Poglavlje 5

Zbirne osobine slučajnih veličina

5.1 Uvod

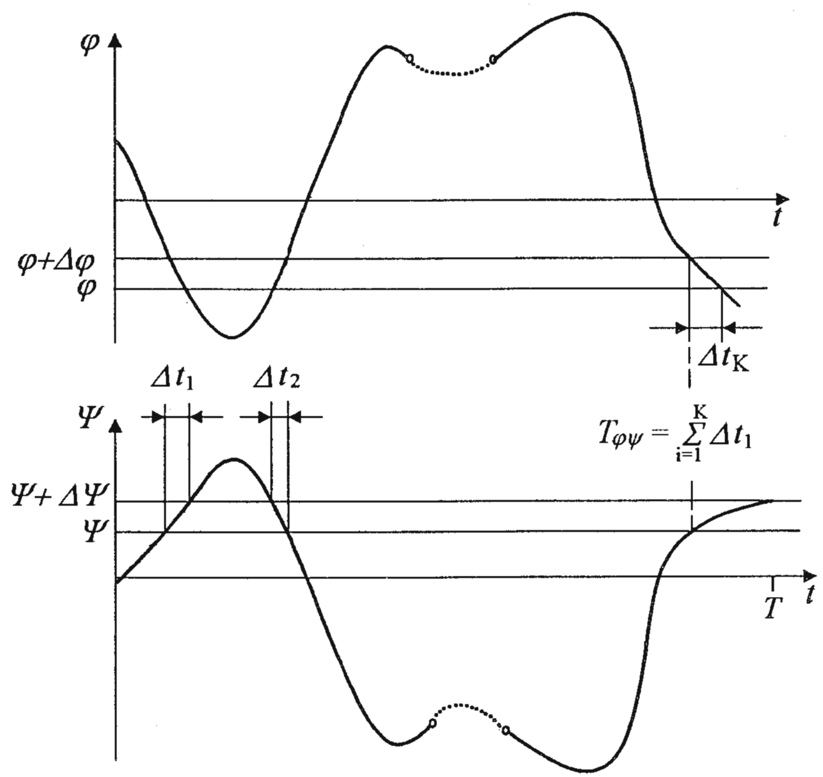
U hidrotehnici, a svakako i u drugim granama tehnike, postoji veliki broj procesa u kojima na njegovo formiranje i razvoj utiču dve ili više veličina stohastičkog karaktera ili sa stohastičkom komponentom osnovne veličine, koja je deterministička. U ovu grupu spadaju i slučajevi kada se izučava jedna veličina koja se od jedne do druge tačke u prostoru menja stohastički, pri čemu su vrednosti u posmatranim tačkama, manje ili više, medjusobno zavisne. Druga veličina koja nas interesuje predstavlja zbir (integral) vrednosti posmatrane veličine u prostoru, u ravni ili duž neke linije. Slede neki od ovih primera:

1. Fluktuacija dve komponente brzine u istoj tački gde se kao veličina od interesa razmatra proizvod njihovih fluktuacionih dodataka u'_i i u'_j, tj. proizvod

   $$u'_i \cdot u'_j$$

2. Transportni (i difuzioni) procesi u kojima dominantnu ulogu ima proizvod fluktuacione komponente brzine (u_i) i fluktuacionog dodatka, skalarne ili vektorske veličine (φ) koja se transportuje

   $$u'_i \cdot \varphi'$$



Slika 21. Odredjivanjem vremenskih intervala Δt u kojima je zadovoljen uslov da su vrednosti i φ i ψ u unapred definisanim vrednosnim intervalima.

3. Dinamičko opterećenje fluidom na posmatrani deo (ΔA_i) čvrste konture A

$$p' \Delta A_i \cdot n_i$$

gde je n_i jedinični vektor spoljne normale na površinu ΔA_i.

U svim prethodnim i sličnim slučajevima za bolje poznavanje procesa neophodno je izučavanje zbirnih osobina posmatranih slučajnih veličina kao što su: zbirna gustina i zbirna raspodela verovatnoće, kros korelaciona i kros spektralna i funkcija koherencije.

