Građevinski fakultet u Beogradu
Poslediplomska nastava na Odseku za hidrotehniku

Georgije Hajdin

Zadaci iz Mehanike Fluida

Beograd, 1996.

Predgovor

Kao dugogodišnji nastavnik "Mehanike fluida" u poslediplomskoj nastavi na Građevinskom fakultetu u Beogradu, sastavio sam mnogo ispitnih zadataka. Od njih sam odabrao zadatke sa 25 ispitnih rokova, i oni su ušli u ovu zbirku, sređeni od I do XXV. U svakom roku bila su tri zadatka. Izuzetak čine samo ispiti označeni sa III i IV, u kojima su dva zadatka, ali je jedan bio toliko obiman da se mogao podeliti na dva.

Kako su to zadaci po pojedinim rokovima, a nisu po oblastima koje čine sadržaj predmeta, korisnicima Zbirke, radi lakšeg korišćenja, daje se sledeće razvrstavanje zadataka po oblastima.

A. PROVERAVANJE RAZUMEVANJA OSNOVNIH POJMOVA I OSNOVNIH JEDNAČINA
- Zadaci: II-1, III-1, IV-1, IV-2, V-2, VII-2, VIII-1, X-3, XV-1, XV-2, XVI-2, XIX-1, XIX-3, XX-1, XXII-1, XXIII-3, XXIV-2.

B. LAMINARNO RAVANSKO STRUJANJE
- Zadaci: I-1, II-3, IV-1, XIII-3, XVIII-3, XXII-3, XXIII-2, XXV-2.

C. RAVANSKE I OSNOSIMETRIČNE TURBULENTNE STRUJE
- Zadaci: I-2, III-2, V-1, V-3, VI-2, VII-3, VIII-2, VIII-3, IX-2, IX-3, X-2, XI-2, XI-3, XII-2, XIII-2, XIV-3, XVI-3, XVII-2, XVII-3, XVIII-1, XX-2, XXI-1, XXI-2, XXIII-1, XXIV-1, XXV-3.

D. GRANIČNI SLOJ UZ PLOČU
- Zadaci: VII-1, XVIII-2, XVI-1.

E. OTPORI TELA
- Zadaci: I-3, III-2, XIX-2.

F. DIMENZIONALNA ANALIZA
- Zadaci: IV-3, XII-3, XIV-2, XV-3, XVII-1.

G. FLUKTUACIJE PRITISAKA
- Zadaci: XII-1, XXI-3.

H. PRIMENA OSNOVNIH JEDNAČINA HIDRAULIČKE PRAKSE
- Zadaci: IX-1, X-1, XI-1, XIII-1, XIV-1, XX-3, XXI-1, XXII-2, XXIV-3.

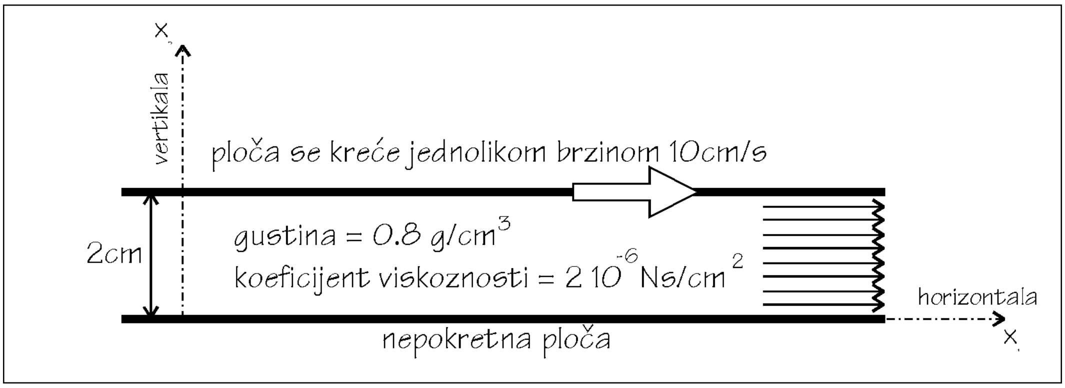
* * *

Tehničku obradu ove Zbirke obavio je Vojislav Marinković, student poslediplomske nastave i saradnik u istraživačkom radu u Institutu za hidrotehniku Građevinskog fakulteta u Beogradu. Zahvaljujući njegovom zalaganju pojavljuju se ovi zadaci na korist slušaoca poslediplomske nastave.

I

Zadatak 1.

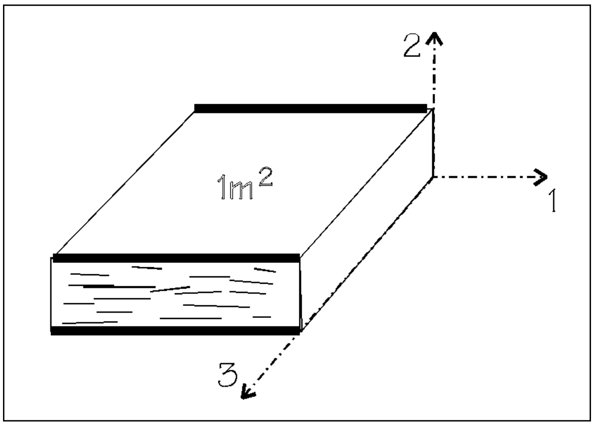
Pri laminarnom, ustaljenom i ravanskom strujanju između dve paralelne ploče od kojih je gornja pokretna, a donja nepokretna (vidi skicu), sračunati, za masu fluida smeštenu u prizmatičnu zapreminu između ploča, a sa horizontalnom osnovom od $1m^2$:



1. energiju koju primi fluid pokretnom pločom;
2. deformacioni rad devijatorskog dela napona;
3. motorni rad devijatorskog dela napona;

Navedeno od 1. do 3. odnosi se na energiju, odnosno radove u jedinici vremena.
Duž struje ostvaruje se promena pritiska:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} = 10^{-5} N/cm^3$$

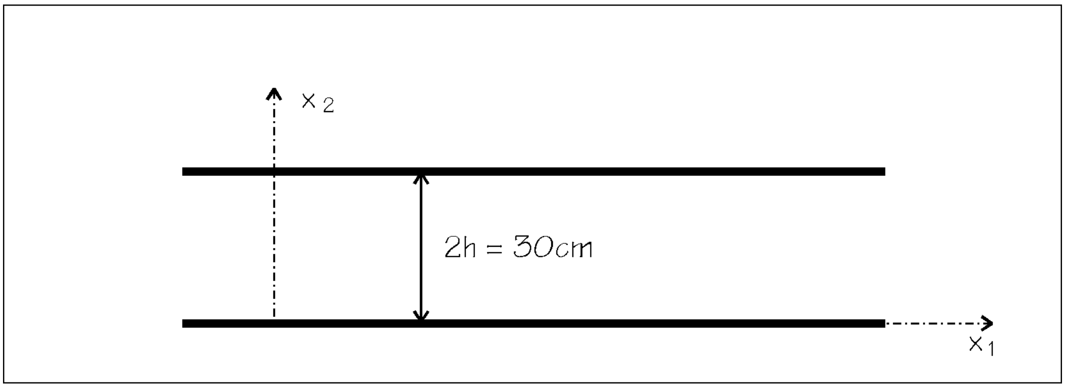


Zadatak 2.

Za ravansko turbulentno strujanje između dve paralelne nepokretne ploče, izuzevši granični podsloj, raspored osrednjenih brzina izražen je sa:

$$\frac{\overline{u_1}}{\overline{u_m}} = \left(\frac{x_2}{h}\right)^{1/6} \qquad \overline{u_2} = 0$$

Navedeni raspored brzina napisan je za polovinu struje (do $x_2 = h$), a u drugoj polovini je isti jer je $x_2 = h$ simetralna ravan.



Koeficijent C_τ napona trenja τ između ploče i fluida jednak je 0.005 ($C_\tau = 2\tau/\rho v^2$, $v =$ srednja brzina u preseku struje).

Proticaj između ploča iznosi $600 dm^3/s^1$ po $1m$ širine (računa se normalno na ravan crteža).

Gustina fluida je $\rho = 1 g/cm^3$.

Sračunati "napone turbulencije" i "produkciju turbulentne energije" (po jedinici zapremine i u jedinici vremena) za $x_2 = 10cm$.

Zadatak 3.

Sračunati brzinu U kojom će u mirnoj vodi (viskozitet $\mu = 10^{-7} N/cm^2 s$, gustina $\rho = 0.9 g/cm^3$) jednoliko padati homogena loptica (gustine $1.1 g/cm^3$) usled svoje težine. Prečnik loptice je $d = 1.2mm$.

Račun sprovesti za laminarno strujanje oko loptice, za koje se daje izraz za koeficijent sile otpora lopte:

$$C_F = \frac{24}{Re} \quad \text{gde je } C_F = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \quad \text{a } Re = \frac{\rho d U}{\mu}$$

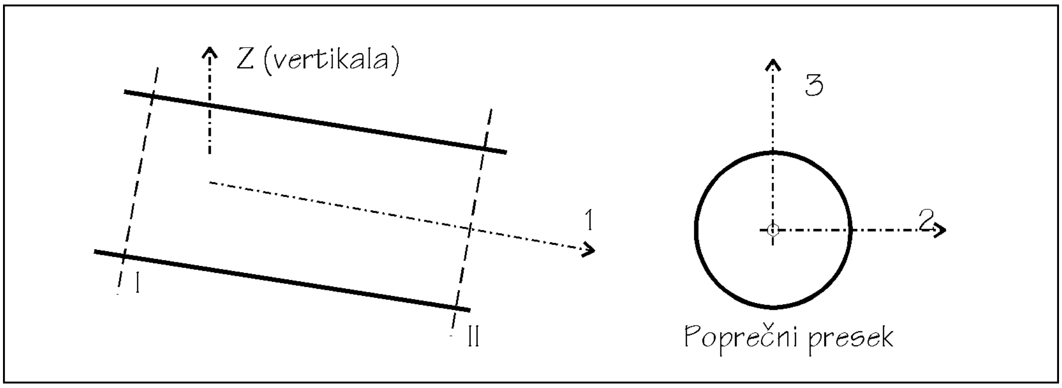
Posle obavljenog računa proveriti da li se ostvaruje laminarno strujanje, jer prethodno napisano važi za $Re < 5$.

II

Zadatak 1.

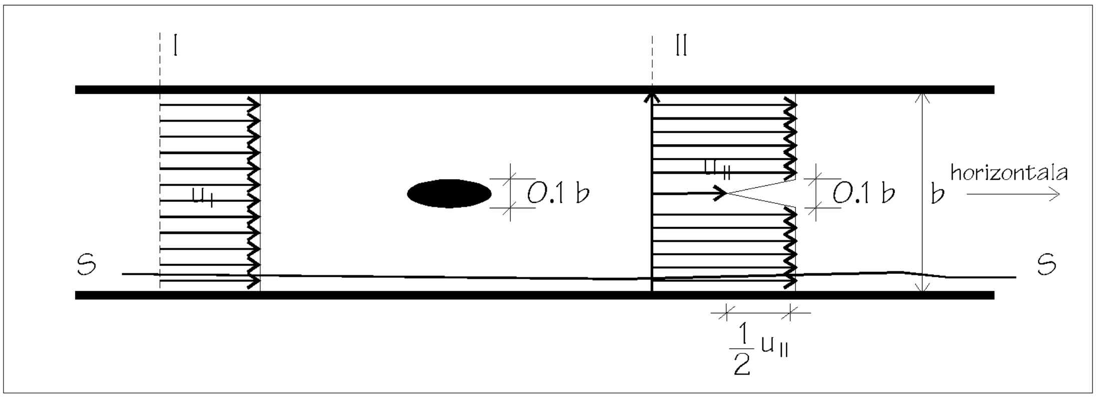
Posmatra se zapremina V između dva poprečna preseka (I) i (II) cevi. U oba preseka raspored brzina, devijatorskih napona i svih karakteristika turbulencije je potpuno istovetan (identičan). Fluid je nestišliv, a strujanje je ustaljeno – upravo sve osrednjene vrednosti su ustaljene.

Prepisati jednačine mehaničke energije za glavno strujanje i za fluktuacije – to su jednačine (53-25) i (53-32) u knjizi.



Te jednačine primeniti na posmatranu zapreminu, između preseka (I) i (II), i pod navedenim uslovima. Izdvojiti one članove koji su jednaki nuli i obrazložiti, za svakoga pojedinačno, zašto je jednak nuli. Preostale članove napisati koristeći indekse 1,2 i 3 (a ne uopštene i,j,k) i primeniti površinske integrale gde je to moguće. Rad težine i pritiska spojiti (uvesti pijezometarsku kotu). Rad devijatorskog dela napona i "napona turbulencije" prikazati tako da se ispolji deformacioni rad, pokazati šta prelazi u toplotu, a šta u fluktuacije (a posle kroz njih u toplotu).

Zadatak 2.



Zadatak je ravanski. Fluid je nestišljiv.

U preseku (I) brzina je raspoređena ravnomerno $u_I = U_I = Const$, dok je u preseku (II) poremećena (telom) i raspored brzina je otprilike kako je prikazan na skici.

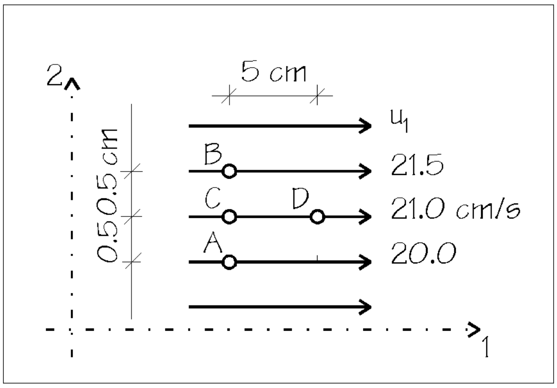
Granični sloj uz zidove je tanak. Vrtložni trag iza tela zahvata samo ograničeni deo preseka. Stoga se za strujnicu S–S može prihvatiti zakonitost za idealan fluid. Za jedan presek može se uzeti da je pijezometarska kota ista.

Sračunati koeficijent C_F sile F otpora za telo uronjeno u struju između preseka (I) i (II):

$$C_F = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho u_I^2 A}$$

A – poprečni presek tela
ρ – gustina

Zadatak 3.



$$u_2 = u_3 = 0$$

Ravansko i laminarno strujanje nestišljivog fluida.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$$

Kinematski koeficijent viskoznosti $\nu = 0.1cm^2/s$, gustina $\rho = 0.9g/cm^3$.

Upisane brzine se odnose na trenutak $t = t_0$, dok te brzine kroz vreme rastu $0.2cm/s$ za 1-nu sekundu.

I. Sračunati ubrzanje delića u (C) za trenutak $t = t_0$.

II. Za isti trenutak sračunati pijezometarske razlike $\Pi_C - \Pi_D$ i $\Pi_C - \Pi_B$ (indeksi se odnose na tačku na koju se odnosi pijezometarska kota).

III. Za delić u (C) u $t = t_0$ sračunati deformacioni rad (po jedinici zapremine u jedinici vremena). Koliko se za 1 sekund povisi temperatura toga delića, ako je toplota potrebna da se fluid zagreje za 1^0C ekvivalentna kinematičkoj energiji pri brzini od otprilike $200m/s$.

III

Zadatak 1.

Strujno polje je ograničeno sa:

$$x_1 \geq L \qquad x_2 \geq L \qquad e \geq x_3 \geq -e$$

Raspored brzina je:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} u_0 L \left(1 - \frac{t}{T}\right)\left(1 - \frac{x_3^2}{e^2}\right) \\ u_2 &= \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} u_0 L \left(1 - \frac{t}{T}\right)\left(1 - \frac{x_3^2}{e^2}\right) \\ u_3 &= 0 \end{aligned}$$

$u_0 = const = 10cm/s$; $L = const = 50cm$; $e = const = 0.8cm$; $T = const = 100s$.

Kinematski koeficijent viskoznosti i gustina fluida su:

$$\nu = 0.1 cm^2/s \qquad \rho = 0.9 g/cm^3$$

Osovina “3” je vertikalna.

I. Posmatra se delić u tački (C) sa koordinatama:

$$x_1 = 3L; \quad x_2 = 4L; \quad x_3 = \frac{e}{2}$$

i u trenutku $t = T/2$.

Sračunati za navedeni delić:

a) ubrzanje (sve tri komponente) i ukazati na lokalni i konvektivni deo;

b) sve napone devijatorskog dela napona;

c) deformacioni rad po jedinici zapremine i u jedinici vremena;

d) silu pritiska (po jedinici zapremine), i to sve tri njene komponente.

II. Pokazati da navedeni raspored brzina zadovoljava jednačinu kontinuiteta (jednačina održanja mase).

Zadatak 2.

I. Raspored osrednjenih brzina pri tečenju nestišljivog fluida kroz pravolinijski položenu cev (u pravcu 1.) kružnog preseka (poluprečnik = r) dat je sa

$$\overline{u} = \overline{u_1} = \overline{u_m}\left(\frac{x_2}{r}\right)^{1/8}$$

x_2 = udaljenost od zida.

Uporediti proticaj kinetičke energije kroz presek cevi, sračunat na osnovu navedenog rasporeda brzina i uz uzimanje po celom preseku iste brzine (srednje brzine v za presek, $v = Q/\pi r^2$, Q = proticaj).

II. Prethodno se odnosi na glavno strujanje. Za fluktuacije se daju sledeće procene:

Vrednost osrednjenog proizvoda (bilo koga) fluktuirajućih brzina $\overline{u_i' u_j'}$ ne prelazi $0.01 v^2$, a vrednost trostrukog proizvoda $\overline{u_i' u_j' u_k'}$ ne prelazi $0.001 v^3$.

Koliko, u odnosu na sračunato pod I, može da iznosi osrednjeni proticaj kinetičke energije u fluktuacijama.

IV

Zadatak 1.

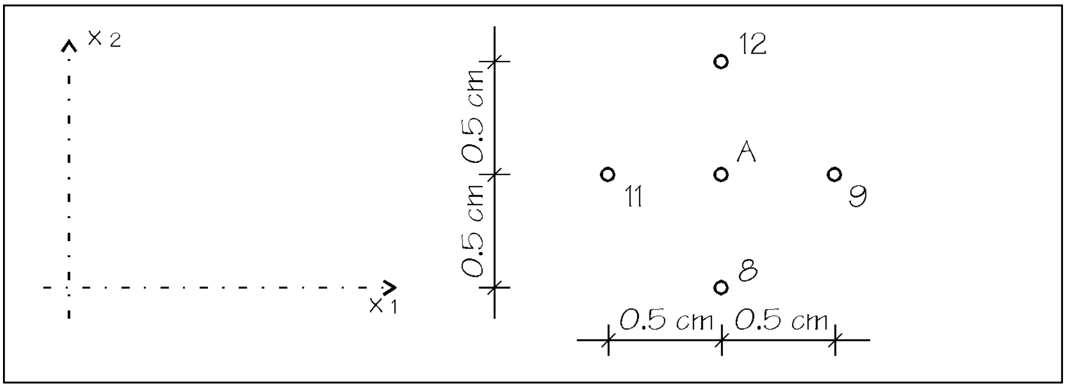
U posmatranom trenutku (t_0) u posmatranoj tački (A) brzina iznosi:

$$u_1 = 10cm/s$$

$$u_2 = 25cm/s$$

dok u istom trenutku pritisci u okolnim tačkama iznose prema upisanom na skici. U svim tačkama lokalni pritisci se povećavaju za $2N/cm^2$ za 1-nu sekundu.

Sračunati brzinu povećanja pritiska (materijalni izvod pritiska) za delić koji se u trenutku t_0 nalazi u tački (A). Zadatak je ravanski.



Cifre $8, 9, 11, 12$ znače pritisak od toliko N/cm^2u odnosnoj tački.

Zadatak 2.

Razmatra se ravansko, ustaljeno i laminarno strujanje nestišljivog fluida sa brzinama

$$u_1 = LU\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$u_2 = LU\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$L = const_1 = 2cm \qquad U = const_2 = 5cm/s$$

Sračunati za delić na položaju $x_1 = 2L$ $x_2 = 2L$

1. ubrzanje
2. sve delujuće komponente devijatorskog dela napona

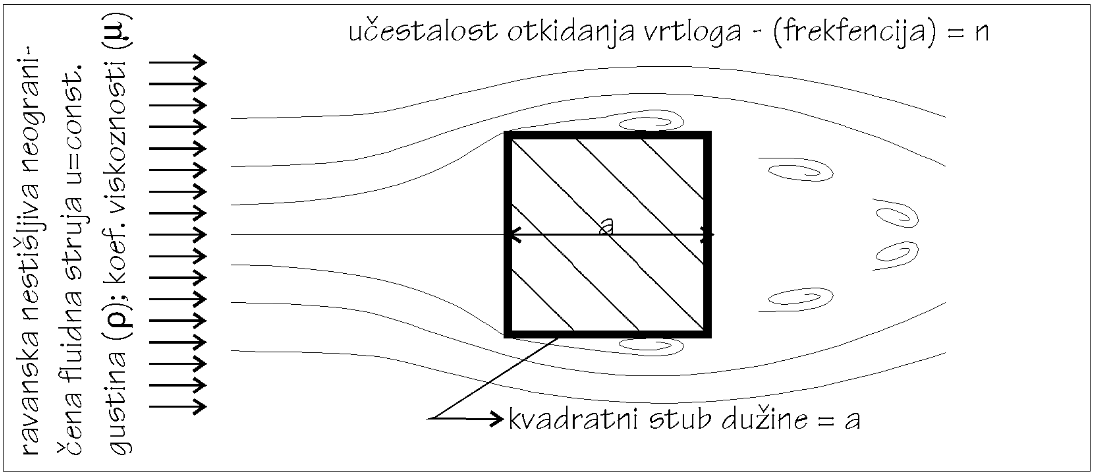
– kinematski koeficijent viskoznosti

$$\nu = 0.3cm^2/s$$

noindent – gustina

$$\rho = 0.8g/cm^3$$

Zadatak 3.



