

Poglavlje 4

Osnovni pojmovi o dinamičkim merenjima

4.1 Klasifikacija podataka dobijenih merenjem

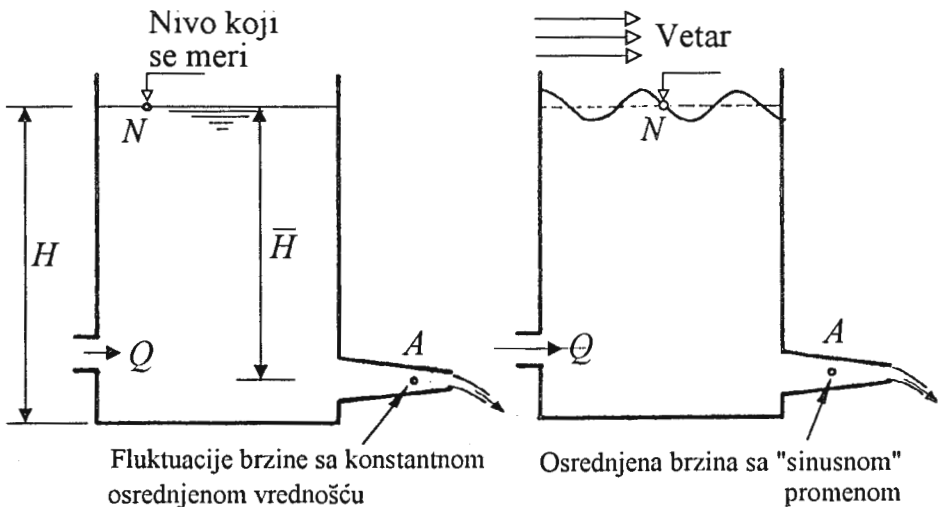
Za rešavanje izvesnog, ne malog, broja problema potrebno je raspolagati rezultatom merenja osrednjene (statičke) vrednosti posmatrane veličine. Sama ta veličina pri tom može biti nepromenljiva kroz vreme (stalna), ili promenljiva sa fluktuacijama oko srednje vrednosti koja se kroz vreme ne menja ili sa fluktuacijama oko osrednjene veličine koja se i sama kroz vreme menja. Pretpostavimo, na primer, da nas interesuju nivo vode u sudu i brzina u tački A u osi cevi kroz koju voda ističe (slika 6.). Dotok vode Q u sud je isti kao protok kroz cev pa je srednja vrednost nivoa vode u sudu konstantna. Posmatrajmo dva slučaja:

- a) nivo u sudu potpuno miran,
- b) nivo se talasa (na primer zbog vetra).

Pretpostavimo da nas od osnovnih pojmova interesuju samo osrednjene vrednosti sledećih veličina: dubina vode (H_N) u tački N i osrednjena brzina u_A u tački A . Pretpostavimo dalje da je tečenje u cevi turbulentno. Ako merenje obavljamo uredjajima koji su u stanju da registruju brze promene nivoa i brzine, dobiće se promene kao što su prikazane na slici 7.

Ako su uredjaji kojima merimo nivo i brzinu u stanju da prate

brze promene (dinamičke), a nas interesuje samo osrednjena vrednost, očigledno je da smo nepotrebno opteretili naša merenja viškom informacija. Dovoljno je dakle bilo koristiti neke druge vrste mernih instrumenata koji na te brze promene nisu osetljivi i onda bismo njima izmerili \bar{H}_N za slučaj a) i za slučaj b), odnosno \bar{u}_A u oba posmatrana slučaja. Takvi sistemi sa velikom inertnošću su uglavnom robusnije izrade i obično su bazirani na nekom jednostavnom mehaničkom principu. Njima će biti posvećena pažnja kada se bude govorilo o metodama merenja različitih veličina.



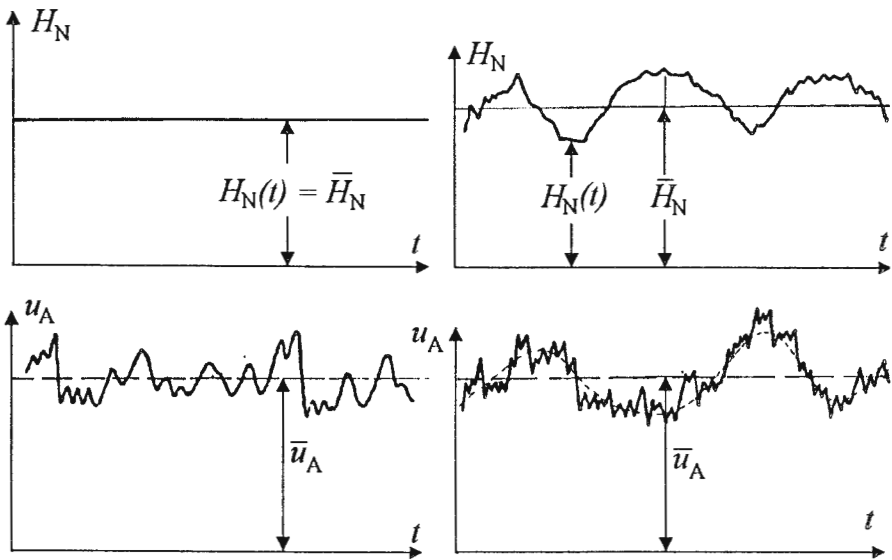
Slika 6. Primer postavljanja mernih mesta rasi merenja brzine i dubine

Merenje dinamičkih promena međutim, predstavlja posebnu oblast o čemu će se ovde govoriti. U izloženim primerima vidljive su dve vrste dinamičkih promena. U slučaju oscilacija nivoa, ako je sud dovoljno veliki, mogli bi se dobiti približno pravilni sinusni talasi i tako bismo imali "deterministički" karakter merene veličine. U prvom slučaju srednja brzina je konstantna. Fluktuacije brzina oko osrednjene vrednosti su potpuno nepravilne (stohastičke). U drugom slučaju i osrednjene brzine su približno sinusnog karaktera, dok su fluktuacije brzina oko takve osrednjene vrednosti sasvim nepravilne; reč je dakle o stohastičkoj veličini. Uočavaju se dakle dve osnovne grupe: deterministička i stohastička od kojih se svaka može dalje podeliti u različite podgrupe. Na primer u blizini zida dolazi do superpozicije reflektovanog i dolaznog

talasa i kao rezultat, umesto proste, dobija se složena sinusna promena, itd.