5.2 Funkcije koje definišu zbirne osobine

5.2.1 Funkcija zbirne gustine verovatnoće

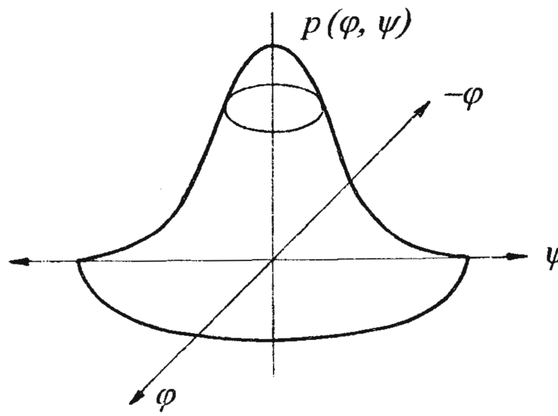
Ovom funkcijom se za dve posmatrane veličine φ i ψ izražava verovatnoća da se vrednost veličine φ nalazi u unapred definisanom intervalu izmedju φ i $\varphi + \Delta\varphi$, a da se u isto vreme vrednost veličine ψ nalazi u unapred definisanom intervalu $\psi + \Delta\psi$.

Praktičan način za odredjivanje ove verovatnoće prikazan je na slici 21.

Funkcija zbirne verovatnoće se definiše na sledeći način

$$p(\varphi,\psi) = \lim_{\substack{\Delta\varphi \to o \\ \Delta\psi \to o}} \frac{1}{\Delta\varphi\,\Delta\psi}\left[\lim_{T\to\infty}\frac{T_{\varphi\psi}}{T}\right]$$

U opštem slučaju oblik ove funkcije je zvonast kao na slici 22. U merenjima u tokovima sa dominantnim pravcem kretanja "zvona" postaju iskošena u nizvodnom pravcu.



Slika 22. Opšti oblik funkcije zbirne gustine verovatnoće

5.2.2 Funkcija zbirne raspodele verovatnoće

Ova funkcija definiše verovatnoću da su trenutne vrednosti $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ manje ili jednake unapred definisanim vrednostima φ i ψ.

$$P(\varphi,\psi) = Prob[\varphi(t) \leq \varphi, \quad \psi(t) \leq \psi] = \int_{-\infty}^{\varphi} \int_{-\infty}^{\psi} p(\varphi,\psi) d\varphi \, d\psi$$

Za slučaj kada su posmatrane veličine φ i ψ medjusobno nezavisne tada važi izraz:

$$p(\varphi,\psi) = p(\varphi)\, p(\psi)$$

Primer za funkciju raspodele više medjusobno korelisanih veličina

Kao primer za primenu funkcije raspodele više medjusobno korelisanih veličina prikazaće se funkcija raspodele sile usled delovanja pritisaka na ravnu horizontalnu ploču, koji fluktuiraju. Radi odredjivanja funkcije raspodele verovatnoće za vertikalne sile pritiska na ploču napisaćemo izraz za nju

$$P_z = \int_A -p n_z dA_z$$

gde je

p - pritisak,

n_z - ort spoljne normale na površ u pravcu Z,

dA_z - elementarna površina.

Ako se integral zameni konačnom sumom tj.

$$P_z = \sum_{i=1}^{N} p_i \, \Delta A_i$$

gde je

p_i - reprezentativni pritisak na površinu ΔA_i,

ΔA_i - elementarna površina i-tig dela površine i.

