Georgije Hajdin

MEHANIKA FLUIDA

knjiga treća

DODATNA POGLAVLJA

Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu

Georgije Hajdin
MEHANIKA FLUIDA
knjiga treća DODATNA POGLAVLJA

Recenzenti: Marko Ivetić, Miodrag Jovanović i Radomir Kapor

Odobreno za štampu odlukom Naučno–nastavnog veća Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, na sednici održanoj 25. juna 2009. godine.

Izdavač: Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu

Glavni i odgovorni urednik: Đorđe Vuksanović, dekan

Tehnički urednik: Radomir Kapor

Crteži: Nenad Stefanović, Budo Zindović i Dušan Kostić

Unos teksta: Vera Tejić, Nevena Grbić, Ana Mijić i Nemanja Branisavljević

Štampa i povez: DEDRAPLAST, Beograd

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

532(075.8)

ХАЈДИН, Георгије, 1925 -
Mehanika fluida. Knj. 3, Dodatna poglavlja / Georgije Hajdin ; [crteži Nenad Stefanović, Budo Zindović i Dušan Kostić]. - Beograd : Građevinski fakultet Univerziteta, 2009 (Beograd : Dedraplast). - VIII, 337 str. : graf. prikazi ; 24 cm

Tiraž 500. - Bibliografija: str. 337.

ISBN 978-86-7518-108-8

a) Механика флуида
COBISS.SR-ID 168248332

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Ova „Knjiga treća – DODATNA POGLAVLJA” sadrži pet delova, od jedanaestog do petnaestog, dok prethodnih deset delova ulaze u sastav prve dve knjige. Ta povezanost sa prve dve knjige nije samo formalna, jer se na navode u njima često pozivaju izlaganja u ovoj knjizi.

„Knjiga prva – OSNOVE” daje osnov na kojima se zasnivaju praktične primene mehanike fluida u tehničkoj praksi, a „Knjiga druga – UVOĐENJE U HIDRAULIKU” uvodi u „Hidrauliku” što je uobičajen naziv za hidromehaniku primenjenu u tehničkoj praksi – u knjizi je to primena na hidrotehniku u građevinarstvu.

Delovi treće knjige i poglavlja u njima ne mogu se staviti pod zajednički naslov, jer su teme u njima različite i međusobno nepovezane, pošto se odnose na više područja hidrotehničke prakse. Knjizi se ipak mora dati naslov i dat je „DODATNA POGLAVLJA”, što ništa određeno ne znači, ali se sadržaj može uvideti iz naslova delova i poglavlja. Na to šta je od primene hidromehanike u tehničkoj praksi ušlo u knjigu uticaj su imali sadržaji predavanja koje je autor držao na fakultetima u Beogradu, Sarajevu, Novom Sadu i Subotici.

*   *   *

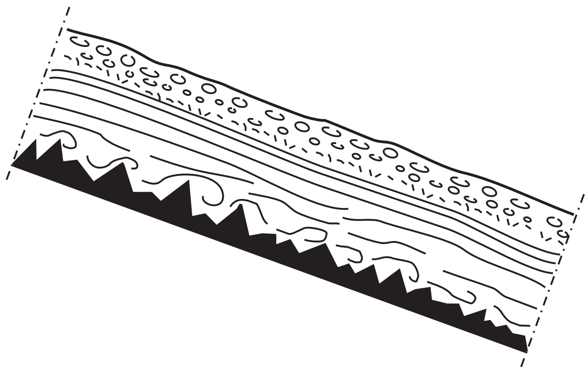
Zahvaljujem se članovima Katedre za hidrotehniku i vodno ekološko inženjerstvo, Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, na nesebičnoj pomoći u izradi ove knjige.

Georgije Hajdin

deo jedanaesti
AERACIJA, KAVITACIJA, FLUKTUACIJE PRITISKA

111
AERACIJA (OVAZDUŠENJE VODENIH TOKOVA)

Aeracija ili *ovazdušenje* vodene struje je uvlačenje vazduha u vodu na dodiru vodene struje sa vazduhom. Ta pojava se, na primer, javlja u hidrauličkom skoku, gde vodeni vrtlog uvlači vazduh, i naročito pri vrhu skoka, stvara se mešavina vode i vazduha.



Slika 111–1 U kanalu sa velikim brzinama voda uvlači vazduh.

U kanalu, koji se ponegde naziva „brzotok", pri velikoj brzini nemirna površina vode uvlači vazduh, pa izgleda kao da je vodena struja pokrivena penom mešavine vazduha i vode. Uvlačenju vazduha pogoduje hrapavo dno koje bolje uznemirava tok, pogotovo ako dubina u kanalu nije velika.

U praktičnom rešavanju zadatka, gde se vazduh uvlači u vodu, pribegava se načinu da se zadatak rešava kao da teče samo voda. Prema izlaganjima u prethodnim poglavljima odredi se dubina iza skoka, odnosno duž brzotoka. Ovo se opravdava time što je masa vazduha zanemarljiva u odnosu na masu vode (jer je gustina vazduha skoro 1000 puta manja od gustine vode), pa se smatra da masa vode može da pronosi uvučeni vazduh bez dopunskih sila (ili dopunske energije).

Ovakav pristup je opravdan ako se pretpostavi da je uvučeni vazduh pri vrhu toka, pa voda ispod njega teče isto kao da njega nema, jer je njegova težina zanemarljiva, pa neosetno pritiskuje vodu. To nije potpuno tačno, ali se kao približno može prihvatiti u pretežnom broju praktičnih primera. Ako se navedeno shvatanje i prihvati, zadatak ipak nije rešen, jer se mora predvideti da uvučeni vazduh zahteva prostor. Treba obezbediti veće poprečne preseke od onih koji se dobijaju u računanju sa vodom bez vazduha.

Bočni zidovi uz skok moraju biti nadvišeni iznad sračunate dubine iza skoka, jer je površina vode nemirna i uz to je presek naduvan. Isto važi i za kanal – brzotok. Koliko to nadvišenje treba da bude? Mogla bi se dati preporuka da poprečni presek treba povećavati barem za 20% od preseka dobijenog računom sa tečenjem vode bez vazduha.

U narednom poglavlju (112.) u primeru na slici 112-3, predviđa se (pod „b") ovazdušenje, jer je neprihvatljiva pojava potpritisaka do koje dolazi ako bi se primenilo rešenje prema „a". Tako će se objasniti zašto je „a" neprihvatljivo i zašto se mora vodeni tok ovazdušiti, a za sada se može zaključiti da uvučeni vazduh zahteva prostor, i u zatvorenom provodniku se mora za vazduh predvideti deo preseka, jer nedovoljno predviđeni prostor za vazduh smanjuje propusnu moć.

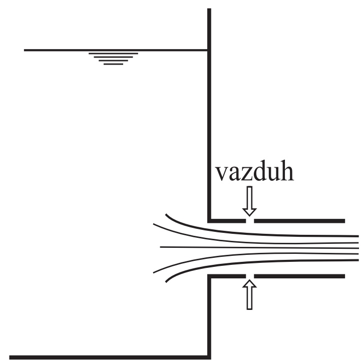
Može se navesti dosta primera gde se javlja aeracija. To je prelivni mlaz niz nizvodnu kosinu brane, pa presek posle isticanja kroz otvor, u objektima za umirenje, itd.

* * *

Ovazdušenje (aeracija) obezbeđuje apsolutni pritisak jednak atmosferskom (pijezometarsku kotu na položajnoj) na mestu gde vazduh ulazi u vodu. U isticanju iz suda kroz naglavak (slučaj „b" na slici 107–2) na početku naglavka vlada potpritisak (pijezometarska kota je ispod položajne). Na slici 111–2 taj presek je ovazdušen, pa je mlaz bez pritiska i prosečna pijezometarska kota za presek je u njegovoj osovini. Stoga je proticaj uz aeraciju manji od onoga kada aeracije nema, aeracija proticaj svodi na onaj u slučaju „a" na slici 107-2.

* * *

I na primeru sa slike 111–3 aeracija će apsolutni pritisak svesti na atmosferski, i to na izlasku iz aeracione cevi, pa će Π-kota za ceo sud



Slika 111–2 Aerisanjem izlaznog mlaza naglavak ne utiče na proticaj, on je isti kao da naglavka nema (proticaj je kao u „a" na slici 107-2, a nije kao u „b").

biti na koti izlaska iz aeracione cevi, na koti označenoj sa Π_0 na slici, i ona je za visini H iznad kote otvora iz suda, pa je H visina isticanja.

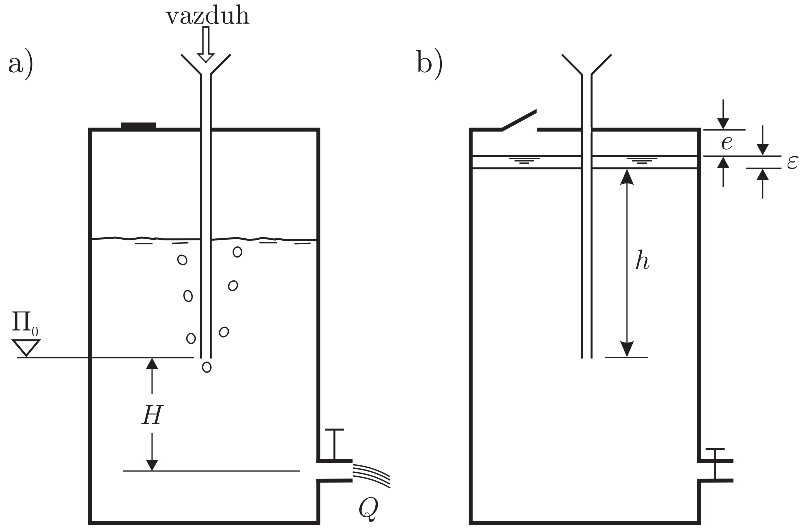
Proticaj će tokom isticanja biti konstantan, iako se nivo u sudu spušta (nema uvođenja vode u sud), a vazduh iznad vode se razređuje tako da pijezometarska kota ostaje konstantna (kota Π_0). Proticaj je:

$$Q = C_Q A \sqrt{2gH} \tag{111–1}$$

Ovo je obrazac za isticanje, napisan sa (107-10), proticaj je Q, a A površina otvora isticanja, dok je visina isticanja H, a C_Q je koeficijent isticanja.

Kako se uspostavlja opisano stanje može se zaključiti uvidom u desni crtež na slici 111-3 . Sud je otvoren i napunjen vodom skoro do vrha, malena visinska razlika e preostaje između nivoa vode i plafona suda, potom se zatvara otvor na plafonu, a otvara se otvor za isticanje. Vazduh iznad vode se veoma brzo razredi da se postigne pijezometarska kota Π_0 za sud, i iza toga nastaje isticanje sa konstantnim proticajem Q, navedenim izrazom (111–1). Da se zaista to postiže, kako je rečeno, veoma brzo, odnosno uz maleno naknadno spuštanje ε, dokazuje se sledećim izlaganjem.

Iz jednačine stanja (42–7), mogu se pročitati tri pravila od kojih prvo kaže da je „za konstantnu temperaturu, proizvod pritiska i zapremine konstantan". To se odnosi na određenu masu gasa, uz napomenu



Slika 111–3 a) Isticanje konstantnim proticajem iz suda koji se prazni, vazduh iznad vode se razređuje, a (Π) kota ostaje konstantna (na slici Π_0), pa je visina (H) isticanja konstantana. b) Pre rada prema „a" sud je otvoren, a otvor za isticanje zatvoren, ostavlja se prazan prostor visine (e) pošto se sud gore zatvori, a otvori se otvor za isticanje.

da se pravilo odnosi na apsolutni pritisak. Primena pravila za posmatrani slučaj dovodi do:

$$p_{\text{atm}}\,\Omega\,e = (p_{\text{atm}} - \gamma\,h)\,\Omega\,(e+\varepsilon) \tag{111–2}$$

gde je Ω površina horizontalnog preseka suda, a h visinska razlika između izlaznog otvora aeracione cevi i nivoa vode spuštenog za $e+\varepsilon$ ispod plafona suda, dok je γ specifična težina vode.

Iz napisane jednačine sledi:

$$\frac{e+\varepsilon}{e} = \frac{p_{\text{atm}}/\gamma}{(p_{\text{atm}}/\gamma) - h} \tag{111–3}$$

Kako je p_{atm}/γ oko 10 m, a h neka ne prelazi 5 m (pa i to je dosta visok sud), pa prethodni odnos ne prelazi 2, što znači da je $\varepsilon = e$, a to je zaista veoma malo s obzirom da je visina e malena.

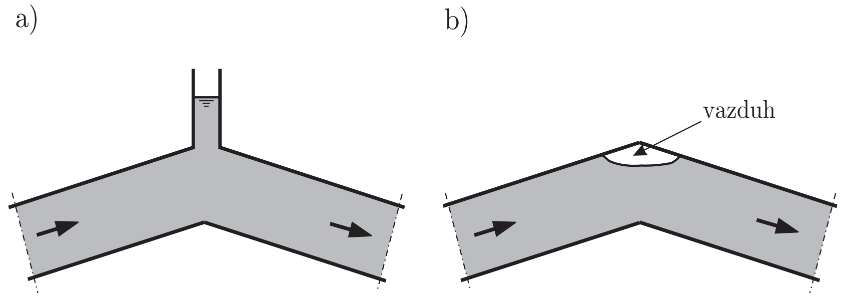
Razmatrani sud može imati praktičnu primenu tamo gde se u izvesnom vremenu želi konstantan proticaj. On je poznat pod imenom

„Mariotova boca" - čime se naziv povezuje sa znamenitim fizičarem (Mariotte) od koga potiče i opšti zakon čija je primena dovela do ispisivanja jednačine (111–2).

Pošto se nivo u sudu spusti na kotu Π_0, nadalje je isticanje uz smanjivanje proticaja.

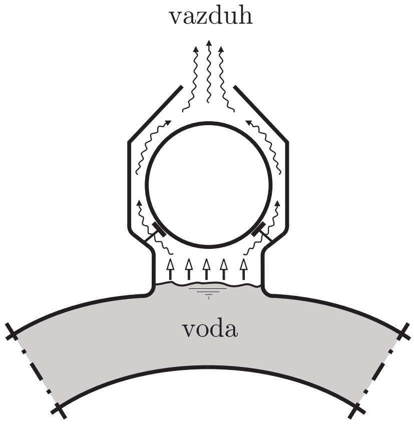
* * *

Suprotan proces od aeracije je dezaeracija tj. izlazak vazduha iz vode. Vazduh je uvučen, kako je opisano na mestima jačeg vrtloženja, ili u toku sa velikim brzinama. Kod otvorenih tokova on će izaći iz vode pošto se vrtloženje smiri, odnosno brzine smanje. Iz zatvorenog provodnika treba omogućiti odstranjivanje vazduha.



Slika 111–4 a) Aeraciono okno omogućava isticanje vazduha. b) Ako nema okna vazduh se sakuplja na temenu cevi.

U zatvorenom provodniku vazduh se skuplja pri vrhu cevi (ili tunela) i ne može da izađe (slika 111–4, b), a zauzima deo poprečnog preseka, pa smanjuje proticaj. To je vazduh koji je voda uzvodnije uvukla, ili se pri punjenju cevi tu zadržava. Odstranjivanje vazduha omogućava tzv. „aeraciono okno" na temenu cevovoda gde on iz penjanja prelazi u spuštanje (slika 111–4, a). Ako je na tom mestu pijezometarska kota znatno viša od cevi, okno bi bilo isuviše visoko, pa se ugrađuje „vazdušni ventil" (slika 111–5) koji ispušta skupljeni vazduh, i kada on izađe, ventil se zatvara i voda ne može da izlazi. To je omogućeno tako da skupljeni vazduh izlazi kroz otvor (kako je prikazano na slici), a lopta je, usled dejstva sopstvene težine, spuštena, pridržavaju je oslonci. Kada vazduh izađe, voda puni ventil, i potiskuje loptu, ona se podiže, plivajući (jer je potisak veći od njene sopstvene težine) i zatvara otvor pa voda ne može izlaziti. Kada se ponovo sakupi vazduh i opkoli loptu,



Slika 111–5 Vazdušni ventil na temenu cevovoda ispušta sakupljeni vazduh (prikazano slikom). Kada vazduh izađe, ventil se napuni vodom i ona potiskom podigne loptu koja zatvori ventil.

ona se pod dejstvom sopstvene težine spusti, a vazduh izlazi. Tako je omogućeno da se, u redovnom radu cevovoda, on oslobađa vazduha.

112
KAVITACIJA

Apsolutni pritisak ne može biti negativan, minimalna vrednost je nula. Prema tome, ako račun pokaže da je negde pijezometarska kota toliko niska, da bi joj odgovarao negativni apsolutni pritisak, takav račun se mora odbaciti, jer prikazuje nešto što nije ostvarljivo. U Poglavlju 83., neposredno ispred „Primera", objašnjeno je da pri malenim apsolutnim pritiscima dolazi do isparavanja vode i pri uobičajenim temperaturama, stvaraju se mehurići vode pare, što se može shvatiti kao stvaranje šupljina u vodi – odatle za tu pojavu naziv „kavitacija" (cavitas = šupljina).

Atmosferski pritisak p_{atm} pri uslovima nazvanim „normalnim" (to je tzv. „normalni atmosferski pritisak") ravan je pritisku koji stvara visina živinog stuba od 0,76 m (ili vodenog od 10,33 m) na temperaturi od 15 °C i na nultoj nadmorskoj visini. Primećuje se da izražavanje pritiska visinom živinog stuba potiče iz vremena kada se pritisak tako i merio. Navedeni pritisak iznosi približno 10^5 Pa.