Naglim zatvaranjem cevi na kraju, u njoj bi se pojavio hidraulički udar koji ima drugačiji karakter (prelazna pojava).

Primer koji je ovde prikazan dao je informaciju o mogućim karakteristikama merene veličine. Pošto taj karakter ima bitan uticaj na izbor metodologije merenja i obrade signala, zadržaćemo se više na analizi pojedinih vrsta - karakteristika mernih veličina.



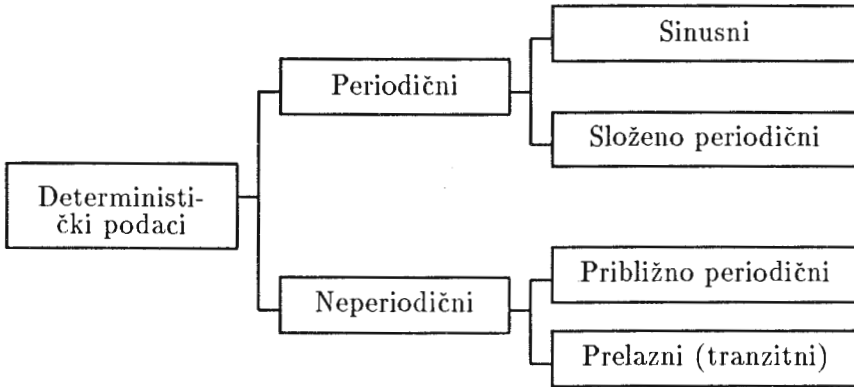
Slika 7. Promene nivoa u tački N i brzine u tački A za dva različita dinamička uslova

4.2 Determinističke veličine i njihovo predstavljanje

Cela grupacija determinističkih podataka može se podeliti na grupe koje su šematski prikazane na slici 8.

Osnovna karakteristika determinističkih podataka je da se njegova promena kroz vreme može izraziti analitičkim funkcijama. Periodične

promene, na primer, za sinusnu promenu proizvoljne fizičke veličine φ može se napisati:



Slika 8. Deterministički podaci

$$\varphi(t) = \phi \sin(2\pi f_o t + \Theta)$$

gde je:

- $\varphi(t)$ – trenutna vrednost konkretne veličine φ u trenutku t ;
- ϕ – amplituda [φ];
- f_o – frekvencija [$1/T_p$];
- Θ – početni fazni ugao [rad].

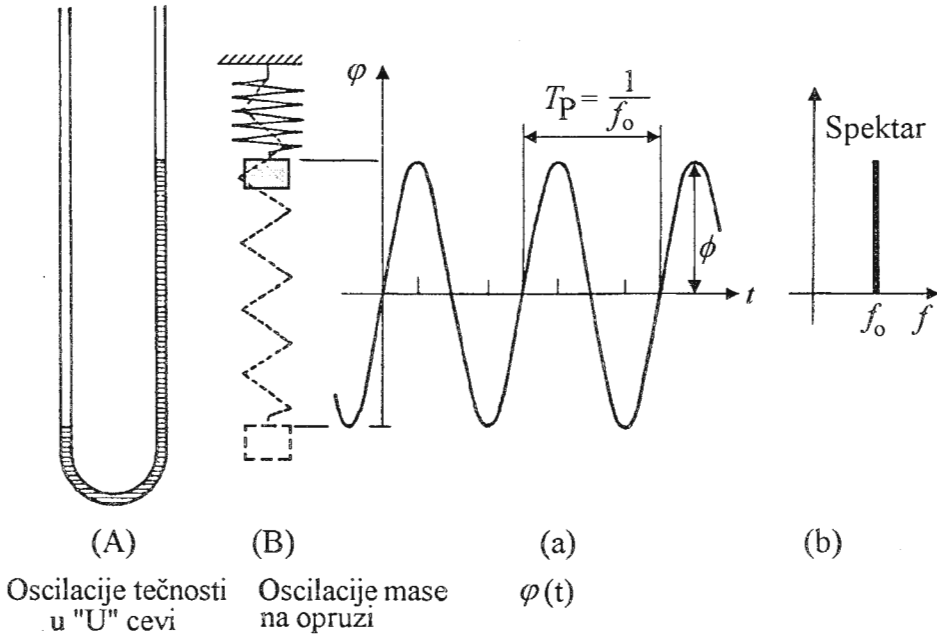
Ova promena se, dakle, karakteriše amplitudom ϕ i periodom T_p što se grafički može predstaviti kao na slici 9., gde je zavisnost promenljive φ prikazana na dva načina:

- a) φ u funkciji vremena, i
- b) u formi tzv. diskretnog spektra tj. zavisnosti amplitude od frekvencije. Ovo prosto sinusno kretanje fizički može da predstavlja položaj nivoa tečnosti u "U" cevi (primer A), ili položaj težišta mase tela koje je obešeno na oprugu i slobodno osciluje (primer B).

Dva navedena primera predstavljaju idealizovano kretanje dva mehanička sistema kod kojih je sila trenja zanemarljiva.

Gornji primer predstavlja prostu harmonijsku oscilaciju (sinusna prosto periodična oscilacija).

Slaganjem (sabiranjem) signala harmonijskog karaktera dobija se složeno periodično kretanje. Na primer, podaci dobijeni merenjem rezultujućeg pomeranja nastalog sabiranjem tri različita signala nazivaju se složeni periodični podaci. Primer za ovakvo kretanje dat je na slici 10.