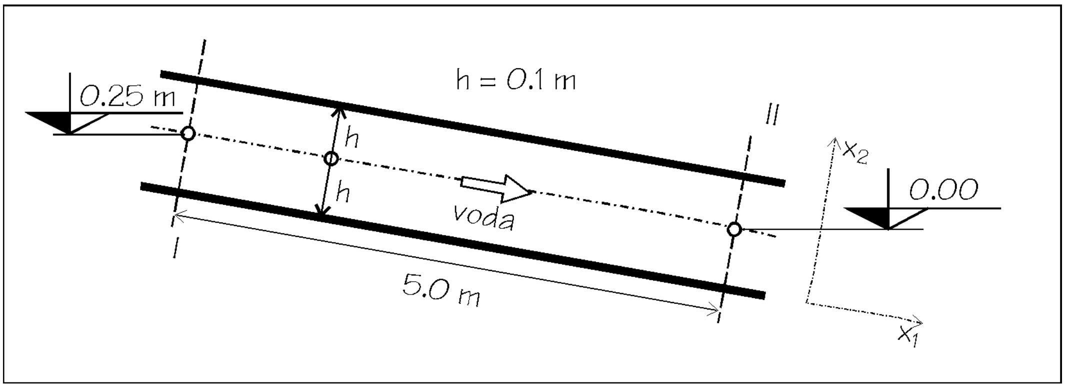
Zadatak je ravanski.

I. Napisati izraz sa dimenzionalnim, a potom izraz sa bezdimenzionalnim veličinama, koji će prikazivati učestalost n otkidanja vrtloga kao funkciju od veličina od kojih zavisi.

II. Pod pretpostavkom neuticanja viskoznosti sračunati n za $a = 2m$ i $u = 50m/s$, ako je eksperimentom utvrđeno $n = 5s^{-1}$ za $a = 12cm$ i $u = 20m/s$.

V

Zadatak 1.



Ravansko ustaljeno strujanje između dve ploče.

Za donju polovinu struje brzina je data sa

$$\overline{u_1} = \overline{u_{max}} \left(\frac{x_2}{h}\right)^{1/7} \quad , \quad \overline{u_2} = 0 \quad , \quad \overline{u_{max}} = 1.5m/s$$

Strujanje je simetrično u odnosu na simetralu ($x_2 = h$), i tako se može odrediti raspored brzina i za gornju polovinu struje.

Ploče su glatke, pa se koeficijent C_τ napona trenja τ (između ploča i fluida) može sračunati iz obrasca za glatku cev:

$$\lambda = \frac{0.32}{Re^{1/4}}$$

$Re = v2h/\nu$, $2h$ = razmak između ploča, v = srednja brzina u preseku, ν = kinematski koeficijent viskoznosti.

Isti obrazac se može primeniti i na posmatran slučaj (ravansko strujanje između ploča, gde se trenje obavlja samo po pločama), sa time da bude isti hidraulički radijus, a zna se da je $\lambda = 4C_\tau$, a $C_\tau = 2\tau/\rho v^2$.

Gustina fluida $\rho = 1g/cm^3$, $\nu = 0.012cm^2/s$.

I. Pokazati da je za dati slučaj

$$\frac{\overline{|u_1' u_2'|}}{v^2} < 10^{-2}$$

u_1' i u_2' su turbulentne fluktuacije brzina.

II. Sračunati razliku osrednjenih pritisaka u osovinama preseka (I) i (II).

Zadatak 2.

Pretpostaviti da vodena struja čiji je raspored brzina dat zadatkom 1. nosi suspendovani materijal čija je koncentracija C u posmatranom i određenom trenutku izražena sa

za presek I	za presek II
$C = C_0\left(1 - \frac{4x_2}{h}\right)^2$ za $x_2 \leq \frac{1}{4}h$	$C = C_0\left(1 - \frac{6x_2}{h}\right)^2$ za $x_2 \leq \frac{1}{6}h$
$C = 0$ za $x_2 \geq \frac{1}{4}h$	$C = 0$ za $x_2 \geq \frac{1}{6}h$

$C_0 = 0.7\%$ u preseku I.

$C_0 = 0.5\%$ u preseku II.

Koncentracija označava odnos suspendovanog materijala i vode.

I. Za posmatrani trenutak numerički sračunati:

$$\int_{V_*} \frac{\partial}{\partial t}(C\rho)dV$$

ρ – gustina vode = $1kg/dm^3$

V_* – zapremina između preseka I i II.

II. Protumačiti šta u fizičkom smislu predstavlja napisani integral.

Zadatak 3.

Za pad linije energije I_E pri jednolikom tečenju u cevima, daje se sledeći empirijski obrazac:

$$I_E = C\frac{v^{1.87}}{D^{1.15}}$$

v – brzina; D – prečnik; C – je konstantno za cevi istog kvaliteta obloge.

Pretpostavlja se da je obrazac namenjen tečenju vode, tj. ne važi za tečenje fluida drugih viskoziteta.

Navedeni obrazac pretvoriti u poznatu funkciju $\lambda=\lambda(\frac{k}{D}, Re)$, odnosno u $\lambda=a(\frac{k}{D})^b Re^f$ (a, b, f su konstante).

λ je uobičajena oznaka za koeficijent trenja, $\lambda = 2gDI_E/v^2$, $Re = vD/\nu$ = Reynolds-ov broj, k/D = relativna hrapavost.

Objasniti:

I. Da li navedeni obrazac može da važi bez ograničenja brzina? Da li važi i za laminarno tečenje i za hrapave cevi? Kad može da važi?

II. Pokazati da sa $C = const$, obrazac može da važi samo za jednu apsolutnu hrapavost i bez promene viskoznosti.

III. Pokazati da je u ovom obrascu uticaj relativne hrapavosti beznačajan i šta to praktično znači?

VI

Zadatak 1.

Između dve paralelne ravne ploče, na međusobnom rastojanju $e = 12mm$ laminarno i ustaljeno teče nestišljiv fluid (kinematski koeficijent viskoznosti $\nu = 0.3cm^2/s$ gustina $\rho = 0.9g/cm^3$) uz uslov da je pijezometarska kota ista za sve tačke struje. Uzrok strujanju je u kretanju gornje ploče (ona se jednoliko kreće brzinom $U = 50cm/s$). Donja ploča je nepokretna. Zadatak je ravanski.

Za navedeno strujanje prikazati raspored (u funkciji x_2):

a) brzina;

b) devijatorskog dela napona;

c) motornog rada, po jedinici mase i u jedinici vremena;

d) deformacionog rada, po jedinici mase i u jedinici vremena.

Prikaz treba da bude sa numeričkim vrednostima.

*　　*　　*

Za konačnu masu smeštenu u dužini (L) struje, a za širinu (b), sračunati:

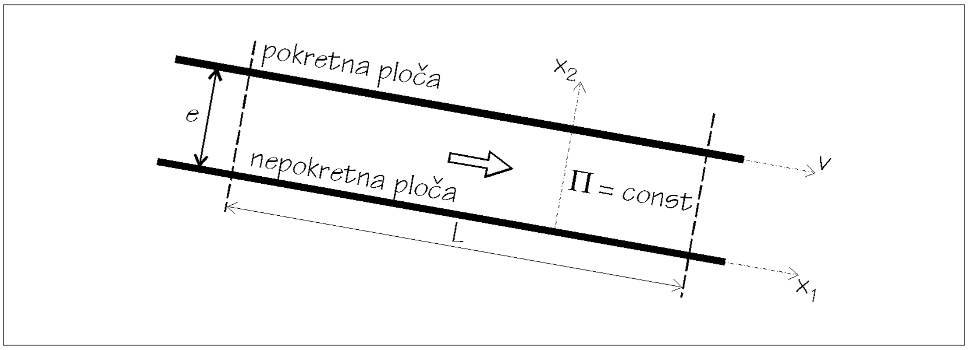
e) deformacioni rad u jedinici vremena;

f) motorni rad u jedinici vremena;

g) rad kojim gornja ploča preda energiju struji u jedinici vremena.

Uzeti $L = b = 1m$.

Objasniti međusobnu vezu radova navedenih po e, f i g, odnosno pokazati energetski bilans za posmatranu konačnu masu kao celinu.



Zadatak 2.

I. Napisati Reynolds-ovu jednačinu (to je jednačina (53-12) u knjizi), za pravce (1) i (2), izostavljajući u njima sve članove koji otpadaju, jer su ispunjeni uslovi:

a) strujanje je ustaljeno (ustaljene su osrednjene vrednosti svih veličina i svih proizvoda fluktuacionih veličina);

b) osrednjeno strujanje je ravansko – u ravni $(1, 2)$;

c) dejstvo napona usled viskoznosti zanemarljivo je u odnosu na dejstvo "napona turbulencije" kojima se obuhvata delovanje fluktuacija na glavno strujanje.

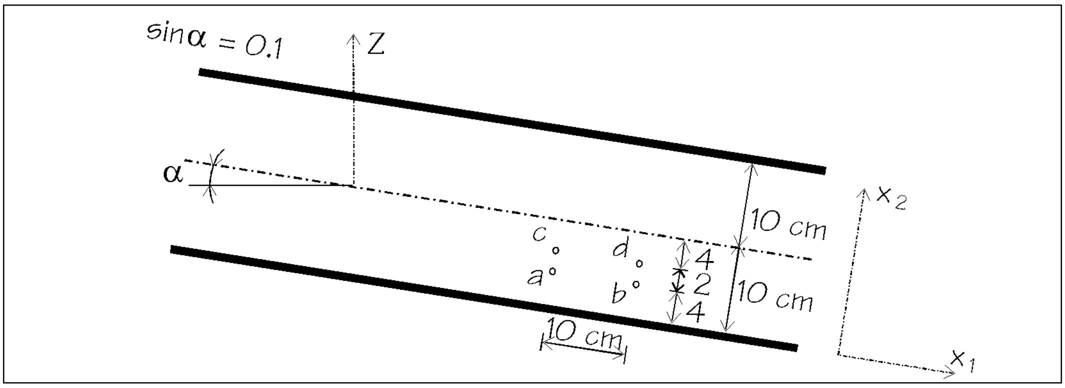
II. Iste jednačine nadalje uprostiti primenjujući na skicirani primer, a to je ravansko strujanje između dve paralelne ploče, gde je raspored brzina, uključivši fluktuacije, isti u svim poprečnim presecima (položenim normalno na osovinu 1).

III. U tačkama (a) i (b) – vidi skicu – izmereni su osrednjeni pritisci i njihova razlika iznosi:

$$\overline{p_b} - \overline{p_a} = 0.008N/cm^2$$

1. Odrediti razliku pritisaka $\overline{p_d} - \overline{p_c}$.

2. Da li između pritisaka u tačkama (a) i (c) postoji razlika proporcionalna razlici položajnih kota, tj. da li je



$$\overline{p_c} - \overline{p_a} = \gamma(z_a - z_c)$$

ili to nije tačno, jer hidrostatičku raspodelu pritisaka u poprečnom preseku remeti uticaj fluktuacija. Prikazati to odgovarajućom jednačinom.

IV. U tački (a) izmerena je sledeća fluktuaciona karakteristika

$$\overline{u_1' u_2'} = -118 cm^2/s^2$$

gde su u_1' i u_2' fluktuacije brzina.

1. Koliko ista karakteristika iznosi u tačkama (b), (c) i (d).
2. Sračunati tangencijalni napon između ploče i fluida. Pretpostavlja se da je on jednak naponu na granici između turbulentnog jezgra i veoma tankog viskoznog podsloja (čija je debljina zanemarljiva u odnosu na debljinu struje).

V. Sračunati debljinu (δ_c) viskoznog podsloja pod pretpostavkom da je devijatorski napon u njemu konstantan, a strujanje laminarno, a na njegovoj granici ostvaruje se brzina (u_c) koja sa (δ_c) čini Reynolds-ov broj

$$Re_c = \frac{u_c \delta_c \rho}{\mu} = 120$$

VI. Osrednjene brzine u tačkama (a) i (c) iznose

$$\begin{aligned} \overline{u_1}(a) &= 265 cm/s \\ \overline{u_1}(c) &= 280 cm/s \end{aligned}$$

Aproksimirajući raspored brzina između (a) i (c) – linearnim zakonom sračunati produkciju energije u fluktuacijama po jedinici mase i u jedinici vremena, u tački na polivini rastojanja između (a) i (c). 4 VII. Pokazati da je u istoj tački – na sredini između (a) i (b) – napon usled viskoznosti zanemarljiv u odnosu na napon turbulencije.

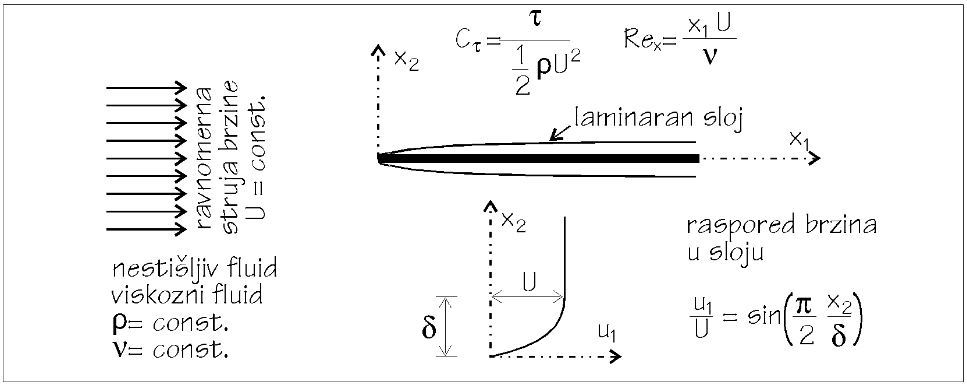
* * *

Pri izradi zadataka koji zahtevaju poznavanje koeficijenta viskoznosti μ i gustine ρ, računati sa $\mu = 1.3 \cdot 10^{-3} Nsm^{-2}$ i $\rho = 1kgdm^{-3}$.

VII

Zadatak 1.

Odrediti napon trenja τ između ploče i fluida u funkciji rastojanja od početka ploče x_1. Isto izraziti i bezdimenzionalno $C_\tau = C_\tau(Re_x)$.



Zadatak 2.

Uslovi:

- zadatak je ravanski
- fluid je nestišljiv
- toplota dobijena deformacionim radom je zanemarljiva.

Polje brzina je dato sa:

$$u_1 = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} U_0 L_0$$
$$u_2 = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} U_0 L_0$$

Polje temperature je:

$$\theta = \theta_0 (x_1^2 + x_2^2) \frac{1}{L_0^2}$$

L_0, U_0 i θ_0 su konstante.

I. Pokazati da se prethodno ostvaruje pri

$$\frac{\lambda}{C\rho L_0 U_0} = const_1 = K$$

gde je:

λ = koeficijent toplotne provodljivosti (kondukcije)
λ = $const_2$
C – specifična toplota = $const_3$
ρ – gustina = $const_4$

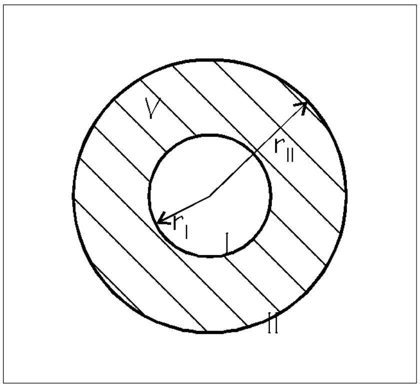
Sračunati numeričku vrednost konstante K u prethodnom izrazu.

II. Posmatra se zapremina (V) – vidi skicu (debljina, normalno na crtež jednaka je (b) – i treba odrediti:

a) ulaz, odnosno izlaz toplote, kroz granične površine (I) i (II), i to:
   - konvekcijom (strujanjem)
   - kondukcijom (provođenjem)

b) povećanje toplote u jedinici vremena, u zapremini (V).

Na osnovu (a) i (b) napraviti bilans toplote.



Jednačine za granice (I) i (II):

$$x_1^2 + x_2^2 = r_I^2 = L_0^2$$
$$x_1^2 + x_2^2 = r_{II}^2 = 4L_0^2$$

Zadatak 3.

Raspored brzina u turbulentnoj struji između dve paralelne ploče (međusobno rastojanje $2h$) izražen je sa

$$\frac{\overline{u_1}}{\overline{u_m}} = \left(\frac{x_2}{h}\right)^{1/7}$$

što važi za: $\delta_c \leq x_2 \leq h$.

δ_c je debljina podsloja uz ploču u kome se ostvaruje laminarno strujanje uz približno konstantnu vrednost napona σ_{21} ($= \tau =$ granični napon između ploče i fluida).

Zadatak se rešava kao ravanski, uz sledeće podatke:

τ = $1.6 N/m^2$
$\overline{u_m}$ = $120 cm/s$
h = $10 cm$
γ = specifična težina = $10 kN/m^3$
ν = kinematski koeficijent viskoznosti = $0.01 cm^2/s$

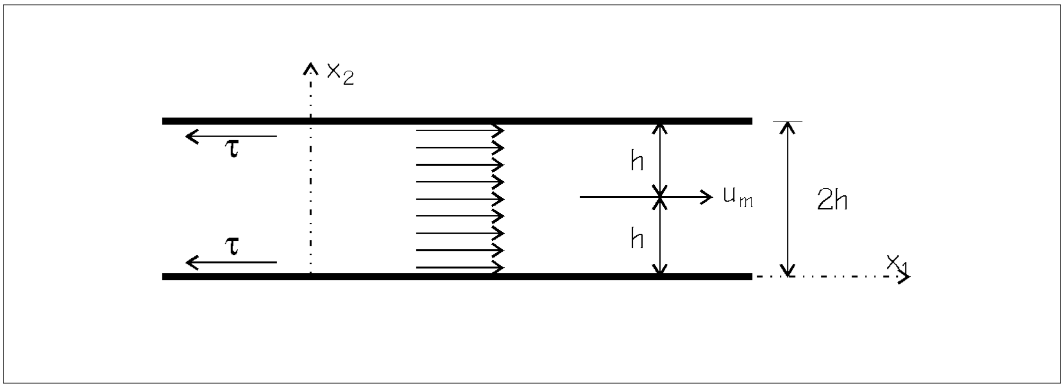
I. Sračunati za $x_2 = 1cm$ "produkciju turbulentne energije" po jedinici mase i u jedinici vremena.
II. Sračunato pod I izraziti bezdimenziono u odnosu na $\frac{\tau}{\rho}\frac{u_m}{h}$.
III. Sračunati debljinu δ_c laminarnog podsloja.

Napomene:

1. U turbulentnom sloju devijatorski naponi koji deluju posredstvom viskoznosti zanemarljivi su u odnosu na napone turbulencije ($\overline{\sigma_{ij}^d} \ll \sigma_{ij}^t$)

2. Na granici turbulentnog sloja ostvaruje se

$$Re_c = \frac{u_c \delta_c}{\nu} = 115$$



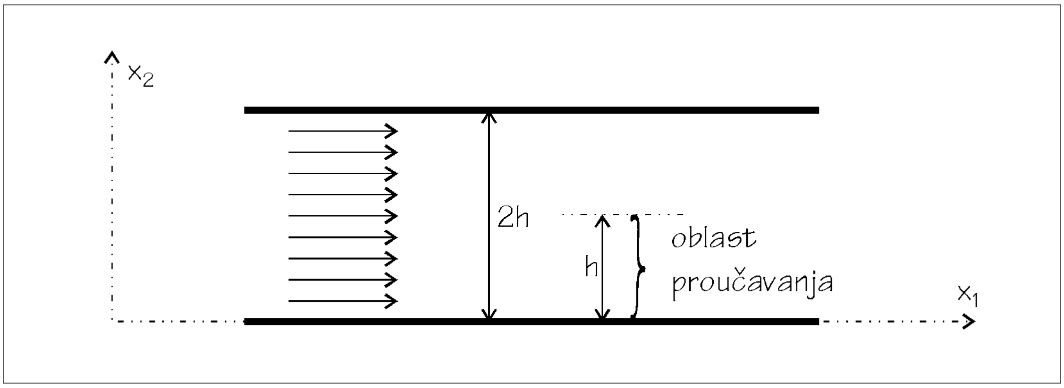
VIII

Zadatak 1.

Posmatra se turbulentno strujanje između dve paralelne ploče pod pretpostavkom da je ustaljeno, ravansko i jednoliko (ovo znači da se osrednjene vrednosti, pa i osrednjeni proizvodi fluktuacija ne menjaju sa vremenom, i duž pravih paralelnih sa osovinama 1 i 3).

Od zapreminskih sila deluje samo težina. Fluid je nestišljiv.

Za taj slučaj napisati jednačinu mehaničke energije fluktuacija za proizvoljan fluidni delić (za proizvoljnu tačku). U opštem obliku ta jednačina je u knjizi obeležena sa (53-31), a sada u njoj treba izostaviti članove (i komponente članova) koji su jednaki nuli za posmatrani zadatak. Jednačinu napisati koristeći indekse 1, 2 i 3 (a ne simbolične indekse $i.j,k$). Koristiti totalne izvode, gde je to moguće. Članove obrazložiti (šta predstavljaju), a posebno ukazati na član koji unosi viskoznost (da li on označava prelaz iz mehaničke energije u toplotu). Za taj član obrazložiti da li je nula ako su hrapavi zidovi (ploče).



Zadatak 2.

