne vrednosti i parametre i kao rezultat modeliranja se mogu očekivati isto jedinstveni rezultati. Drugi način zahteva definisanje neodređenog ulaza i parametara modela. Kroz postupak koji se naziva propagacija neodređenosti, tj. preslikavanje neodređenih ulaznih veličina i parametara modela u neodređene rezultate specifičnim postupcima i metodama. Dobija se rezultat modela koji više nije jedinstvena vrednost, već opseg mogućih rezultata sa određenom verovatnoćom.

Pošto je većina hidrotehničkih modela determinističkog tipa, u ovom radu su definisane metode koje se u tom slučaju mogu primeniti u propagaciji neodređenosti. Ova teza je ograničena na tzv. zatvorene modele, tj. modele kod kojih su dostupni samo ulazne vrednosti, parametri i rezultati ali ne i jednačine modela.

Prikazane metode propagacije neodređenosti su podeljene prevashodno prema obliku kojim su predstavljene neodređene ulazne veličine i parametri modela. To su oblik intervala, oblik statističke raspodele i oblik rasplnutog (fuzzy) skupa. Svakom od oblika odgovara niz metoda koje se mogu primeniti. Primer je intervalska matematika za ulazne veličine i parametre u obliku intervala, *Monte Karlo* metoda za statističke raspodele ili α -presek metoda za veličine u obliku rasplnutih skupova.

Svaka od metoda ilustrovana je prigodnim primerom iz hidrotehničke prakse. Odabrani su primeri koji se razlikuju, ne samo po ulaznim podacima, već i po suštini pojave koja se opisuje. Neki od primera su modeli vodovodnih distributivnih mreža, model upravljanja ustavom, model tečenja u prirodnim

tokovima sa slobodnom površinom, CFD model rešen metodom konačnih zapremina, itd.

Kroz opis metoda i rezultate primera analizirana je efikasnosti i primenljivost pojedinih metoda propagacije neodredjenosti kod hidrotehničkih modela. Širok spektar modela koji postoje u hidrotehničkoj praksi nije dozvoljavao da se svi prikažu u ovom radu. Zbog toga se može zaključiti da je jedna široka tema, kao što je propagacija neodredjenosti, ovom radu ograničena isključivo na zatvorene modele, tek započeta. Predloženi naredni koraci u ovom delu hidrotehničkog modeliranja bi bili da se ispituju specifičnosti svih modela (jednačina, numeričkih metoda koje su upotrebljene za rešavanje, ulaznih vrednosti, parametara i rezultata) i da se predlože najefikasnije i najtačnije metode za ocenu neodredjenosti.

Takodje, pošto su izostavljene metode koje se odnose na modele kod kojih su dostupne jednačine, naredni koraci bi bili upoređivanje efikasnosti metoda koje se koriste kod zatvorenih modela i metoda koje se mogu primeniti kod modela sa dostupnim jednačinama.

Literatura

- [1] A. Abebe, V. Guinot, D. Solomatine, *Fuzzy alpha-cut vs. Monte Carlo techniques in assessing uncertainty in model parameters*, Proc. 4th International Conference on Hydroinformatics, Iowa City, USA, July 2000
- [2] L. Arnold, *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, Wiley, 1974.
- [3] N. Branisavljević, M. Ivetić, *Fuzzy Approach In The Uncertainty Analysis Of The Water Distribution Network Of Becej*, CCWI2005 Computing & Control in the Water Industry Conference 5-7 September 2005, Exeter UK
- [4] N. Branisavljević, M. Ivetić, *Fuzzy approach in the uncertainty analysis of the water distribution network of Becej*, Civil engineering and environmental systems, Volume 23, Issue 3 September 2006, pages 221 - 236
- [5] N. Branisavljević, M. Ivetic, *Reducing Uncertainties in Water Distribution Network Models Using Fuzzy Sets and Genetic Algorithms*, IWA Young Researchers 2006, WEMS No.12
- [6] N. Branisavljević, M. Ivetić, *Fuzzy Approach In The Uncertainty Analysis Of The Water Distribution Network Of Becej*, 8. International Conference on Computing and Control for the Water Industry, 2006, Exeter UK
- [7] N. Branisavljević, M. Ivetić, D. Prodanović, *Analysis of the Water Distribution Network with Uncertain Nodal Demand using Fuzzy Sets*, HYDROINFORMATICS 2006 - Inovate and Share, Nice-France
- [8] N. Branisavljević, M. Ivetić, *Analiza neodredjenosti pomoću fuzzy skupova, primenjena na modelu vodovodne mreže grada Bečej*, 26. save-tovanje Vodovod i Kanalizacija, Herceg Novi, 2006