Slika 9. Diskretni spektar sinusne funkcije (nepriгуšene slobodne oscilacije)

U ovom primeru φ predstavlja:

- A) rastojanje nivoa tečnosti u "U" cevi od ravnotežnog položaja, i
- B) rastojanje od ravnotežnog položaja težišta mase tela koje osciluje

Osnovna karakteristika ovakvih podataka je da se posle određenog vremenskog perioda (T_p osnovna perioda) podaci ponavljaju $\varphi(t) = \varphi(t \pm nT_p)$, $n = 1, 2, 3$. Iako ovakva rezultujuća funkcija nije harmonijska, ona se sastoji od niza sinusnih komponenata (harmonika), čije su pojedinačne periode umnošci osnovne periode. Ova funkcija se može razviti u Furijeov red:

$$\varphi(t) = \phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f_1 t + b_n \sin 2\pi n f_1 t)$$

gde je $f_1 = \frac{1}{T_p}$ osnovna frekvencija ili alternativno

$$\varphi(t) = \phi_o + \sum_{n=1}^n \phi_n \cos(2\pi n f_1 t - \Theta_n)$$

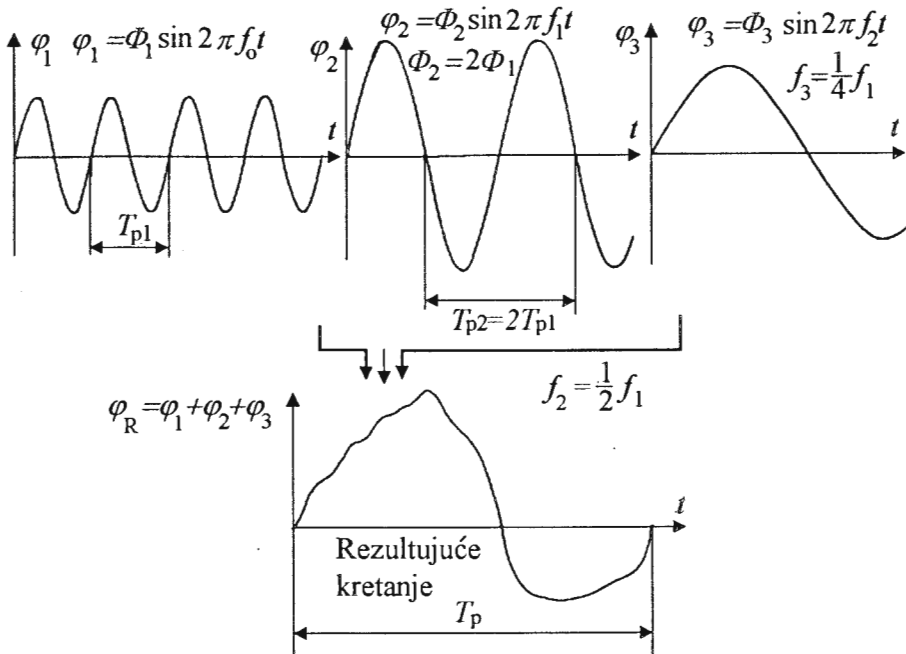
gde je

$$\phi_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad n = 1, 2, 3$$

$\Theta_n = \arctg(b_n/a_n) \quad n = 1, 2, 3$, a koeficijenti a_n i b_n izračunavaju se iz sledećih izraza:

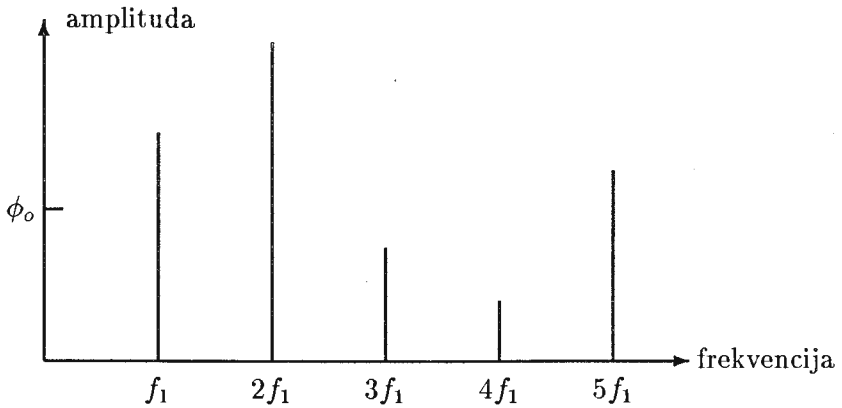
$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} \varphi(t) \cos 2\pi n f_1 t dt \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} \varphi(t) \sin 2\pi n f_1 t dt \quad n = 1, 2, 3 \dots$$



Slika 10. Primer složenih (kompleksnih) periodičnih podataka

Frekvencije pojedinih harmonika u slučaju složenih periodičnih funkcija su celobrojni umnošci ili količnici osnovne frekvencije f_o , koja je najmanji zajednički delilac za frekvencije pojedinih harmonika (količnici pojedinih frekvencija su racionalni brojevi).



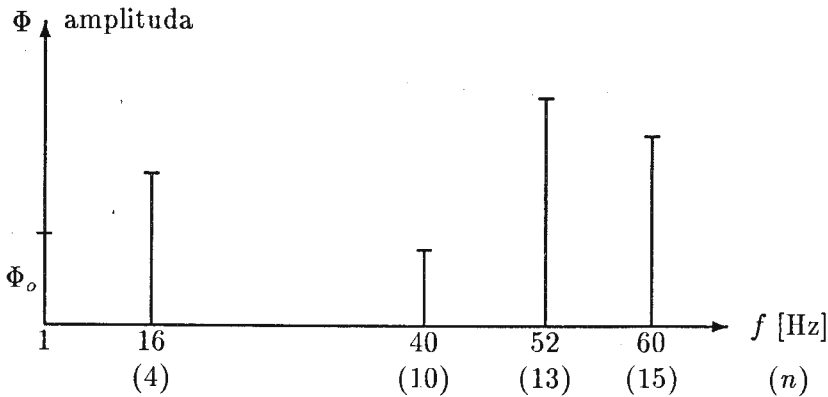
Slika 11. Diskretni spektar

Primer:

Neka je, na primer, složena periodična funkcija sastavljena od determinističkog dela ϕ_0 i od 4 komponente čije su frekvencije 16, 40, 52 i 60 Hz (Herz).