Za prethodno strujanje, uz pretpostavku hrapavih površina ploča, brzina u_1 je zavisna od apsolutne hrapavosti k, gustine ρ, rastojanja od zida x_2 i tangencijalnog napona τ između ploče i fluida. Od tih 5 dimenzionalnih veličina mogu se obrazovati 2 bezdimenzionalne.
Pokazati da se zadatak svodi na izučavanje zavisnosti

$$\frac{\overline{u_1}}{\sqrt{\tau/\rho}} = f\left(\frac{x_2}{k}\right) \tag{1}$$

Funkcija koja tome odgovara može da bude

$$\frac{\overline{u_1}}{\sqrt{\tau/\rho}} = Const\left(\frac{x_2}{k}\right)^{1/6} \tag{2}$$

ako se eksperimentalni podaci u nju uklope. Uz pretpostavku da je poznato da je prethodno prihvatljivo sa $Const = 9.3$, napisati izraz za koeficijent tangencijalnog napona

$$C_\tau = \frac{\tau}{1/2\rho v^2} \tag{3}$$

gde je v srednja brzina kroz poprečni presek struje.

Uz pretpostavku da tako utvrđena zavisnost važi za sve jednolike struje ako je hidraulički radijus u svim slučajevima isti, sračunati koeficijent u Šezijevoj formuli i rezultat uporediti sa Manning-ovom formulom. Kod strujanja između dve ploče, shvaćenog kao ravanski zadatak, granične površine za trenje su samo ploče – na osnovu toga određuje se hidraulički radijus.

* * *

Odgovoriti (i odgovore obrazložiti) na sledeća pitanja:

I. Da li Manning-ova formula važi samo za hrapave zidove, ili i za glatke, i za prelaznu oblast (iz glatkih u hrapave zidove)?

II. Da li Manning-ov koeficijent hrapavosti izražava relativnu ili apsolutnu hrapavost?

III. Kakva je veza između Manning-ovog koeficijenta hrapavosti n i apsolutne hrapavosti k? Da li postoji srazmernost između n i k^y gde je $y = Const$ (kolika je vrednost y)?

III. Da li se na osnovu drugačijeg rasporeda brzina (drugi izložitelj u jednačini 2, nije 1/6) može doći do Manning-ove formule?

Zadatak 3.

I " Produkciju" energije u fluktuacijama u zapremini, u jedinici vremena, predstavlja poslednji član u jednačini napisanoj u knjizi sa (53-32).

Ako se sa Pr označi "produkcija" po jedinici zapremine i u jedinici vremena, ukupna "produkcija" u zapremini (tj. navedeni član navedene jednačine) iznosi

$$\int_V Pr\, dV$$

Grafički prikazati kako je po poprečnom preseku raspoređena "produkcija" energije tj. nacrtati grafički prikaz zavisnosti

$$\frac{Pr}{\tau u_m/h} = f\left(\frac{x_2}{h}\right)$$

Pošto bi Pr za $x_2/h = 0$ dobilo beskonačno veliku vrednost prikazati za obalst $x_2/h \geq 0.02$. Naime, zakonitost za turbulentne veličine i ne važe za $x_2 = 0$, gde i nema turbulencije.

Za raspored brzina uzeti zakonitost datu izrazom (2) u zadatku 2.

Pretpostaviti da su naponi devijatorskog dela napona (koji deluju posredstvom viskoznosti) zanemarljivi u odnosu na "napone" turbulencije ($\sigma^d_{ij} << \sigma^t_{ij}$).

II Napisati izraz za "produkciju" energije u fluktuacijama u zapremini V između dva poprečna preseka struje na međusobnom rastojanju L_1, uz širinu L_3 struje (u pravcu 3, to je onaj pravac normalan na onaj dat u Zadatku 1.). Kako je debljina struje $2h$, navedena zapremina je $V = 2hL_1L_3$.

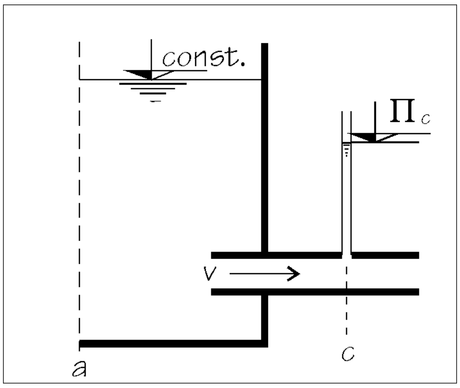
III Sračunati i numerički izraziti "produkciju" izraženu pod II za primer gde je:

$$h = 0.12m \quad L_1 = 1m \quad L_3 = 1m \quad k = 1mm \quad \text{a} \quad v = \text{ prosečna brzina za presek } = 2m/s$$

Raspored brzina izračunava se sa (2) u Zadatku 2. uz $Const. = 9.3$, iz čega će proizaći i vrednost za C_τ prema izrazu (3) iz istog zadatka.

IX

Zadatak 1.



Primenom dinamičke jednačine za struju (od preseka "a" do preseka "c") sračunati pijezometarsku kotu Π_c.
Time je određena i izgubljena energija u struji do preseka "c", koju treba izraziti sa:

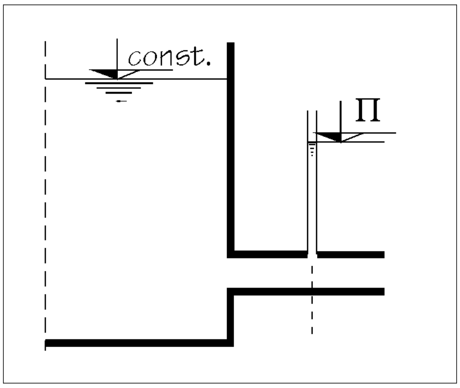
$$\xi_{ulaza} = \frac{E_{izg}(a \to c)}{v^2/2g}$$

* * *

a) Brzina u sudu je zanemarljiva (izuzev neposredne blizine ulaza u cev);

b) Trenje po obimu cevi (sa unutrašnje i spoljašnje strane) je zanemarljivo;

c) Računa se sa prosečnom brzinom v za poprečni presek – cev je konstantnog preseka.



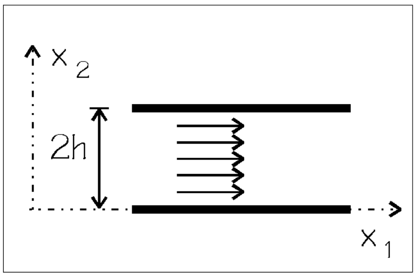
* * *

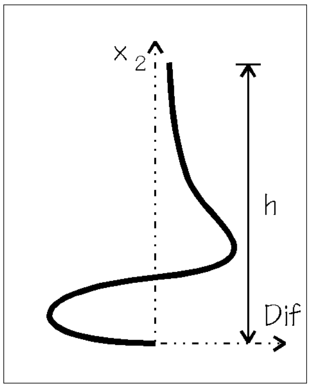
Da li se postupkom, kojim se za prethodni zadatak (cev ugurana u sud) došlo do izgubljene energije, može doći i do izgubljene energije za ulaz prema datoj skici (tzv. oštroivični ulaz).
Ako može, sračunati ξ_{ulaza}.

Ako ne može, objasniti zašto ne može (kada je moglo za prethodni slučaj).

Zadatak 2.

Posmatra se turbulentna struja između dve paralelne ploče (postavljene normalno na osovinu 2). Fluid je nestišljiv. Zadatak je ravanski, struja je ustaljena, što kod turbulentnog strujanja znači da osrednjene vrednosti, uključujući i osrednjene vrednosti proizvoda fluktuirajućih veličina, ne zavise od vremena i od x_3.





I. Pokazati da se priraštaj kinetičke energije fluktuacija (po jedinici zapremine i u jedinici vremena) izražava za posmatrani zadatak sa:

$$-\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dx_2}\left(\overline{u_2'u_1'^2}+\overline{u_2'^3}+\overline{u_2'u_3'^2}\right)=Dif$$

Pisanjem Dif ukazalo bi se da je u posmatranom primeru navedeni priraštaj isključiva posledica difuzije. Prethodno se dobija primenom izraženog drugim članom jednačine (53-31) na razmatrani primer. Sprovesti ceo postupak.

II. Eksperimentalno je utvrđeno da se Dif menja sa x_2 onako kako pokazuje crtež desno.

Koji delići dobijaju, a kojima se oduzima energija difuzijom kinetičke energije (u pravcu 1, 2 ili 3) i kojim smerom? Da li je ukupan iznos difuzije kinetičke energije po poprečnom preseku

$$\int_{A_c} Dif dA$$

jednak nuli? ($A_c = 2hL_3$, $L_3 =$ proizvoljna širina struje u pravcu 3).

Zadatak 3.

I. Za struju iz prethodnog zadatka (zadatak 2.) pokazati da se raspored brzina (u bezdimenzionalnom obliku) svodi na funkciju:

$$\frac{\overline{u_1}}{\sqrt{\tau/\rho}}=f\left(\frac{x_2\sqrt{\tau/\rho}}{\nu}\right)$$

pod pretpostavkom da su ploče glatke.

Prethodna funkcija je veza 2 bezdimenzionalne veličine, na koju se svodi veza 5 dimenzionalnih veličina: $\overline{u_1}$ (brzina), x_2 (rastojanja od zida), τ (napon trenja na ploči), ρ (gustina), μ (koeficijent viskoznosti). Za izraz je korišćeno $\nu = \mu/\rho$. Ovo svođenje dimenzionalnom analizom treba izvesti.

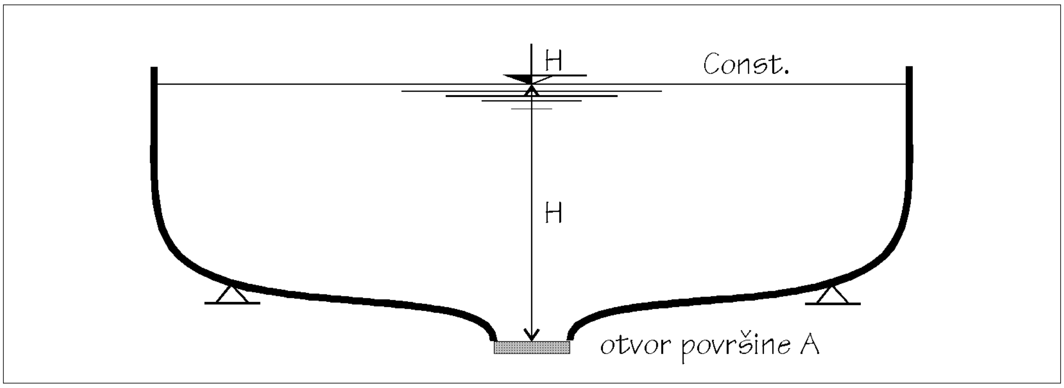
II. Napisana funkcija važi i za laminaran podsloj (gde je $\overline{u_1} = u_1$) i za turbulentni sloj. Za podsloj treba dokazati da se svodi na

$$\frac{u_1}{\sqrt{\tau/\rho}}=\frac{x_2\sqrt{\tau/\rho}}{\nu}$$

X

Zadatak 1.

Za zatvoren sud oslonci primaju silu $G+\Gamma$ gde je G težina vode, a Γ težina suda. Ploča koja zatvara dno mlaznika prima silu $P_0 = \gamma AH$, gde je A površina otvora koji zatvara ploča, γ je specifična težina. Ploča na dnu mlaznika se skloni. Kroz otvor površine A voda ističe. Sada oslonci primaju sumu $G + \Gamma - \Delta$. Sračunati Δ pod sledećim uslovima:



a) težina ploče (zatvarača) je zanemarljiva;

b) fluid je idealan (nema gubitaka energije);

c) nema sužavanja mlaza – i njegov presek je površine A;

d) kroz ceo presek otvora brzina je ravnomerno raspoređena;

e) pijezometarska kota za mlaz kroz ceo presek otvora je ista;

f) nivo u sudu je konstantan (H);

g) presek otvora A je veoma malen u odnosu na horizontalni presek suda.

Uporediti sile P_0 i Δ. Da li su međusobno jednake ili nisu. Ako nisu, gde je uzrok za razliku. (Razmisliti o rasporedu pritisaka na sud pri isticanju i pri mirovanju).

Zadatak 2.

Napon τ trenja između zida i fluida izražava se sa

$$\tau = C_\tau \frac{1}{2}\rho v^2$$

gde je:
v = srednja brzina struje
ρ = gustina = 1 kg dm^{-3}

C_τ = koeficijent napona trenja.

Sračunati C_τ za struju između dve međusobno paralelne ploče, na međusobnom rastojanju $2h$.

Osrednjena brzina upravljena je u pravcu 1 koji je paralelan sa pločama, normala na ploču je pravac 2. Strujanje je ravansko – u ravni $(1,2)$. Ploče su glatke pa se obrazuje viskozni laminarni podsloj debljine δ_c, a za turbulentni sloj se uspostavlja raspored osrednjenih brzina prema sledećem:

$$\overline{u_1} = \overline{u_m}\left(\frac{x_2}{h}\right)^{1/7} \qquad \text{za} \quad \delta_c \leq x_2 \leq h$$

x_2 = rastojanje od ploče = 1.8 dm

$\overline{u_m}$ = maksimalna vrednost za $\overline{u_1}$ (pri $x_2 = h$)

U podsloju napon $\sigma_{12} = \sigma_{21} = Const.$ Na granici podsloja i sloja brzina je u_c. Uspostavlja se

$$Re = \frac{u_c \delta_c}{\nu} = 120$$

ν = kinematski koeficijent viskoznosti = 0.012 cm^2 s^{-1}

* * *

Za dati raspored brzina u turbulentnom sloju sračunati odnos:

$$\frac{Pr\,(od\ zida\ do\ 0.1h)}{Pr\,(od\ zida\ do\ h)}$$

gde Pr označava "produkciju" turbulentne energije – u fluktuacijama. Prethodni odnos će pokazati koji se deo ukupne produkcije obavi u prizidnoj desetini sloja. U ovom računu može se uzeti da turbulentni sloj ide od zida, pošto je podsloj toliko tanak da uključivanje i njegove debljine ne menja rezultat.

Zadatak 3.

A) Napisati jednačinu toplotne energije uz uslove:

   a) toplota dobijena deformacionim radom je zanemarljiva;

   b) fluid je nestišljiv;

B) Istu jednačinu osrednjiti (tj. napisati sa osrednjenim svim članovima, pa će se u njoj pojaviti osrednjene vrednosti i osrednjeni fluktuacioni proizvodi):

Pri ispisivanju jednačine koristiti isključivo indekse $1, 2, 3$, (pisati u razvijenom obliku), a ne pisati sa simboličnim indeksima i, j i k.

C) U jednačini napisanoj pod B) izostaviti kondukciju (provođenje toplote) kao zanemarljivu u odnosu na konvekciju (prenos toplote brzinom – osrednjenom i fluktuacijama).

Nadalje, zadatak još uprostiti prihvatajući stavove:

a) strujanje je ravansko – u ravni (1,2);

b) strujanje je ustaljeno (ustaljene su osrednjene vrednosti).

D) Jednačinu napisanu pod C) dalje pojednostaviti: uzeti da je struja upravljena isključivo u pravcu 1, i da je strujanje u poprečnim presecima istovetno. Ovo znači

$$\overline{u_1} = \overline{u_1}(x_2) \qquad \overline{u_2} = 0$$

Pretpostaviti i da je u pravcu 1 prenos toplote difuzijom neznatna u odnosu na prenos konvekcijom:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\overline{u_1'\theta'}) \ll \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{u_1}\overline{\theta})$$

gde je θ temperatura, a θ' njena fluktuaciona vrednost.

E) U praksi se može naići na veoma jednostavnu jednačinu

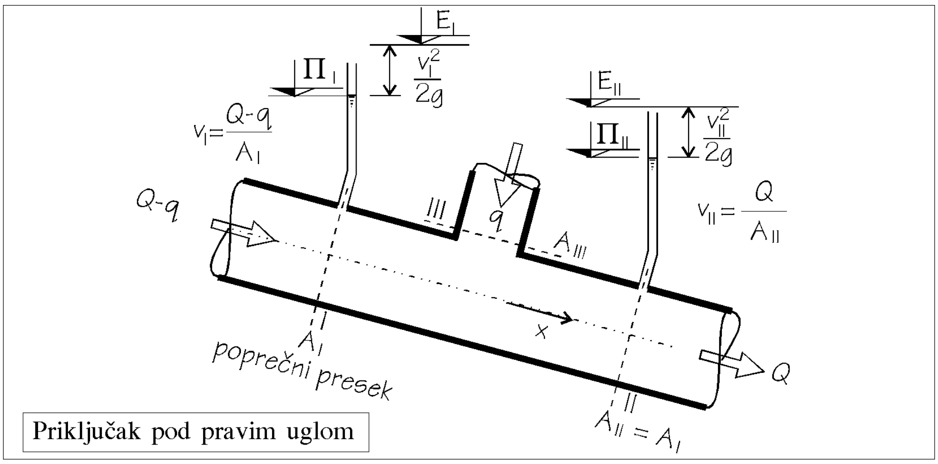
$$\overline{u_1}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x_1} - K\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x_2}\right) = 0$$

koja je namenjena zadatku sa istim uslovima za koje je napisana jednačina pod D).

U prethodnoj jednačini K predstavlja tzv. koeficijent difuzije. Protumačiti šta on izražava – uporediti prethodnu jednačinu sa jednačinom dobijenom pod D).

XI

Zadatak 1.

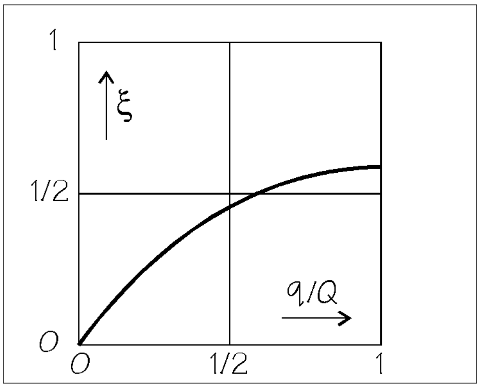


Priključak pod pravim uglom

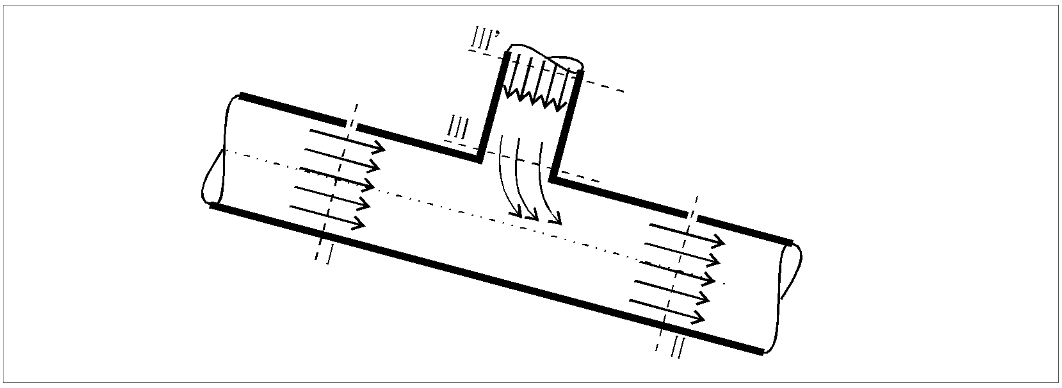
I. Dinamičku jednačinu uravnoteženja sila, uključivši i inercijalne, za pravac glavne cevi (x), a za masu fluida između preseka I, II i III, uporediti sa jednačinom energije za struju između I i II, i na osnovu toga odrediti izgubljenu energiju (po jedinici težine) $E_{izg}(I \to II) = E_I - E_{II}$, a potom napisati izraz za koeficijent lokalnog gubitka ξ, gde je

$$\xi = \frac{E_{izg}(I \to II)}{v_{II}^2/2g}$$

Fluid je nestišljiv, strujanje je ustaljeno. U sva tri preseka pretpostaviti pravolinijsko strujanje, normalno na presek.



II. Empirijska zavisnost za ξ u vidu $\xi = \xi(q/Q)$, pri $A_I = A_{II} = A_{III}$, data je na slici 2. Uporediti tu zavisnost i analitičku dobijenu pod I. Uočiće se razlike koje su posledica neispunjavanja pretpostavki uzetih prilikom pisanja jednačina pod I. Da li se može naći objašnjenje u tome što strujanje kroz III nije normalno na presek (postoji brzina u ravni preseka – vidi skicu 3).



Da bi se izbegle prethodna neparalelnost i zakrivljenost brzina kroz presek III zašto se presek ne pomeri na III', gde je strujanje paralelno i pravolinijsko, normalno na presek? Kakve teškoće za ispisivanje sila tada nastaju (pa se opet ne može doći do prihvatljivog rezultata)?

Zadatak 2.

I. Za ravansko turbulentno strujanje (između dve paralelne ploče), uz uslov da su ploče glatke $\overline{u_1}$ (osovina 1 je upravljena u pravcu strujanja) zavisi od rastojanja x_2 od ploče, te od napona τ trenja između fluida i ploče, kao i od fizičkih osobina fluida (gustina i viskoznost). Pokazati da se opisana zavisnost, primenom dimenzionalne analize, svodi na:

$$\frac{\overline{u_1}}{\sqrt{\tau/\rho}} = f\left(\frac{x_2\sqrt{\tau/\rho}}{\nu}\right)$$

ν – kinematski koeficijent viskoznosti
ρ – gustina
II. Uz pretpostavku da je određenje funkcije pod (I):

$$\frac{\overline{u_1}}{\sqrt{\tau/\rho}} = C\left(\frac{x_2\sqrt{\tau/\rho}}{\nu}\right)^{1/7}$$

Odrediti vrednost konstante C pod sledećim uslovima:

- U graničnom viskoznom podsloju debljine δ_c strujanje je laminarno, a brzina raste od nule (na zidu, $x_2 = 0$) do u_c (za $x_2 = \delta_c$) i u_c je srazmerno sa x_2, a ostvaruje se:

$$\frac{\delta_c u_c}{\nu} = 150$$

III. Sa određenom konstantom C sračunati koeficijent C_τ napona τ, gde je

$$C_\tau = \frac{\tau}{\rho\frac{1}{2}v^2}$$

tj. C_τ se izražva preko srednje brzine v za struju (v = proticaj/poprečni presek struje). C_τ izraziti u zavisnosti od Re-broja

$$Re = \frac{vh}{\nu}$$

$2h$ – rastojanje između ploča.