Pri navedenim uslovima, nazvanim „normalnim" voda isparava na temperaturi $\theta = 100\,^{\circ}\mathrm{C}$ (tako je baš podešena Celzijusova skala). Pri nižim temperaturama voda isparava pri nižim pritiscima (što je temperatura niža, i pritisak je niži). Za $\theta = 5\,^{\circ}\mathrm{C}$ pritisak na kome počinje isparavanje je oko 1% normalnog atmosferskog pritiska, a pri $\theta = 30\,^{\circ}\mathrm{C}$, iznosi oko 4%, a oko 20% za $\theta = 60\,^{\circ}\mathrm{C}$. Apsolutni pritisak na kome počinje isparavanje naziva se „pritisak isparavanja" ili „evaporacije" i označava se sa p_{ev}. Skreće se pažnja da je tokom celoga dosadašnjeg izlaganja (a tako će biti i nadalje) pritisak p označava $p_{\mathrm{aps}} - p_{\mathrm{atm}}$, shodno početnom dogovoru, napisanom izrazom (71–6).

Granična vrednost za pijezometarsku kotu (ispod koje se ne sme spustiti, jer bi veće spuštanje dovelo do kavitacije) iznosi:

$$\Pi = Z + \frac{p}{\gamma} = Z + \frac{p_{\mathrm{ev}} - p_{\mathrm{atm}}}{\gamma} \tag{112–1}$$

Korišćeno je (71–7), i p zamenjeno sa $p_{\mathrm{ev}} - p_{\mathrm{atm}}$ (jer je granični apsolutni pritisak jednak p_{ev}), Z predstavlja položajnu kotu, a γ je specifična težina vode. Iz prethodnog izraza dobija se za razliku između Z i Π (upravo za spuštanje Π-kote ispod Z):

$$Z - \Pi = \frac{p_{\mathrm{atm}} - p_{\mathrm{ev}}}{\gamma} \tag{112–2}$$

Pošto je to granična vrednost zahtevani uslov je:

$$Z - \Pi < \frac{p_{\mathrm{atm}} - p_{\mathrm{ev}}}{\gamma} \tag{112–3}$$

S obzirom da p_{ev} iznosi svega 1 do 4% atmosferskog pritiska (za temperature niže od $30\,^\circ$C), a p_{atm}/γ u normalnim uslovima iznosi oko 10 m, p_{ev}/γ je približno svega 0,1 do 0,4 m. Za svaki pojedinačni primer treba računati sa minimalnom vrednošću za p_{atm}/γ koja se ostvaruje na mestu gde se primer nalazi. Sa nadmorskom visinom atmosferski pritisak opada tako da se p_{atm}/γ smanjuje za otprilike 0,1 m za svako povećanje nadmorske visine od 100 m.

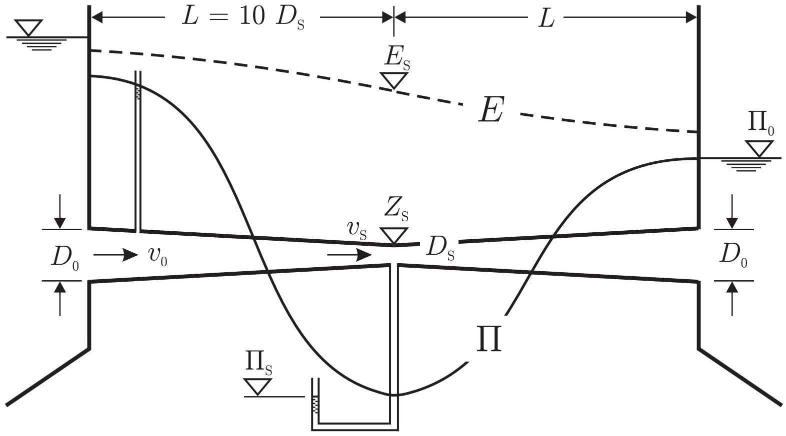
* * *

Primer na slici 112–1 dat je u nameri da se pokaže da je moguća pojava kavitacije u suženju cevi, jer se brzina toliko poveća da se pritisak snizi do onoga koji uzorkuje kavitaciju, iako pre i iza suženja nema potpitisaka.

Cev prečnika D_0 postepeno se na dužini $L = 10\,D_{\mathrm{S}}$ sužava na prečnik $D_{\mathrm{S}} = D_0/2$, iza toga se proširuje i dostiže prečnik D_0 (isti kao pre sužavanja). Sužavanje i proširivanje su postepeni u toj meri da treba računati samo sa gubitkom energije na trenje, bez dodatnog lokalnog gubitka, jer je zadovoljeni uslovi napisani na slikama 102–4, b) i 102–7, b).

Za nizvodni granični uslov uzeće se presek gde završava proširivanje, i tu je pijezometarska kota Π_0. Tu cev ulazi u sud sa konstantnom kotom nivoa Π_0 (jer je gubitak na izlazu iz cevi jednak $v_0^2/2g$) – tako je napisano sa (102–3) i prikazano na slici 102–2.

Za ocenu mogućnosti pojave kavitacije poslužiće nejednačina (112–3), koja određuje graničnu vrednost za spuštanje Π-kote, u vidu



Slika 112–1 U suženju usled sniženja pritiska moguća je kavitacija. Do nje dolazi ako je $Z_S - \Pi_S > 10$ m.

razlike $Z - \Pi$, koja za posmatrani primer iznosi:

$$Z_S - \Pi_S = \underbrace{(E_S - \Pi_S)}_{(1)} - \underbrace{(E_S - \Pi_0)}_{(2)} - \underbrace{(\Pi_0 - Z_S)}_{(3)} \qquad (112\text{–}4)$$

Ovo je ovako napisano radi lakšeg i preglednijeg objašnjenja koje sledi.

Član (1) je brzinska visina u suženju:

$$E_S - \Pi_S = \frac{v_S^2}{2g} \qquad (112\text{–}5)$$

Za član (2) se piše:

$$E_S - \Pi_0 = \frac{v_0^2}{2g} + E_{tr} = \frac{v_S^2}{2g}\left(\frac{v_0^2}{v_S^2} + \lambda\frac{L}{D}\psi\right)$$

Prvo izjednačenje je primena jednačine energije za struju između preseka u suženju i preseke gde je brzina v_0, a pijezometrijska kota Π_0 (taj presek je uzet kao nizvodni granični uslov). Gubitak na trenje između ta dva preseka označen je E_{tr}, i izražen je prema (102–6), gde je faktor $\psi = 0{,}22$ za posmatrani primer, gde je $D_0/D_S = 2$. Ta vrednost je napisana u objašnjenjima iza izraza (102–6), za $D_{II}/D_I = 2$. Uzeće se da je koeficijent trenja $\lambda = 0{,}02$, a za posmatrani primer je

$L/D = 10$. Uz to treba v_0^2/v_S^2 zameniti sa $(D_\mathrm{S}/D_0)^4 = 2^{-4}$. Sve navedene vrednosti svode prethodni izraz na:

$$E_\mathrm{S} - \Pi_0 = \frac{v_\mathrm{S}^2}{2g}\,[0{,}063 + (0{,}02 \times 10 \times 0{,}22)] = 0{,}11\, v_\mathrm{S}^2/2g \qquad (112\text{–}6)$$

Napisano sa (112–5) i (112–6) uvršteno u (112–4) daje:

$$Z_\mathrm{S} - \Pi_\mathrm{S} = 0{,}89\,\frac{v_\mathrm{S}^2}{2g} - (\Pi_0 - Z_\mathrm{S}) \qquad (112\text{–}7)$$

Ovaj izraz pokazuje da se pijezometarska kota sve više spušta što je veća brzinska visina $v_\mathrm{S}^2/2g$, upravo što je veći proticaj – za isti granični uslov. Prema tome, može se postaviti uslov za pojavu kavitacije samo ako je proticaj dovoljno velik da se to postigne. Za $v_\mathrm{S} = 16$ m/s, odnosno $v_0 = 1$ m/s, prethodni izraz daje:

$$Z_\mathrm{S} - \Pi_\mathrm{S} = 11{,}9\,\mathrm{m} - (\Pi_0 - Z_\mathrm{S}) \qquad (112\text{–}8)$$

pa je kavitacija moguća ako je $\Pi_0 - Z_\mathrm{S}$ manje od otprilike 2 m.

Primećuje se da u prethodnom postupku nije vođeno računa o uticaju turbulencije, upravo o tome da je tokom fluktuacija minimalni trenutni pritisak niži od osrednjenog, što bi dovelo do manje brzine v_S za početak kavitacije.

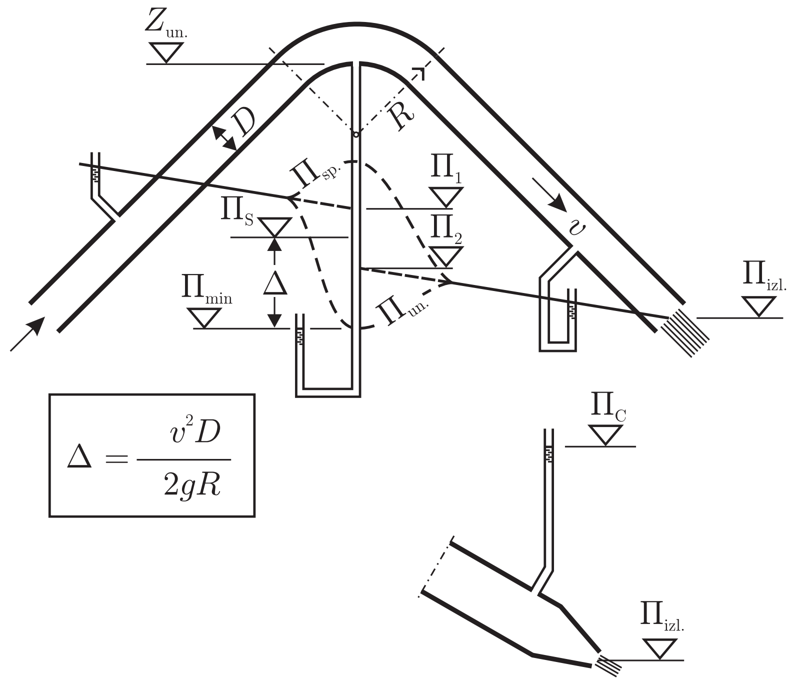
* * *

Uz pojavu kavitacije nužno je objasniti njene posledice zbog kojih se ona smatra neprihvatljivom pojavom koju treba izbeći. Na mestu suženja preseka (ili uopšte mestu povećane brzine) pritisak se snižava (pijezometarska kota se spusti), i može se dostići uslov za pojavu kavitacije. Voda počinje da isparava, stvaraju se mehurići vodene pare. Strujanje sa toga mesta minimalnih pritisaka ulazi u proširenje, gde se brzina smanjuje a pritisak povećava. Stvoreni mehurići nošeni vodenom strujom tako budu izloženi povećanom pritisku u odnosu na minimalni u kome su bili stvoreni. Naglo povećanje pritisaka naglo sabija mehuriće pare – kaže se „dolazi do implozije”. Taj burni proces potresa cev, napada zidove cevi, oštećuje ih, a pojavljuje se „korozija”, što će reći „izjedanje”. U oštećenoj cevi, usled povećanja hrapavosti, pojačava se turbulencija, fluktuacije pritisaka postaju intenzivnije, i naglo se smenjuje povećanje i smanjivanje opterećenja, što nepovoljno utiče na stabilnost cevi. Stvaranje i sabijanje mehurića pare periodičan je proces, koji može da pobudi cev na vibriranje. Sve opisano može da dovede do sloma cevi.

* * *

Slikom 112–2 prikazan je završetak cevi, u kome se nalazi krivina. Iz cevi je isticanje slobodno, što nameće pijezometarsku izlaznu kotu Π_{izl} kao nizvodni granični uslov. Svrha uvrštavanja ovoga primera je ukazivanje na mogućnost da se na unutrašnjoj strani krivine stvore uslovi za pojavu kavitacije. Razlog je za to što je na unutrašnjoj strani krivine pijezometarska kota snižena, što je prikazano još u uvodnim izlaganjima, slikom 81–3.

Pošto je brzina duž cevi ista, pijezometarske razlike su jednake energetskim. Razlika $\Pi_2 - \Pi_{izl}$ je jednaka gubitku usled trenja, a $\Pi_1 - \Pi_2$ je



Slika 112–2 Na unutrašnjoj strani krivine pijezometarska kota je snižena čime se stvaraju uslovi za kavitaciju. Dodatni crtež pokazuje da se prigušenjem izlaza otklanja mogućnost pojave kavitacije.

ono što se računa kao lokalni gubitak na krivini. Od kote Π_S, na sredini između Π_1 i Π_2, do minimalne pijezometarske kote Π_min (na unutrašnjoj strani krivine) spuštanje, označeno sa Δ na slici, iznosi $v^2D/2gR$ (ovde je v brzina, D prečnik cevi, a R poluprečnik krivine). Za prethodno određivanje spuštanja koristi se upisano na slici 102–13, koja prikazuje lokalne pojave u krivini.

Da bi se otklonila kavitacija spuštanje pijezometarske kote ispod položajne $Z_\mathrm{un} - \Pi_\mathrm{min}$ ne sme da pređe $(p_\mathrm{atm} - p_\mathrm{ev})/\gamma$ – tako nalaže izraz (112–3).

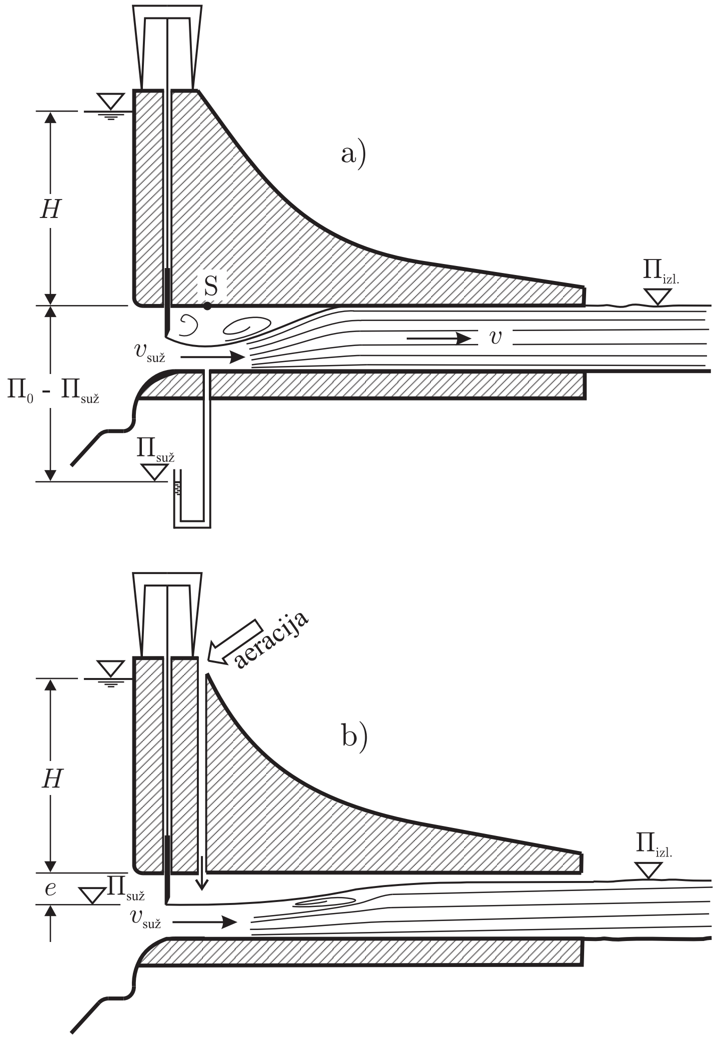
Kavitacija se može sprečiti stavljanjem izlaznog prigušenja, kojim se izlazni presek suzi u odnosu na prečnik cevi (to je prikazano dodatnim crtežom na slici 112–2). Tako se sve pijezometarske kote podižu, pa i Π_min – to podizanje, u odnosu na stanje bez prigušenja, iznosi $\Pi_\mathrm{C} - \Pi_\mathrm{izl}$ (vidi dodatni crtež). Jasno je da uz isti uzvodni uslov prigušenje smanjuje proticaj.

* * *

Zatvoreni provodnik, kružnog preseka, služi za ispuštanje vode iz jezera stvorenog izgradnjom brane (slika 112–3). To je ispust pri dnu, nazvan obično „temeljni ispust". Na njegovom početku smešten je tablasti zatvarač kojim se reguliše proticaj, podizanjem table zatvarača od potpunog zatvaranja do potpunog otvaranja.

Presek mlaza koji ističe ispod zatvarača manji je od preseka otvora ispod zatvarača, jer se mlaz skuplja. Skupljanje mlaza (kontrakcija) je pojava navedena i objašnjena tokom mnogih razmatranja. Od mesta gde je presek mlaza najmanji, a onda brzina najveća ($v_\mathrm{suž} = v_\mathrm{max}$), mlaz se postepeno širi da bi na izvesnom rastojanju zauzeo ceo presek, gde će se brzina označiti jednostavno sa v. To je ujedno i brzina na izlaznom preseku. U mnogim primerima (dijafragma, naglo suženje i naglo proširenje cevi i sl.) objašnjavano je da je središnji mlaz, koji prenosi tečnost, „aktivni deo" preseka, a on je opkoljen vrtložnom oblašću koja ne učestvuje u prenošenju. Sa takvim objašnjenjem u tim primerima izvođene su odgovarajuće jednačine. Načelno iste jednačine primeniće se i u primeru koji se sada razmatra, uz napomenu da je mlaz u donjem delu preseka, a pokriva ga vrtložna oblast.