Najveći zajednički delilac za date frekvencije je 4 ($f_1 = 4$ Hz). Osnovna perioda je $T_p = \frac{1}{4}$ s = 0.25 s.

Razvijeni u Furijeov red različiti od nule biće samo članovi za: $n = 4, 10, 13$ i 15 . Spektar te funkcije biće kao na slici 12.



Slika 12. Diskretni spektar složene periodične funkcije iz prethodnog primera

B. Približno periodične pojave

Približno periodične pojave dobijaju se sabiranjem sinusnih signala proizvoljnih frekvencija, odnosno sabiranjem signala čiji količnici frekvencije nisu racionalni brojevi, odnosno

$$\varphi(t) = \sum_{K=1}^{\infty} \Phi_K \sin(2\pi f_K t + \Theta_K)$$

pri čemu odnos bilo koje od dve frekvencije f_K/f_l nije racionalan broj.

U hidrotehničkoj praksi ovakva pojava bi se desila u struji vode nizvodno od isticanja ispod dve različite ustave od kojih svaka osciluje sa različitom frekvencijom, koje su "rasparene" - nisu u fazi, a njihov odnos nije racionalan broj.

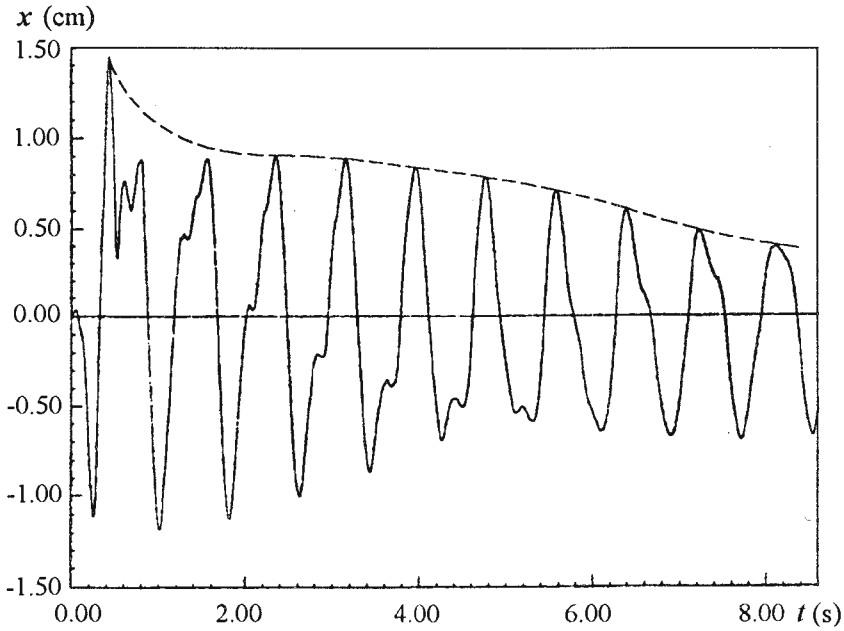
Sabiranjem osnovnih sinusnih funkcija proizvoljnih frekvencija (čiji količnici nisu racionalni brojevi) dobijaju se tzv. skoro periodični podaci. Diskretni spektar ovakvih podataka sličan je onom na slici 12., samo što količnici frekvencija nisu racionalni brojevi.

C. Prelazne (neperiodične) promene i prigušene oscilacije

U raznim granama fizike i tehnike, a i u hidrotehnici takodje, javljaju se slučajevi tzv. prelaznih pojava. Primeri su: amplitude oscilacija mase vode sa prigušenjem (vodostani), hidraulički udar, prigušene oscilacije delova hidrotehničkih konstrukcija itd. Primer takvih podataka dat je izrazom:

$$\Phi(t) = C_1 e^{-at} \cos C_2 t \text{ za } t \geq 0$$

što bi odgovaralo slobodnoj vibraciji sa prigušenjem. Slika 13. predstavlja primer jednog takvog signala dobijenog u Laboratoriji za hidrauliku Instituta za hidrotehniku Gradjevinskog fakulteta u Beogradu, prilikom izučavanja slobodnih oscilacija rezervoara vode na konzoli (S. Obradović [13]).



Slika 13. Slobodne prigušene oscilacije rezervoara vode na konzoli (S. Obradović [13])

Spektar ovakvih promena nije diskretan nego je kontinualan (slika 14.).

Kontinualni spektar dobija se Furijeovim integralom osnovnih signala

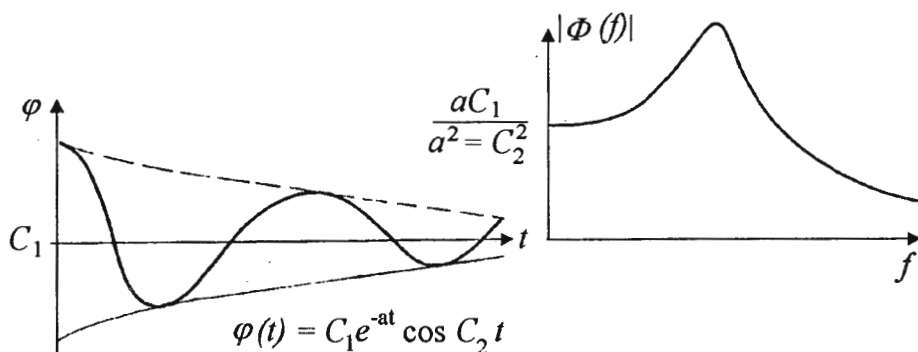
$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad i = \sqrt{-1}$$