Zadatak 3.

U pravolinijski položenoj cevi kružnog poprečnog preseka tečenje je turbulentno, a uslovljava se da je ono ustaljeno. Ono je i jednoliko (jer se prečnik cevi ne menja). Jasno je da se ustaljenost i jednolikost shvataju u uslovnom smislu, kako je to uobičajeno kod turbulentnog strujanja: osrednjene vrednosti brzina, i osrednjeni proizvodi fluktuacija brzina, ne zavise od x_1 (osovina 1 je u pravcu osnovnog strujanja), ni od vremena t.

I. Na osnovu REYNOLDS-ove jednačine napisane sa (53-12) napisati odgovarajuće jednačine za sva tri pravca. Izostaviti one članove koji su u postavljenom zadatku jednaki nuli, i zanemariti uticaj napona koji deluju posredstvom viskoznosti (u odnosu na "napone" turbulencije). Uticaj težine (to je jedina zapreminska sila) i pritiska združiti u jedan član (u kome se pojavljuje pijezometarska kota). Fluid je nestišljiv.

Iz napisanih jednačina pokazati da:

a) pijezometarska kota Π nije ista za sve deliće u istom preseku;

b) za sve deliće (za celo strujno polje) je $\partial\Pi/\partial x_1 = Const.$

II. Jednačina mehaničke energije za posmatrani zadatak, a za glavno strujanje, najlakše će se ispitati množenjem REYNOLDS-ove jednačine za pravac 1 sa brzinom $\overline{u_1}$ (jer su $\overline{u_2} = \overline{u_3} = 0$). Napisati tu jednačinu i potom je pomnožiti sa $dV = L_1 dA$ (dV je elementarna zapremina, dA je elementarni deo poprečnog preseka, L_1 je proizvoljna dužina cevi), i na kraju integrisati da važi za zapreminu $V = AL_1$.

III. Iz jednačine dobijene pod II. daljim izvođenjem dokazati da je

$$-\frac{\partial\Pi}{\partial x_1}L_1\gamma Q = \underbrace{I_\Pi L_1}_{E_{izg}}\gamma Q = Prod = \int_{V=AL_1} -\rho\overline{u_j' u_i'}\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_1}dV$$

γ – specifična težina
Q – proticaj
$-\dfrac{\partial\Pi}{\partial x_1} = I_\Pi$ – nagib pijezometarske linije
E_{izg} – izgubljena energija (u jedinici težine) na dužini L_1
$Prod$ – "produkcija" energije u fluktuacijama, u jedinici vremena.

Napomena: Pri pisanju jednačina ne koristiti simboličke oznake (i, j) nego 1, 2, 3, i ne pisati one članove koji su jednaki nuli.

IV. Objasniti gde se troši $Prod$ unutar fluktuacija.

XII

Zadatak 1.

Sila pritiska na ploču površine A, izražava se kao zbir osrednjene vrednosti $\overline{F}$ i fluktuacionog dodatka F':

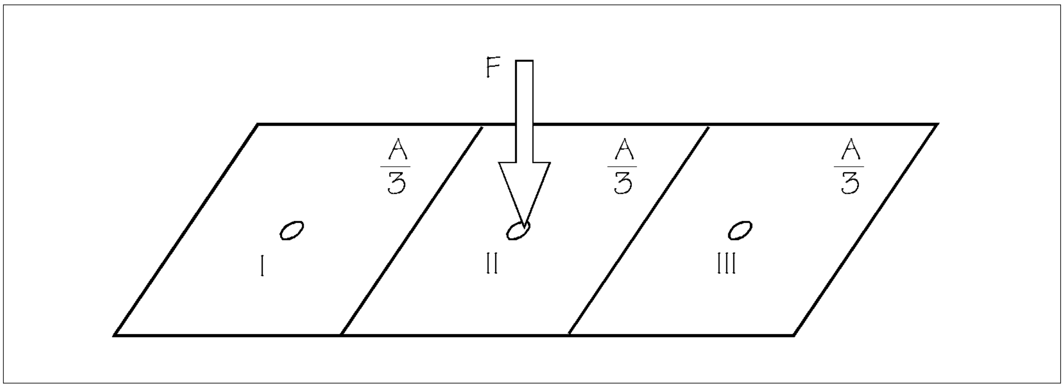
$$F = \overline{F} + F'$$

Sila se određuje merenjem pritiska u tri tačke (I, II i III) i može se smatrati da je

$$\overline{F} = (\overline{p_I} + \overline{p_{II}} + \overline{p_{III}})\frac{A}{3}$$

i

$$F' = (p_I' + p_{II}' + p_{III}')\frac{A}{3}$$



Raspolaže se izmerenim srednjim kvadratnim odstupanjima:

$$\sqrt{\overline{p_I'^2}} = \sqrt{\overline{p_{III}'^2}} = 3N/cm^2 \qquad \sqrt{\overline{p_{II}'^2}} = 4N/cm^2$$

I. Pretpostavlja se da fluktuacija pritiska sledi tzv. "normalnu" raspodelu (GAUSS-ovu), a za maksimalni računski pritisak uzeće se vrednost koju pritisak nadmašuje samo u 0.001 od ukupnog trajanja pojave. Za ovakve uslove je

$$p'_{max} = 3.1\sqrt{\overline{p'^2}}$$

Sračunati maksimalnu vrednost fluktuacionog dodatka F'_{max} uz prihvatanje uslova da se maksimalni pritisci u sve tri tačke javljaju istovremeno.

II. Međutim, maksimalni pritisci ne javljaju se istovremeno u svim tačkama i ako se o tome vodi računa dobiće se manja sila, a ta je baš verovatna. Raspolaže se i koeficijentima korelacije

$$K_{I,II} = \frac{\overline{p_I' p_{II}'}}{\sqrt{\overline{p_I'^2}\,\overline{p_{II}'^2}}} = 0.7$$

$$K_{II,III} = 0.7 \qquad K_{I,III} = 0.5$$

i korišćenjem tih saznanja sračunati $\sqrt{\overline{F'^2}}$ (srednje kvadratno odstupanje za fluktuacionu silu) i potom sračunati F'_{max}, uz pretpostavku:

$$F'_{max} = 3.1\sqrt{\overline{F'^2}}$$

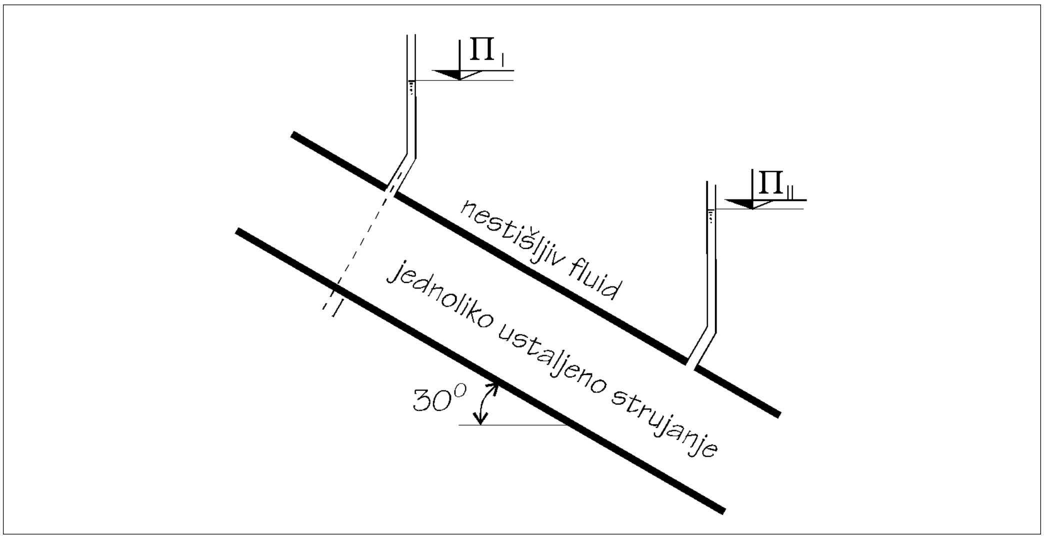
Sila sledi istu zakonitost raspodele kao i pritisci u pojedinim tačkama, pa se i ovde uzeo isti faktor (= 3.1), da se dobije ista verovatnoća (opet 0.001).

III. Uporediti rezultate za silu dobijene pod I. i II. i protumačiti razliku.

Zadatak 2.

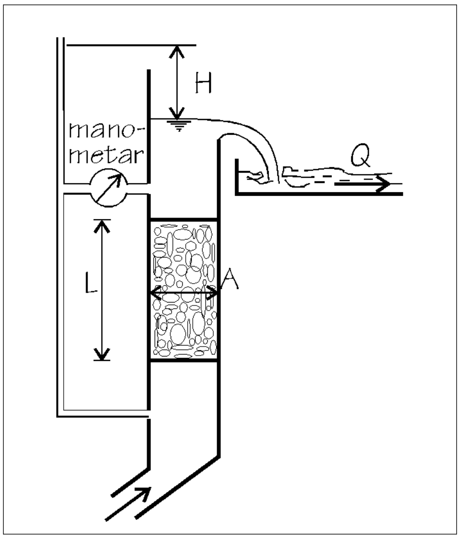
Po načelima hidraulike za slučaj prikazan narednom skicom može se napisati:

$\Pi_I - \Pi_{II}$	=	E_{izg}
(razlika pijezo-metarskih kota)	=	(izgubljena energija, po jedinici težine)



Na zapreminu između preseka I i II primeniti opštu jednačinu energije (34-6) i uz pretpostavku da je strujanje laminarno i da od zapreminskih sila deluje samo težina, pokazati vezu između E_{izg} i deformacionog rada $\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dV$

Zadatak 3.



Skica prikazuje uređaj za istraživanje vrednosti tzv. koeficijenta filtracije K (u Darcy-jevom zakonu brzina filtracije je $v = KI$, I = nagib pijezometarske linije).
U jednom opitnom uzorku nepromenljivi su parametri: krupnoća zrna d, koeficijent poroznosti n, debljina sloja L, koeficijent viskoznosti za tečnost μ, a mere se pritisak na manometru p_m i brzina filtracije v. Brzina v je računska brzina ($v = Q/A$ gde je A presek cevi u koju se stavlja materijal, a Q je proticaj). Prosečna brzina kroz pore je onda jednaka v/n. Pošto se eksperimentiše sa različitim uzorcima (menja se d, L, n, μ), pojavu opisuje međusobna veza 6 veličina (p_m, v, d, L, n, μ).

Treba uočiti da p_m i L nisu međusobno nezavisne veličine, jer je pritisak p_m (koji meri otpor proticanju kroz pore) srazmeran dužini L na kojoj tečnost prodire kroz pore, pa se može uvesti jedna veličina (p_m/L) kao merodavna (koja izražava otpor po jedinici dužine), a onda se ne moraju posebno uzeti p_m i L. Tako se broj veličina može smanjiti sa 6 na 5, što se primenom dimenzionalne analize svodi na 2 bezdimenzionalne veličine, na

$$f(P, n) = 0 \qquad (1)$$

gde je:

$$P = \frac{(p_m/L)}{d^X v^Y \mu^Z} \qquad (2)$$

Za osnovne veličine su uzete (d, v, μ), a P je bezdimenzionalna zamena za (p_m/L).

Po određivanju izložitelja (X, Y, Z) u izrazu (2) zameniti p_m sa γH (γ = specifična težina). Ova zamena lako se objašnjava uvidom u skicu. Treba još uočiti da je H pijezometarska razlika za strujanje na dužini L.

Shodno izrazu (1) za $n = const$ (ista poroznost) i P ima neku konstantnu vrednost. Na osnovu toga treba odrediti:

I. Odnos koeficijenata filtracije K pri temperaturama vode od 20^oC i 5^oC tj.

$$\frac{K(20^oC)}{K(5^oC)}$$

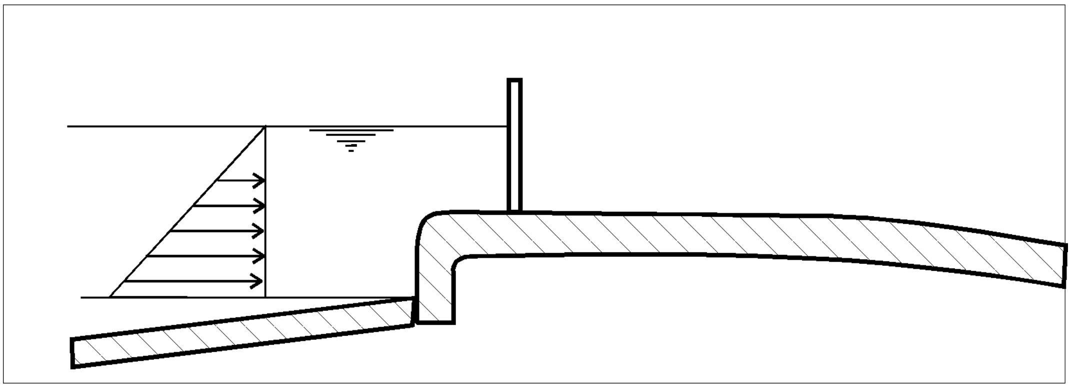
pri istoj krupnoći zrna i istoj poroznosti.

Kinematički koeficijent viskoznosti ν ($\nu = \mu/\rho$) pri temperaturama od 20, odnosno 5^oC, iznosi 0.0100 odnosno 0.0152 cm^2/s.

II. Odnos koeficijenata filtracije K pri istoj poroznosti i istoj viskoznosti, a za krupnoću zrna d od $1mm$ i $3mm$.

XIII

Zadatak 1.



Skica prikazuje široki prag. Zadatak je ravanski.

Opterećenje na prag (hidrostatičko) prikazuje skica.

Uklanjanjem ustave dolazi do tečenja preko širokog praga. Kako se menja opterećenje (u odnosu na hidrostatičko)? Primeniti jednačinu uravnoteženja sila da se pokaže da se opterećenje smanjuje. Gde treba očekivati osetno smanjenje?

Prilikom tečenja pretpostaviti idealan fluid i zanemarljivu brzinu pred pragom. Tečenje preko praga je nepotopljeno. Nivo ispred praga je isti kao u hidrostatičkom stanju.

Zadatak 2.

I. Gubitak energije na pravolinijskoj cevi dužine L, prečnika D, pri brzini v, računa se jednačinom

$$E_{izg} = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

gde je (λ) tzv. koeficijent trenja. Izvesti obrzac za računanje (λ) pod sledećim uslovima:

a) cev je hrapava. Apsolutna hrapavost izražena je sa k;

b) eksperimentalno je utvrđeno da je brzina u_k za $x_2 = k$ (vidi skicu)

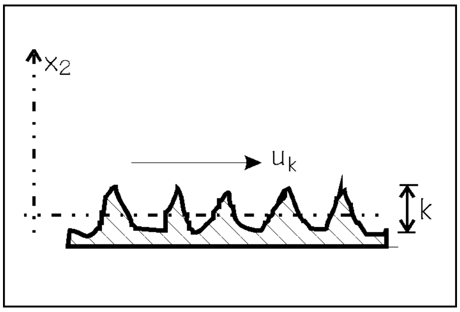
$$u_k = 8.5\sqrt{\tau/\rho}$$

gde je τ napon trenja između zida cevi i fluida, a ρ gustina:

c) raspored osrednjenih brzina je

$$\frac{\overline{u}}{\overline{u_m}} = \left(\frac{x_2}{r}\right)^{1/6}$$

gde je $\overline{u_m}$ = brzina u osovini cevi (za $x_2 = r$).



II. Objasniti da li postoji veza obrasca za (λ) koji će proizaći iz (I) i MANNING-ove formule

$$C_{(CHEZY)} = \frac{1}{n} R^{1/6}$$

R = hidraulički radijus
n = MANNING-ov koeficijent

III. Izraziti produkciju turbulentne energije (u izrazu upotrebiti veličine u_0, r, τ) po jedinici zapremine, i u jedinici vremena, a za tačku $x_2 = r/2$.

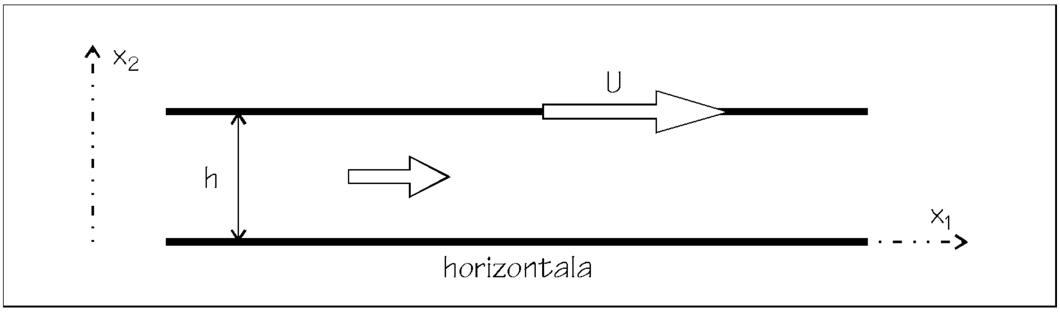
Zadatak 3.

Fluid laminarno teče između dve ploče od kojih je jedna nepokretna, a druga se jednoliko kreće brzinom U (zadatak je ravanski). Uspostavljen je raspored brzina

$$u_1 = U\frac{x_2}{h} \qquad u_2 = 0$$

h = razmak između ploča (vidi skicu).

I. Kako se menjaju pritisci za navedeni raspored brzina. Ploče su horizontalne.



II. Pokazati da je toplota dobijena deformacionim radom zanemarljiva ako je energija potrebna za zagrevanje određene mase fluida za 10^0C jednaka energiji potrebnoj za podizanje te iste mase za $400m$.

Podaci: $U = 10cm/s \qquad h = 1cm$

Kinematski koeficijent viskoznosti

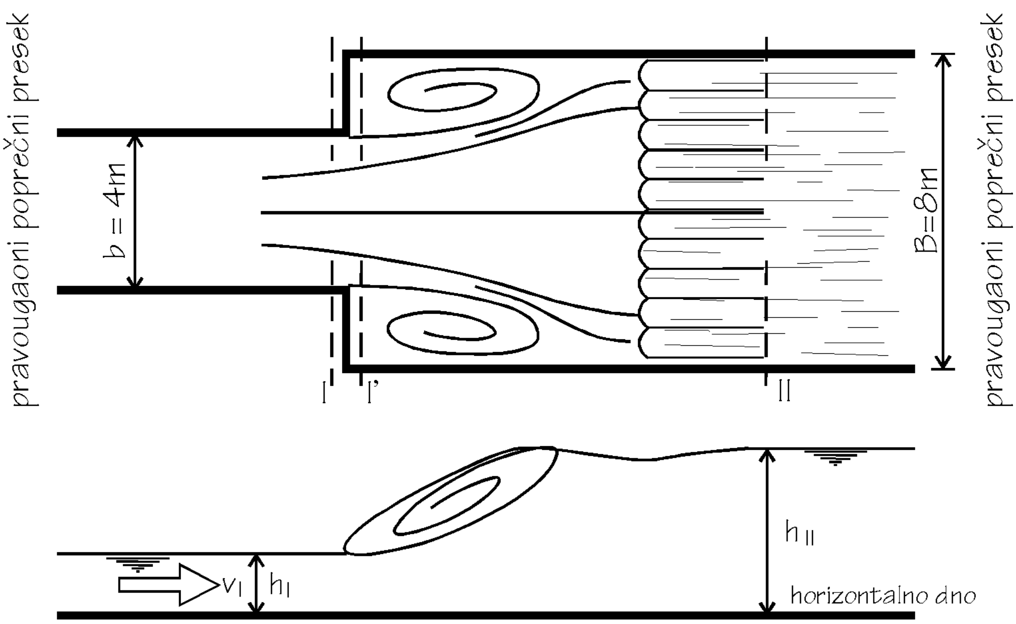
$$\nu = 0.2cm^2/s$$

gustina

$$\rho = 1g/cm^3$$

XIV

Zadatak 1.



A. Sračunati dubinu h_{II} potrebnu za obrazovanje hidrauličkog skoka, uz uslov da je brzina $v_I = 10m/s$, a proticaj $Q = 40m^3/s$.

U preseku I' pretpostaviti struju u sredini istu kao u preseku I (dubina h_I, brzina v_I), a u preostalom delu preseka (I') hidrostatičko stanje sa dubinom h_I. Objasniti opravdanost ove pretpostavke po ugledu na objašnjenje da delići u vrtložni trag ponesu i potencijalnu energiju sa mesta odvajanja, ili po ugledu na teorijsko rešenje naglog proširenja u cevi.

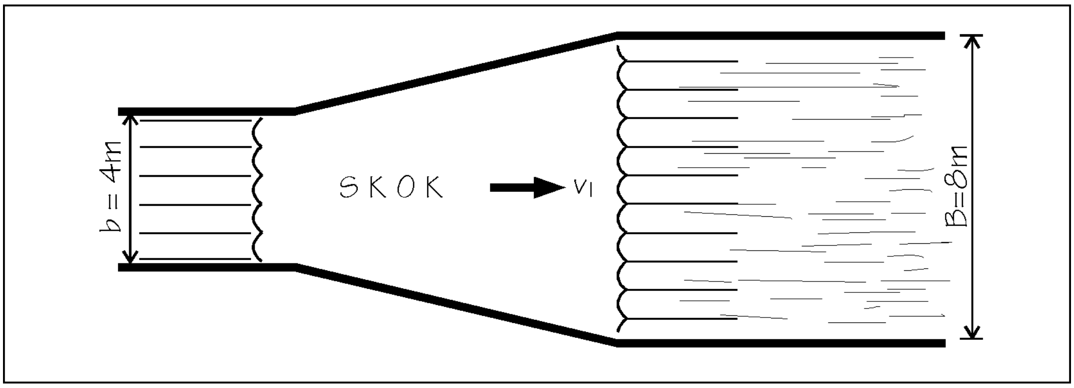
* * *

B. Sračunati dubinu h_{II} za isti proticaj i iste dolazne uslove (h_I, v_I), ali bez menjanja širine kanala ($b = B = 4m$). Uporediti izgubljene energije od I do II za slučajeve A. i B. Dati objašnjenje.