Od suženog preseka gde je brzina $v_\mathrm{suž}$ maksimalna, a pijezometarska kota je minimalna ($\Pi_\mathrm{suž} = \Pi_\mathrm{min}$), pijezometarska kota se penje sa $\Pi_\mathrm{suž}$ na Π_izl, uz smanjivanje brzine, od $v_\mathrm{suž}$ na v (slika 112–3, a).



Slika 112–3 Isticanje kroz temeljni ispust. a) Javlja se kavitacija usled sniženja pritiska ($\Pi_{\text{suž}}$ je znatno ispod S). Rešenje se odbacuje, primenjuje se b) Aeracija oslobađa izlazni mlaz od potpritisaka.

Za plafon ispusta neposredno iza zatvarača, za tačku označenu sa „S” na slici, položajna kota Z_{S} je približno ista kao na kraju ispusta (pod pretpostavkom da je nagib ispusta malen, a tako je redovno u praktičnim primerima), pa se može uzeti da je $Z_{\text{S}} = \Pi_{\text{izl}}$ (na kraj ispusta pijezometarska kota je na koti plafona). U jednačini (112–2) uvrštava se $Z = Z_{\mathrm{S}} = \Pi_{\mathrm{izl}}$, $\Pi = \Pi_{\mathrm{suž}}$, pa se dobija za granicu pojave kavitacije:

$$\Pi_{\mathrm{izl}} - \Pi_{\mathrm{suž}} = \frac{p_{\mathrm{atm}} - p_{\mathrm{ev}}}{\gamma} \tag{112–9}$$

Napominje se da se pretpostavilo da se pijezometarska kota $\Pi_{\mathrm{suž}}$ prenosi sa mlaza na ceo presek, sve do vrha cevi (do tačke „S"), jer vrtložna oblast samo pritiskuje mlaz, a ne učestvuje u prenošenju fluida.

Jednačina energije primenjena na struju od suženog preseka (gde je $\Pi = \Pi_{\mathrm{suž}}$, $v = v_{\mathrm{suž}}$) do kraja ispusta (gde je $\Pi = \Pi_{\mathrm{izl}}$, v), glasi:

$$\Pi_{\mathrm{suž}} + \frac{v_{\mathrm{suž}}^2}{2g} = \Pi_{\mathrm{izl}} + \frac{v^2}{2g} + \frac{(v_{\mathrm{suž}} - v)^2}{2g} \tag{112–10}$$

Poslednji član je gubitak energije između dva u jednačini uzeta preseka. Zanemarilo se trenje kao beznačajno u odnosu na gubitak na proširivanju mlaza, a za njega je primenjen obrazac koji se redovno primenjivao u primerima gde se mlaz proširivao. Njegovo prvo pisanje je bilo u poslednjoj jednačini u trećem primeru Poglavlja 83.

Na osnovu prethodne jednačine dobija se:

$$\Pi_{\mathrm{izl}} - \Pi_{\mathrm{suž}} = \frac{v_{\mathrm{suž}}\, v}{g} - \frac{v^2}{g}$$

odnosno

$$\Pi_{\mathrm{izl}} - \Pi_{\mathrm{suž}} = \frac{v^2}{g}\left(\frac{v_{\mathrm{suž}}}{v} - 1\right) \tag{112–11}$$

Ovde $v_{\mathrm{suž}}/v$ predstavlja stepen otvorenosti zatvarača, jer je to jednako $A_{\mathrm{suž}}/A$, gde je A presek struje u potpuno ispunjenoj cevi, a $A_{\mathrm{suž}}$ presek suženja mlaza.

Granicu pojave kavitacije određuje (112–9), pa se u prethodnoj jednačini zamenjuje $\Pi_{\mathrm{izl}} - \Pi_{\mathrm{suž}}$ sa $(p_{\mathrm{atm}} - p_{\mathrm{ev}})/\gamma$, a tada brzina v ima graničnu vrednost. Ova brzina se može nazvati kritičnom brzinom (i označiti sa v_{cr}) u smislu da se ne sme preći ta vrednost, ako se isključuje pojava kavitacije. Tako se prethodna jednačina svodi na:

$$\frac{v_{\mathrm{cr}}^2}{g}\left(\frac{v_{\mathrm{suž}}}{v} - 1\right) = \frac{p_{\mathrm{atm}} - p_{\mathrm{ev}}}{\gamma}$$

iz čega sledi:

$$v_{\mathrm{cr}} = \sqrt{\frac{p_{\mathrm{atm}} - p_{\mathrm{ev}}}{\rho\,(v_{\mathrm{suž}}/v - 1)}} \tag{112–12}$$

Ovde je γ/g zamenjeno sa ρ.

Prema tome uslovi za pojavu kavitacije stvaraju se čim proticaj pređe:

$$Q_{\mathrm{cr}} = A\,v_{\mathrm{cr}}$$

Za praktične potrebe pogodnije je da se odredi granični maksimalni nivo u bazenu ispred zatvarača, a da ne dođe do kavitacije. Kota tog nivoa na slici je označna sa H. Jednačina energije od bazena do suženja preseka piše se sa:

$$H + \Pi_{\mathrm{izl}} = \Pi_{\mathrm{suž}} + \frac{v_{\mathrm{suž}}^2}{2g} + 0{,}05\,\frac{v_{\mathrm{suž}}^2}{2g} \tag{112–13}$$

Ova jednačina je napisana uz prihvatljivu pretpostavku da je brzina u bazenu ispred ispusta zanemarljiva i da je gubitak energije po jedinici težine do suženog preseka 0,05 $v_{\mathrm{suž}}^2/2g$. To je napisano na osnovu izloženog u Poglavlju 102., gde se gubitak energije do suženog preseka struje (koja će se iza toga proširivati) iskazuje sa $\varphi\ v_{\mathrm{suž}}^2/2g$ – vidi jednačinu (102–8), a na slici 102–6 uviđa se da φ ne prelazi 0,05.

Iz prethodne jednačine dobija se:

$$H = \frac{1{,}05}{2}\,\frac{v_{\mathrm{suž}}}{g} - (\Pi_{\mathrm{izl}} - \Pi_{\mathrm{suž}})$$

$$H = \frac{1{,}05}{2}\left(\frac{v_{\mathrm{suž}}}{v}\right)^2 \frac{v^2}{g} - (\Pi_{\mathrm{izl}} - \Pi_{\mathrm{suž}})$$

$$H = \frac{1{,}05}{2}\left(\frac{v_{\mathrm{suž}}}{v}\right)^2 \frac{(\Pi_{\mathrm{izl}} - \Pi_{\mathrm{suž}})}{(v_{\mathrm{suž}}/v) - 1} - (\Pi_{\mathrm{izl}} - \Pi_{\mathrm{suž}})$$

U prvom članu u jednačini je uvedeno v^2/g da bi se iskoristilo napisano sa (112–11).

Sa H_{cr} označiće se granična vrednost visine H, koja ne sme da se nadvisi, ako se isključuje pojava kavitacije. Tada se $\Pi_{\mathrm{izl}} - \Pi_{\mathrm{suž}}$ izjednačava sa $(p_{\mathrm{atm}} - p_{\mathrm{ev}})/\gamma$ – tako pokazuje (112–9). To dovodi do:

$$H_{\mathrm{cr}} = \left(\frac{1{,}05/2\ \times\ v_{\mathrm{suž}}^2/v^2}{v_{\mathrm{suž}}/v - 1} - 1\right)\frac{p_{\mathrm{atm}} - p_{\mathrm{ev}}}{\gamma} \tag{112–14}$$

Iz prethodnog izraza se vidi da H_{cr}, za zadato $p_{\text{atm}} - p_{\text{ev}}$, zavisi od stepena otvorenosti zatvarača (od $v_{\text{suž}}/v$). Treba uzeti onu vrednost za $v_{\text{suž}}/v$ koja daje minimalnu vrednost za H_{cr}, da bi se, u svakom slučaju, izbegla kavitacija. Minimalna vrednost H_{cr} se ostvaruje pri onoj vrednosti $v_{\text{suž}}/v$, za koju je izvod $\partial H_{\text{cr}}/\partial(v_{\text{suž}}/v)$ jednak nuli. To je za $v_{\text{suž}}/v = 2$, a za tu vrednost prethodna jednačina daje:

$$H_{\text{cr}} = (2{,}1 - 1)\,\frac{p_{\text{atm}} - p_{\text{ev}}}{\gamma} = 1{,}1\,\frac{p_{\text{atm}} - p_{\text{ev}}}{\gamma} \qquad (112\text{–}15)$$

Za normalni atmosferski pritisak p_{atm}/γ iznosi približno 10 m, a kako je p_{ev} maleno u odnosu na p_{atm}, prethodno pokazuje da je H_{cr} oko 11 m. Treba voditi računa da p_{atm} može da bude niži, a onda je H_{cr} manji.

Međutim, veće smanjenje kritične visine treba uzimati u obzir iz sledećih razloga.

Pritisak unutar zatvarača u nekoj tački može da bude niži od onoga koji daje usvojena pretpostavka da kota $\Pi_{\text{suž}}$ važi za ceo presek (za mlaz i vrtložnu oblast iznad njega, sve do vrha cevi).

Pored toga treba imati na umu da je minimalni trenutni pritisak, tokom turbulentnih fluktuacija, niži od osrednjenog (a sa osrednjenim su sprovedena sva razmatranja).

U prethodnim računanjima, gde se nije vodilo računa o navedenim sniženjima pritiska, za minimalni pritisak uzet je pritisak isparavanja p_{ev}. Da se vodilo računa o sniženju pritiska računalo bi se sa minimalnim pritiskom $p_{\text{ev}} + \Delta p$, da bi snižavanje pritiska za Δp spustilo pritisak na p_{ev}. Prethodne rezultate treba stoga popravljati stavljanjem, umesto $p_{\text{atm}} - p_{\text{ev}}$, sledeće:

$$\begin{aligned} p_{\text{atm}} - (p_{\text{ev}} + \Delta p) &= \\ (p_{\text{atm}} - p_{\text{ev}})\left(1 - \frac{\Delta p}{p_{\text{atm}} - p_{\text{ev}}}\right) &= \\ &= \psi\,(p_{\text{atm}} - p_{\text{ev}}) \end{aligned} \qquad (112\text{–}16)$$

Ovde je uveden faktor:

$$\psi = 1 - \frac{\Delta p}{p_{\text{atm}} - p_{\text{ev}}} \qquad (112\text{–}17)$$

koji zavisi od oblika zatvarača i ostalih graničnih uslova, kao i od intenziteta turbulencije. O tome treba imati saznanja iz eksperimentlnih istraživanja.

U izrazima (112–12) i (112–14) zameniće se, shodno sa prethodnim zaključcima, $p_{\text{atm}} - p_{\text{ev}}$ sa $\psi(p_{\text{atm}} - p_{\text{ev}})$ – dobija se:

$$v_{\text{cr}} = \sqrt{\frac{\psi(p_{\text{atm}} - p_{\text{ev}})}{\rho\,(v_{\text{suž}}/v - 1)}} \tag{112–18}$$

$$H_{\text{cr}} = \psi\left(\frac{1{,}05/2 \;\;\times\;\; v_{\text{suž}}^2/v^2}{v_{\text{suž}}^2/v^2 - 1} - 1\right)\frac{p_{\text{atm}} - p_{\text{ev}}}{\gamma} \tag{112–19}$$

Prethodno upućuje da navedenu vrednost za dozvoljenu visinu H treba smanjiti, tako da je kavitacija moguća skoro u svim praktičnim primerima temeljnog ispusta. Ona se mora sprečiti.

Preporučljivo rešenje za otklanjanje mogućnosti za pojavu kavitacije je ovazdušenje (aeracija), dovođenjem vazduha iza zatvarača. Tako ispod njega ističe mlaz sa slobodnom površinom vode (gornja površina mlaza je pod atmosferskim pritiskom), što znači da je $\Pi_{\text{suž}}$ na slobodnoj površini mlaza (slika 112–3, b).

Primećuje se da uticaj aeracije može da bude ograničen, vazduh ne mora da prodre do dna, iako su tamo sniženi pritisci, koji bi trebalo da ga privuku, jer je vazduh lakši od vode pa se odupire spuštanju. Ako aeracija zahvati samo gornji sloj vodene struje, može doći do potpritisaka na dnu. No, to se lako sprečava uvođenjem vazduha i kroz dno.

Aeracija smanjuje proticaj u odnosu na onog koji bi bio bez nje za istu visinu H, jer je visina isticanja sa aeracijom $H + e$, gde je e manje od prečnika tunela (vidi sliku 112–3, b), dok je bez aeracija (slika 112–3, a) visina isticanja $H + (\Pi_{\text{izl}} - \Pi_{\text{suž}})$. Međutim, to upoređenje je sa praktičnog stanovišta besmisleno, jer se rešenje bez aeracije neće primeniti.

* * *

Napomena. U razmatranju zadataka vezanih za kavitaciju upotrebljava se „koeficijent kavitacije", ili „kavitacioni broj":

$$C_{\text{ca}} = \frac{p_{\text{atm}} - p_{\text{ev}}}{(\rho\, v_{\text{cr}}^2)/2} \tag{112–20}$$

On se može shvatiti kao „koeficijent pritiska”, jer je obrazovan kao i standardni koeficijent pritiska, uveden u knjizi I „Osnove”, sa (61-18).

Drugi naziv (kavitacioni broj) može se takođe prihvatiti, jer se naziv „broj” daje standardnim bezdimenzionalnim veličinama (Rejnoldsov, Frudov broj).

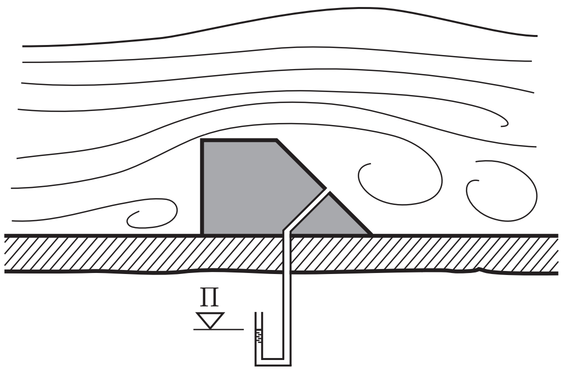
Upotreba koeficijenta kavitacije je pogodna iz praktičnih razloga, jer određuje kritičnu brzinu pri zadatim pritiscima p_{atm} i p_{ev}, uz poznavanje koeficijenta kavitacije. On se obično daje u zavisnosti od graničnih uslova koji su isti na objektu koji se projektuje i onome na kome su eksperimetalnim istraživanjima utvrđeni.

Upoređenjem (112–18) i (112–20) za razmatrani zadatak je:

$$C_{\mathrm{ca}} = \frac{2}{\psi}\left(\frac{v_{\mathrm{suž}}}{v} - 1\right)$$

* * *

Slika 112–4 prikazuje prag koji se preprečio nailazećem burnom tečenju sa velikim brzinama da bi uzrokovao značajan gubitak energije i time doprineo smirivanju tečenja. To je primer „razbijača mlaza” ili „disipatora” – kako su u Poglavlju 104., uz sliku 104–14, nazvani elementi sa takvim dejstvom. Kako prag odbacuje struju, njegova gornja i stražnja površina opkoljene su vrtložnom oblasti, u kojoj su pritisci znatno sniženi, jer su brzine zaobilaženja znatno uvećane u odnosu na



Slika 112–4 Odvajanje struje od praga dovodi do znatno uvećanih brzina zaobilaženja, gde se pritisak snižava, i to se prenosi na prag, pa je moguća pojava kavitacije.

brzine ispred praga. To snižavanje pritiska može da bude toliko veliko da se stvore uslovi za kavitaciju. Iako je iznad praga slobodna površina, vazduh neće prodirati do praga, mada bi sniženi pritisci trebali da ga tamo privuku, ali vazduh, kao znatno lakši od vode, teško se spušta, pa se dešava da aeracija zahvata samo gornji sloj vodene struje.

Do kavitacije može doći i na dnu jako hrapavog kanala sa velikom brzinom. (Aeracija takvog kanala navedena je, kao primer aeracije, u prethodnom, 111-om Poglavlju – slika 111–1). Struja mora da zaobilazi izbočine na dnu sa povećavanjem brzine, pa je stanje načelno isto kao u prethodnom primeru (pragu). Takođe i ovde treba primetiti da vazduh ne mora da prodre do dna, pa se na dnu ne sprečava pojava sniženih pritisaka.

Treba imati na umu, da uz procenu sniženja usled osrednjenih brzina, ne treba ceniti samo osrednjene pritiske, jer na njihovo sniženje treba još dodati i sniženje usled fluktuacionog pritiska.