koji se kao kompleksna veličina može izraziti u polarnim koordinatama

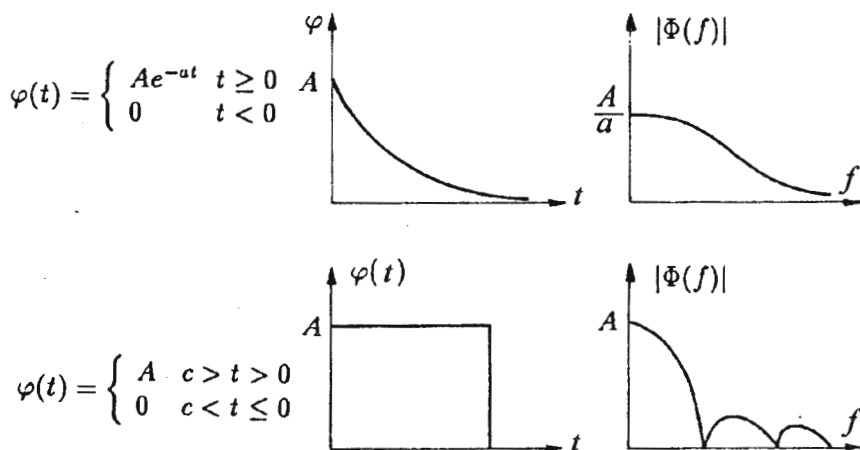
$$\Phi(f) = |\Phi(f)|e^{-i\Theta(f)}$$

gde je $|\Phi(f)|$ moduo, a $\Theta(f)$ argument.

Na narednoj slici (sl. 15.) prikazane su dve prelazne funkcije i njihovi odgovarajući spektri.



Slika 14. Primer prigušene oscilacije i njenog spektra



Slika 15. Dve funkcije prelaznih pojava i njihovi spektri

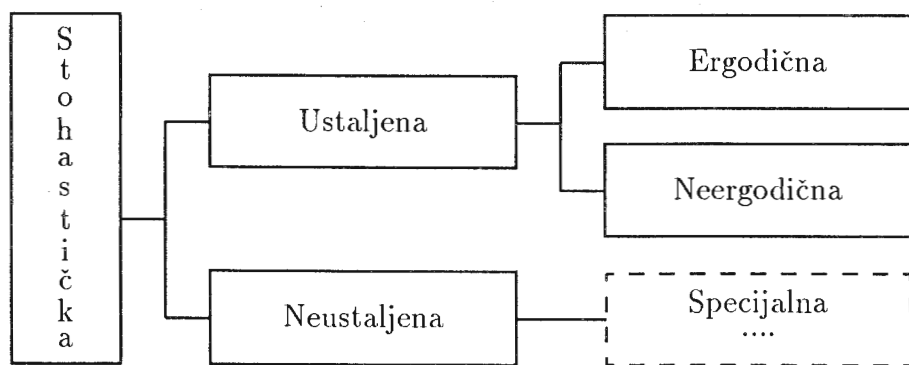
Gornja funkcija je eksponencijalna opadajuća dok je druga u vremenskom domenu konstantna a u frekventnom domenu ima prikazan oblik.

4.3 Stohastičke veličine, njihova analiza i predstavljanje rezultata

4.3.1 Osnovna podela

Kao što je poznato, stohastičke veličine ne mogu se predstaviti analitičkim izrazima, pošto je njihova pojava slučajnog karaktera. Za njihovu analizu koristi se metoda matematičke statistike koja bi trebalo da je poznata čitaocima ove knjige, ali će se neki osnovni pojmovi ovde, zbog povezivanja u jedinstvenu celinu, ponoviti.

Kod analize stohastičkih veličina bitno je da se učini napor da se prepozna kojoj grupi iste pripadaju, jer će se za obradu primeniti odgovarajući aparat u zavisnosti od te grupe. Osnovna podela stohastičkih veličina prikazana je na slici 16.

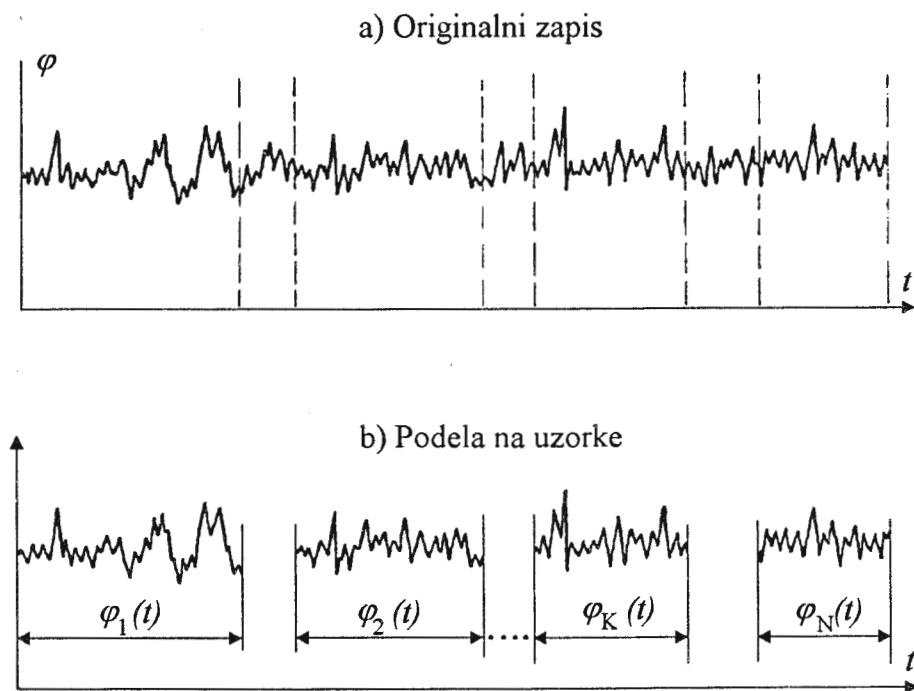


Slika 16. Podela stohastičkih veličina

Problem ustaljenosti i neustaljenosti zahteva posebno obrazloženje. Slično kao što se to radi u mehanici fluida i hidraulici, pojam ustaljenosti vezivaće se za osnovnu tendenciju osrednjene vrednosti posmatrane veličine. Fluktuacije posmatrane veličine oko osrednjene vrednosti, mada suštinski predstavljaju odstupanje od ustaljenosti, neće se smatrati neustaljenošću, nego slučajnim fluktuacijama. Egzaktno definisanje ustaljenosti i ergodičnosti dato je u narednom potpoglavlju.