C. Uporediti dubinu h_{II} (iza skoka) i izgubljenu energiju sa rešenjima A) i B).

* * *

D. Ispitati i treće rešenje. Skok se obrazuje u kanalu koji se širi. Da li je rešenje moguće ako se ne znaju pritisci na boku kanala? proticaj.



Zadatak 2.

Primenom dimenzionalne analize na pojavu hidrauličkog skoka u pravougaonom kanalu konstantne širine b, sa horizontalnim dnom, pokazati da se zadatak svodi na rešavanje funkcije

$$\varphi\left(\frac{h_{II}}{h_I}, Fr_I\right) = 0 \qquad (1)$$

gde su h_I i h_{II} dubine ispred i iza skoka, a sa Fr_I je označen FROUDE-ov broj ispred skoka $\left(Fr_I = \dfrac{Q^2}{gb^2h_I^3}\right)$ [Q = proticaj].

Koje su veličine uzete u obzir za dobijanje funkcije (1). Šta je zanemareno, a o čemu se vodilo računa (uticaji inercije, viskoznosti, težine i kapilarnosti). Da li se za dobijanje (1) zadatak pretpostavio kao ravanski? Da li zanemarenje trenja znači da se fluid smatra idealnim?

Zadatak 3.

Posmatra se turbulentno strujanje između dve paralelne ploče, osrednjeno strujanje je ustaljeno, ravansko (u ravni 1,2), paralelno i pravolinijsko ($\overline{u_1} = \overline{u}$, $\overline{u_2} = \overline{u_3} = 0$).

I). Primenom REYNOLDS-ove jednačine za pravac 1 pokazati da je:

$$\sigma_{21}^t = -\rho\overline{u_1'u_2'} = \tau\left(1 - \frac{x_2}{h}\right)$$

Pokazati koji su članovi u jednačini jednaki nuli, a iz preostalih izvesti gornji zaključak za "napon" turbulencije. Primeniti uobičajene pretpostavke. Zanemariti dejstvo napona trenja posredstvom viskoznosti ($\overline{\sigma_{21}^d} \ll \sigma_{21}^t$), napon sa zida ($\tau$) uzeti kao granični, a zanemarljiva je i debljina viskoznog podsloja ($\delta_c \ll h$).

II). Motorni rad napona turbulencije, po jedinici zapremine, i u jedinici vremena, iznosi:

$$\overline{u_j}\frac{\partial\sigma_{ij}^t}{\partial x_i} = \overline{u_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(-\rho\overline{u_i'u_j'})$$

Pokazati da "motorni rad" svih napona turbulencije, u jedinici vremena, a za zapreminu L_1L_32h ($L_1 =$ dužina, $L_3 =$ proizvoljna širina merenja u pravcu 3, $2h =$ debljina) iznosi:

$$-\frac{\tau Q L_1}{h}$$

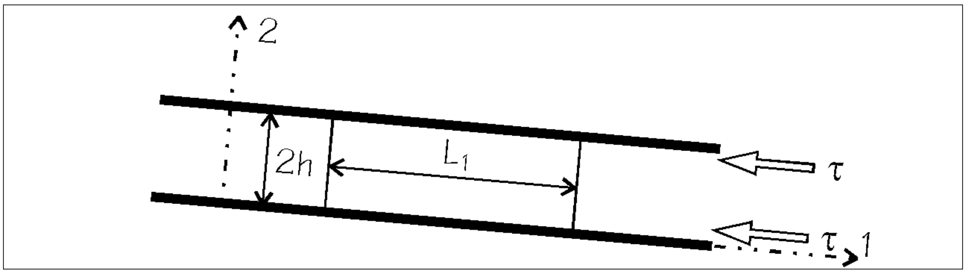
gde je $Q =$ proticaj između ploča, a za širinu L_3.

III). Pokazati da je ukupan "rad" svih "napona turbulencije" za zapreminu iz II), jednak nuli. Iz toga zaključiti koliki je "deformacioni rad napona turbulencije" (to se naziva: produkcija turbulentne energije), i to uporediti sa uobičajenim izrazom za "izgubljenu energiju" E_{izg} (to je energija, po jedinici težine) na dužinu struje L_1, tj. sa

$$E_{izg} = \frac{\tau L_1}{\gamma R}$$

$\gamma =$ specifična težina; $R =$ hidraulički radijus.

Protumačiti vezu između E_{izg} i "produkcije turbulentne energije".



XV

Zadatak 1.

a) Posmatra se zapremina V, omeđena zatvorenom površinom A, i za istu treba napisati jednačinu nepromenjivosti mase materije rastvorene u fluidu. Tu jednačinu treba napisati koristeći gustinu ρ fluida i koncentraciju C

$$C = \frac{\text{masa rastvorene materije}}{\text{masa fluida}}$$

Sve što je moguće izraziti površinskim integralom.

Podrazumeva se da se rastvor prenosi isključivo strujanjem (brzinom).

b) Jednačinu napisanu pod a) napisati uz uslov nestišljivosti ($\rho = const$).

c) Jednačinu iz b) diferenciranjem svesti na jednačinu za elementarnu masu, tj. na jednačinu primenjivu u svakoj tački.

d) Jednačinu napisanu za c) prilagoditi turbulentnom strujanju: napisati jednačinu za glavno strujanje, koristeći osrednjene vrednosti i fluktuacione dodatke tj. $\overline{u_j}$, $\overline{u_j'}$, $\overline{C}$, C'.

e) U praktičnim zadacima često se koristi jednačina:

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \overline{u_i}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x_j}\right) = 0$$

gde je K_{ij} tzv. koeficijent difuzije.

Uporediti ovu jednačinu sa dobijenom pod d) i objasniti šta u stvari predstavlja koeficijent difuzije.

f) Jednačinu napisanu pod e) napisati korišćenjem isključivo indeksa 1, 2 i 3, a ne uopštenih (i, j), uz izostavljanje članova koji su nula, a za slučaj gde važe sledeći uslovi:

- strujanje je ustaljeno, ravansko, u ravni (1,2), pravolinijsko i paralelno ($\overline{u_1} = \overline{u}$, $\overline{u_2} = 0$).

Koeficijenti difuzije su: $K_{11} = Const_I$ $K_{22} = Const_{II}$, te $K_{21} = K_{12} = 0$.

Zadatak 2.

Posmatra se turbulentna struja sa osrednjenim strujanjem, koje je paralelno i pravolinijsko, u pravcu 1, pa je $\overline{u_1} = \overline{u}$, $\overline{u_2} = \overline{u_3} = 0$, ono je i jednoliko, jer je $\overline{u_1} = \overline{u_1}(x_2, x_3)$. Uz to je i ustaljeno. Jednolikost i ustaljenost znače da su parcijalni izvodi osrednjenih fluktuacionih proizvoda, po x_1, i po vremenu jednaki nuli.

Fluid je nestišljiv.

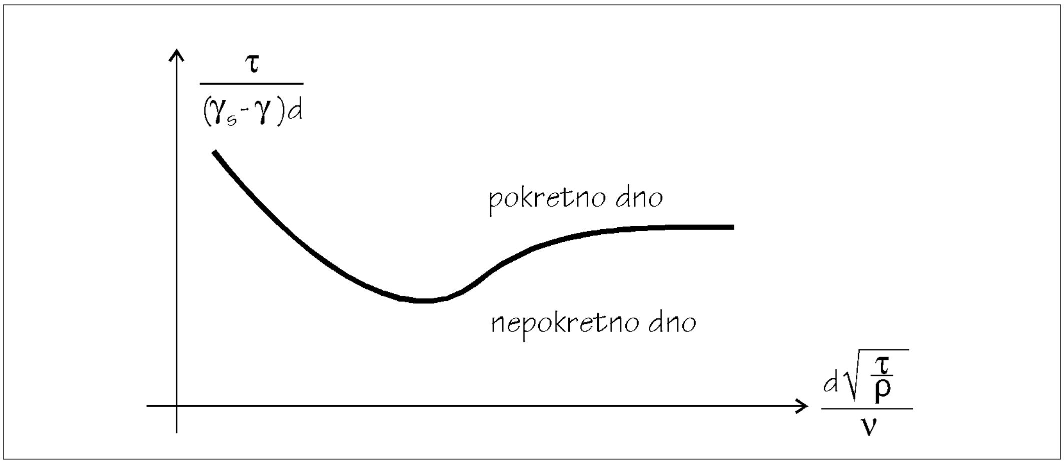
a) Za navedeni slučaj napisati jednačinu mehaničke energije za glavno strujanje, primenljivu u svakoj tački – to je jednačina navedena u knjizi sa (53-25). Pri pisanju koristiti isključivo indekse 1, 2, 3, a ne uopštene (i, j) i izostaviti one članove koji su u posmatranom slučaju jednaki nuli.

Od zapreminskih sila deluje samo težina, pa rad te sile treba združiti sa radom pritiska, korišćenjem pijezometarske kote.

b) Da li se za jednu tačku može $\overline{u_j}\frac{\partial\overline{\sigma_{ij}^d}}{\partial x_i}$ zameniti sa $-\overline{\sigma_{ij}^d}\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}$ (tj. da li se motorni i deformacioni rad devijatorskih napona međusobno izravnotežavaju).

c) Da li se za jednu tačku može zameniti $\overline{u_j}\frac{\partial\overline{\sigma_{ij}^d}}{\partial x_i}$ sa $-\sigma_{ij}^t\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}$.

Zadatak 3.



d	$=$	prečnik zrna
γ_s	$=$	specifična težina zrna
γ, ρ	$=$	specifična težina i gustina vode
τ	$=$	tangencijalni napon na zidu
$\nu = \mu/\rho$	$=$	kinematski koeficijent viskoznosti

Grafikon na slici prikazuje granicu stabilnosti dna pravougaonog kanala sastavljenog od pokretnih peščanih zrna prečnika d. Zadatak se posmatra kao ravanski sa jednolikim tečenjem vode.

Prikazanu granicu nepokretnosti zrna, prema grafikonu, određuje međusobna veza dve bezdimenzionalne veličine

$$\frac{\tau}{(\gamma_s-\gamma)d} \qquad \frac{d\sqrt{\tau/\rho}}{\nu}$$

Navedenu granicu određuje međusobna veza sledećih dimenzionalnih veličina

$$d,\ \rho_s,\ \rho,\ g,\ \tau,\ \mu,\ \text{ili}\ \nu$$

jer se zrno prečnika d i gustine ρ_s, svojom težinom suprotstavlja težnji vode da ga pokrene, što izražava napon trenja τ vode o dno (o zrno nanosa). Uticaj težine unosi gravitaciono ubrzanje g. Fizičke karakteristike vode predstavljaju njena gustina ρ i koeficijent viskoznosti μ.

Kako na pojavu utiče težina zrna "olakšana u vodi", treba uzeti $(\rho_s - \rho)g = \gamma_s - \gamma$, a pored toga, ne treba još uzeti i gustinu ρ_s, jer se zrno ne kreće, pa nema njegovih inercijalnih uticaja. Sa druge strane, ne treba gravitaciono ubrzanje g uzeti u obzir za kretanje vode, jer se uticaj težine uravnotežava sa trenjem, a ono je uneto naponom τ. Navedeno dozvoljava da se veza 6 navedenih veličina smanji na vezu 5 veličina, a onda primenom dimenzionalne analize to smanjuje na 2 bezdimenzionalne veličine. Obaviti postupak i pokazati da su to bezdimenzionalne veličine čija je veza prikazana slikom.

* * *

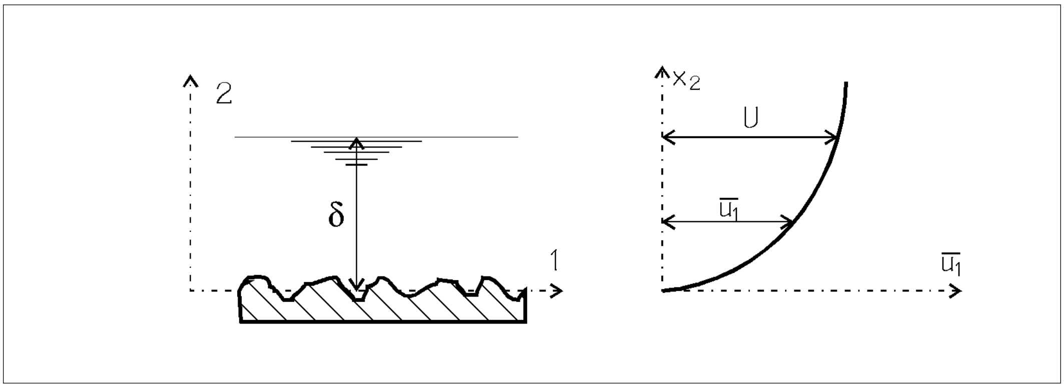
Šta znači kad se postigne:

$$\frac{\tau}{(\gamma_s - \gamma)d} = Const.$$

Da li to ima veze sa uticajem viskoznosti i sa ponašanjem dna (glatko, hrapavo)?

XVI

Zadatak 1.



Za raspored brzina u turbulentnom graničnom sloju uz hrapavu ploču daje se sledeći izraz

$$\frac{\overline{u_1}}{\sqrt{\tau/\rho}} = 11\left(\frac{x_2}{k}\right)^{1/8}$$

gde je:

$\overline{u_1}$	=	osrednjena brzina u pravcu paralelnom sa pločom
τ	=	napon trenja između ploče i fluida
ρ	=	gustina
x_2	=	rastojanje od ploče
k	=	apsolutna hrapavost

Navedeni obrazac daje vezu dve bezdimenzionalne veličine $\overline{u_1}/(\tau/\rho)^{1/2}$ i x_2/k, što je zamena za vezu 5 dimenzionalnih veličina, pa brzina $\overline{u_1}$ zavisi onda od τ, ρ, x_2 i k.

Takva veza je prihvatljiva u određenim uslovima (da li ona uticaj viskoznosti smatra zanemarljivim i da li je to opravdano). Zašto $\overline{u_1}$ ne zavisi od debljine δ sloja, i od neporemećene brzine U, kada one obrazuju raspored brzina (ili je to dato posredno).

Napisati izraz po kome bi se računao napon trenja (τ) duž ploče – u funkciji rastojanja x_1 od početka ploče, – pod pretpostavkom da je granični sloj turbulentan, uz hrapavu ploču, i uz navedeni granični uslov.

Izvođenje će dovesti do izraza

$$C_\tau = C_\tau\left(\frac{x_1}{k}\right) \quad \text{gde je} \quad C_\tau = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

Zadatak 2.

Glavno (osrednjeno) strujanje je ustaljeno, krivolinijsko i paralelno u pravcu (1), pa je $\overline{u} = \overline{u}_1$, $\overline{u}_2 = \overline{u}_3 = 0$. Ono je ravansko - u ravni (1,2). Strujanje je ograničeno ravnim pločama, postavljenim normalno na pravac (2), a međusobno rastojanje ploča (= debljina struje) je $2h$. Fluid je nestišljiv. Za raspored brzina daje se zakonitost

$$\frac{\overline{u_m} - \overline{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = 2.5 \ln \frac{h}{x_2}$$

gde je x_2 rastojanje od ploče, a $\overline{u_m}$ brzina u sredini struje, za $x_2 = h$, dok su τ i ρ napon između fluida i ploče, odnosno gustina.

Raspored turbulentnih "napona" određuje se uz uslov zanemarenja devijatorskih napona $\sigma_{ij}^d = \sigma_{ij}^{turb}$.

Sa Pr označava se "produkcija" turbulentne energije po jedinici zapremine i u jedinici vremena.

Sračunati odnos

$$\frac{Pr(za\, x_2 = 0.1h)}{Pr(za\, x_2 = 0.9h)}$$

* * *

Sračunati Pr za $x_2 = 0.05m$ uz sledeće vrednosti:
– gustina fluida $\rho = 1kgdm^{-3}$,
– prosečna (srednja) brzina strujanja $v = 8ms^{-1}$,
– koeficijent napona trenja $C_\tau = 0.005$, $\quad C_\tau = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho v^2}$,
– debljina struje $2h = 0.8m$.

Zadatak 3.

I. Kanalom sa konstantnim nagibom dna (=I) i konstantnim poprečnim presekom (A) teče struja ustaljeno i jednoliko, sa proticajem Q. Na dužini L kanala rad težine, u jedinici vremena, iznosi γIQL (γ = specifična težina). Da li se taj iznos može porediti sa “produkcijom” turbulentne energije

$$\int_{V_c} \rho \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \, dV$$

u zapremini V_c jednakoj $A \cdot L$.

Pri ovom razmatranju zanemariti dejstvo devijatorskih napona $\overline{\sigma_{ij}^d}$ u odnosu na napone turbulencije σ_{ij}^t.

II. Izraz za “produkcije” napisati u razvijenom obliku koristeći isključivo indekse 1, 2 i 3, a ne uopštene (i,j) i pri tome izostaviti sve one članove koji su u datom primeru jednaki nuli.

III. Na šta se troši “produkcija” turbulentne energije?

XVII

Zadatak 1.

Predmet zadatka je hidraulički skok u pravougaonom kanalu.

Dubina ispred skoka označva se sa h_I, a FROUDE-ov broj u istom preseku sa Fr_I, gde je $Fr_I = v_I^2/gh_I$, pošto v_I označava srednju brzinu u tom preseku.

Dubina iza skoka određena je obrascem

$$h_{II} = \frac{h_I}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr_I} - 1 \right) \qquad (1)$$

I) Obrazložiti primenom koje jednačine se došlo do obrasca (1), i pod kojim uslovima (šta se zanemaruje?).

II) Da li ista jednačina dozvoljava i rešenje sa suprotnim smerom strujanja II ka I. Ako dozvoljava zašto to praktično nije ostvarivo?

III) Da li rešenje prema (1) nameće određeni gubitak energije? Pokazati to za $Fr_I =$ 10.

Zadatak 2.

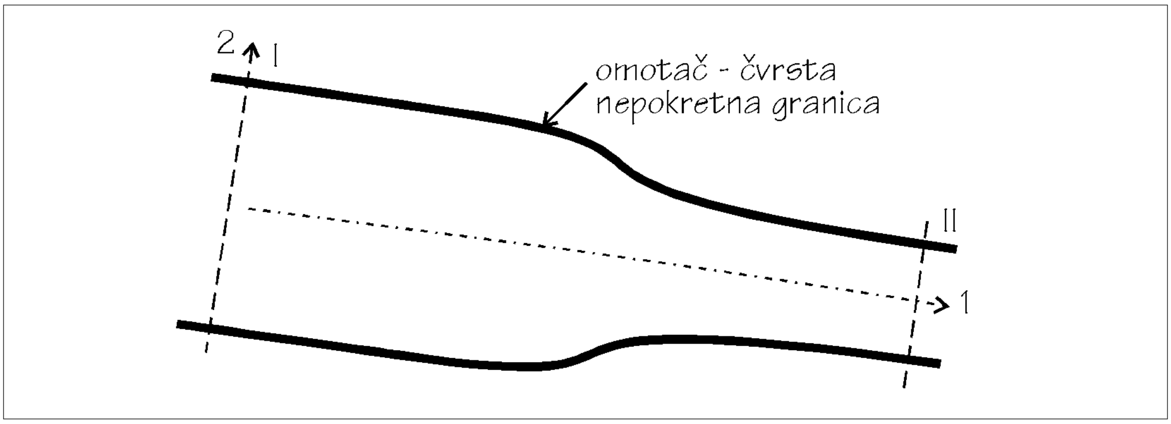
Kroz oba preseka nestišljive struje (I i II) osrednjeno strujanje je pravolinijsko i paralelno, normalno na presek $[\overline{u_2} = \overline{u_3} = 0]$. Fluid je nestišljiv.

Na zapreminu V (od I do II) primenjuje se jednačina (53-26) u knjizi. Predmet zadatka su neki članovi te jednačine, primenjene na posmatrani primer.

I. Pokazati da se

$$\rho \int_V \overline{f_j} \overline{u_j} dV + \int_A -\overline{p} n_j \overline{u_j} dA$$

može svesti na jedan površinski integral (koji treba integrisati samo po površini preseka A_I i A_{II}), ako je zapreminska sila težina ($f_j = -g\partial Z/\partial x_j$) i ako se uvede pijezometarska kota Π umesto $Z + p/\rho g$, gde je Z položajna kota. Napisati navedeni površinski integral razdvojen po presecima A_I, A_{II}.



II. Pokazati da se

$$\int_V \frac{\partial \overline{\sigma_{ij}^d}}{\partial x_i} \overline{u_j} dV \qquad (1)$$

može zameniti sa

$$\int_V -\overline{\sigma_{ij}^d} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} dV = -\int_V 2\mu \overline{\omega_{ij}^d}\, \overline{\omega_{ij}^d} dV \qquad (2)$$

gde je μ koeficijent viskoznosti, a $\overline{\omega_{ij}^d}$ brzina deformacije devijatorskog dela.

a) objasniti da li se navedeni integral (2) može preobratiti u površinski;

b) navesti šta znači integral (1) a šta (2);

c) $\overline{\omega_{ij}^d}\, \overline{\omega_{ij}^d}$ napisati razvijeno koristeći parcijalne izvode brzine po koordinatama ($\partial u_j / \partial x_i$), ali sa indeksima 1, 2, 3, a ne uopštenim (i, j).