* * *

Pumpa se sme izdići iznad kote vode u crpnom bazenu samo dotle dok ne može da stvori uslove za pojavu kavitacije. Granični visinski položaj (vidi sliku 112–5) iskazuje se sa:

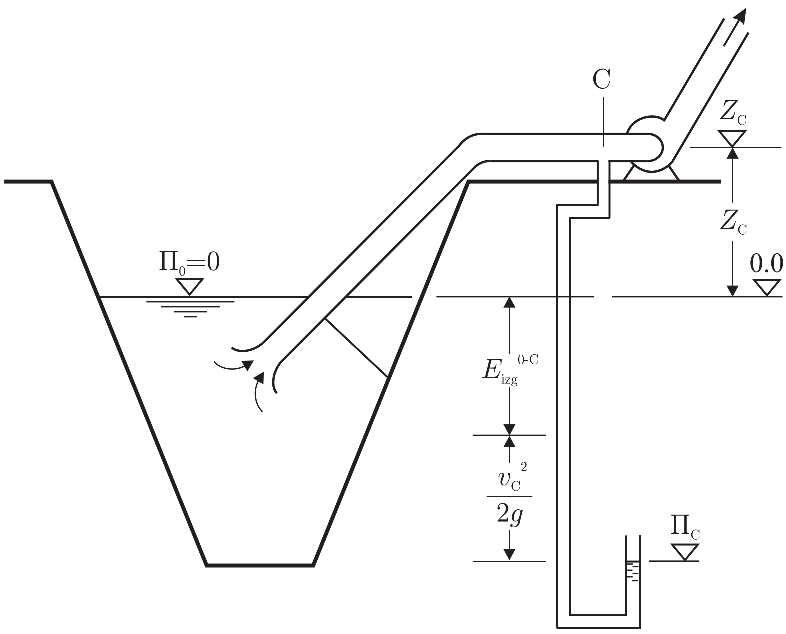
$$Z_{\mathrm{C}} - \Pi_{\mathrm{C}} = \frac{p_{\mathrm{atm}} - p_{\mathrm{ev}}}{\gamma} - \Delta \qquad (112\text{–}21)$$

Ovo je primena jednačine (112–2) uz dodavanje poslednjeg člana, kojim je spuštanje pijezometarske kote Π ispod položajne Z smanjeno za Δ, iz razloga što se unutar pumpe pojavljuju povećane lokalne brzine, a onda i sniženi pritisci, u odnosu na one ispred pumpe. Prema tome piše se:

$$\Delta = \frac{p_{\mathrm{C}}}{\gamma} - \frac{p_{\mathrm{min}}}{\gamma} \qquad (112\text{–}22)$$

gde je p_{min} minimalni lokalni pritisak unutar pumpe. Za svaku pumpu treba raspolagati sa vrednostima za Δ. Za sve međusobno slične pumpe (isti tip pumpe) odnos dve visine, koje predstavljaju energiju, mora biti isti, pa je isti odnos Δ/H (gde je H visina dizanja, uvedena u Poglavlju 108. – vidi sliku 108–1) zbog čega se može napisati:

$$\Delta = C_{\mathrm{ca}}\, H \qquad (112\text{–}23)$$



Slika 112–5 Izdizanje (Z_C) pumpe iznad nivoa u crpnom bazenu (koji je na koti Π_0) ograničeno je – ne dopušta se sniženje pritiska u "C" koje bi uzrokovalo kavitaciju.

I ovde je uveden koeficijent kavitacije C_{ca}, koji je vezan za određeni tip pumpe. On je ustvari, s obzirom na (112–22), određen kao:

$$C_{ca} = \frac{\Delta}{H} = \frac{p_C - p_{min}}{\gamma\, H} \tag{112–24}$$

Naziv opravdava okolnost da je povezan sa kavitacijom, ali zadatak ovde nameće drugačiji oblik od onog napisanog sa (112–20). Pri određivanju C_{ca} treba voditi računa i o uticaju turbulencije, jer treba uzeti minimalni pritisak tokom fluktuacija, a ne osrednjeni.

Primena jednačine energije na struju između crpnog bazena i preseka C – C, (ispred pumpe), uz nultu kotu na nivou Π_0 vode u crpnom bazenu, (u kome je brzina zanemarljiva) daje:

$$0 = \Pi_C + \frac{v_C^2}{2g} + E_{izg}^{\,0-C} \tag{112–25}$$

Poslednji član je izgubljena energija:

$$E_{\text{izg}}^{0-\text{C}} = \left(\xi_{\text{ul}} + \xi_{\text{kr}} + \lambda \frac{L}{D} \right) \frac{v^2}{2g} \qquad (112\text{–}26)$$

Sa ξ_{ul}, odnosno ξ_{kr}, označeni su koeficijenti lokalnih gubitaka na ulazu u cev, odnosno na krivini, a λ je koeficijent trenja. Lokalni gubitak se zaobljavanjem ulaza i postepenim smanjenjem prečnika može svesti i na $\xi = 0{,}1$ do $0{,}2$, ako na ulazu u cev nema zaštitne korpe. Ako je ona stavljena, voda ulazi samo kroz otvore na korpi (čime se sprečava ulazak čvrstih predmeta koji bi mogli štetiti pumpi). Gubitak na ulazu sa korpom može biti značajan, koeficijent može da bude veći čak i od $\xi = 5$.

U (112–21) $-\Pi_{\text{C}}$ zamenjuje se zbirom drugog i trećeg člana iz (112–25), pa se dobija:

$$Z_{\text{C}} = \frac{p_{\text{atm}} - p_{\text{ev}}}{\gamma} - \Delta - \frac{v_{\text{C}}^2}{2g} - E_{\text{izg}}^{0-\text{C}} \qquad (112\text{–}27)$$

Z_{C} je maksimalno dozvoljeno izdizanje pumpe (upravo preseka cevi ispred nje) iznad nivoa vode u crpnom bazenu. Prekoračenje te visine dovodi do mogućnosti za pojavu kavitacije.

Na isti način dolazi se do maksimalno dozvoljenog izdizanja Z_{C} turbine iznad nivoa donje vode u koju se uliva voda po prolasku kroz turbinu (slika 112–6). Jednačina energije, od preseka neposredno iza turbine do donje vode, uz nultu kotu na nivou donje vode, piše se sa:

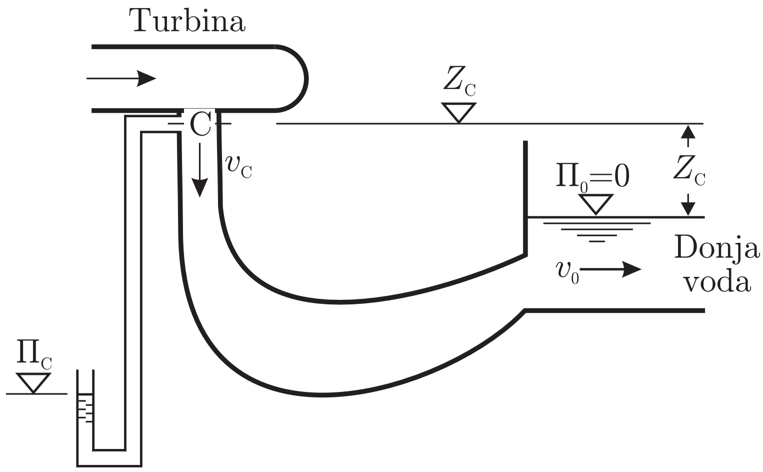
$$\Pi_{\text{C}} + \frac{v_{\text{C}}^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} + \xi \frac{v_0^2}{2g} \qquad (112\text{–}28)$$

gde je ξ koeficijent ukupnog gubitka energije između navedenih preseka.

Granično izdizanje se ovde iskazuje takođe sa (112–21), pa se sabiranjem ove jednačine i (112–28) dobija:

$$Z_{\text{C}} = \frac{p_{\text{atm}} - p_{\text{ev}}}{\gamma} - \Delta - \frac{v_{\text{C}}^2}{2g} + \frac{v_0^2}{2g} + \xi \frac{v_0^2}{2g} \qquad (112\text{–}29)$$

Visina Δ se i ovde može izraziti sa $C_{\text{ca}} H$ (ovde je H pad turbine, prikazan na slici 108–2). Mogu se izostaviti poslednja tri člana, čiji



Slika 112–6 Izdizanje (Z_C) turbine iznad nivoa donje vode ograničeno je – ne dozvoljava se lokalno sniženje pritiska u "C" koje bi uzrokovalo kavitaciju.

doprinos nije značajan, a njihovim izostavljanjem povećava se sigurnost, pa se može napisati da je:

$$Z_\mathrm{C} = \frac{p_\mathrm{atm} - p_\mathrm{ev}}{\gamma} - C_\mathrm{ca}\, H \qquad (112\text{–}30)$$

Uz jednačine (112–21) i (112–30) može se primetiti da je savetno prikazane visine izdizanja Z_C malo smanjiti, sigurnosti radi.

* * *

ZAVRŠNE NAPOMENE

Prikazani primeri upućuju na rešenja koja sprečavaju pojavu kavitacije. To su aeracija (primer sa 112–3, b), podizanje pijezometarskih kota prigušenjem struje iza mesta moguće pojave kavitacije (slika 112–2), izdizanje pumpe (iznad nivoa vode u crpnom bazenu) odnosno turbine (iznad donje vode) u dozvoljenim granicama, koja se ne sme prekoračiti (slike 112–5 i 112–6). Nisu poželjna mesta lokalnog sniženja pritiska usled povećanja brzine, treba to izbegavati gde je to moguće. To su prvenstveno mesta gde dolazi do odvajanja struje od zida, pa se brzina mora povećati, čime se pritisak snižava. Treba nastojati da hrapavost bude svedena na najmanju moguću meru, čak i premazivanjem obloge sredstvom kojim se postiže glatkoća. Eventualna kratkotrajna i povremena pojava kavitacije neće dovesti do većeg oštećenja obloge ako je zaštićena nekim antikorozionim premazom.

113
FLUKTUACIJE PRITISAKA NA ČVRSTE GRANIČNE POVRŠINE

U turbulentnom tečenju hidrodinamičke veličine fluktuišu i trenutna vrednost za neku veličinu Y prikazuje se kao zbir kroz vreme osrednjene vrednosti $\overline{Y}$ i fluktuacije (odstupanja) Y' – to je napisano sa (51–1) kao uvodni izraz u razmatranje turbulentnih strujanja.

Fluktuacije pritsaka na čvrste granične površine veoma su zanimljive za hidrotehničku praksu, jer one nameću fluktuacije opterećenja na objekat, koje mogu dovesti u pitanje stabilnosti objekta.

Opterećenju od osrednjenih pritisaka $\overline{p}$ dodaje se opterećenje od fluktuacionih, od p', a ovim drugim baviće se naredna izlaganja. Poseban značaj imaju maksimalni i minimalni fluktuacioni pritisak ($p'_{\max}$ i $p'_{\min}$), između kojih se kolebaju trenutni pritisci. Za meru odstupanja od osrednjene vrednosti (tj. za meru fluktuacije) uzima se standardna devijacija, napisana sa (54–5) za proizvoljnu veličinu Y'.

Dobar uvid u fluktuacije pritiska pruža funkcija raspodele, ili funkcija trajanja pritiska. Ona se dobija po ugledu na crtež „b" na slici 54–1, samo što proizvoljnu veličinu Y' treba zameniti sa p'. Uz navedenu sliku je objašnjeno kako će se iz vremenskim redosledom registrovanog pritiska, koji će izgledati kao crtež „a", gde je t vreme proteklo od početka opažanja, doći do crteža „b", gde trajanje T predstavlja ukupno trajanje u kome je pritisak prešao određenu vrednost. Na primer, ako je za trajanje $T = T_1$, a $p' = p'_1$ to znači da je pritisak bio veći od p'_1 u trajanju T_1, koje nije neprekidno trajanje, nego se zbivalo u više navrata. Pogodno je uvesti relativno trajanje T/T_0, gde je T_0 ukupno vreme opažanja, pa je, na primer za $T_1/T_0 = 0{,}2$ pritisak p' bio manji od p'_1 u 20% ukupnog vremena posmatranja. Iz funkcije raspodele (koja se ovde nazvala funkcija trajanja) dobija se funkcija gustine raspodele, napisana sa (54–11), a iz (54–2) se vidi da se dobija diferenciranjem relativnog trajanja T/T_0 po Y', odnosno ovde će biti po p'.

Zbog slučajnosti pojava u turbulenciji (koje daju utisak nereda) primenjuju se statističke metode, da bi se uticaji mogli prikazati u sređenom obliku, podobnom za matematičku analizu. Tako je za fluktuacije pritiska prihvaćeno shvatanje da se one približno mogu izraziti normalom (Gausovom) raspodelom. Za tu raspodelu, njena gustina je određena sa:

$$G = \frac{\mathrm{d}(T/T_0)}{\mathrm{d}p'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{p'^2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{p'^2}{\overline{\overline{p'^2}}}\right) \tag{113–1}$$

Ovo je napisano koristeći (54–1) i (54–11).

U bezdimenzionalnom obliku, umesto G, uzeće se $G_+ = G\left(\overline{p'^2}\right)^{1/2}$, pa se za nju odgovarajući izraz dobija množenjem prethodnoga sa $\left(\overline{p'^2}\right)^{1/2}$:

$$G_+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{p'^2}{\overline{\overline{p'^2}}}\right) \tag{113–2}$$

Ovo ukazuje da je raspodela potpuno određena sa $\overline{p'^2}$, ili $\left(\overline{p'^2}\right)^{1/2}$ – upravo sa standardnom devijacijom. Naime, ako je poznata standardna devijacija, poznata je celokupna raspodela.

Navedena raspodela, odnosno njena gustina, iskazuju simetričnost u odnosu na $p' = 0$, tj. ista je gustina za pozitivnu vrednost p' i njoj odgovarajuću negativnu (sa istom apsolutnom vrednošću). Najveća gustina je za $p' = 0$ i ona je sve manja ukoliko su pritisci veći po apsolutnoj vrednosti. Za velike vrednosti gustina se približava nuli, ali nulu ne dostiže (međutim, zanemarljiva je). Iz navedene simetričnosti proizilazi da je za $p' = 0$ relativno trajanje $T/T_0 = 1/2$. Za neku pozitivnu vrednost $p' = p'_1$ relativno trajanje je $(T/T_0)_1$, a za odgovarajuću negativnu vrednost, uz istu apsolutnu vrednost, $(T/T_0) = (T/T_0)_2$. Navedena simetričnost daje $1 - (T/T_0)_1 = (T/T_0)_2$. Primećuje se da navedena raspodela ne daje ekstremne vrednosti p'_{max} i p'_{min} za $T/T_0 = 1$, odnosno $T/T_0 = 0$ (a trebalo bi), jer za ova trajanja funkcija raspodele daje $p' = +\infty$. Ali, to ne treba da bude smetnja za praktičnu primenu, jer se za vrednosti T/T_0 bliske jedinici, odnosno nuli, dobijaju ekstremne vrednosti koje se približno u praktičnim primerima ostvaruju, a u prihvaćenu raspodelu (normalnu) dosta se dobro uklapaju i opažana posmatranja.

Navodi se da je za normalnu raspodelu:

$$
\begin{aligned}
p' &= -3{,}1 \left(\overline{p'^2}\right)^{1/2} \quad \text{za} \quad \frac{T}{T_0} = 0{,}001 \\
p' &= 3{,}1 \left(\overline{p'^2}\right)^{1/2} \quad \text{za} \quad \frac{T}{T_0} = 0{,}999
\end{aligned}
\tag{113–3}
$$

Napisano iskazuje da se od ukupnog trajanja posmatranja samo hiljaditi deo trajanja pritisak premašuje donju napisanu vrednost, odnosno hiljaditi deo vremena je niži od prve napisane vrednosti. Napominje se da je u praktičnim primerima gde su izvršena merenja, $p'_{\max}$ je prekoračivao $3{,}1 \left(\overline{p'^2}\right)^{1/2}$, a $p_{\min}$ je bio niži od $-3{,}1 \left(\overline{p'^2}\right)^{1/2}$, ali ne značajno, a da su trajanja prekoračenja bila veoma kratka. No, može se preporučiti da se faktor 3,1 poveća na 4.

Praktične preporuke su u skladu sa prethodnim navodima, a one se svode na računanje:

$$
p'_{\max} = -p'_{\min} = M \left(\overline{p'^2}\right)^{1/2} \tag{113–4}
$$

gde se uzima $M = 3$ do 4.

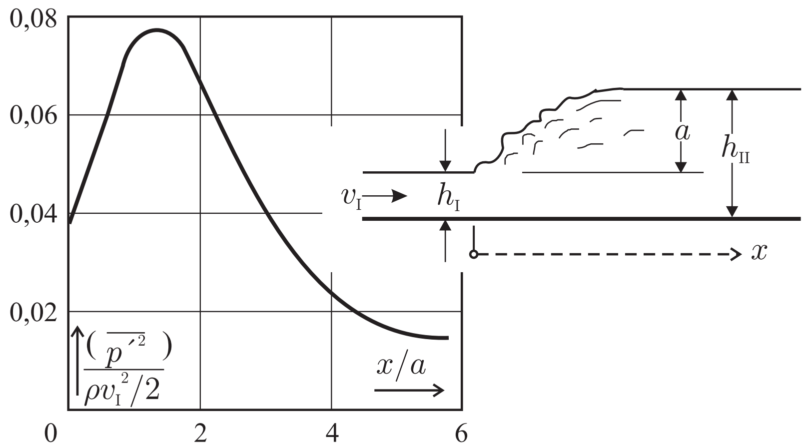
* * *

Kao primer praktične primene izučavanje fluktuacionih pritisaka uzeti su pritisci na dno ispod hidrauličkog skoka (slika 113–1). Shodno prethodnim razmatranjima uvid u te pritiske pružiće njihova standardna devijacija, za koju se piše funkcija:

$$
\left(\overline{p'^2}\right)^{1/2} = f\left[x, (h_{\mathrm{I}}, v_{\mathrm{I}}, a, \rho, g)\right] \tag{113–5}
$$

koja iskazuje da u jednom primeru strujanja standardna devijacija zavisi od rastojanja x od početka skoka, a u zagradi su upisane parametarske veličine koje su u pojedinom primeru konstante, a svaki pojedinačni primer nameće njihove vrednosti. Te veličine su granični uslovi: brzina v_{I} i dubina h_{I} ispred skoka i visina skoka a. Pored toga nameće se i zavisnost od gustine ρ, a pošto je bitno delovanje težine, treba dodati i gravitaciono ubrzanje g.