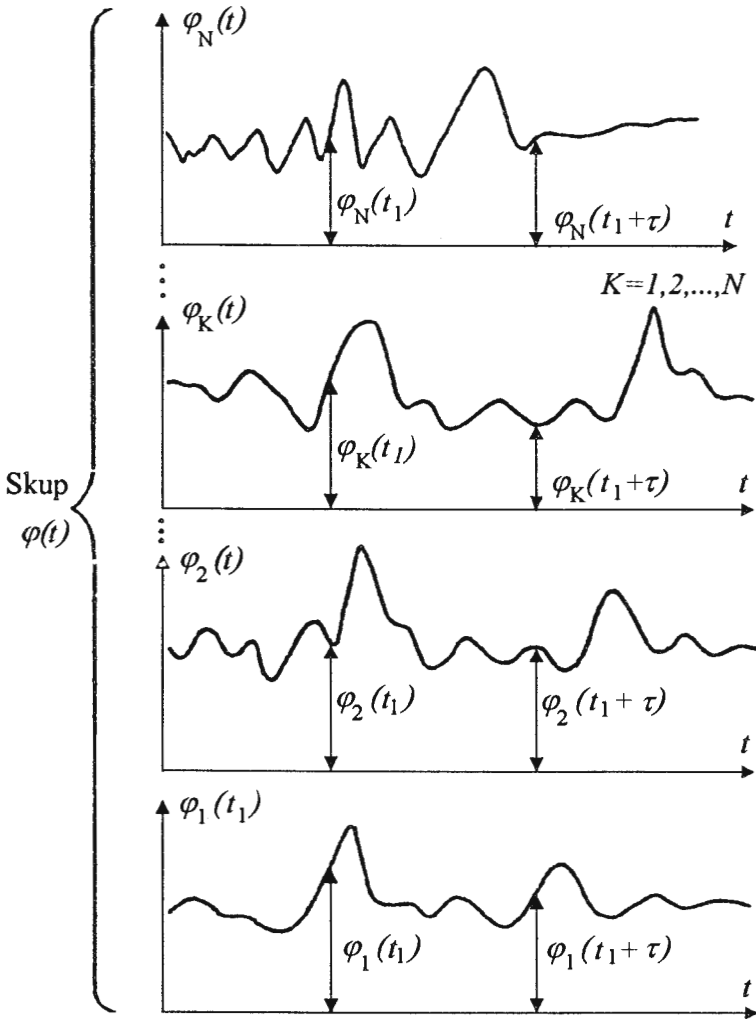
4.3.2 Odredjivanje ustaljenosti i ergodičnosti na osnovu statističkih pokazatelja

Radi definisanja pojma ustaljenosti i ergodičnosti posmatraće se rezultat koji se dobija dugotrajnim merenjem neke veličine koja fluktuiira. Dužina vremena u kojem treba da se obavlja merenje svakako će zavistiti od karaktera promene posmatrane veličine, pa je neophodno da se obavi statistička analiza dobijenog rezultata, kako bi se ne samo dobili osnovni numerički podaci o posmatranoj veličini već da bi se utvrdilo koliko dugo treba da traje merenje, kako bi se dobijeni podaci mogli smatrati pouzdanim. U gornjem delu slike 17. prikazan je zapis dobijen merenjem neke veličine koja fluktuiira.



Slika 17. Zapis dobijen merenjem veličine koja fluktuiira (a) i njegova podela na uzorke (b).

Pretpostavimo da se od kontinualnog zapisa dugog trajanja sačini N zasebnih uzoraka (N je dovoljno veliki broj).



Slika 18. Skup uzoraka $\{\varphi(t)\}$ za statističku analizu zajedničkih karakteristika

Skup uzoraka $\{\varphi(t)\}$ analiziraćemo posebno na dva različita načina (J.S. Bendat i A.G. Piersol [7]): sračunavanjem statističkih pokazatelja zajedničkih za sve uzorke i sračunavanjem statističkih pokazatelja svakog uzorka posebno.

Posmatrajmo prvo skup $\{\varphi(t)\}$ tako što ćemo svaki od njih postaviti na novi koordinatni početak vremenske ose, kao na slici 17.

Za proizvoljno izabrani trenutak t_1 izračunaćemo sledeće zajedničke

pokazatelj za skup $\{\varphi(t)\}$ čije su definicije:

- Srednja vrednost (*ensemble mean*) za dati trenutak

$$\mu_\varphi(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{K=1}^N \varphi_K(t_1)$$

- Autokorelaciona funkcija

$$R_\varphi(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{K=1}^N \varphi_K(t_1) \varphi_K(t_1 + \tau)$$

- Statistički moment n -tog reda

$$m_n(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{K=1}^N [\varphi_K(t_1) - \mu_\varphi(t_1)]^n$$

Proces kod koga se srednja vrednost $\mu_\varphi(t_1)$ i autokorelaciona funkcija $R_\varphi(t_1, t_1 + \tau)$ ne menjaju sa promenom proizvoljno izabranog t_1 naziva se blago ustaljeni proces (*weak stationarity*).

Da bi se proces smatrao **strogo ustaljenim** (*strong stationarity*) neophodno je da sem prethodnih vrednosti i autokorelacione funkcije i svi momenti višeg reda ne zavise od izbora vremena t_1 za koje se ti pokazatelji računaju.

Za definisanje pojma **ergodičnost** potrebno je da se obavi statistička analiza zasebnih uzoraka iz skupa $\{\varphi(t)\}$. Uzmimo na primer uzorak K i za njega sračunajmo sledeće statističke pokazatelje:

- srednja vrednost uzorka K

$$\bar{\varphi}_K = \mu_\varphi(K) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_K(t) dt$$

- autokorelaciona funkcija K -tog uzorka

$$R_\varphi(K, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_K(t) \varphi_K(t + \tau) dt$$

Ako smo prethodnom analizom zajedničkih statističkih pokazatelja utvrdili da je proces ustaljen, a analizom posebnih uzoraka utvrdili da srednje vrednosti $\mu_\varphi(K)$ i autokorelacione funkcije $R_\varphi(k, \tau)$ ne variraju za različite uzorke ($K = 1, 2, \dots, N$) onda je slučajni proces **ergodičan**.