III. Da li se

$$\int_V \overline{u_j} \frac{\partial \sigma_{ij}^t}{\partial x_i} dV \qquad \text{gde je} \qquad \sigma_{ij}^t = -\rho \overline{u_i' u_j'} \qquad (a)$$

može zameniti sa

$$-\int_V \sigma_{ij}^t \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} dV \qquad (b)$$

Ako ta zamena (za dati zadatak) nije moguća, napisati razliku (a) – (b), i to u vidu površinskog integrala, u kome će se pojaviti gustina i brzine (osrednjene i fluktuacione). Treba koristiti indekse 1, 2, 3, a ne uopštene (i, j). Izostaviti sve one članove koji su u posmatranom zadatku jednaki nuli. Napisati krajnji rezultat razdvojivši po presecima.

Zadatak 3.

Posmatra se turbulentna struja između dve paralelne ploče, na međusobnom rastojanju $2h$. Pravac osrednjenih brzina je 1, ploče su normalne na pravac 2.

$$\overline{u_1} = \overline{u_1}(x_2) \qquad \overline{u_2} = \overline{u_3} = 0$$

Gubitak energije za glavno strujanje posmatra se u dve oblasti.

I) Viskozni laminarni podsloj uz zid, gde je brzina u_1 srazmerna rastojanju x_2 od ploče. Debljina toga podsloja je δ_c, na njegovoj granici ($x_2 = \delta_c$) brzina je $u_1 = u_c$. Gubitak energije u podsloju predstavlja deformacioni rad, koji posredstvom viskoznosti, mehaničku energiju pretvara u toplotu. Iznos toga rada, po jedinici zapremine i u jedinici vremena, je $\sigma_{ij}^d \partial u_j / \partial x_i$.

II) Turbulentini sloj, u kome se brzina ponaša po zakonu

$$\frac{\overline{u_1}}{\overline{u}_{max}} = \left(\frac{x_2}{h}\right)^{1/7}$$

gde je $\overline{u}_{max} = \overline{u_1}$ za $x_2 = h$.

U tom sloju gubitak za glavno strujanje je u "produkciji" turbulentne energije u fluktuacijama, što izraženo po jedinici zapremine, i u jedinici vremena, iznosi $\sigma_{ij}^t \partial \overline{u_j} / \partial x_i$ gde je σ_{ij}^t = "napon turbulencije" $-\overline{\rho u_i' u_j'}$. U ovom sloju gubitak usled napona σ_{ij}^d, tj. posredstvom viskoznosti je zanemarljiv.

* * *

Posmatra se odnos

$$\frac{\text{Gubitak u I}}{\text{Gubitak u II}} = \varphi$$

Za I se uzima gubitak u zapremini podsloja debljine δ_c, dok se za dužinu (u pravcu 1), i za širinu (u pravcu 3) uzimaju proizvoljne vrednosti L_1 i L_3.

Za II, strogo uzevši, bi trebalo uzeti sloj od $x_2 = \delta_c$ do $x_2 = h$ (sa istim L_1 i L_3 kao u I), ali se može integrisati od $x_2 = 0$ do $x_2 = h$, jer je debljina δ_c veoma malena.

* * *

a) Pokazati da se φ može izraziti sa

$$\varphi = Const \frac{u_c}{u_{max}}$$

i odrediti vrednost konstante.

b) Oceniti vrednost odnosa φ uz pretpostavke:

1) $\dfrac{u_c \delta_c}{\nu} = Re_c$ = karakterističan Re-broj za podsloj = 100.

2) $u_{max}^2 \dfrac{1}{2} \rho C_\tau = \tau$ = napon trenja između ploče i fluida. Treba uzeti u obzir da se vrednost C_τ kreće od 0.002 do 0.005.

XVIII

Zadatak 1.

Posmatra se proticaj količine kretanja kroz presek (postavljen na osovinu 1) turbulentne struje između dve paralelne ploče (postavljene normalno na osovinu 2), a na međusobnom rastojanju $2h$). Zadatak je ravanski: u ravni $(1, 2)$. Fluid je nestišljiv.

Simetralna ravan je $x_2 = h$, $x_2 =$ rastojanje od zida. Usled simetričnosti strujanja dovoljno je odrediti raspored brzina do simetralne ravni. Neka je on dat sa

$$\overline{u_1} = \overline{u_m}\left(\frac{x_2}{h}\right)^{1/7} \qquad \overline{u_2} = 0$$

I. Uporediti proticaje kinetičke enrgije kroz presek ako se računa sa navedenim rasporedom brzina i ako se izražava sa $\rho Q v$ ($\rho =$ gustina, $Q =$ proticaj, $v =$ prosečna brzina kroz presek).

II. Koliko osrednjeni proticaj kinetičke energije povećava uticaj podužnih fluktuacija brzine ako je

$$\int_A \overline{u_1' u_1'}\, dA = 0.01 v^2 A$$

$A =$ poprečni presek struje

III. Osrednjeni proticaj količine kretanja (to je vektor) sem komponente u pravcu strujanja sa I i II može da ima komponente koje leže u ravni poprečnog preseka. U datom slučaju to je komponenta u pravcu 2, koja je jednaka

$$\int_A \rho \overline{u_1' u_2'} dA$$

a) Da li je ova komponenta u zadatom primeru jednaka nuli?
b) Da li je jednaka nuli i za polovinu preseka od $x_2 = 0$ do $x_2 = h$?
Napomena: Treba se podsetiti da je

$$-\rho \overline{u_1' u_2'} = \sigma_{ij}^t$$

i da se pretpostavlja da je napon koji deluje posredstvom viskoznosti $\overline{\sigma_{ij}^t}$ zanemarljiv u odnosu na σ_{ij}^t.

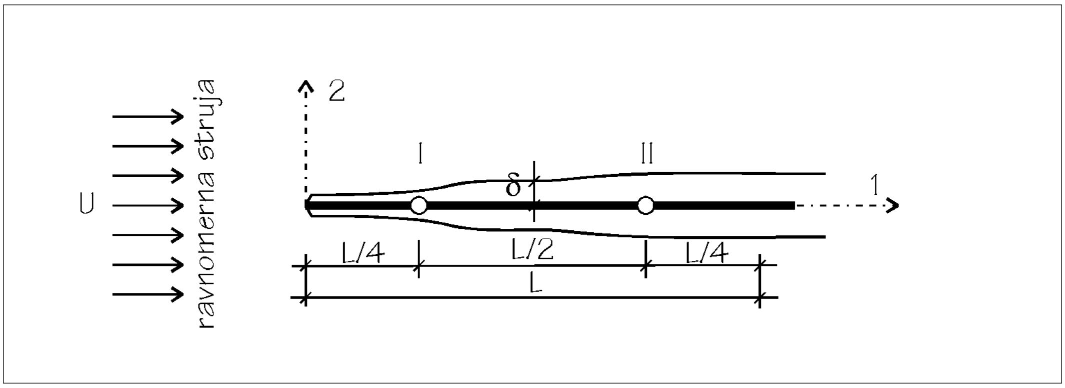
Zadatak 2.

Uz ravnu ploču, uronjenu u ravnomernu struju ($u = u_1 = U = Const$) obrazuje se granični sloj (ploča je postavljena paralelno sa pravcem strujanja (1)). Neka je sloj celom dužinom laminaran. Sračunati sledeće odnose

$$(a) \quad = \quad \frac{\text{sila trenja na deo ploče od I do II}}{\text{sile trenja na celu ploču}}$$

$$(b) \quad = \quad \frac{\tau_I}{\tau_{II}} = \frac{\text{napon trenja u I}}{\text{napon trenja u II}}$$

$$(c) \quad = \quad \frac{\delta_I}{\delta_{II}} = \frac{\text{debljina sloja u I}}{\text{debljina sloja u II}}$$



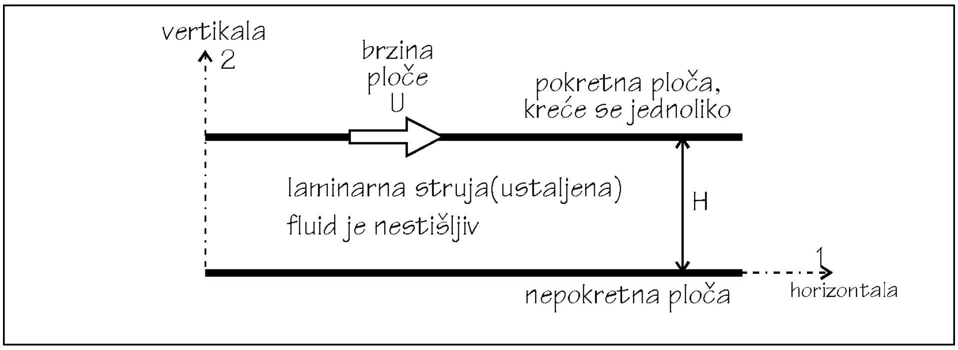
Fluid je nestišljiv.

Pokazati da su navedeni odnosi (a) (b) (c) nezavisni od izbora funkcije f rasporeda brzina

$$\frac{\overline{u_1}}{U} = f\left(\frac{x_2}{\delta}\right)$$

ako ta funkcija važi za sve preseke (ako ne zavisi od x_1).

Zadatak 3.



Za struju između dve paralelne i horizontalne ploče daje se raspored brzina

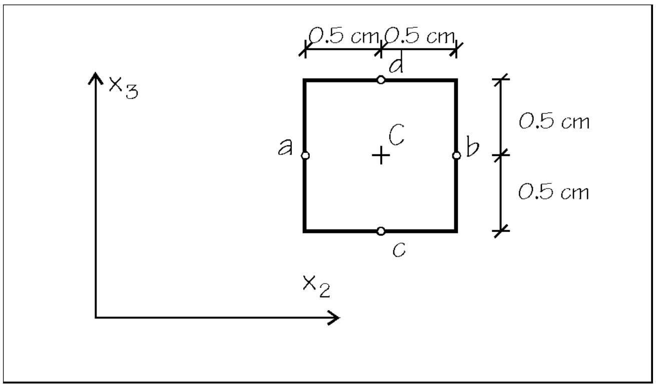
$$u_1 = \frac{U}{H} x_2 \qquad u_2 = 0$$

Za taj slučaj napisati izraze kojima se određuje (u funkciji x_1 i x_2) raspored:

1. pritisaka p
2. devijatorskog napona $\sigma_{12} = \sigma_{21}$
3. ubrzanja
4. motornog i deformacionog rada.

XIX

Zadatak 1.



Za jedan slučaj ravanskog strujanja, u određenom trenutku, u obeleženim tačkama su:

		a	b	c	d
brzine (cm/s)	u_2	60	62	62	60
	u_3	40	44	39	45

Za delić u tački (C), u sredini kvadrata, odrediti:

I) Komponente ubrzanja u pravcima (2) i (3) i na osnovu njih grafički prikazati rezultujuće ubrzanje (ubrzanje je vektor), pod uslovom da se za jednu sekundu sve brzine povećavaju za $3cm/s$.

II) Povećanje (ili smanjenje) pritiska posmatranog delića u pravcu x_2 i u pravcu x_3, tj. sračunati razlike pritisaka $p_b - p_a$, odn. $p_d - p_c$. Fluid se može smatrati idealnim i nestišljivim. Osovina x_2 je horizontalna, a osovina x_3 je vertikalna. Gustina fluida je $\rho = 1\ kg/dm^3$

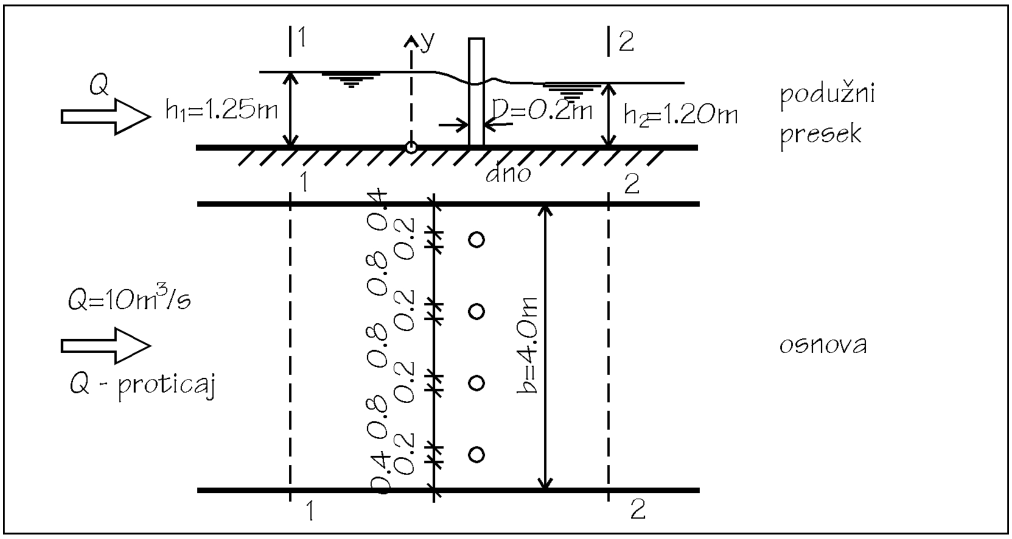
Zadatak 2.

Vodeni tok u pravougaonom kanalu usporavaju 4 stuba (horizontalni presek stuba je krug prečnika $0.2m$).

U presecima 1–1 i 2–2 vlada hidrostatička raspodela pritisaka, a koeficijent neravnomernosti brzina iznosi $\beta_1 = 1.03$ u preseku 1–1, i $\beta_2 = 1.06$ u preseku 2–2.

Koeficijent neravnomernosti brzine određen je sa

$$\beta = \frac{\int_A u^2\, dA}{v^2 A}$$



$u =$ brzina u pojedinoj tački preseka A

$A =$ površina poprečnog preseka

$v =$ prosečna brzina u preseku, $v = Q/A$

Odrediti:

1. Silu na pojedini stub (F).

   Napomena: svi stubovi primaju podjednaku silu (iste vrednosti).

2. Koeficijent sile za pojedini stub C_F,

$$C_F = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho v_2^2 A_{st}}$$

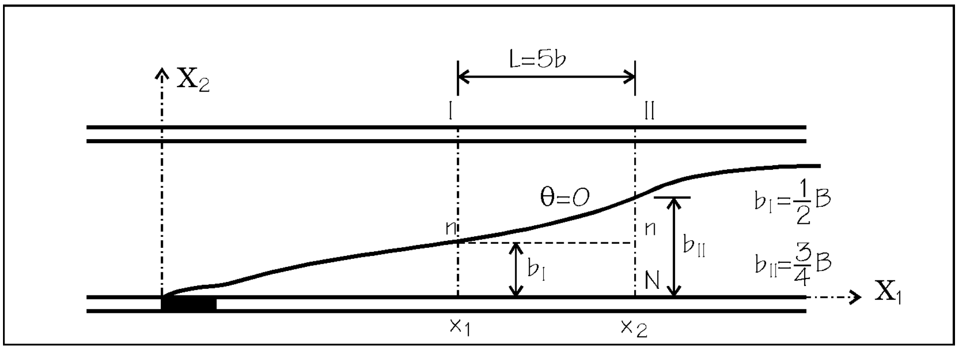
$\rho =$ gustina vode, $A_{st} =$ poprečni presek stuba $= Dh_2$.

Zadatak 3.

I. Jednačinu toplote za konačnu zapreminu – to je jednačina (34-20) u knjizi – prilagoditi turbulentnom strujanja tako da se u njoj ne pojavljuju trenutne vrednosti već osrednjene vrednosti i fluktuaciona odstupanja, tj. za temperaturu $\theta = \overline{\theta} + \theta'$, za brzinu $u_j = \overline{u_j} + u_j'$, itd. a za uslove da su specifična toplota (C) i koeficijent provodljivosti (λ) konstante, kao i da se osrednjena temperatura u nekoj tački ne menja kroz vreme. Gustina je $\rho =$Const.

II. Istu jednačinu skratiti pod pretpostavkom da je provođenje (kondukcija) toplote zanemarljivo, kao i dobijanje toplote deformacionim radom.

III. Jednačinu napisanu za uslove pod II. primeniti na sledeći primer.



U bloku pravougaonog kanala širine B u kome je dubina $h = Const.$ nalazi se moćni toplotni izvor koji greje vodu i toplota se širi kanalom, zahvaljujući turbulenciji, jer su osrednjene brzine

$$\overline{u_1} = U = Const, \qquad \overline{u_2} = 0$$

Osrednjeno strujanje je ustaljeno.

U pravcu (1) proticanje fluktuacijama je zanemarljivo u odnosu na osrednjeno, tj.

$$\overline{\theta}\overline{u_1} \gg \overline{\theta' u_1'}$$

Osrednjena temperatura po jednoj vertikali zanemarljivo sa menja (može se uzeti da je konstantna) tj.

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_3} = 0, \text{ odnosno } \theta = \theta(x_1, x_2)$$

Raspored osrednjenih temperatura po preseku II je dat izrazom

$$\overline{\theta_{II}} = \overline{\theta_{IIo}} \left(2\frac{x_2^3}{b_{II}^3} - 3\frac{x_2^2}{b_{II}^2} + 1 \right) \qquad \text{za } 0 < x_2 < b_{II}$$

gde je $\overline{\theta_{IIo}}$ temperatura na zidu u preseku II (u tački N) dok se za $\theta = 0$ uzima temperatura nezagrejane vode. Kroz ravan $n - n$ (vidi skicu) protiče toplota zavisno od osrednjenog proizvoda fluktuacija temperature i poprečne brzine $\overline{\theta' u_2'}$. Za celu dužinu $n - n$ prosečna vrednost toga proizvoda je

$$\overline{\theta' u_2'}_{\text{prosečno}} = \frac{1}{l} \int_{x_I}^{x_I I} \overline{\theta' u_2'} \, dx_1$$

Sračunati odnos

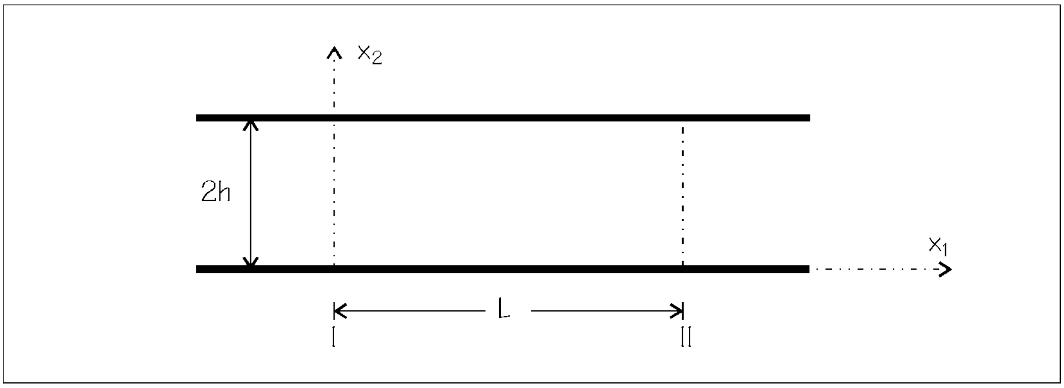
$$\psi = \frac{\overline{\theta' u_2'}_{\text{prosečno}}}{\overline{\theta_{IIo}} U}$$

IV. Sračunati energiju koja se prenosi kroz navedenu ravan $n - n$ za 3 minuta sa podacima za vodu:

gustina $\rho = 1kg/dm^3$
specifična toplota $C = 4200\dfrac{J}{kgK}$
$K = 1^oC$ (temperaturni stepen po Kelvinu ili Celziju)
temperatura na zidu u preseku II $\overline{\theta_{IIo}} = 15^oC$
širina kanala $B = 2.0m$
dubina toka $h = 1.6m$
brzina toka $U = 0.8m/s$.

XX

Zadatak 1.



Vodena struja između dve paralelne ploče (na međusobnom rastojanju jednakom $2h$) nosi materijal čija je koncentracija u datom trenutku:

$$\begin{array}{lll} \text{u preseku I:} & C = C_{0,\mathrm{I}}(1 - \sqrt{2x_2/h}) & \text{za} \quad 0 < x_2 < h/2 \\ & C = 0 & \text{za} \quad h/2 < x_2 < 2h \\ \text{u preseku II:} & C = C_{0,\mathrm{II}}(1 - \sqrt{4x_2/h}) & \text{za} \quad 0 < x_2 < h/4 \\ & C = 0 & \text{za} \quad h/4 < x_2 < 2h \end{array}$$

(presek II je udaljen za dužinu L od preseka I)
x_2 = rastojanje od donje ploče,
$C_{0,\mathrm{I}}$ i $C_{0,\mathrm{II}}$ su koncentracije na dnu.
Pod koncentracijom C se podrazumeva odnos proticaja mase materijala (koga voda nosi) i proticaja mase vode koji u datom trenutku teku kroz elementarni pojas na rastojanju x_2.
Raspored brzina vode u datim presecima je istovetan i izražava se sa:

$$u = u_m \left(\frac{x_2}{h}\right)^{1/6}$$

za donju polovinu struje (za $0 < x_2 < h$), dok je za gornju polovinu raspored simetričan u odnosu na sredinu struje ($x_2 = h$).

$$u_m = \text{brzina u sredini struje}$$

Prethodni navodi ukazuju da se zadatak rešava kao ravanski (u ravni 1,2).