Smatra se da su uticaji viskoznosti i površinskog napona zanemarljivi, pa se vodi računa samo o inercijalnim i uticajima težine.



Slika 113–1 Standardna devijacija pritiska $\left(\overline{p'^2}\right)^{1/2}$ u zavisnosti od rastojanja (x) od početka skoka. Obe veličine predstavljaju njihove bezdimenzionalne zamene.

Nadalje se smatra da je zadatak ravanski, posmatra se skok u pravougaonom kanalu, gde je stanje u svim podužnim ravnima istovetno (što je tačno, izuzevši blizinu bočnih zidova, ali uticaj toga je zanemarljiv).

Funkcionalnu vezu (113–5) od 7 dimenzionalnih veličina, primena dimenzionalne analize svodi na $7 - 3 = 4$ bezdimenzionalne veličine. Za osnovne veličine uzimaju se: brzina v_{I}, visina a, i gustina ρ, pa se dobija veza bezdimenzionalnih veličina

$$F\left(\frac{\left(\overline{p'^2}\right)^{1/2}}{\rho v_{\mathrm{I}}^2},\ \frac{x}{a},\ \frac{h_{\mathrm{I}}}{a},\ \frac{ga}{v_{\mathrm{I}}^2}\right) = 0 \qquad (113\text{–}6)$$

Primećuje se da je za osnovnu dužinu uzeta visina a skoka, i to je učinjeno iz opravdanoga razloga, jer ona meri vrtlog koji obrazuje skok, i koji je podstrekač turbulencije koja se ispoljava i pulzacijama pritiska na dno (koje su i predmet razmatranja). Stoga je visina smišljeno uzeta između veličina koje opisuju skok i koje su upisane u (113–5), da bi se posle uzela za osnovnu, pri obrazovanju bezdimenzionalnih veličina sa (113–6)

Dubina h_{II} iza skoka je određena sa h_{I} i a, jer je $h_{\mathrm{II}} = h_{\mathrm{I}} + a$, pa je $h_{\mathrm{II}}/h_{\mathrm{I}} = 1 + (a/h_{\mathrm{I}})$, što dozvoljava da se u bezdimenzionalnom izražavanju h_{I}/a zameni sa $h_{\mathrm{II}}/h_{\mathrm{I}}$. Uz tu zamenu obaviće se i zamena poslednjeg člana sa recipročnom vrednošću proizvoda njega i trćega, pa se umesto $(g\,a)/v_{\mathrm{I}}^2$ zamenjuje sa $v_{\mathrm{I}}^2/(g\,h_{\mathrm{I}})$, a to je Fr_{I}, upravo Frudov broj za presek ispred skoka ($Fr = v_{\mathrm{I}}^2/(g\,h_{\mathrm{I}})$). Ovo omogućava zamenu $(g\,a)/v_{\mathrm{I}}^2$ sa Fr_{I}. Sa ove dve zamene funkcija (113–6) se zamenjuje sa:

$$F = F\left(\frac{\left(\overline{p'^2}\right)^{1/2}}{\rho\,v_{\mathrm{I}}^2},\ \frac{x}{a},\ \frac{h_{\mathrm{II}}}{h_{\mathrm{I}}},\ Fr_{\mathrm{I}}\right) = 0 \qquad (113\text{–}7)$$

Između dva poslednja člana postoji jednoznačna veza (104–24) koja kaže da je poznavanjem jedne veličine poznata i druga, pa se može izostaviti $h_{\mathrm{II}}/h_{\mathrm{I}}$, ili Fr_{I}. Izostaviće se prva, a pored toga umesto ρv_{I}^2 uzeće se $\rho v_{\mathrm{I}}^2/2$, što napisanim sa (83–13) predstavlja zaustavni pritisak (kojim se ,,zaustavlja" brzina v_1). Tako se na kraju dobija:

$$\frac{\left(\overline{p'^2}\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}\rho\,v_{\mathrm{I}}^2} = f\left(\frac{x}{a},\ Fr_{\mathrm{I}}\right) \qquad (113\text{–}8)$$

Eksperimentalna istraživanja su pokazala da Frudov broj ne utiče osetno, pa se za Fr između 20 i 60 (gde se nalaze primeri zanimljivi za praksu, u kojima je uticaj fluktuacija značajan), može se uzeti kao približna jedinstvena veza:

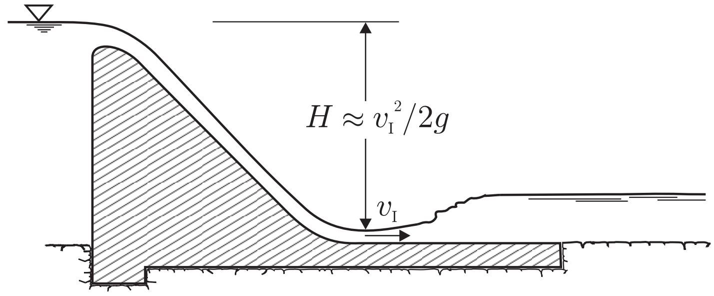
$$\frac{\left(\overline{p'^2}\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}\rho\,v_{\mathrm{I}}^2} = f\left(\frac{x}{a}\right) \qquad (113\text{–}9)$$

čiji je grafikon nacrtan na slici 113–1.

$v_{\mathrm{I}}^2/2g$ se može izraziti visinom H koja stvara brzinu v_1:

$$\rho\frac{v_{\mathrm{I}}^2}{2} = \gamma\frac{v_{\mathrm{I}}^2}{2g} = \gamma H \qquad (113\text{–}10)$$

Na slici 113–2 prikazano je da brzinu stvara brana, upravo visina H je visinska razlika između nivoa ispred brane i nivoa pred skokom – ako se zanemari (a zaista je malen) energetski gubitak između ta dva preseka.



Slika 113–2 Brzinu ispred skoka (v_{I}) određuje visinska razlika (H).

Iz slike 113–1 se vidi da standardna devijacija pritiska dostiže $0{,}07\,\rho\, v_{\mathrm{I}}^2/2 = 0{,}07\,\gamma H$, pa ekstremni pritisci, prema jednačini (113–4), uz $M = 3$, iznose:

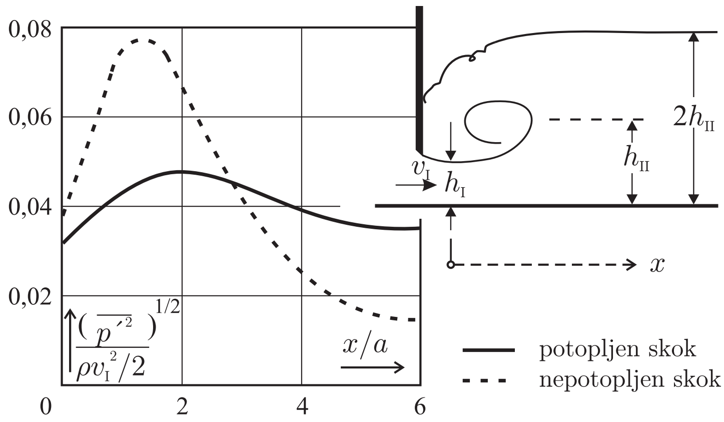
$$p'_{\max} = -p'_{\min} = 0{,}2\,\gamma H \tag{113–11}$$

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)'_{\max} = -\left(\frac{p}{\gamma}\right)'_{\min} = 0{,}2\,H \tag{113–12}$$

Kako je uz (113–4) napisano, radi sigurnosti može se uzeti $M = 4$, pa bi se $(p/\gamma)'_{\max}$ dobilo približno $0{,}3\,H$.

Prethodni rezultat pokazuje da pritisak usled fluktuacija može da povećava, odnosno smanjuje delovanje osrednjeg pritiska za čak 0,2 do 0,3 pritiska koji daje visinska razlika H koju stvara brana, a to bi, na primer, za $H = 50$ m, davalo maksimalni fluktuacioni pritisak jednak pritisku koji daje visina od 10 do 15 m. Ovo ukazuje na veliki praktični značaj fluktuacija pritiska.

Negativni fluktuacioni pritisci deluju naviše, nastoje da podignu dno – govori se o „dinamičkom uzgonu". Osrednjeno opterećenje odozgo dobija se integrisanjem osrednjenog pritiska $\overline{p}$ i na ploču deluje pritiskujuće – ono je otprilike jednako težini vode iznad ploče, pa može da bude nedovoljno da nadjača delovanje fluktuacionih pritisaka koji podižu ploču, jer su ovi, kako pokazuje (113–11) prilično veliki. To nameće zahtev da se o fluktuacijama pritiska mora voditi računa pri razmatranju stabilnosti ploče. Uz ovo treba da se doda da obično na donju stranu ploče, iz tla ispod nje, deluje značajno opterećenje koje odiže ploču (to je predmet Poglavlja 134.), što se pridružuje uticaju fluktuacija na podizanje ploče.

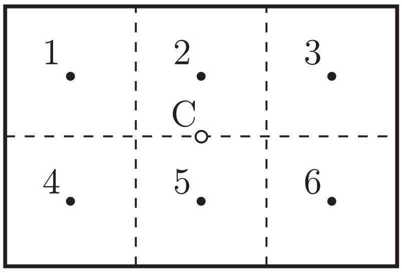


Slika 113–3 Standardna devijacija pritiska na dno ispod potopljenog hidrauličkog skoka, za dubinu iza skoka jednaku dvostrukoj dubini za obrazovanje skoka.

Za potopljeni hidraulički skok u koga ulazi mlaz sa brzinom v_I, dubina iza skoka neka je, primera radi, dva puta veća od dubine $h_{\rm II}$ potrebne da se skok obrazuje – slika 113–3, prikaz fluktuacija pokazuje da je standardna devijacija u početku manja nego kod nepotopljenog skoka, ali je nizvodno veća. Moglo se pomisliti da potapanje skoka, usled većih dubina, treba da svuda stvara uslove za bolje umirenje, odnosno da su svuda fluktuacije manje intenzivne od onih kod nepotopljenog skoka. Kod potopljenog skoka tako intenzivnog smirivanja u početku nema, a treba smiriti istu nadolazeću energiju kao kod nepotopljenog skoka, pa se smanjivanje u početku nadoknađuje povećanjem fluktuacija nizvodnije. Drugim rečima smirivanje je ravnomernije raspoređeno duž strujanja.

* * *

Za primer opterećenja fluktuacionim pritiscima uzeće se sila na ploču, ono će se proceniti na osnovu pritisaka u n tačaka. Na slici 113–4 broj tačaka je 6 – razume se, da broj tačaka može da bude proizvoljan. Bitno je da se površina A ploče podeli na n jednakih delova, koji nisu preveliki, upravo pritisak u težištu svakoga od delova je dovoljan da se približno odredi sila na taj deo. Prema tome, fluktuaciona



Slika 113–4 Pri proceni opterećenja od fluktuacionih pritisaka ploča se podeli na (n) jednakih delova. Na slici je uzeto $n = 6$.

sila P' na ploču površine A iznosi:

$$P' = \frac{A}{n}(p'_1, +p'_2 + \ldots + p'_n) \qquad (113\text{–}13)$$

gde su $p'_1, p'_2, \ldots p'_n$ pritisci u težištima pojedinih delova.

Maksimalna vrednost ove sile, pod pretpostavkom da se maksimalni pritisci u svim tačkama javljaju istovremeno, iznosi:

$$\begin{aligned} P'_{\max} &= \frac{A}{n}(p'_{1,\max} + p'_{2,\max} + \ldots + p'_{n,\max}) \\ &= \frac{A}{n}M\left[\left(\overline{p'^2_1}\right)^{1/2} + \left(\overline{p'^2_2}\right)^{1/2} + \ldots + \left(\overline{p'^2_n}\right)^{1/2}\right] \end{aligned} \qquad (113\text{–}14)$$

Pri pisanju prethodnoga korišćen je stav da je ekstremna vrednost pritiska njegova standardna devijacija pomnožena faktorom M – tako je napisano sa (113–4), gde je napisano i da je $p'_{\max} = -p'_{\min}$, pa je:

$$P'_{\max} = -P'_{\min} = \frac{A}{n}M\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{p'^2_i}\right)^{1/2} \qquad (113\text{–}15)$$

Ovakvom računanju ekstremnih vrednosti sile mora se staviti ozbiljna primedba, jer se ekstremni pritisci ne javljaju u svim tačkama istovremeno, iz čega proizilazi da je sila sračunata prethodnim izrazom precenjena. Tačnijem određivanju sile postupa se prema sledećim izlaganjima:

Iz (113–13) proizilazi:

$$P'^2 = \left(\frac{A}{n}\right)^2 (p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_n)^2 =$$

$$= \left(\frac{A}{n}\right)^2 (p_1' + \ldots + p_n')(p_1' + \ldots + p_n') =$$

$$= \left(\frac{A}{n}\right)^2 \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} p_l' p_m' \qquad (113\text{–}16)$$

iz čega sledi da je standardna devijacija sile:

$$\left(\overline{P'^2}\right)^{1/2} = \frac{A}{n} \left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \overline{p_l' p_m'}\right)^{1/2} \qquad (113\text{–}17)$$

Napominje se da se napisani zbir sastoji od sabiraka sa $l = 1, 2, ..., n$ i $m = 1, 2, ..., n$ – ukupno n^2 sabiraka.

Pošto je prihvaćena normalna raspodela za pritiske, ista će biti i za silu, jer se za nju integrišu pritisci po površini, pa se za ekstremne vrednosti sile dobijaju množenjem prethodnog izraza sa M:

$$P'_{\max} = -P'_{\min} = M \frac{A}{n} \left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \overline{p_l' p_m'}\right)^{1/2} \qquad (113\text{–}18)$$

Uvodi se koeficijent korelacije između istovremenih pritisaka u dve tačke:

$$K_{lm} = \frac{\overline{p_l' p_m'}}{\left(\overline{p_l'^2} \cdot \overline{p_m'^2}\right)^{1/2}} \qquad (113\text{–}19)$$

Ovo je napisano po ugledu na (54–12), gde se u izlaganje uveo koeficijent korelacije.

Zamenom $\overline{p_l' p_m'}$ u (113–18), prema onome što daje (113–19), dobija se:

$$P'_{\max} = -P'_{\min} = M \frac{A}{n} \left[\sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} K_{lm} \left(\overline{p_l'^2} \cdot \overline{p_m'^2}\right)^{1/2}\right]^{1/2} \qquad (113\text{–}20)$$

Primećuje se da je $K_{lm} = 1$ za $l = m$ (jer je to korelacija pritiska u istoj tački sa samim sobom), dok za dve različite tačke, za $l \neq m$, neće biti jedinica, jer se istovremeno ne javljaju, odstupaće više od jedinice ukoliko je veza između istovremenih pritisaka u te dve tačke slabija. Tako će i maksimalna vrednost sile biti manja u odnosu na silu kada se o korelaciji ne vodi računa, kada se predpostavlja da se ekstremne vrednosti pritisaka javljaju u svim tačkama istovremeno. Koliko to smanjenje iznosi proceniće se u primeru gde su uslovi pojednostavljeni, ali će primer poslužiti sticanju utiska o uticaju korelacije.

Pretpostavlja se da su standardne devijacije pritiska u svim tačkama iste, pa je za isti proticaj i iste granične uslove:

$$\overline{p_l'^2} = \overline{p_m'^2} = \overline{p_i'^2} = \overline{p_\mathrm{C}'^2} = \mathrm{const} \tag{113–21}$$

Sila pri istovremenoj pojavi ekstremnih pritisaka u svim tačkama, sračunata sa (113–15), uz prethodni uslov, iznosi:

$$P'_\mathrm{max} = -P'_\mathrm{min} = \frac{A}{n}\, M \left[n \left(\overline{p_\mathrm{C}'^2}\right)^{1/2} \right] = A\, M \left(\overline{p_\mathrm{C}'^2}\right)^{1/2} \tag{113–22}$$

a jednačina (113–20), uz prethodni uslov (113–21), daje:

$$\begin{aligned} P'_\mathrm{max} = -P'_\mathrm{min} &= M\,\frac{A}{n} \left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} K_{lm}\, \overline{p_\mathrm{C}'^2} \right)^{1/2} = \\ &= M\,\frac{A}{n} \left(\overline{p_\mathrm{C}'^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} K_{lm} \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{113–23}$$

Odnos između ovoga izraza i njemu prethodnog može se nazvati „faktor umanjenja", jer iskazuje smanjenje sile ako se vodi računa o korelaciji – on iznosi:

$$\Psi = \frac{\left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} K_{lm} \right)^{1/2}}{n} \tag{113–24}$$

Uvođenjem faktora Ψ može se, kao opšti izraz za ekstremnu vrednost sile napisati:

$$P'_\mathrm{max} = -P'_\mathrm{min} = AM \left(\overline{p_\mathrm{C}'^2}\right)^{1/2} \Psi \tag{113–25}$$

gde je $\Psi = 1$ kada ekstremni pritisci deluju istovremeno, a $\Psi < 1$ kada se vodi računa o korelaciji.

Prethodni postupak može se primeniti u zadatku gde je standardna devijacija ista po celoj površini, ali i u zadatku gde nije ista za sve tačke, ali se može računati sa standardnom devijacijom u težištu površine (za ploču na slici 113–4 to je tačka „C") i onda se računa kao da je u svim tačkama ta standardna devijacija. Naime, primenjuje se (113–21) sa

$\overline{p_C'^2}$ u težištu. Za to se nalazi opravdanje u okolnosti da su devijacije sa jedne strane težišta veće, a sa druge manje, tako je da ona u težištu neka vrsta proseka. Tako obično biva ako struja teče sa jednog kraja ploče ka drugom, pa tim smerom turbulencija jača (ili slabi), a onda standardne devijacije niz struju se povećavaju (ili smanjuju), pa je prosek negde u sredini.