Utvrđivanje da li je proces ergodičan ima značajne posledice za naknadna merenja i analizu procesa. Naime, kod ergodičnog procesa dovoljno je obaviti merenja i **analizu samo jednog uzorka**. Ovo praktično znači značajno smanjivanje vremena eksperimentisanja i analiza, ali je prethodno bilo potrebno da se obave analize zajedničkih karakteristika skupa da bi se potvrdila ergodičnost. Ukoliko se pak, ergodičnost ne potvrdi onda su verovatne dve mogućnosti:

- proces je stvarno neergodičan pa je potrebno da se primene posebne analize,
- ergodičnost procesa nije potvrđena jer je trajanje pojedinih uzoraka kratko pa treba pokušati analizu sa većom dužinom trajanja pojedinačnog uzorka.

4.3.3 Ostali statistički pokazatelji i funkcije

Sem gore pobrojanih statističkih pokazatelja u obradi rezultata merenja najčešće se koriste još i sledeći pokazatelji (za uzorak K)¹.

- srednja vrednost kvadrata

$$\overline{\varphi^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi^2(t) dt$$

a koristi se takodje i koren posmatrane veličine

- koren kvadrata srednje vrednosti (RMS - *root mean square*)

$$RMS = \sqrt{\overline{\varphi^2}}$$

- Varijansa

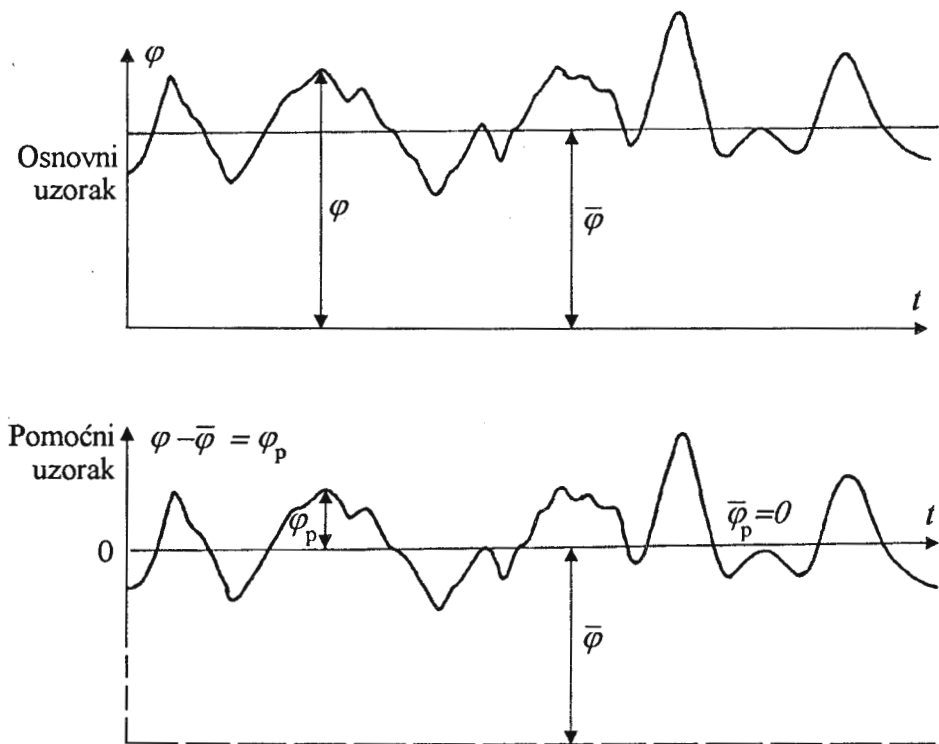
¹U daljem tekstu (nakon jednačine) će se smatrati da je proces ergodičan da je dovoljno proučiti samo jedan uzorak pa se neće koristiti oznaka K .

$$\sigma_{\varphi}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\varphi(t) - \bar{\varphi})^2 dt$$

- odnosno, standardna devijacija

$$\sigma_{\varphi} = \sqrt{\sigma_{\varphi}^2}$$

Ovde je potrebno da se ukaže na čestu zabunu koja se stvara između korena kvadrata srednje vrednosti (RMS vrednosti) i standardne devijacije, pogrešno ih izjednačujući u svim prilikama.



Slika 19. Zamenja osnovnog niza pomoćnim kod koga je srednja vrednost jednaka nuli

Naime, često se u obradi rezultata merenja od osnovnog zapisa (signala) kod koga je srednja vrednost $\bar{\varphi}$ različita od nule, zbog jednostavnosti osnovni uzorak zamenjuje pomoćnim, koji se dobija tako što se od osnovnog oduzme srednja vrednost kao na slici 19.

U takvom slučaju, kada se osnovni uzorak zameni pomoćnim (kod koga je srednja vrednost jednaka nuli), RMS vrednost je jednaka standardnoj devijaciji:

$$RMS(\varphi_p) = \sqrt{\sigma^2(\varphi_p)}$$

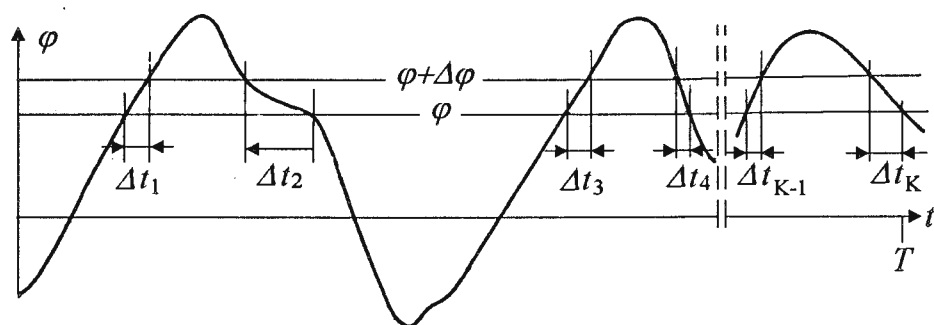
O ovom se mora voditi računa pri obradi signala, i digitalnim i analognim načinom.