Pošto je ΔA_i konstantna vrednost, a pritisak fluktuira (stohastička veličina), sila će takodje biti stohastička veličina čija će se srednja vrednost i standardna devijacija odrediti na sledeći način

srednja vrednost

$$\overline{P_z} = \sum_{i=1}^{N} \overline{p_i} \, \Delta A_i$$

odnosno standardna devijacija

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_{pi}^2 \, \Delta A_i$$

Pošto je ploča podeljena na N, delova kao pojedinačne promenljive koje ulaze u sumu pojavljuju se osrednjene vrednosti standardne devijacije pritisaka u polju, kovarijanse pojedinih tačaka C_{ii} i njihovih parova C_{ij} prema sledećem

$$\overline{p_i} = \mu_i = E[p_i(k)]$$

gde je $\overline{p_i}$ srednja vrednost pritiska u tački (i), a E je matematičko očekivanje

$$\sigma_{pi}^2 = E[(p - \overline{p_i})^2]$$

$$C_{ij} = E\left[(p_i - \overline{p_i})(p_j - \overline{p}_j)\right]$$

$$C_{ii} = -\sigma_{pi}^2$$

Pojednostavljenja radi, pretpostavićemo da se svaka od fluktuacija pritisaka u tački pokorava Gausovoj[1] raspodeli, tj.

$$p(i) = \frac{1}{\sigma_{pi} \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(p_i - \overline{p_i})^2}{2\sigma_{pi}^2}\right]$$

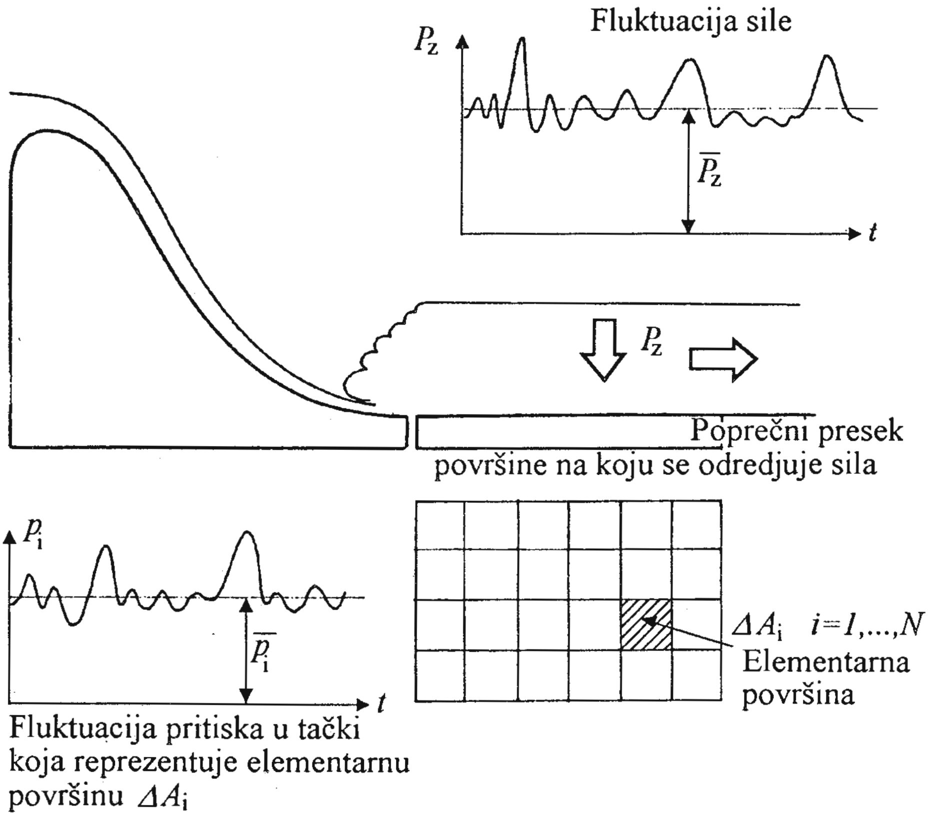
Pošto sila predstavlja sumu sila na elementarne površine, od kojih se svaka pojedinačna veličina može izraziti zbirnom verovatnoćom koja se pokorava N- dimenzionalnoj Gausovoj (normalnoj) raspodeli, funkcija raspodele verovatnoće za silu može se napisati na sledeći način

$$p(F_{z1}, F_{z2}, F_{z3}, \cdot, ..., F_{zN}) = \frac{\exp\left[\left(-\frac{1}{2|c|} \sum_{i,j=1}^{N} |C_{ij}|(\mathrm{p}_i - \overline{\mathrm{p}_i})(\mathrm{p}_j - \overline{\mathrm{p}}_j)\right)\right]}{(2\pi)^{N/2}|C|^{1/2}}$$