Pokazaće se koliko iznosi faktor umanjenja, napisan sa (113–24) za primer ploče sa slike 113–4, uz sledeće vrednosti koeficijenta koleracije:

a) Koeficijenti korelacije za $l = m = n$ tj. K_{ii} jednaki su jedinici, jer je to korelacija između pritiska u tački sa samim sobom. Za 6 tačaka takvih koeficijenta je takođe 6.

b) Neka je tečenje upravljeno duž ploče, pa u istom poprečnom preseku leže tačke 1 i 4, odnosno 2 i 5, odnosno 3 i 6 (vidi sliku 113–4). Za te parove tačaka eksperimentalno je utvrđeno da je koeficijent korelacije $K_{lm} = 0{,}4$, što znači da je $K_{14} = K_{41} = 0{,}4$ $K_{25} = K_{52} = 0{,}4$ i $K_{35} = K_{53} = 0{,}4$. Dakle, ukupno 6 koeficijenata ima vrednost 0,4.

c) Koeficijenti $K_{12} = K_{21}$, $K_{23} = K_{32}$, $K_{45} = K_{54}$, $K_{56} = K_{65}$ su parovi susednih tačaka na pravama položenim duž strujanja. Svih tih 8 koeficijenata ima vrednost $0,2$.

d) Za udaljenije tačke duž navedenih pravih nema korelacije, pa su 4 koeficijenta $K_{13} = K_{31} = K_{46} = K_{64} = 0$.

e) Između ostalih tačaka (to su parovi tačaka koje nisu ni u istom poprečnom preseku, ni u istom podužnom pravcu, nema korelacije, pa se takođe može uzeti da je $K_{lm} = 0$. Takvih koeficijenata ima 12, pa sa kod ,,d" navedenih 4 (koji su takođe jednaki nuli), ima 16 koeficijenata jednakih nuli, od ukupno 36.

Sve navedeno o koeficijentima korelacije daje faktor umanjenja Ψ, iskazan sa (113–24), jednak:

$$\Psi = \frac{(6 \times 1{,}0 + 6 \times 0{,}4 + 8 \times 0{,}2)^{1/2}}{6} = 0{,}53$$

Daće se približni podaci o vrednosti faktora Ψ za ploču na dnu ispred nepotopljenog hidrauličkog skoka. Za kvadratnu ploču površine

a^2 (sa a je označena visina skoka – vidi sliku 113–1), Ψ je približno 0,6, dok je za kvadratnu ploču površine $(2a)^2$, Ψ približno 0,4. Te se vrednosti odnose na proizvoljno rastojanje x od početka ploče, jer nema veće razlike u vrednostima Ψ sa promenom rastojanja x. Poznavajući faktor Ψ ekstremna vrednost sile je određena sa (113–25), za $\left(\overline{p_C'^2}\right)^{1/2}$ uzima se vrednost standardne devijacije u težištu ploče, a ona se može očitati na slici 113–1.

Primećuje se da koeficijenti korelacije mogu imati i negativne vrednosti, i to bi smanjivalo silu. Tada bi pritisci u jednom delu ploče pritiskivali ploču, a u drugom težili da je podignu. To bi smanjilo silu, ali bi ugrožavalo stabilnost zbog delovanja momenta, koji bi naprezali ploču sa nastojanjem da je prelome po sredini.

* * *

Slika 113–5 prikazuje stub u struji koja je prisiljena da ga zaobilazi. Osrednjeno strujanje je simetrično u odnosu na podužnu simetralu, označenu sa $(s - s)$ na slici, pa je, usled te simetrije osrednjena sila u pravcu $(n - n)$, kao rezultanta sila na obe bočne strane jednaka nuli. Deluju fluktirajuće sile P_{I}' i P_{II}', koje su jednake $A\,p_{\mathrm{I}}'$ i $A\,p_{\mathrm{II}}'$, gde je A površina bočne strane, a p_{I}' i p_{II}' su prosečni pritisci na površini A. Treba naglasiti da istovremeno sile P_{I}' i P_{II}' se neuravnotežuju i njihovo sadejstvo daje momentno opterećenje.

Primer je uvršten iz dva razloga. Prvi je u okolnosti da u poprečnom pravcu deluju fluktuirajuće sile, uz napomenu da se o njima mora voditi računa, jer se mora obezbediti stabilnost stuba i zbog njihovog delovanja. Drugi razlog je što će razmatranja primera pokazati da negativne vrednosti koeficijenta korelacije daju ekstremnu vrednost sile.

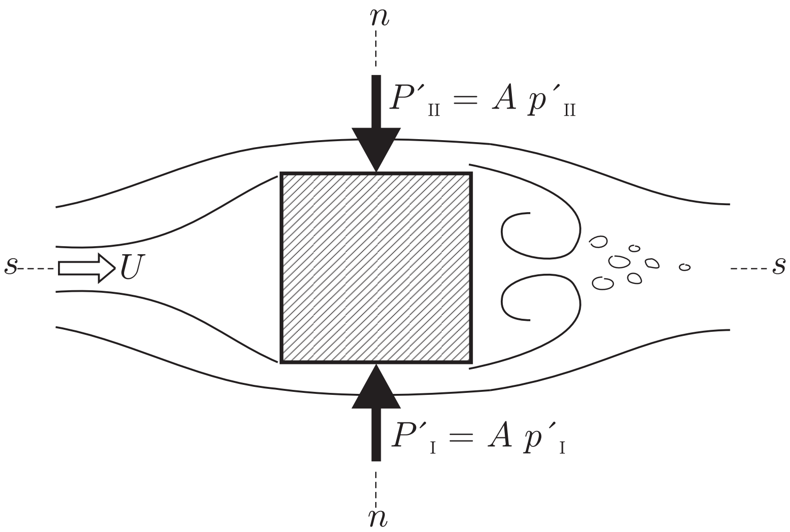
Rezultujuću fluktuacionu silu P', u poprečnom pravcu, čini razlika između P_{I}' i P_{II}', koje istovremeno nisu jednake, jer turbulentne fluktuacije nisu simetrične u odnosu na osovinu tela u pravcu strujanja. (Simetrično je samo osrednjeno strujanje.)

Za silu P' se piše:

$$P' = P_{\mathrm{I}}' - P_{\mathrm{II}}' \tag{113–26}$$

pa je osrednjena vrednost kvadrata te sile:

$$\overline{P'^2} = \overline{P_{\mathrm{I}}'^2} + \overline{P_{\mathrm{II}}'^2} - 2\,\overline{P_{\mathrm{I}}'P_{\mathrm{II}}'} \tag{113–27}$$



Slika 113–5 Na stub deluju u pravcu (n) fluktuacione sile (P'_{I}, P'_{II}), koje se ne uravnotežuju.

Simetričnost strujanja dozvoljava da se napiše:

$$\overline{P'^2_{\mathrm{I}}} = \overline{P'^2_{\mathrm{II}}} = \overline{P'^2_{\mathrm{C}}} \tag{113–28}$$

i

$$\overline{P'_{\mathrm{I}} P'_{\mathrm{II}}} = K_{\mathrm{I,\,II}} \left(\overline{P'^2_{\mathrm{I}}} \cdot \overline{P'^2_{\mathrm{II}}}\right)^{1/2} = K_{\mathrm{I,\,II}}\, \overline{P'^2_{\mathrm{C}}} \tag{113–29}$$

U drugoj jednačini uveden je koeficijent korelacije $K_{\mathrm{I,\,II}}$ koji povezuje istovremene pritiske na bočnim površinama. To je koeficijent koji je uveden sa (113–19), a ovde je primenjen na $\overline{P'_{\mathrm{I}} P'_{\mathrm{II}}}$. U istoj (113–29) jednačini iza toga je iskorišćeno ono što je napisano u prvoj. Ove dve jednačine omogućavaju da se (113–27) dovede na:

$$\overline{P'^2} = (2 - 2K_{\mathrm{I,\,II}})\, \overline{P'^2_{\mathrm{C}}} \tag{113–30}$$

Kvadratni koren iz prethodne veličine je standardna devijacija, a ona pomnožena faktorom M, daje ekstremne vrednosti sile, kako je objašnjeno ispred (113–18). Tako se dobija:

$$\begin{aligned} P'_{\mathrm{max}} &= -P'_{\mathrm{min}} = M \left(\overline{P'^2}\right)^{1/2} = \\ &= M \left(\overline{P'^2_{\mathrm{C}}}\right)^{1/2} \left[2\,(1 - K_{\mathrm{I,\,II}})\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{113–31}$$

Ako se istovremeni pritsci sa obe strane podudaraju, sile neće biti, a to pokazuje i prethodni izraz sa $K_{\mathrm{I,II}} = 1$. Ako su pak istovremeni pritisci po apsolutnoj vrednosti jednaki, ali je jedan pozitivan, a drugi negativan koeficijent korelacije je $K_{\mathrm{I,II}} = -1$, odnosno:

$$P'_{\max} = -P'_{\min} = 2\,M\left(\overline{P'^2_{\mathrm{C}}}\right)^{1/2} \qquad (113\text{–}32)$$

Ekstremna vrednost sile kreće se od nule (za $K_{\mathrm{I,\,II}} = 1$) pa do prethodno napisane vrednosti (za $K_{\mathrm{I,\,II}} = -1$), a raste sa smanjivanjem koeficijenta korelacije $K_{\mathrm{I,\,II}}$, jer je sve veća razlika između pritisaka na bočne strane, a ta razlika određuje silu.

Sila $P' = P'_{\mathrm{I}} - P'_{\mathrm{II}}$ kojom fluktuacioni pritisci deluju na telo, u pravcu normalnom na strujanje, bila bi neprekidno jednaka nuli samo ako se sile P'_{I} i P'_{II} uravnotežuju tokom celog vremena. To se, međutim, ne ostvaruje, jer turbulencija unosi kolebanja koja remete simetričnost strujanja, u odnosu na podužnu simetralu. Sila P' deluje povremeno u jednom, a povremeno u njemu suprotnom smeru (jer je osrednjena njena vrednost $\overline{P'} = 0$). Sila, dakle, osciluje što može da pobudi stub na vibracije – na to će se izlaganja osvrnuti na kraju Poglavlja.

* * *

Dejstvo fluktuirajućih pritisaka na objekat može da ga pobudi na vibracije. To se može desiti ako je kolebanje pritisaka tokom vremena periodično, a da se perioda fluktuacije pritiska poklapa sa sopstvenom periodom mogućih vibracija objekta.

Za uvid u kolebanje pritiska u jednoj tački, a tokom vremena, korisno može da posluži „koeficijent autokorelacije" koji se i može nazvati i „koeficijent korelacije po vremenu". Taj koeficijent, ako se odnosi na pritisak, iskazuje sledeći izraz:

$$K(\tau) = \frac{\overline{p'(t)\cdot p'(t+\tau)}}{\left(\overline{p'^2}\right)^{1/2}} \qquad (113\text{–}33)$$

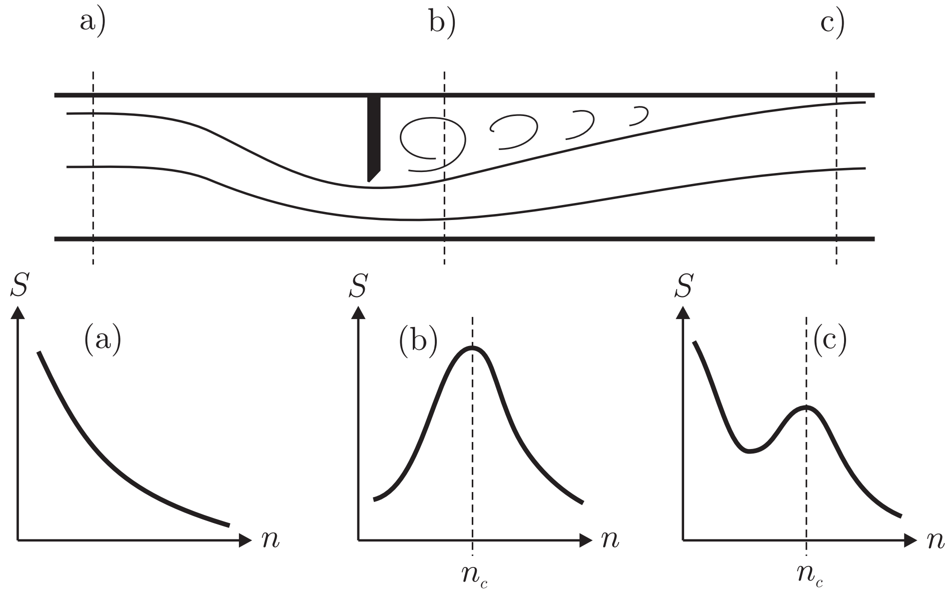
On povezuje pritisak u trenutku t i trenutku $t+\tau$ tj. u proizvoljnom trenutku i trenutku posle vremena τ. Stoga je on, kako je rečeno „koeficijent po vremenu". Kako se odnosi na istu tačku, to je „veza tačke same sa sobom" – i odatle i drugi način nazivanja, da je to „autokorelacija".

Skreće se pažnja da je taj koeficijent uveden u razmatranje u Poglavlju 54, gde se objašnjavaju statistički pokazatelji, koji se primenjuju u proučavanju turbulencije. Napisan sa (54–18) taj izraz se odnosi na bilo koju veličinu Y', a ovde je primenjen na pritisak, na p'.

Na slici (54–5) prikazan je koeficijent $K(\tau)$ u funkciji vremenskog pomeranja τ. Isprekidana linija, označena sa (II), odnosi se na slučaj u kome je veza između pritisaka u jednom trenutku i onoga posle vremena τ sve slabija što je međuvreme τ duže. Puna linija označena sa (I), odnosi se na slučaj gde se ispoljava periodičnost: nema monotonog opadanja K sa vremenom τ, nego vrednost $K(\tau)$ osciluje, sa periodom τ_c. Pritisak se u trenucima τ_c, $2\tau_c \ldots$ približava početnom.

Umesto funkcije $K(\tau)$, sa istom svrhom može se koristiti i „spektralna funkcija" obeležena sa $S(n)$ na slici 54–5. Međusobnu vezu $K(\tau)$ i $S(n)$ opisuju jednačine (54–21) i (54–22), pa je jednom funkcijom određena druga. Funkcija $S(n)$ predstavlja „spektar" (može se reći, „pregled") učestalosti (frekvencija) n, koje sačinjavaju odvijanje pritiska kroz vreme. Ako funkcija $S(n)$ ima maksimum za $n = n_c$, to ukazuje da je učestalost n_c dominantna (premoćna) i nameće periodičnost pojave sa periodom $\tau_c = n_c^{-1}$. To je slučaj (I) na slici 54–5. Za slučaj (II) nema periodičnosti, pa $S(n)$ nema maksimum. Naime, njene najveće vrednosti su za n blisko nuli, a to znači za beskonačno duge periode.

Na slici 113–6 prikazano je kako izgleda spektralna funkcija za po jednu tačku na zidu provodnika u poprečnim presecima ,,a", ,,b" i ,,c". Presek ,,a" je ispred lokalnog poremećaja, u neporemećenom toku, gde nema periodičnosti, pa je $S(n)$ kao linija (II) na slici 54–5. U području lokalnog poremećaja, zahvaćenog vrtlogom, koga karakteriše izrazita periodičnost, koja se ogleda i na pritiscima na zid, spektralna funkcija u preseku ,,b" po obliku liči na (I) na slici 54–5. U preseku ,,c" iza lokalnog poremećaja, gde se uznemirenost u tečenju već malo smirila, $S(n)$ teži da se približi onoj u preseku ,,a", ali još se osećaju uticaji periodičnosti iz ,,b". Negde nizvodnije, ali prilično udaljeno, ako ne bi bilo novog lokalnog poremećaja, stanje bi bilo skoro kao u ,,a".



Slika 113–6 Spektralna funkcija (S) za pritiske u jednoj tački u presecima ,,a", ,,b" i ,,c". U neporemećenoj struju (a) nema periodičnosti, u području lokalnih poremećaja (b) periodičnost je izrazita, sa dominantnom učestalošću n_c, dok se iza toga u (c) još osećaju uticaji lokalnog poremećaja.

* * *

Uz završetak izlaganja primera prikazanog slikom 113–5 navedeno je da će se na kraju poglavlja osvrnuti na taj primer, kao dopunu za objašnjenje mogućnosti za pobuđivanje stuba na vibracije. Sada se to ispunjava, i iskoristiće se prethodno izloženo, koje se temeljilo na objašnjenjima uz sliku 54–5.