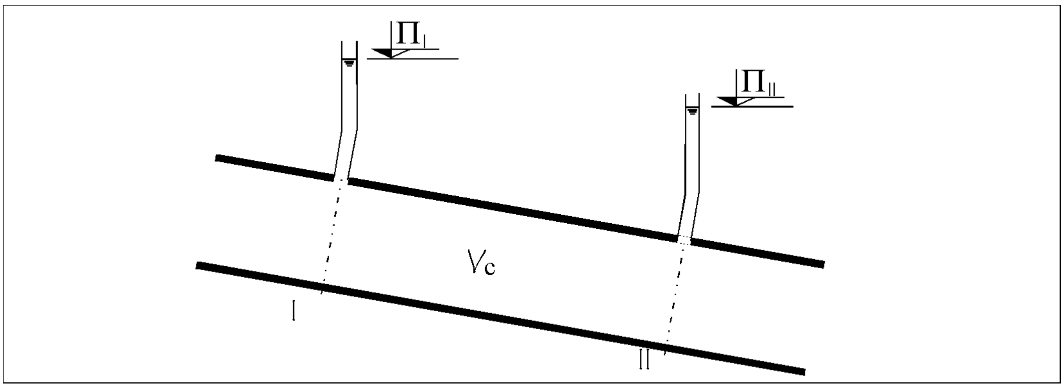
I) Sračunati kolika je u posmatranom trenutku brzina povećanja natačoženog materijala između preseka I i II, po jedinici širine (širina se meri upravno na posmatranu ravan). Tražena veličina ima dimenziju $\left(\dfrac{\text{masa}}{\text{vreme x dužina}}\right)$. Račun obaviti za sledeće podatke:

$$L = 10m, \quad h = 8m, \quad C_{0,\mathrm{I}} = 0.005, \quad C_{0,\mathrm{II}} = 0.004, \quad u_m = 65cm/s \quad \text{i}$$

gustina vode $\rho = 1g/cm^3$.

II) Pod pretpostavkom da se dati podaci mogu uzeti kao prosek za tečenje u trajanju od 1 minutu, koliko se povećava masa deponovanog materijala?

Zadatak 2.



Posmatra se ravanska ustaljena struja nepromenljive debljine između dva poprečna preseka – I i II – zahvaćena zapremina iznosi V_c.

I) Uz potrebno obrazloženje pokazati koliko iznosi ukupan rad (motorni + deformacioni), u jedinici vremena, na zapreminu V_c, usled delovanja sledećih napona:

- osrednjenih napona posredstvom viskoznosti, tj. osrednjenih devijatorskih napona $\overline{\sigma_{ij}^d}$,
- "napona turbulencije" $\sigma_{ij}^t = -\rho\overline{u_i' u_j'}$

II) Na osnovu rezultata dobijenog pod I pokazati vezu između motornog i deformacionog dela rada navedenih napona (napominje se da se deformacioni rad "napona turbulencije" obično naziva "produkcija turbulencije").

III) Primenom jednačine mehaničke energije za glavno strujanje nestišljivog fluida, na konačnu zapreminu V_c (između preseka I i II), a to je jednačina (53-26) u knjizi, povezati pijezometarsku razliku $\Pi_I - \Pi_{II}$ sa deformacionim radovima usled delovanja napona $\overline{\sigma_{ij}^d}$ i σ_{ij}^t. Pretpostaviti da je pijezometarska kota konstantna za jedan presek.

Iz prethodnoga razjašnjenja sledi i povezivanje navedenih radova sa tzv. "izgubljenom energijom" između preseka I i II:

$$E_{izg}^{\mathrm{I-II}} = \Pi_I + \frac{v_I^2}{2g} - \left(\Pi_{II} + \frac{v_{II}^2}{2g}\right)$$

gde je $v_I = v_{II}$ srednja brzina u presecima I i II.

IV) Objasniti kuda odlazi ono što se obično opisuje kao E_{izg}. Pri tome obrazložiti šta se računski prenosi u fluktuacije (i šta sa time biva u fluktuacijama), a šta se još u okviru glavnog strujanja izgubi. Ako je zid hrapav koji je deo zanemarljiv?

Zadatak 3.

U pravougaoni kanal sa horizontalnim dnom utiče kroz deset proreza u dnu ukupno $2.5 m^3/s$ (kroz svaki prorez po $0.25 m^3/s$). Doticanje utiče u kanal sa brzinom $W = 2.2 m/s$ pod uglom od 60^o prema horizontali.

Na kraju sabirnog kanala uspostavlja se kritična dubina.

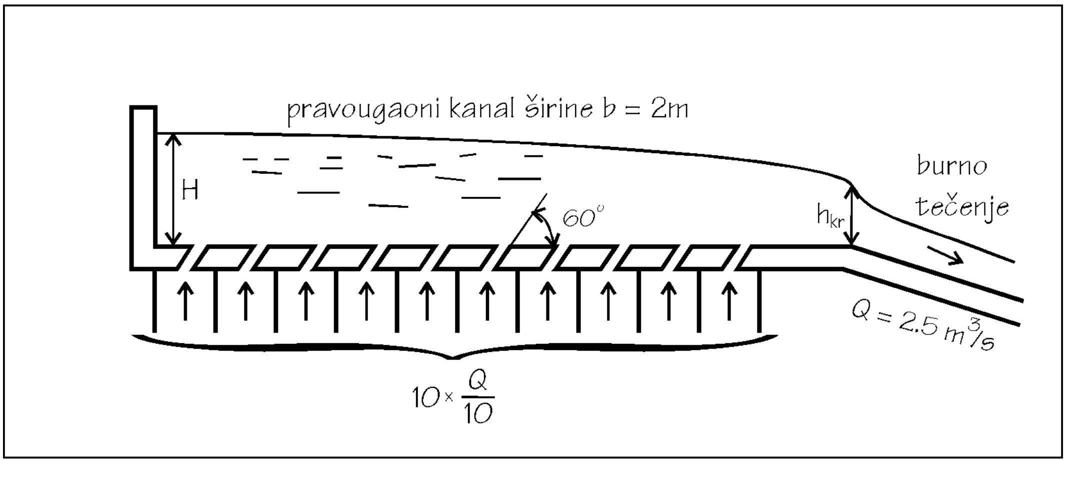
Sračunati dubinu H na početku kanala.

Trenje se zanemaruje.

I) Da li bi se, na osnovu datih podataka, zadatak mogao rešiti i da je dno kanala nagnuto (nije horizontalno)?

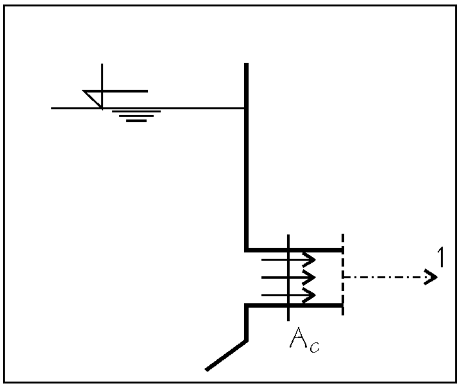
II) Da li bi dubina (H) bila veća (ili manja) da je ulazna brzina (W) vertikalno usmerena?

III) Zapremina vode u kanalu od preseka gde je dubina H do preseka gde je dubina h_{kr} iznosi V_0, a težina te mase $G = \rho g V_0$. Da li se sila na dno razlikuje od sile G?



XXI

Zadatak 1.



Kroz presek A_c (krug poluprečnika $= r$) ulazi struja sa osrednjenim brzinama usmerenim normalno na presek (u pravcu "1").
Napisati izraze za ulaz kinetičke energije u jedinici vremena kroz presek A_c, tj. proticaja te energije, i to:

1. u osrednjenom (glavnom) strujanju
2. u fluktuacijama, prenosom osrednjenom brzinom (konvekcija)
3. u fluktuacijama, prenosom fluktuacionim brzinama (difuzija)

Ti proticaji, samo uz ograničenje na presek A_c, napisani su kao prvi član desnih strana jednačina (53-26), odnosno (53-32).

Napomena: Izraze ne pisati sa uopštenim indeksima "i", "j", nego sa indeksima "1", "2" i "3", i pri tome izostaviti sve sabirke koji su u posmatranom primeru jednaki nuli.

* * *

I Sračunati odnos ulaženja navedenog pod (2) u odnosu na izraz pod (1). Pri tome koristiti sledeće zakonitosti:

a) Osrednjena brzina $\overline{u}$ u pojedinoj tački određena je sa:

$$\frac{\overline{u}}{\overline{u_m}} = \left(\frac{x_2}{r}\right)^{1/7}$$

gde se $\overline{u_m}$ odnosi na brzinu u središtu preseka ($x_2 = r$), a x_2 je udaljenost od zida.

b) Pri izračunavanju navedenog pod (2) koristiti eksperimentalna iskustva na osnovu kojih se može napisati:

$$\frac{\overline{u'_j u'_j}}{\overline{u_m}^2} = 0.02\left(1 - \frac{x_2}{r}\right)$$

II Zaključiti da je odnos ulaženja pod (3) zanemarljiv u odnosu na (1), gde se može pretpostaviti da je (3) više nego 10 puta manje od (2).

III Sračunati ulaženje kinetičke energije u jedinici vremena ako se računa bez vođenja računa o neravnomernosti u rasporedu brzina, tj. sa

$$\rho Q \frac{v^2}{2} = \rho A_c \frac{v^3}{2}$$

gde je v = srednja brzina za presek

$$v = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} \overline{u} dA$$

i uporediti sa ulaženjem navedenim pod (1) u uvodu zadatka, odnosno sa zbirom ulaza pod (1) i (2). Napisati zaključak iz tog upoređenja.

Zadatak 2.

Posmatra se turbulentna struja u cevi poluprečnika r, koja se pruža duž cevi, u pravcu (1), pa su osrednjene brzine: $\overline{u_1} = \overline{u}$, $\overline{u_2} = \overline{u_3} = 0$.

Osrednjeni proizvod fluktuacionih brzina može se izraziti sa:

$$-\overline{u_1' u_2'} = \frac{r}{14} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \frac{d\overline{u}}{dx_2} \qquad (1)$$

x_2 = rastojanje od zida cevi, merno po bilo kome prečniku
τ = napon trenja između fluida i zida cevi
ρ = gustina fluida ($\rho = const.$)

I Raspored "deficita brzine" obično se daje u vidu funkcije

$$\frac{\overline{u_m} - \overline{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = f\left(\frac{x_2}{r}\right) \qquad (2)$$

$\overline{u_m}$ = vrednost brzine $\overline{u}$ za $x_2 = r$.

Odrediti ovu funkciju ako važi zakonitost data sa (1).

Napomena: U računanju prihvatiti uobičajenu pretpostavku da su devijatorski naponi (koji deluju posredstvom viskoznost) zanemarljivi u odnosu na "napone turbulencije".

II Funkciju dobijenu rešenjem zadatka pod (**I**) uporediti sa preporučivanim obrascima za raspored brzina u turbulentnom sloju izuzimajući blizinu zida.

$$\frac{\overline{u_m} - \overline{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = C\left(1 - \frac{x_2}{r}\right)^2 \qquad (3)$$

C = konstanta

Uporediti izraz (3) i rešenje dobijeno pod (**I**).

III Prema funkciji dobijenoj pod (**I**) mogu se sračunati odnosi $\overline{u}/\overline{u_m}$ za sledeće vrednosti x_2/r:

1   0.8   0.6   0.4   0.2

Račun sprovesti za napon trenja τ dat sa

$$\tau = C_\tau \frac{1}{2} \rho \overline{u_m}^2 \qquad C_\tau = 0.005$$

Za blizinu zida funkcija ne važi ali se za $x_2 = 0$ ostvaruje $\overline{u} = 0$.

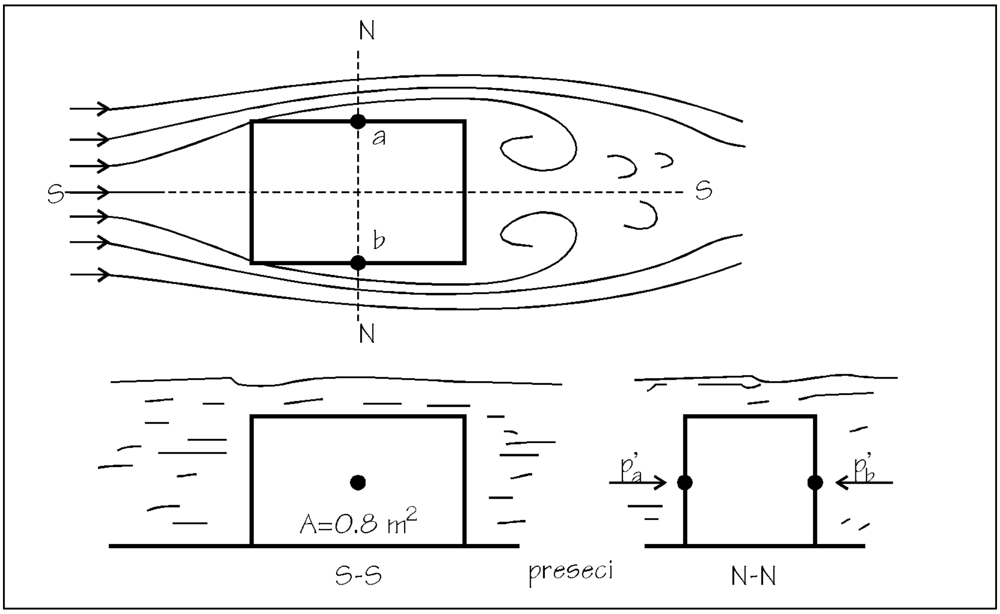
Na osnovu sračunatog grafički prikazati funkciju:

$$\frac{\overline{u}}{\overline{u_m}} = f\left(\frac{x_2}{r}\right)$$

Vrednosti dobijene pod (III) uporediti sa onima koje daje

$$\frac{\overline{u}}{\overline{u_m}} = \left(\frac{x_2}{r}\right)^{1/7}$$

Zadatak 3.



Osrednjeno strujanje oko stuba je simetrično u odnosu na ravan $S-S$, pa sila koja u pravcu N deluje na stub potiče samo od fluktuirajućih pritisaka (p').

I) Eksperimentima je utvrđeno da je srednje kvadratno odstupanje (standardna devijacija) fluktuirajućih pritisaka u tačkama (a) i (b)

$$\sqrt{\overline{p_a'^2}} = \sqrt{\overline{p_b'^2}} = 7.18kN/m^2$$

Merena je takođe i istovremna razlika pritisaka $p_a' - p_b' = p_c'$ i ustanovljeno je da je

$$\sqrt{\overline{p_c'^2}} = 8.45kN/m^2$$

Koliki je koeficijent korelacije K_{ab} između istovremenih pritisaka u (a) i (b), gde je

$$K_{ab} = \frac{\overline{p_a' p_b'}}{\sqrt{\overline{p_a'^2}}\sqrt{\overline{p_b'^2}}}$$

II) Pod pretpostavkom da pritisci u (a) i (b) predstavljaju i prosečne pritiske na bočne površine, sila iznosi

$$F' = (p'_a - p'_b)A = p'_c A$$

odnosno maksimalna očekivana sila je

$$F'_{max} = (p'_a - p'_b)_{max} A = p'_{c_{max}} A$$

uzimajući da je maksimalna očekivana razlika pritisaka jednaka trostrukoj standardnoj devijaciji pa je

$$F'_{max} = 3\sqrt{\overline{p_c'^2}}A = 3 \cdot 8.45 kN/m^2 \cdot 0.8 m^2 = 20.28 N$$

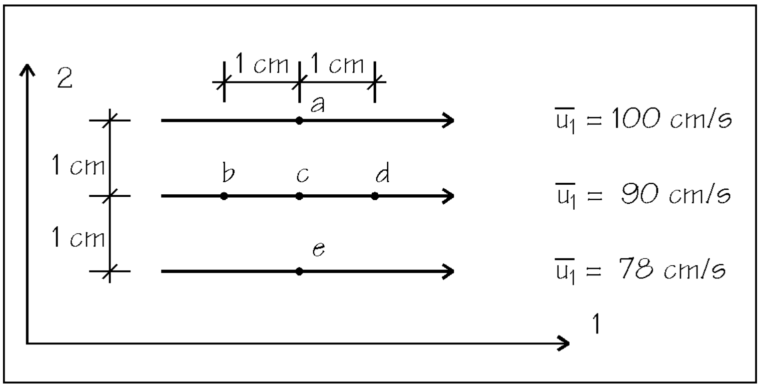
Kolika bi ta sila iznosila ako bi koeficijent korelacije K_{ab} bio:

$$+1 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad -1$$

Protumačiti rezultate.

XXII

Zadatak 1.



tačka	$-\overline{u'_1 u'_2}$	$\overline{u'_2 u'_2}$
a	30.0	25.0
b, c, d	34.2	24.7
e	38.4	24.8
	cm^2/s^2	

Osrednjeno strujanje je ustaljeno, ravansko – u ravni (1,2), pravolinijsko i paralelno – u pravcu (1), tj. $\overline{u_2} = 0$, a $\overline{u_1} = \overline{u_1}(x_2)$ (brzina $\overline{u_1}$ zavisi samo od x_2). Za tu brzinu, a za tri rastojanja x_2 date su vrednosti na crtežu.

Osa (1) je horizontalna, a osa (2) vertikalna, usmerena na gore.

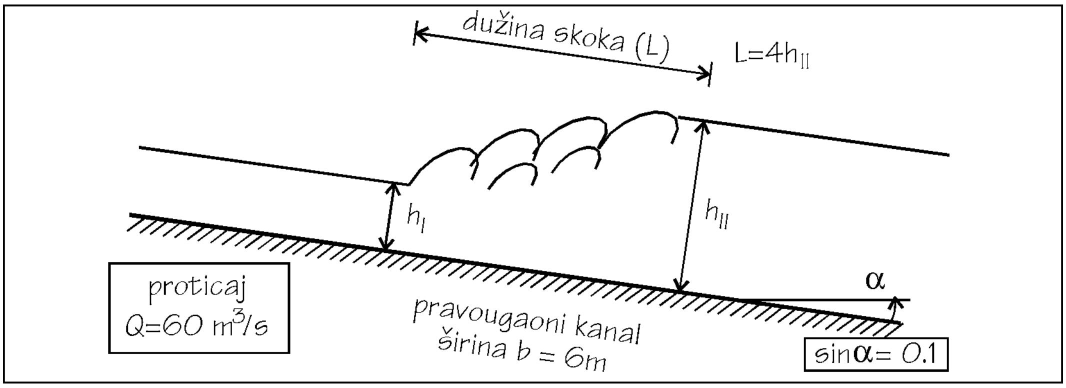
Osrednjeni proizvodi fluktuacionih brzina dati su u tabeli pored slike.

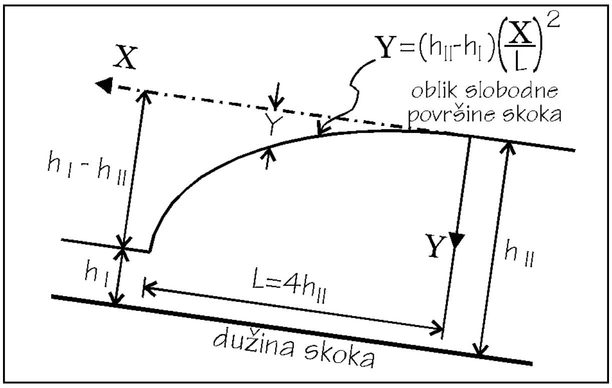
- Gustina fluida je $\rho = 1g/cm^3$,
- Koeficijent viskoznosti je $\mu = 0.012 g/cms$.

Sračunati razlike pritisaka za tačke (d) i (b) i tačke (e) i (c), tj.

$$p_d - p_b \qquad \text{i} \qquad p_e - p_c.$$

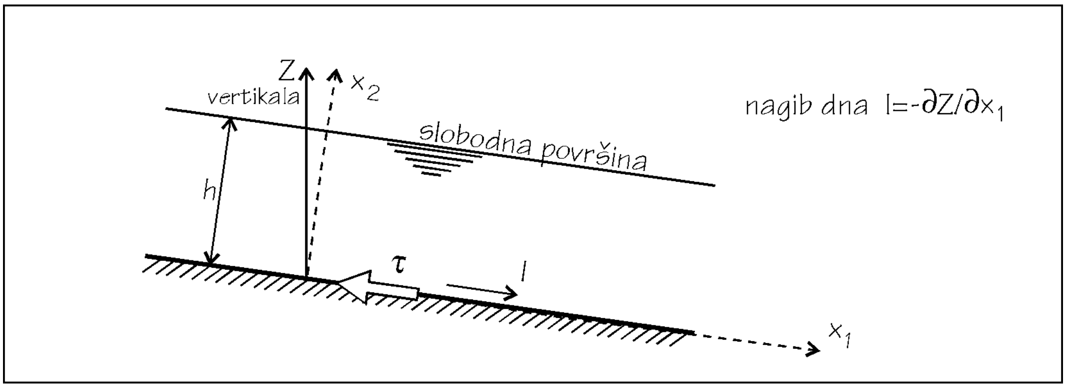
Zadatak 2.





Sračunati dubinu h_{II}, a na osnovu zadatih (i upisanih podataka). Sila trenja o dno je zanemarljiva, ali nije zanemarljiva težina. Rezultat uporediti sa skokom sa istim polaznim uslovima, ali na horizontalnom dnu.

Zadatak 3.



Strujanje je laminarno, ustaljeno, ravansko, pravolinijsko i paralelno, sa konstantnom dubinom (h) nestišljive tečnosti.

1) Za prikazani primer odrediti zavisnost napona σ_{21} od rastojanja x_2 od dna ($\sigma_{21} = \sigma_{21}(x_2)$) i to grafički prikazati za primer u kome su:

dubina $h = 2cm$
nagib dna $I = 0.001$
koeficijent viskoznosti tečnosti $\mu = 0.012 Ns/m^2$
gustina tečnosti $\rho = 900 kg/m^3$

Za granični uslov uzeti da je napon σ_{21} na slobodnoj površini tečnosti (za $x_2 = h$) jednak nuli.

Koristiti uslov da je zbog jednolikosti tečenja istovetan raspored napona i brzina u svim poprečnim presecima.

2) Za isti primer odrediti raspored brzina po poprečnom preseku ($u_1 = u_1(x_2)$) i to grafički prikazati. Pri ovom određivanju koristiti vezu između napona i deformacija za Njutnovski fluid, izraženu jednačinom (41-7) primenjenom na nestišljiv fluid.

Za granični uslov uzeti da je brzina na dnu (za $x_2 = 0$) jednaka nuli.

3) Sračnati proticaj Q za $50cm$ širine prikazane struje.

XXIII

Zadatak 1.