U gornjem izrazu korišćene su sledeće oznake

[1] U stvarnosti su fluktuacije funkcije raspodele verovatnoće pritisaka različite od Gausove

C – matrica kovarijansi od C_{ij}
$|C|$ – determinanta matrice C
$|C_{ij}|$ – kofaktor od C_{ij} u determinanti $|C|$.



Slika 23. Elementi za definisanje dinamičke sile pritiska na ploču

Neki aspekti praktične primene rezultata merenja i približnog načina odredjivanja karakteristika dinamičke sile prikazani su u radovima Č. Maksimović, [8], i A. Špoljarić, Č. Maksimović i G. Hajdin [9].

5.2.3 Kros korelaciona funkcija

Ova funkcija definiše vezu izmedju jedne fizičke veličine φ u trenutku t i druge fizičke veličine ψ u trenutku $t + \tau$.

Pojednostavljeno govoreći ova funkcija posredno definiše vreme u toku koga poremećaj, kojim veličina φ deluje na veličinu ψ, putuje kroz sistem.

Definisana je izrazom

$$R_{\varphi\psi}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_o^T \varphi(t)\psi(t+\tau)dt$$

Ako se posmatra proizvod veličina φ i ψ u istom vremenskom trenutku ($\tau = 0$) onda se tako dobijena vrednost naziva *kovarijansa* $C_{\varphi\psi}$

$$R_{\varphi\psi}(\tau = 0) = C_{\varphi\psi} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_o^T \varphi(t)\psi(t)dt$$

5.2.4 Kros spektralna funkcija

Slično kao što se spektralna funkcija dobija Furijeovom transformacijom autokorelacione funkcije tako se kros spektralna funkcija dobija Furijeovom transformacijom kros korelacione funkcije.

Kros spektralna funkcija je kompleksan broj

$$S_{\varphi\psi}(f) = C_{\varphi\psi}(f) - i\, Q_{\varphi\psi}(f)$$

Prvi (realni) deo funkcije $C_{\varphi\psi}(f)$ naziva se funkcija koincidentne spektralne gustine, a drugi deo funkcije $Q_{\varphi\psi}(f)$, kvadratura spektralne gustine.

Analitički izraz za $S_{\varphi\psi}(f)$ je

$$S_{\varphi\psi}(f) = \lim_{\Delta f\to o} \frac{1}{\Delta f} \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_o^T \varphi(t, f, \Delta f) \cdot \psi(t+\tau, f, \Delta f)dt \right]$$

Funkcija kros spektralne gustine se, zbog dalje analize, može izraziti u kompleksnom polarnom koordinatnom sistemu

$$S_{\varphi\psi}(f) = |S_{\varphi\psi}(f)| e^{-i\Theta_{\varphi\psi(f)}}$$

u kojoj je moduo

$$|S_{\varphi\psi}(f)| = \sqrt{C^2_{\varphi\psi}(f) + Q^2_{\varphi\psi}(f);},$$

a fazni ugao

$$\Theta_{\varphi\psi}(f) = arctg \left[\frac{Q_{\varphi\psi}(f)}{C_{\varphi\psi}(f)} \right]$$

Funkcija kros spektralne gustine može se izraziti sledećim izrazom

$$|S_{\varphi\psi}(f)|^2 \leq S_{\varphi}(f) S_{\psi}(f)$$

5.2.5 Funkcija koherencije

Ova funkcija predstavlja količnik kvadrata modula kros spektralne funkcije i proizvoda autospektralne funkcije za veličine φ i ψ, tj.

$$\gamma^2_{\varphi\psi} = \frac{|S_{\varphi\psi}(f)|^2}{S_\varphi(f)S_\psi(f)}$$

Funkcija koherencije koristi se za analizu prekidnih procesa.