Koeficijent autokorelacije K_τ za silu P', koja deluje na stub, uspostavlja se isto kao K_τ za pritisak p', što je napisano sa (113–33), samo se p' zameni sa P'. I kod sile se dolazi do istog zaključka kao kod pritiska. Ako zavisnost K_τ od vremena, $K_\tau = K_\tau(\tau)$ za silu pokazuje da K_τ tokom vremena osciluje, sa periodom τ_c, stvaraju se uslovi za pobuđivanje vibracija kada se τ_c poklopi sa sopstvenom periodom stuba. Pojava dominantne periode τ_c ukazuje da postoji dominantna učestalost n_c, koja se ispoljava na prikazu spektralne gustine $S(n)$ kao maksimum S za $n = n_c$ (kao na slici 113–6, donji crtež).

deo dvanaesti
EKSPERIMENTALNA ISTRAŽIVANJA

121

O MOGUĆNOSTIMA OSTVARENJA SLIČNOSTI TEČENJA NA OBJEKTU I NJEGOVOM MODELU

I

UVOD

Pretežan deo hidrauličkih zakonitosti, izložen u predhodnim poglavljima, sa svrhom primene na određivanje vrednosti hidrauličkih veličina, čime se rešava pojedini zadatak iz prakse, zasnivaju se na eksperimentalnim istraživanjima. Ona se obavljaju na modelima, a prenose se na objekat. Svrha tih istraživanja je dolaženje do zakonitosti primenljivih na nizu objekata sličnih modelu. Napominje se da se te zakonitosti odnose na objekat čiji je geometrijski opis veoma prost, jednostavan, određen sa malim brojem bezdimenzionalnih veličina, jer to svodi obim istraživanja na razumnu meru. Naime, svaku od bezdimenzionalnih veličina koje geometrijski opisuju objekat treba menjati u opitima da bi se došlo do zakonitosti. Stoga su poznate zakonitosti za trenje u cevima ili kanalima, za lokalne promene preseka u njima čiji geometrijski opis je jednostavan, za prelive i otvore za isticanje, oblikovane po određenim propisima itd. Za takve objekte pretpostavljaju se i dolazna i izlazna strujanja, koja se prosto i jednostavno opisuju.

Ako se na pojedini objekat ne mogu primeniti poznate zakonitosti, jer je osoben, sa složenim geometrijskim opisom, i dolaznim uslovima koje nameću okolnosti, svojstvene tom objektu, mora se graditi poseban (individualni) model za taj objekat.

Ne treba prihvatiti shvatanje da je poznavanje sličnosti između modela i objekta potrebno samo stručnjacima koji se bave eksperimentalnim radom i istraživanjem na modelima sa svrhom primene na hidrotehničkim objektima. To shvatanje unosi zabludu, jer korišćenje empirijskih podataka (a to koristi svaki hidraulički račun) zahteva razumevanje postupaka kojima se iz eksperimentalnih istraživanja došlo do podataka koji se koriste.

Naredna izlaganja temelje se na izloženom u Delu šestom, u Knjizi prvoj. U početku Poglavlja 63. objašnjeno je da se pod pojmom „sličnost” smatra mogućnost prenošenja sa modela na objekat rezultata istraživanja. Tamo je, nadalje, rečeno da se kao razmera podrazumeva odnos između vrednosti neke veličine na objektu i vrednosti odgovarajuće veličine na modelu. Razmera za veličinu X je $X_* = X_{\mathrm{ob}}/X_{\mathrm{mod}}$, i to je napisano sa (63–1). Navedeno je i osnovno pravilo sličnosti: bezdimenzionalne veličine prenose se nepromenljive sa modela na objekat tj. razmera za bezdimenzionalnu veličinu je jedinica.

Prvi uslov koji mora da bude ispunjen, da bi se postigla sličnost, je istovetnost na modelu i objektu graničnih i početnih uslova, napisanih bezdimenzionim veličinama, što je simbolički napisano izrazom (63–3), sa Ko = idem. Pored toga, zahteva se istovetnost jednog, ili više tzv. „brojeva”, misli se na *Re*, *Fr* i *We*.

II
SLIČNOST GRANIČNIH USLOVA

Bezdimenzionalne veličine koje izražavaju granične uslove prikazane su izrazima (62–5) do (62–9).

Sličnost graničnih uslova zahteva, pre svega geometrijsku sličnost čvrstih graničnih površina strujanja. U svakom primeru to se može postići, ako se izuzme sličnost i za hrapavost. Uticaju hrapavosti na postizanje sličnosti biće razmatran u odeljku VI.

Pored geometrijske sličnosti zahteva se, u okviru graničnih uslova, i sličnosti za ulazno strujanje u model i izlazno iz njega.

Rezultati sa modela prenose se na objekat, a granični uslovi se prenose sa objekta na model, da bi se obezbedila sličnost koja će onda omogućiti prenošenje rezultata sa modela na objekat. Granični uslovi na objektu mogu da budu određeni zadatkom, što znači da je ispred i iza objekta strujanje potpuno određeno u hidrauličkom smislu – na primer: strujanje u pravolinijski položenom tunelu, cevi ili kanalu, jezero sa mirnom vodom i sl. Granične uslove mogu, međutim, da nameću prirodne okolnosti, pa se obavljaju terenska merenja čiji se rezultati onda nametnu modelu na kome se podesi da se oni barem približno uspostave.

Smatra se zadovoljavajućim ako se na modelu usled nepotpune sličnosti graničnih uslova, dođe do rezultata koji podnošljivo odstupaju od onih koji bi se dobili uz potpunu sličnost graničnih uslova (koju je teško postići), čak i za jedno od najprostijih strujanja. Za model jedne lokalne promene u cevi, potpuno geometrijski određene, ulazni i izlazni granični preseci na modelu moraju biti toliko udaljeni od lokalne promene da do njih ne dopiru uticaji promene. Ako se to na modelu ne postiže, lokalna promena neće biti dobro izučena, jer će se njeni uticaji mešati sa uticajima koje donose poremećaji sa ulaza i izlaza. Treba se podsetiti da je to bio zahtev za obračunavanje lokalnog gubitka u cevima (slika 101-1). Ako se uspostavi u graničnim presecima strujanje kao u cevi pravolinijski položenoj, bez ikakvih lokalnih poremećaja, raspored brzina, kako je u Poglavlju 94. izučeno, zavisi od relativne hrapavosti i *Re*-broja. Videće se u narednim odeljcima (III, VI) da je teško postići Rejnoldsovu sličnost i sličnost za hrapavost, pa onda, strogo uzevši, nije postignuta sličnost strujanja. Međutim, razlika u rasporedu brzina (a uz postignutu sličnost za proticaj) nema značajan uticaj na lokalni poremećaj, pogotovo ako je on izrazit (nagle promene kinetičke energije, značajan gubitak energije).

U modelisanju kanalskih tokova, pored nastojanja da se postigne barem približna sličnost za raspored brzina u graničnim presecima, mnogo je važnije da se postigne sličnost za nivoe vode u graničnim presecima, a te nivoe nije teško nametnuti na modelu zahvaljujući uređajima (ustavama, zatvaračima i sl.) koji služe u tu svrhu.

Kao granični preseci (uzvodni i nizvodni) na modelu smatraju se oni preseci gde su ispunjeni granični uslovi, pa je za strujanje između njih obezbeđena sličnost. Ispred uzvodnog graničnog preseka mora da bude ulazna deonica dovoljne dužine da se omogući da se strujanje kroz nju pripremi da prolazi kroz uzvodni granični presek onako kako zahtevaju uslovi sličnosti. Iza nizvodnog graničnog preseka smeštena je izlazna deonica.

O podešavanju graničnih uslova dobar uvid pružaju propisivanja za merne objekte, koji moraju biti ispunjeni da bi se zakonitosti određene na modelu mogle preneti na sve slične merne objekte, uz dovoljnu tačnost. Ti uslovi vidljivi su iz odgovarajućih slika za dijafragmu (slika 103–2), za Venturijev vodomer (slika 103–8), za oštroivični preliv (slika 106–5), za trougaoni preliv (slika 106–14).

Za neustaljena strujanja mora se prema razmeri za vreme rukovati sa uređajima koji regulišu strujanje na primer sa podizanjem ili spuštanjem ustave, kojima se unosi neustaljenost.

Pri modelisanju objekta izloženih dejstvu talasa (pristanišni zaštitni objekti, kejski zidovi, obaloutvrde i sl.) na modelu se proizvode talasi visine i periode koje zahteva postizanje sličnosti.

III
SLIČNOST ZA UTICAJE VISKOZNOSTI – REJNOLDSOVA SLIČNOST

Za postizanje Rejnoldsove sličnosti zahteva se istovetnost Re-broja na modelu i na objektu, tj. razmera za Re broj jednaka je jedinici ($Re_* = 1$). Taj zahtev nameće odnose između razmera napisane sa (63–4) i (64–3). U tim izrazima μ_* označava razmeru za koeficijent viskoznosti, a ρ_* razmeru za gustinu. Odnos μ_*/ρ_* može se zameniti sa razmerom ν_* za kinematički koeficijent viskoznosti, i ta zamena dovodi do:

$$L_* \, u_* = \nu_* \tag{121–1}$$

Za isti fluid na modelu i objektu (tačnije rečeno fluid istog kinematičkog koeficijenta viskoznosti, tj. $\nu_* = 1$) prethodni izraz se svodi na:

$$L_* \, u_* = 1 \tag{121–2}$$

Ovo je ranije napisano sa (64–4), gde je ukazano na praktično neprihvatljiv uslov koji proističe iz te jednačine, a taj je da brzina na modelu treba da bude veća od odgovarajuće na objektu i to onoliko puta koliko je model smanjen u odnosu na objekat.

U pretežnom delu modelskih istraživanja i na modelu i na objektu teče voda, pa se zahteva napisano predhodnom jednačinom (121–2), a šta to u praktičnom smislu znači mogu da posluže sledeća dva primera.

1. Model treba da odredi neku zakonitost koja će se koristiti na više sličnih objekata, pa ne bi trebalo da bude znatnih ograničenja za veličinu objekta, a to se ne postiže uz zadovoljenje Rejnoldsove sličnosti. Na primer, ako se na modelu postiže brzina do 5 m/s, za objekat 10 puta povećan u odnosu na model sličnost će važiti samo do brzina od 0,5 m/s, za objekat 20 puta veći granica će biti svega 0,25 m/s. To je za praktične potrebe nepodesno.

2. Za jedan određeni hidrotehnički objekat istraživanja se obavljaju na modelu smanjenom (u odnosu na objekat) 20 (ili 50) puta. Na tom modelu brzine su veće 20 (ili čak 50) puta od odgovarajućih na objektu, a to je neprihvatljivo.

U prethodnim razmatranjima smatralo se da je kinematički koeficijent viskoznosti isti za vodu na objektu i na modelu. To je potpuno tačno samo ako je na oba mesta ista temperatura (jer koeficijent viskoznosti zavisi od temperature). Kako koeficijent kinematičke viskoznosti vode iznosi 1,5 $\mathrm{mm^2\,s^{-1}}$ (za temperaturu od 5 °C), a 0,9 $\mathrm{mm^2\,s^{-1}}$ (za 25 °C), uz pretpostavku da će se temperatura kretati u tim granicama, razmera ν_* za taj koeficijent može ekstremno dostići 0,6, odnosno 1/0,6. Vođenje računa o tome ne može, međutim, promeniti predhodne zaključke.

Može se pomisliti da se navedene nepovoljnosti mogu ublažiti primenom na modelu drugog fluida, a ne onoga koji protiče kroz objekat. Svrha menjanja fluida je smanjenje brzine na modelu, a to znači da treba da se poveća razmera $u_* = u_{\mathrm{ob}}/u_{\mathrm{mod}}$, jer će se onda dobiti manja brzina na modelu od one na objektu. Razmere za brzine označiće se sa $u_*(I)$ za modelisanje sa istim fluidom, a sa $u_*(II)$ sa različitim fluidom na modelu i objektu za ta dva modelisanja izrazi (121–2), odnosno (121–1) daju:

$$u_*(I) = \frac{1}{L_*} \qquad u_*(II) = \frac{\nu_*(II)}{L_*}$$

Za istu razmeru L_* za dužine zahtevano povećanje razmere za brzine, $u_*(II) > u_*(I)$ dobija se sa $\nu_*(II) > 1$ što znači da bi koeficijent ν trebao na modelu da bude manji od onoga na objektu. To je nemoguće postići za modelisanje objekta kroz koji protiče voda, jer nema fluida koji ima kinematički koeficijent viskoznosti nekoliko puta manji od vode. Doduše, ima – to je živa, ali ona nije podesna za korišćenje u modelskim istraživanjima, a pored toga ne može se doći do pogodne razmere.

Predhodni zaključak o teškoćama, ili čak nemogućnosti za postizanje Rejnoldsove sličnosti, nameće pitanje: Da li se na modelu može doći do rezultata koji se mogu preneti na objekat i bez postizanja Rejnoldsove sličnosti? Ohrabrujuća okolnost da se to postigne nalazi se u opštim razmatranjima o turbulenciji, u Poglavlju 53. Skreće se pažnja na tekst između „zvezdica”, ispred koga je odeljak teksta u kome je završna obeležena jednačina (53–36), a iza koga je odeljak u kome je početna jednačina (53–37). Tamo se navodi da je zanemarljiv uticaj viskoznosti na glavno strujanje, upravo na kroz vreme osrednjene vrednosti hidromehaničkih veličina ako je turbulencija „dovoljno razvijena” (praktično protumačeno: dovoljno je razvijena da se ostvari navedeno zanemarenje). Uticaj viskoznosti je manji ako je koeficijent viskoznosti manji, a tada je Re-broj veći (jer se ν nalazi u imenitelju izraza za Re-broj), pa se može očekivati da će uticaj viskoznosti, odnosno uticaj Re-broja, na osrednjene vrednosti, postati zanemarljiv čim Re pređe izvesnu vrednost. To se i pokazalo neuticanjem Re-broja na koeficijent trenja λ, čim se porastom Re pređe u oblast hrapavih cevi (sl. 96–1 i 96–3). Isto je i sa koeficijentom ξ za lokalni gubitak u cevima, što je uočljivo na slikama 101–4 i 101–5.

Ako koeficijenti λ i ξ ne zavise od Re-broja uspostavljaju se zavisnosti koje se uklapaju u zakonitost nazvanu „kvadratna zakonitost otpora”, izgubljena energija E_{izg} je srazmerna kvadratu brzine, pa i kvadratu proticaja. Uz primer na slici 101–3 napisano je da je visinska razlika H srazmerna kvadratu proticaja, pa se pretpostavljalo da su koeficijenti λ i ξ konstante. I kod dijafragme se uspostavlja kvadratna zakonitost kada je koeficijent C_Q konstanta, a on je isti za isti odnos otvora dijafragme i preseka cevi (A_0/A), kada Re pređe neku određenu vrednost – to je prikazano na slici 103–5. Naime, sa određenom vrednosti za A_0 i sa $C_Q = \text{const}$, jednačina (103–10) pokazuje srazmernost između merene visine H i kvadrata proticaja. Takođe je i kod isticanja C_Q konstanta, izuzev za malene otvore i malene brzine isticanja, što se zaključilo povodom prikazanog na slici 107–11.

Svi navedeni primeri hidrauličke prakse uklapaju se u uopšteni stav da se pretežan deo računanja u hidraulici odvija po obrascima u kojima se ne pojavljuje uticaj viskoznosti, odnosno Re-broja.

Prethodna izlaganja upućuju da se skrene pažnja na ograničenje dokle se može ići sa smanjivanjem modela. Ne sme se, u želji da se smanje troškovi modelskih istraživanja, primeniti model u kome se ne postiže sličnost barem u toj meri da se dođe do najpotrebnijih rezultata prenosivih na objekat. Pošto su na modelu dužine i brzine manje, od odgovarajućih na objektu, Re-brojevi na modelu su manji od odgovarajućih na objektu, i to smanjenje je izrazitije ako je model manji.

Objašnjeno je da je za postizanje sličnosti potrebno da bude turbulencija razvijena, da *Re*-broj pređe izvesnu vrednost, a to će se postići ako je model dovoljno velik. Nastoji se da se to postigne za tečenje na modelu barem za proticaje koji odgovaraju većim očekivanim proticajima na objektu, koji su merodavni za ocenu podobnosti objekta, a treba se pomiriti sa uticanjem *Re*-broja za manje proticaje.

Napominje se da se nailazi na pogrešnu tvrdnju da je *Re*-broj neuticajan čim je na modelu tečenje turbulentno. Međutim, i u turbulentnom tečenju viskoznost može da utiče na osrednjene vrednosti, jer neuticanje prestaje tek ako *Re*-broj pređe neku određenu vrednost. Za manje vrednosti od nje tečenje je turbulentno (izuzev oblasti laminarnog tečenja), a *Re*-broj utiče. Primer za to je glatka cev i prelaz iz glatke u hrapavu, gde koeficijent trenja λ zavisi od *Re*-broja (sl. 96–1 i 96–3). I koeficijent ξ lokalnog gubitka za određeno područje turbulentnog tečenja zavisi od *Re*-broja (sl. 101–4 i 101–5).

Treba da se naglasi da se smatralo da je postignuta sličnost, ako je ona postignuta za kroz vreme osrednjene vrednosti, i te vrednosti se prenose sa modela na objekat, čime se praksa obično zadovoljava, a ne ulazi se u zbivanja unutar turbulentnih fluktuacija.

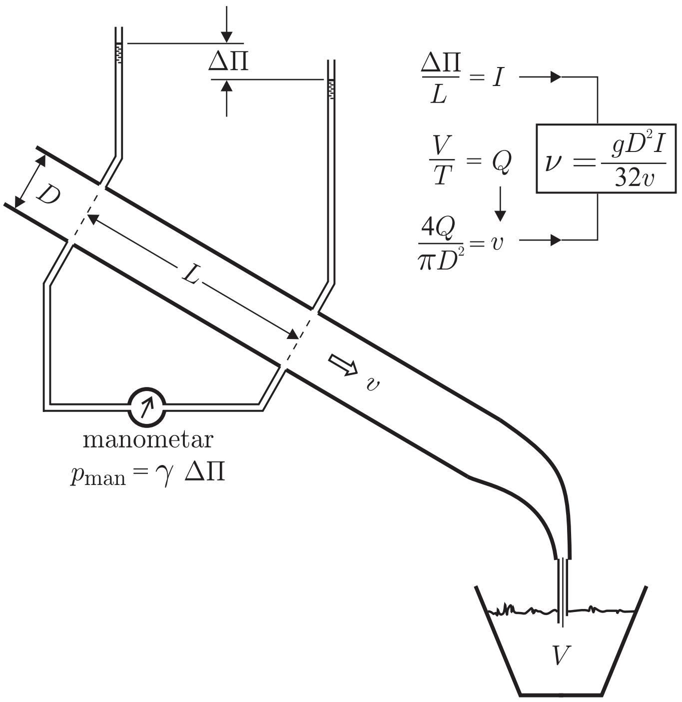
Od glavnog strujanja (koga opisuju osrednjene vrednosti) odvajaju se vrtlozi, koji se dele na sitnije (simbolično je prikazano slikom 51–3), sve dok se vrtlozi toliko ne usitne da je u njima viskoznost sposobna da trenjem završi preobraćanje mehaničke energije u toplotu.