- [9] N. Branislavljević, D. Prodanović, M. Ivetić, *Modeliranje Sa Nepouzdanim Podacima*, 7. Medjunarodna konferencija Vodovodni i Kanalizacioni sistemi, Jahorina, Maj 2007.
- [10] G. E. P. Box, N. R. Draper, *Empirical Model Building and Response Surfaces*, John Wiley and Sons, New York, 1987.
- [11] M. Drogg, *Dealing with Uncertainties*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007, ISBN-10 3-3-540-29606-9
- [12] J. Faragher, *Probabilistic Methods for the Quantification of Uncertainty and Error in Computational Fluid Dynamics*, Air Vehicles Division Platforms Sciences Laboratory, DSTO-TR-1633
- [13] O. Giustolisi, D. Savic *A Symbolic Data-driven Technique Based on Evolutionary Polynomial Regression*, Journal of Hydroinformatics, IWA-IAHR Publishing, UK, 2005.
- [14] K. Gurney, *An Introduction to Neural Networks*, Routledge, 1997., ISBN 1-85728-673-1
- [15] R. Haupt, S. Haupt, *Practical Genetic Algorithms*, John Wiley & Sons, Inc., 2004
- [16] J. Hammersley, D. Handscomb, *Monte Carlo Methods*, Methuens monographs on applied probability and statistics, 1964, ISBN 0416523404
- [17] J. Halton, *On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals*, Numerische Mathematik, Vol. 2, 1960, pp. 84-90
- [18] G. Hajdin, *Mehanika Fluida, Uvodjenje u hidrauliku*, Gradjevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2002
- [19] W. Fellin, H. Lessmann, M. Oberguggenberger, Robert Vieider (Eds.), *Analyzing Uncertainty in Civil Engineering*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005, ISBN 3-540-22246-4
- [20] R.L. Iman, W.J. Conover, *A distribution free approach to inducing rank correlation among input variables*, Community Statistics-Simulation Computation 1982, 11, 311-334
- [21] M. V. Ivetić, *Računska hidraulika, tečenje u cevima*, Gradjevinski fakultet u Beogradu, Beograd 1996.

- [22] Z. S. Kapelan, D. A. Savic, G. A. Walters, *Multiobjective design of water distribution systems under uncertainty*, Water Resources Research, Vol. 41, W11407, doi:10.1029/2004WR003787, 2005
- [23] N. Kottegoda, R. Rosso, *Statistics, Probability and Reliability for Civil and Environmental Engineers*, McGraw-Hill , International Editions, 1998
- [24] D. V. Lindley, *Understanding Uncertainty*, A John Wiley & Sons, Inc. Publication, 2006, ISBN-13: 978-0-470-04383-7
- [25] S. Maskey, V. Guinot, R. Price, *Treatment of precipitation uncertainty in rainfall-runoff modeling: a fuzzy set approach*, Advances in Water Resources 27, 2004, pp. 889-898
- [26] D. Prodanović, *Mehanika fluida za studente gradjevinskog fakulteta*, Gradjevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2007, ISBN 978-86-7518-080-7
- [27] Z. Radić, J. Plavšić, *Stohastička hidrologija - godišnji zadatak*, Gradjevinski fakultet u beogradu, 2006.
- [28] L. Rall, *Automatic Differentiation: Techniques and Applications*, Lecture Notes in Computer Science 120., 1981, Springer. ISBN 0-540-10861-0
- [29] R. Revelli , L. Ridolfi, *Fuzzy Approach for Analysis of Pipe Networks*, Journal Of Hydraulic Engineering, January 2002, pp. 93-101
- [30] L. Rossman, *EPANET 2, Manual*, Water Supply and Water Resources Division National Risk Management Research Laboratory, Cincinnati, OH 45268
- [31] L. Rossman, *SWMM, Manual*, Water Supply and Water Resources Division National Risk Management Research Laboratory, Cincinnati
- [32] D. Veneziano, *Probability and Statistics in Engineering*, MIT Lecture Notes, <http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Civil-and-Environmental-Engineering/1-151Spring-2005/CourseHome/>
- [33] P. Vos, *Time-Dependent Polynomial Chaos*, Master of Science Thesis, November 2006, Faculty of Aerospace Engineering · Delft University of Technology
- [34] M. Wall, *GAlib: A C++ Library of Genetic Algorithm Components*, Documentation, August 1996

- [35] R. W. Walters, L. Huyse, *Uncertainty Analysis for Fluid Mechanics with Applications*, NASA/CR-2002-211449 ICASE Report No. 2002-1, February 2002
- [36] L. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information and Control, 1965, 8(3), 338-353