Funkcija verovatnoće, korelacije i spektra

Ove funkcije se najčešće koriste pri interpretaciji rezultata merenja dinamičkih veličina stohastičkog karaktera, pa će se ovde prikazati analitički izrazi koji ih definišu i daće se kratak komentar u vezi sa njihovom primenom u obradi rezultata merenja.

Funkcija gustine verovatnoće

Za posmatranu vrednost promenljive φ i priraštaja $\Delta\varphi$ (dobijene merenjem), funkcija gustine verovatnoće predstavlja verovatnoću da će se ona pojaviti u intervalu između vrednosti promenljive φ i $\varphi + \Delta\varphi$ tj.



$$T_\varphi = \sum_{i=1}^K \Delta t_i \quad K = \text{ukupan broj intervala}$$

Slika 20. Određjivanje funkcije gustine verovatnoće iz uzorka dobijenog merenjem

$$p(\varphi) = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{p[\varphi < \varphi(t) < \varphi + \Delta\varphi]}{\Delta\varphi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_\varphi}{T}$$

gde je:

$$T_\varphi = \sum_{i=1}^K \Delta t_i$$

T = ukupno trajanje zapisa

Δt_i - dužina vremena pri kome je $\varphi < \varphi(t) < \varphi + \Delta\varphi$

Na slici 20. prikazan je praktičan način proračuna funkcije raspodele verovatnoće.

Množenjem funkcije gustine verovatnoće sa φ i φ^2 i sračunavanjem integrala dobijaju se srednja vrednost promenljive φ , kao i srednja vrednost kvadrata, tj.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi p(\varphi) d\varphi = \mu_{\varphi} = \bar{\varphi}$$

odnosno

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 p(\varphi) d\varphi = \overline{\varphi^2}$$

Funkcija raspodele verovatnoće (sumarna verovatnoća)

Ovom funkcijom izražava se verovatnoća da tekuća vrednost promenljive $\varphi(t)$ bude veća ili jednaka od zadate vrednosti i dobija se integracijom funkcije raspodele verovatnoće

$$P(\varphi) = p[\varphi(t) \leq \varphi] = \int_{-\infty}^{\varphi} p(\varphi) d\varphi$$

Kao što se iz gornjeg izraza vidi ona se izražava integralom funkcije gustine verovatnoće.

Autokorelaciona funkcija

Ova funkcija predstavlja osnovu za analizu (utvrđivanje postojanja) periodičnosti u fizičkom procesu čiji se rezultati merenja analiziraju.

Analitički izraz za ovu funkciju je:

$$R_{\varphi}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int \varphi(t)\varphi(t + \tau) dt$$

Osobine autokorelacionih funkcija su sledeće:

$$R_{\varphi} \max = R_{\varphi}(\tau = 0)$$

$$R_{\varphi}(-\tau) = R_{\varphi}(\tau)$$

tj. funkcija je parna

$$R_{\varphi}(\tau = 0) = \overline{\varphi^2}$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \sqrt{R_\varphi} = \mu_\varphi = \bar{\varphi}$$

Pri obradi rezultata merenja gornje veze su pogodne za kontrolu da li je ista obavljena korektno.

Autokorelaciona funkcija ima značajnu ulogu zbog toga što ona može da posluži kao osnova za dobijanje informacije o frekventnom sadržaju posmatrane fizičke veličine koja se iz autokorelacione funkcije dobija Furijeovom transformacijom.

Funkcija spektralne gustine (auto spektar)

Ova funkcija daje informaciju o frekventnom sadržaju posmatranog procesa, čiji reprezent je niz podataka (signal) dobijenih merenjem određene fizičke veličine, koja taj proces karakteriše ili koja je nosilac informacije o tom procesu. Preciznije govoreći vrednost autospektralne gustine u intervalu između dve frekvencije f i $f + \Delta f$ predstavlja vrednost srednje vrednosti kvadrata posmatrane fizičke veličine φ , koja se sada posmatra samo u onom delu niza koji se nalazi u tom frekventnom intervalu $\varphi(t, f, \Delta f)$.

Iz prethodnog izlaganja je poznato je da se srednja vrednost kvadrata niza $\bar{\varphi}^2$ dobija na sledeći način:

$$\bar{\varphi}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi^2(t) dt$$

Na sličan način se srednja vrednost kvadrata za deo niza koji se nalazi u posmatranom frekventnom intervalu Δf , može dobiti:

$$\bar{\varphi}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi^2(t, f, \Delta f) dt$$

Funkcija spektralne gustine ($S_\varphi(f)$) se definiše na sledeći način:

$$S_\varphi(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi^2(t, f, \Delta f) dt \right]$$

Kada je frekventni interval Δf dovoljno mali, približna vrednost funkcije autospektralne gustine ($S_\varphi(f)$) se dobija na sledeći način:

$$S_\varphi(f) \approx \frac{\overline{\varphi^2(f, \Delta f)}}{\Delta f}$$

Funkcija autospektralne gustine ima značajnu primenu u velikom broju tehničkih disciplina. Sem što omogućava analizu energetskog sadržaja u delovima osnovnog sistema po različitim frekventnim područjima, ona može da se koristi za uspostavljanje veze između ulaza (pobudjivača) sistema i izlaza (odziva) istog.

Neke od osobina autokorelacione funkcije i funkcije spektralne gustine su:

- a) za ustaljene procese autokorelaciona funkcija i funkcija spektralne gustine su međusobno zavisne. Funkcija autospektralne gustine je Furijeova transformacija² autokorelacione funkcije

$$S_{\varphi}(f) = 4 \int_0^{\infty} R_{\varphi}(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{\varphi}(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau$$

- b) srednja vrednost kvadrata promenljive φ predstavlja integral funkcije spektralne gustine u celoj oblasti frekvencija

$$\overline{\varphi^2} = \int_0^{\infty} S_{\varphi}(f) df$$

Ove osobine mogu se iskoristiti pri proveru da li je proračun tih funkcija obavljen korektno.

²Metod kojim se brzo sračunava Furijeova transformacija (*FFT - Fast Fourier Transform*) opisan je u knjizi J.S. Bendat-a i A.G. Piersol-a [7]