U cevi kružnog preseka (prečnik $= D$, površina preseka $= A = \pi D^2/4$) pri jednolikom tečenju sa srednjom brzinom (V) u preseku ($V = Q/A$, $Q =$ proticaj), nagib pijezometarske linije računa se uobičajenim obrascem:

$$I = \lambda \frac{V^2}{2gD}$$

Za koeficijent trenja (λ) daje se izraz:

$$\lambda = 0.15 \left(\frac{k}{D} \right)^{2/7}$$

gde je $k =$ apsolutna hrapavost.

Pokazati da se navedeni obrazac dobija za raspored brzina

$$\frac{\overline{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = C \left(\frac{x_2}{k} \right)^{1/7}$$

gde je ($\overline{u}$) brzina na rastojanju (x_2) od zida cevi.

Sračunati vrednost konstante (C) koja dovodi do napisanog izraza za (λ).

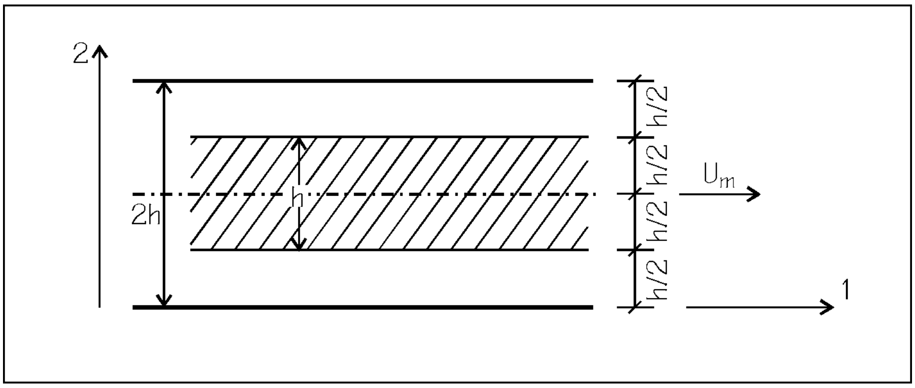
* * *

Za navedeni raspored brzina sračunati koeficijente neravnomernosti brzina

$$\beta = \frac{\int_A \overline{u}^2 dA}{AV^2} \qquad \alpha = \frac{\int_A \overline{u}^3 dA}{AV^3}$$

Zadatak 2.

Za laminarno, ustaljeno, paralelno i pravolinijsko strujanje (usmereno u pravcu 1), koje je uz to i ravansko [u ravni (1,2)], a odvija se između dve paralelne ploče (postavljene normalno na osu (2) a na međusobnom rastojanju ($2h$), sračunati koji se deo deformacionog rada devijatorskih napona obavi u središnjem delu struje u odnosu na rad u celoj struji (vidi skicu, gde je središnji deo osenčen).



* * *

Za tačku uz zid ($x_2 = 0$), gde je deformacioni rad najizrazitiji, a gde je brzina jednaka nuli pa je materijalni izvod temperature $D\theta/Dt$ jednak parcijalnom izvodu po vremenu $\partial\theta/\partial t$, primenom jednačine (34-18) iz knjige, sračunati za koliko će se povećati temperatura za jednu sekundu, usled preobraćanja deformacionog rada u toplotu. Zanemaruje se provođenje toplote (kondukcija) i predavanje toplote zidu.

Računati sa konstantnim koeficijentom viskoznosti $\nu = \mu/\rho = 0.8cm^2/s$, i specifičnom toplotom (konstantom) $C = 2600J/kgK = 2600Nm/kgK$, što odgovara $2600m^2s^{-2}K$.

Brzina u sredini struje ($x_2 = h$) iznosi $u_m = 5cm/s$, a debljina struje $2h = 2cm$.

Protumačiti rezultat

Zadatak 3.

Trajektorije delića koji prolaze kroz koordinatni početak ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) su prave linije izražene sa

$$x_2 = \frac{t_0}{t_k} x_1 \qquad (1)$$

t_0 = trenutak prolaska kroz koordinatni početak
$t_k = Const = 10s$
Nacrtati trajektorije za deliće za koje je (t_0) jednako:

0 2 4 6 8 10 (s)

Brzina u_1 (u pravcu x_1) za sve deliće je ista i ne menja se kroz vreme. Ona iznosi

$$u_1 = Const = U = 0.2m/s$$

što znači da se delić za vreme $(t_s - t_0)$ pomeri u x_1 pravcu za

$$x_1 = U(t_s - t_0) \qquad (2)$$

Na osnovu toga obeležiti tačke na trajektorijama gde se delići nalaze u trenutku t_s i nacrtati emisionu liniju u trenutku $t_s = 10s$, koju zauzimaju delići koji su prošli kroz koordinatni početak.

Napisati analitički izraz te emisione linije, u vidu

$$x_2 = x_2(x_1)$$

na osnovu jednačina (1) i (2).

* * *

Napisati izraz za emisionu liniju koju zauzimaju delići u trenutku $t_s = 8s$. Nacrtati tu liniju.

XXIV

Zadatak 1.

Raspored brzina u cevi kružnog poprečnog preseka izražen je sa:

$$\frac{\overline{u_m} - \overline{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = 2.5 ln \frac{r}{x_2}$$

r = poluprečnik cevi
x_2 = rastojanje od zida cevi
$\overline{u}$ = kroz vreme osrednjena brzina u pojedinoj tački
$\overline{u_m}$ = brzina u osovini cevi (za $x_2 = r$)
τ = napon trenja između zida cevi i fluida
ρ = gustina

I Brzina $\overline{u}$ jednaka je srednjoj brzini v za presek na relativnom rastojanju x_2/r jednakom ξ. Sračunati ξ.

$$v = \frac{Q}{\pi r^2} \qquad Q = \text{proticaj}$$

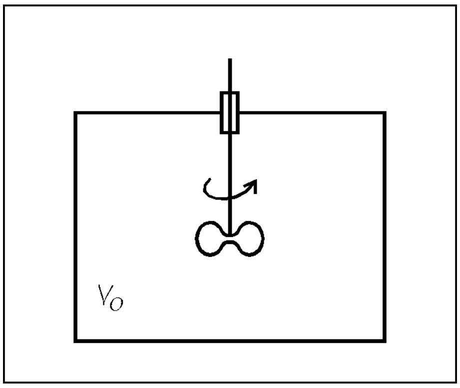
II Za vrednost za ξ sračunatu pod **I** odrediti relativnu grešku između brzine $\overline{u}$ i srednje brzine v, tj. traži se odnos:

$$\frac{\overline{u}(\xi) - v}{v}$$

a za raspored brzina:

$$\frac{\overline{u}}{\overline{u_m}} = \left(\frac{x_2}{r}\right)^{1/6} \qquad \frac{\overline{u}}{\overline{u_m}} = \left(\frac{x_2}{r}\right)^{1/8}$$

Zadatak 2.



Zatvoreni sud potpuno je napunjen vodom. U njemu elisa pokreće vodu. Prestankom rada elise kretanje vode se smiruje, i na kraju se potpuno umiri.
Početak posmatranja ($t=0$) je trenutak prestanka rada elise, a kraj posmatranja ($t = T$) je posle potpunog umirenja vode.
Kinetička energija za celokupnu zapreminu vode V_s u sudu iznosi:

$$e = \frac{\rho}{2}\int_{V_s} u_j u_j dV$$

ρ = gustina, u_j = brzina
$e = e(t)$ tj. (e) je funkcija od vremena (t).
Za $t = 0$ je, prema tome:

$$e(0) = \frac{\rho}{2}\int_{V_s} u_j u_j(0) dV \quad (1)$$

Deformacioni rad devijatorskih napona, u jedinici vremena, za zapreminu V_s, iznosi

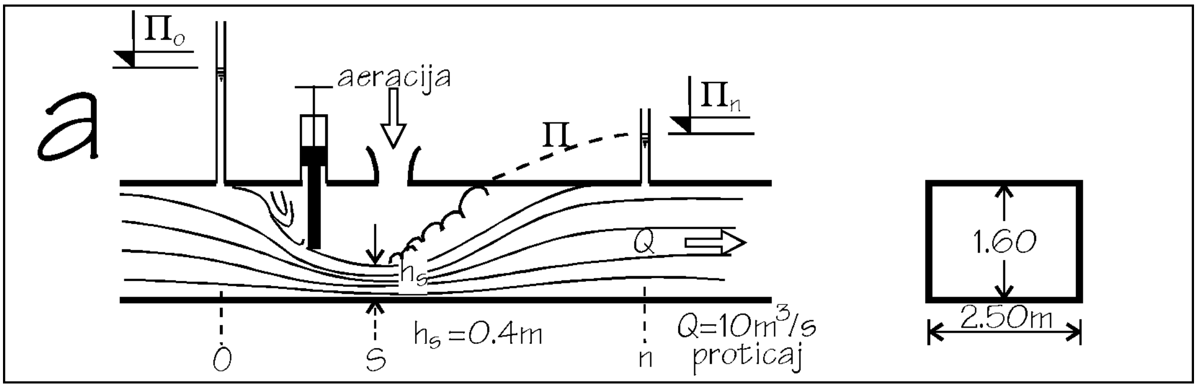
$$Def^d = \int_{V_s} \sigma_{ij}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dV$$

Def^d je funkcija od vremena (t). Posmatra se integral

$$\int_0^T Def^d dt \quad (2)$$

To je rad u intervalu od $t = 0$ do $t = T$.
Pokazati kakva je veza između izraza (1) i (2).
Napomena: Primeniti jednačinu mehaničke energije (34-6) koja važi za određeni trenutak i u njoj izostaviti članove jednake nuli (za posmatrani primer). Potom integrisati po vremenu. Pri razmatranju motorni rad površinskih sila predstaviti kao ukupni rad umanjen za deformacioni. Od zapreminskih sila deluje samo težina, a njen rad može se iz zapreminskog integrala preobratiti u površinski. Gustina je konstantna ρ =Const.

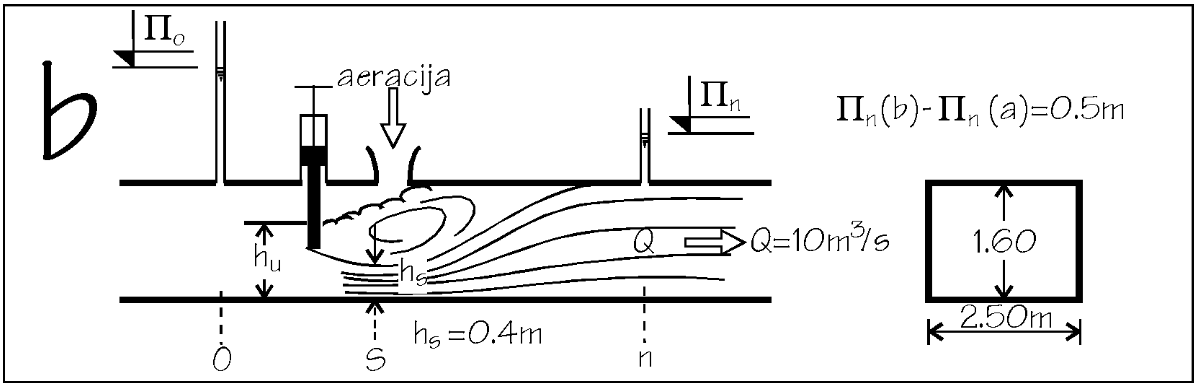
Zadatak 3.



a. Za prikazani položaj zatvarača smeštenog u horizontalno položenoj cevi pravougaonog preseka, iza zatvarača tečenje je sa slobodnom površinom uz pristup vazduha (aeracija). To burno tečenje hidrauličkim skokom prelazi u tečenje pod pritiskom u potpuno ispunjenom preseku. Skok počinje neposredno iza ustave, u preseku (s), gde je dubina vode $h_s = 0.4m$.

Za zadati proticaj ($Q = 10m^3/s$) sračunati pijezometarsku kotu Π_n u preseku (n) gde se završava vrtloženje hidrauličkog skoka, i kotu Π_o u preseku (o), ispred zatvarača. Pretpostavlja se da izgubljena energija od preseka (o) do preseka (s) iznosi 10% kinetičke energije u preseku (s).

* * *



b. Pijezometarska kota Π_n je za $0.50m$ viša od odgovarajuće kote sračunate pod (**a**). Sračunati kotu Π_o i dubinu h_u neposredno iza zatvarača (gde vlada hidrostatička raspodela pritisaka).

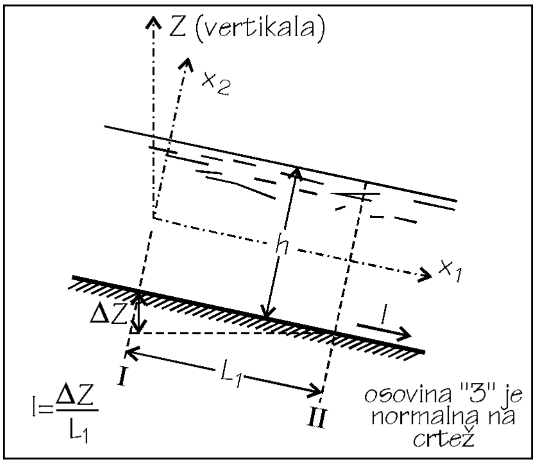
Položaj ustave je isti kao u prvom delu zadatka (pod **a**). Stoga je ista debljina ($h_s = 0.4m$) mlaza koji prodire. Takođe je isti i proticaj ($Q = 10m^3/s$).

* * *

Objasniti teškoće koje nastaju u računu skoka (određivanje Π_n uz poznato h_s i Q) ako je cev nagnuta.

XXV

Zadatak 1.



U kanalu pravougaonog poprečnog preseka (širina $= b$) tečenje je turbulentno, ustaljeno i jednoliko. Dubina vode je h.
Ustaljeno i jednoliko treba shvatiti u smislu uobičajenom za turbulentne struje: Parcijalni izvodi po vremenu i po x_1, svih osrednjenih veličina (pa i osrednjenih proizvoda fluktuacionih veličina) su jednaki nuli. Glavno strujanje je pravolinijsko i paralelno: brzine su $\overline{u_1} = \overline{u}$, $\overline{u_2} = \overline{u_3} = 0$.

I Primena jednačine mehaničke enerije za glavno strujanje, napisana sa (53-25) u knjizi, na posmatranom primeru dovodi do izostavljanja nekih članova. Uz svaki od tih članova dati objašnjenje zašto su jednaki nuli.

II Poslednji član navedene jednačine koji se odnosi na "motorni rad napona turbulencije" izraziti kao "ukupni rad" smanjen za "deformacioni". Potom pokazati da se rad sile težine troši na "deformacioni rad" koji se naziva i "produkcija" turbulentne energije. U postupku pretpostaviti da je rad devijatorskih napona (koji deluju posredstvom viskoznosti) zanemarljiv u odnosu na "napon turbulencije" ($\overline{\sigma_{ij}^d} << \sigma_{ij}^t$).

III "Produkciju" turbulentne energije u jedinici vremena napisati da se pojavljuju osrednjene i fluktuacione brzine i pri tome koristiti indekse (1, 2, 3), a ne uopštene (i, j), i izostaviti članove koji su u posmatranom primeru jednaki nuli.

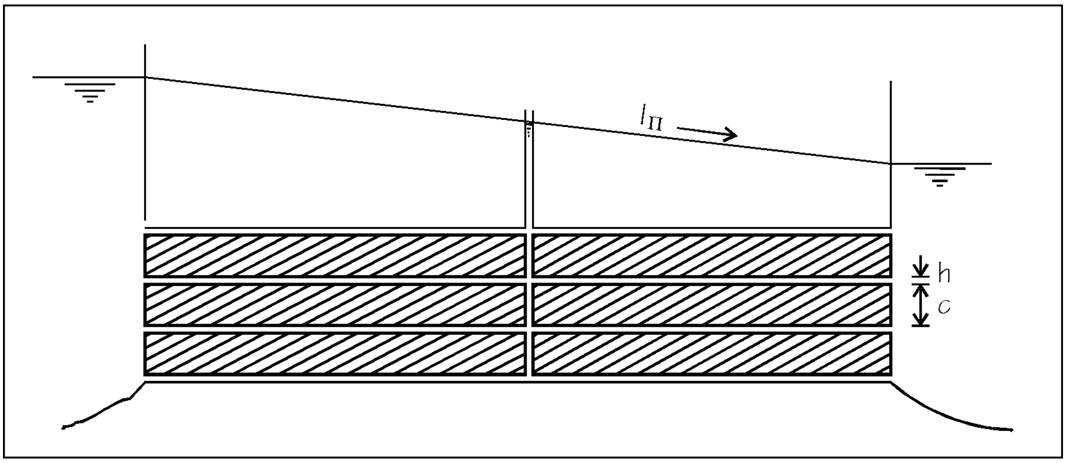
IV Za elementarnu zapreminu uzeti $dV = dAL_1$, gde je dA elementarni deo površine poprečnog preseka, a L_1 rastojanje između preseka I i II (vidi sliku). Za sve takve elementarne zapremine $-\partial Z/\partial x_1 = I = const$, gde je I nagib dna (vidi ponovo sliku). U ovom slučaju izgubljena energija E_{izg} (po jedinici težine) jednaka je spuštanju dna ΔZ. Pokazati da je

$$E_{izg}\gamma Q = Prod.$$

gde je γ = specifična težina, Q = proticaj, $Prod$ "produkcija" turbulentne energije u zapremini V između preseka I i II u jedinici vremena.

V Korišćenjem jednačine mehaničke energije u fluktuacijama, napisana sa (53-32) u knjizi, pokazati da se "produkcija turbulentne energije" (ono što je iz glavnog strujanja prešlo u fluktuacije) troši na deformacioni rad devijatorskih napona u fluktuacijama gde se posredstvom viskoznosti energija povećava toplotnu energiju.

Zadatak 2.



Naizmenično se smenjuju nepropusni slojevi (svaki debljine c) i procepi (debljine h). Kao "koeficijent poroznosti" može se uzeti

$$n = \frac{h}{h+c}$$

Prosečna brzina strujanja kroz procepe (v) može se analitički izraziti. To je ustaljeno, laminarno, pravolinijsko, paralelno i ravansko strujanje, između dve paralelne ploče.

Na zadati primer može se primeniti i Darsijev zakon filtracije:

$$w = KI_\Pi$$

w = brzina filtracije, I_Π = nagib pijezometarske linije, K = koeficijent filtracije.

Odnos prosečne brzine strujanja v_s i brzine filtracije w je $v_s/w = 1/n$.

Napisati izraz za koeficijent filtracije K sa kojim se može računati prikazani primer.

Zadatak 3.

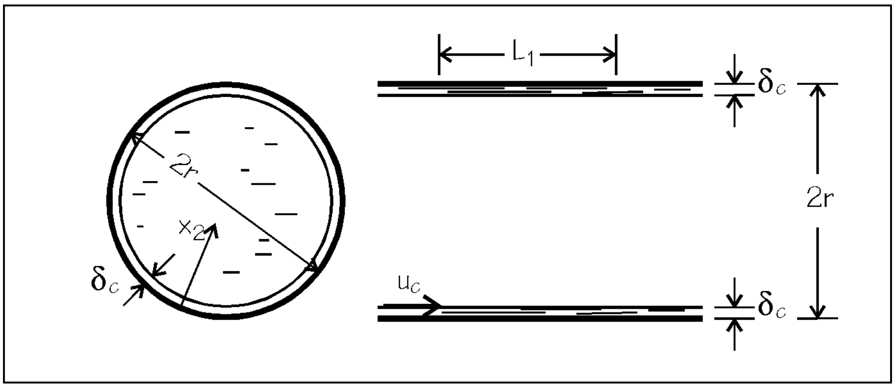
U kružnoj cevi konstantnog prečnika ($2r$), pravolinijski postavljenoj, koja se, u posmatranom slučaju, ponaša kao glatka, obrazuje se uz zid laminarni (viskozni) podsloj debljine δ_c, gde se obično pretpostavlja:

a) raspored brzina (brzina $u = u_1$ u funkciji rastojanja od zida x_2)

$$\frac{u}{u_c} = \frac{x_2}{\delta_c}$$

b) Re - broj sa brzinom u_c na granici podsloja ($x_2 = \delta_c$), i sa debljinom sloja δ_c je konstantan

$$\frac{u_c \delta_c}{\nu} \cong 100$$



I Posmatra se deformacioni rad, u jedinici vremena, u podsloju, a na proizvoljnoj dužini L_1 cevi (to je u zapremini $V_\delta = \delta_c 2\pi r L_1$. Zapremina se može napisati tako, jer je $\delta \ll r$). Pokazati da je taj rad jednak:

$$= 10\sqrt{\frac{\tau^3}{\rho}}\pi D L_1 \qquad \text{(I)}$$

τ = napon trenja između fluida i zida cevi
ρ = gustina.

II U Hidraulici se izražava "izgubljena energija po jedinici težine" između dva preseka. Neka to, između preseka na međusobnom rastojanju L_1 (u posmatranoj cevi) iznosi E_{izg}.

Množenjem E_{izg} sa γQ (γ = specifična težina, Q = proticaj) dobiće se "izgubljena energija" u jedinici vremena za celu zapreminu $\frac{1}{4}\pi D^2 L_1 = V_o$. Zašto? Pokazati da to množenje daje rezultat

$$= \tau\pi D v L_1 \qquad \text{(II)}$$

gde je v = srednja brzina u cevi $\dfrac{Q}{\pi D^2/4}$.

III Objasniti da odnos $(I)/(II)$ znači deo izgubljene energije u podsloju, u odnosu na izgubljenu energiju u celoj struji. Sračunati taj odnos ako je koeficijent trenja u cevi $\lambda = 0.02$ $\left[\lambda = \dfrac{E_{izg}}{v^2/2g}\dfrac{D}{L}\right]$. Ako taj odnos nije zanemarljiv, u odnosu na jedinicu (a to će se dobiti), da li to znači da na otpor trenja uticaj viskoznosti nije zanemarljiv? Primećuje se da je u pitanju glatka cev.