Ako prvostvoreni vrtlozi imaju toliki zamah da je viskoznost nesposobna da utiče na iznos kinetičke energije, koji oni zahvatanjem oduzimaju glavnom strujanju, onda viskoznost ne utiče na promenu osrednjenih vrednosti jer su one posledica navedenog zahvatanja. Pod uticajem takvih prvostvorenih vrtloga u području lokalnog poremećaja viskoznost malo utiče na turbulentne fluktuacione veličine (na pritisak, pre svega), pogotovo na njihove ekstremne vrednosti. Viskoznost, međutim, utiče značajno, čak presudno na proces kada se vrtlozi smiruju, kada se „gase" uticaji lokalnog poremećaja, a to je van užeg područja modelisanog lokaliteta.

Sa stanovišta postizanja sličnosti može se reći da se krupniji vrtlozi na modelu mogu smanjiti (u odnosu na vrtloge na objektu) onoliko puta koliko zahteva razmera, dok sitniji ne mogu, jer se ne mogu toliko usitniti. Naime, na modelu i objektu najsitniji vrtlozi su međutim jednaki (apsolutno uzevši), ako je na oba mesta viskoznost ista, a ona nameće meru najsitnijih vrtloga (gde je ona sposobna da „dokrajči" preobraćanje mehaničke energije u toplotu). Dakle, bez Rejnoldsove sličnosti ne može se postići sličnost za „gašenje" turbulentne mehaničke energije, gde je bitan uticaj viskoznosti.

* * *

Koeficijent viskoznosti određuje se vrlo prosto, merenjem pijezometarske razlike u cevi (slika 121–1), uz uslov da je tečenje laminarno. U Poglavlju 96., napisan je obrazac (96–40) za nagib I pijezometarske linije, po kome on zavisi od prečnika D cevi, brzine v i kinematičkog



Slika 121–1 Određivanje koeficijenta viskoznosti laminarnim tečenjem kroz cev. Merenjem pijezometarske razlike ($\Delta\Pi$) i zapremine (V) protekle kroz vreme (T) određeni su nagib (I) pijezometarske linije i brzina (v), pa se primenom uokvirenog obrasca sračunava kinematički koeficijent viskoznost (ν).

koeficijenta viskoznosti ν. Primenom toga obrasca, za određenu cev, uz poznate vrednostil za v i I (one su određene, merene) dobija se:

$$\nu = \frac{gD^2I}{32\,v} \tag{121–3}$$

Koeficijent viskoznosti μ (dinamički) onda je određen sa $\rho\nu$ (gde je ρ gustina).

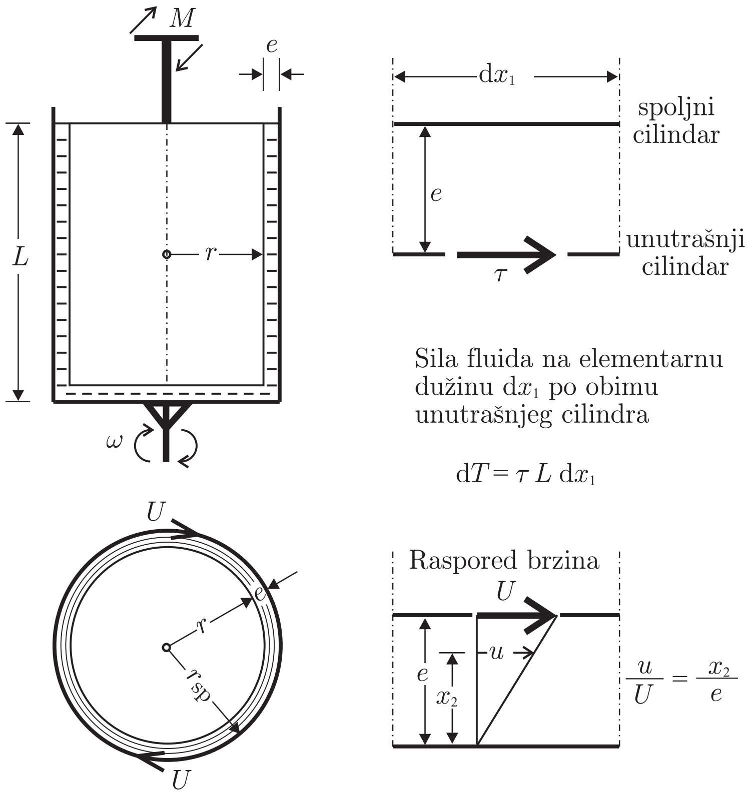
Kako se iz merenja dolazi do vrednosti za ν šematski je prikazano na slici 121–1. Meri se zapremina V protekla za vreme T, čime je određen proticaj, $Q = V/T$, a deljenjem proticaja sa poprečnim presekom dobija se brzina v. Druga veličina, potrebna za račun po (121–3), je nagib I pijezometarske linije, koji se dobija deljenjem izmerene pijezometarske razlike $\Delta\Pi$ sa dužinom L na kojoj se ostvaruje ta razlika.

Određivanju koeficijenta viskoznosti namenjen je i „obrtni viskozimetar" koji se sastoji od dva cilindra (slika 121–2). Spoljni cilindar se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω, tako da je brzina U po obimu cilindra jednaka $\omega\, r_{\mathrm{sp}}$, gde je r_{sp} poluprečnik spoljnjeg cilindra. Između spoljnjeg i unutrašnjeg cilindra prečnika r nalazi se sloj debljine $e = r_{\mathrm{sp}} - r$ tečnosti čiji se koeficijent viskoznosti određuje. Obrtanje spoljnjeg cilindra nagnalo bi i unutrašnji na obrtanje, ali je on sprečen delovanjem obrtnog momenta M, kojim je ukočen, on miruje. Meri se momenat M.

Na desnoj strani slike 121–2 prikazan je elementarni deo sloja dužine $\mathrm{d}x_1$ merene po obimu. Ne oseća se uticaj zakrivljenosti, jer je debljina sloja malena u odnosu na poluprečnik zakrivljenja ($e \ll r$), pa se elementarni deo dužine $\mathrm{d}x_1$ može posmatrati kao deo sloja između dve paralelne ploče, na međusobnom rastojanju e, od kojih je jedna nepokretna, a druga se kreće brzinom U. Taj zadatak razmatran je i rešen u Poglavlju 93., gde je jednačinom (93–37) određen raspored brzina. U slučaju koji se razmatra $I_\Pi = 0$, jer je $\Pi = \mathrm{const}$, pošto je strujanje osnosimetrično u svim presecima u struji stanje je istovetno, pa izraz (93–36) daje $K = 0$. Sa tom vrednošću, i sa $2h = e$ (to je razmak između ploča), dobija se primenom (93–37):

$$\frac{u}{U} = \frac{x_2}{e}$$

i toliko je i upisano na desnoj strani slike 121–2, pri dnu.



Slika 121–2 Obrtni viskozimetar. Spoljni cilindar se obrće ugaonom brzinom (ω), a unutrašnji je zakočen dejstvom obrtnog momenta (M). Za poznatu brzinu (ω) momenat (M) zavisi od viskoznosti tečnosti smeštene između cilindara, pa se merenjem (M) određuje koeficijent viskoznosti.

Za $I_{\Pi} = 0$, jednačina (93–38) daje napon $\sigma_{21} = \mu U/2h = \text{const}$ u celom strujanju, pa je toliki i uz ploču, gde je:

$$\tau = \mu \frac{U}{e} \tag{121–4}$$

I ovde je razmak između ploča $2h$ zamenjen sa e, sa μ je označen koeficijent viskoznosti (dinamički).

Za elementarnu dužinu sila trenja $\mathrm{d}F$ iznosi:

$$\mathrm{d}F = \tau L \, \mathrm{d}x_1$$

sa L je označena visina cilindra (vidi sliku 121–2).

Obrtni moment te sile za krak jednak r iznosi:

$$\mathrm{d}M = \tau L\, r\, \mathrm{d}x_1$$

pa je obrtni moment za ceo obim cilindra:

$$M = \tau L\, r \int_0^{2\pi r} \mathrm{d}x_1 = \frac{2\pi\mu\, U\, L\, r^2}{e}$$

kome se suprostavlja mereni obrtni momenat. U prethodnom izrazu napon τ je zamenjen prema (121–4).

Poznavanjem brzine U i merenjem momenta M, koeficijent viskoznosti određuje prethodna jednačina – on je jednak:

$$\mu = \frac{M e}{2\pi L\, U\, r^2} \tag{121–5}$$

IV
SLIČNOST ZA UTICAJE TEŽINE – FRUDOVA SLIČNOST

U Poglavlju 64. razmatranje Frudove sličnosti počinje sa navodom da se „ona postiže veoma lako", a to se objašnjava napisanim sa (64–1):

$$u_*^2 = L_* \tag{121–6}$$

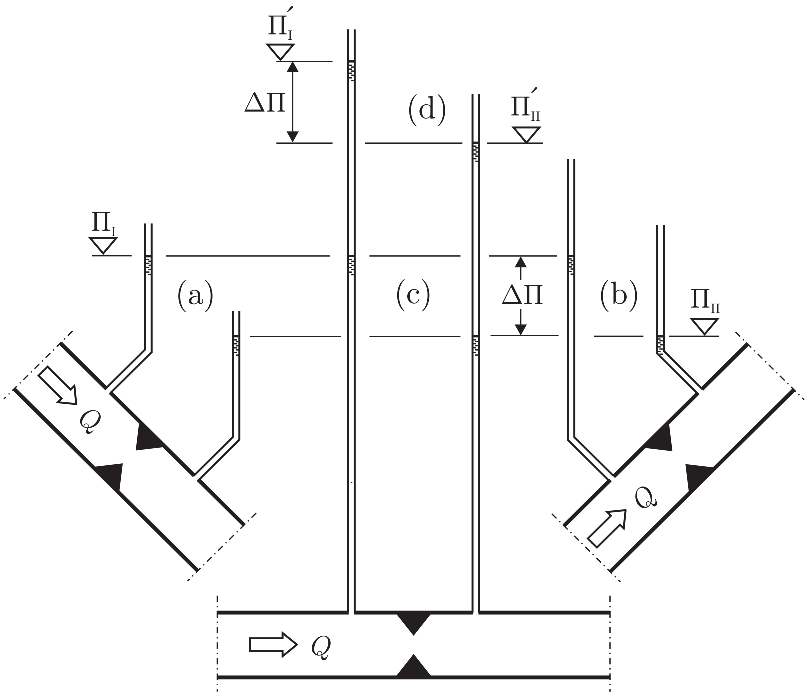
što iskazuje da su na smanjenom modelu smanjene i brzine, a to je pogodno, kao što je pogodna i razmera za proticaje:

$$Q_* = u_*\, A_* = L_*^{5/2} \tag{121–7}$$

Ovde je najpre razmera za proticaje napisana kao proizvod razmera za brzine i preseke, a potom je A_* zamenjeno sa L_*^2, a u_*, shodno (121–6), sa $\sqrt{L_*}$.

*　　*　　*

O uticaju, odnosno neuticanju *Fr*-broja raspravljano je ispred i iza izraza (62–18). Objašnjeno je da *Fr*-broj ne utiče ako je merodavan samo zbir delovanja težine i pritiska, a neuticajno je koliko je učešće težine, a koliko pritiska. Tamo je to iskazano da je merodavna (zbirna) veličina Γ, u izrazu (62–18), bez obzira koliko iznosi gZ, a koliko p/ρ. Tamo je još rečeno da je *Fr* neuticajan u strujanju pod pritiskom, gde je ceo raspoloživ prostor između čvrstih granica ispunjen tečnošću, gde nema slobodne površine tečnosti. Upoređenje veličine Γ sa pijezometarskom kotom Π pokazuje da je $\Gamma = g\Pi$, pa se može reći da je *Fr* neuticajan kod pojava gde je bitna pijezometarska kota Π, a neuticajno je koliko njoj doprinose pojedinačno Z i p/γ, a to je u strujanju pod pritiskom, bez slobodne površine tečnosti. To se veoma ubedljivo ispoljava na prikazanom na slici 121–3.



Slika 121–3 Za isti proticaj (Q) iste tečnosti kroz istu cev, pijezometarska razlika ($\Delta\Pi$) je ista za bilo koji nagib cevi i za bilo koju nizvodnu kotu (Π_{II}).

Na navedenoj slici ista cev, uz isti proticaj Q, različito je položena. Za tečenje istoga proticaja iste tečnosti u sva tri slučaja razlika pijezometarskih kota $\Pi_I - \Pi_{II}$ (za preseke I i II) je ista, iako težina u slučaju (a) potpomaže tečenju, a u (b) sprečava, dok u (c) ne deluje. U slučaju (d) granični uslov podigao je kotu Π_{II} na Π'_{II}, a pijezometarska razlika ostaje ista. Dakle, razlika je ista, iako kote Π_I i Π_{II} nisu iste – upravo bitna je razlika $\Pi_{\mathrm{I}} - \Pi_{\mathrm{II}}$, a ne položaj samih pijezometarskih kota Π_{I} i Π_{II}.

U tečenju sa slobodnom površinom tečnosti bitan je uticaj *Fr*-broja, jer težina svojim dejstvom obrazuje slobodnu površinu, uz neminovan uslov da na njoj nema pritiska. Dok se cev mogla proizvoljno postavljati u odnosu na vertikalu (slika 121–3), a da strujanje ostane isto, promena nagiba kanala menja strujanje. Ovo je prilika za podsećanje na kraj izlaganja o Frudovoj sličnosti, u Poglavlju 64., gde se kaže da je najbolji pokazatelj nepotrebnosti Frudove sličnosti u mogućnosti da se model može postaviti proizvoljno u odnosu na vertikalu, a to je moguće u tečenju pod pritiskom, a nije u tečenju sa slobodnom površinom.

Pošto se uticaj težine i pritiska ne može uzimati zbirno, nego se mora posebno izraziti uticaj težine, posebno pritiska, to nameće zadovoljenje razmere za oba sabirka koja čine pijezometarsku kotu Π. Za oba mora biti ista razmera, a to je razmera L_* za dužine:

$$\Pi_* = Z_* = \left(\frac{p}{\gamma}\right)_* = L_* \qquad (121\text{–}8)$$

Razmera $(v^2/2g)$ za brzinsku visinu je takođe jednaka L_* što se vidi iz (121–6), pa je ista razmera za sve tri visinske razlike: između kota dna, između kota nivoa (to je pijezometarska razlika) i između kota energije (kota energije je $E = \Pi + v^2/2g$).

Uobičajeni oblik *Fr*-broja u tokovima sa slobodnom površinom napisan je sa (92–20) kao:

$$Fr = \frac{v^2}{gA/B} \qquad (121\text{–}9)$$

(A površina poprečnog preseka struje, B širina slobodne površine, v srednja brzina u preseku).

Ovaj oblik nametnuo se kao pogodan u proučavanju kanalskih tokova, u Poglavlju 92. Opšti oblik *Fr*-broja uveden je sa (62–3):

$$Fr = \frac{u_0^2}{gL_0}$$

Upoređenje predhodna dva izraza pokazuje da A/B u prvom predstavlja karakterističnu dužinu L_0, a srednja brzina v je karakteristična brzina u_0. Napominje se da je A/B jednako dubini vode h u pravougaonom kanalu.

Istovetnost Fr-broja se sama po sebi uspostavlja na svim međusobno sličnim objektima u nizu primera. Tako se $Fr = 1$ (tada je dubina $h = h_{\mathrm{K}}$ kritična dubina) uspostavlja na širokom pragu (slika 106–1) na kraju kanala u kome je tečenje mirno, a bez uticaja nizvodnih uslova (slika 92–6), na prelomu dna (slika 92–11), na početku kanala u kome je tečenje burno (slika 105–20, b).

Hidraulički skok obrazuje sadejstvo inercijalnih i uticaja težine (uticaji viskoznosti i površinskog napona su zanemarljivi), pa je to primer ostvarenja Frudove sličnosti. Bezdimenzionalnu veličinu, odnos dubina ispred i iza skoka, $h_{\mathrm{II}}/h_{\mathrm{I}}$, prema izrazu (104–18) nameće u pravougaonom kanalu Fr_{I} (Frudov broj ispred skoka). Na kraju Odeljka II, Poglavlja 104., je primećeno da se sadejstvo težine i inercijalnih uticaja očigledno ispoljava u skoku. Težina teži da „sruši” skok; da ona sama deluje ne bi se mogla održati nagnuta površina vode u skoku, ali nju „drže” inercijalni uticaji.

V

SLIČNOST ZA UTICAJE POVRŠINSKOG NAPONA – VEBEROVA SLIČNOST

Veberova sličnost, pored inercijalnih, obezbeđuje sličnost i za uticaje površinskog napona. Sličnost je postignuta sličnošću Veberovog broja napisanog sa (62–4) i (62–17):

$$We = \frac{\rho L u^2}{\delta} = \frac{L u^2}{\delta_k} \tag{121–10}$$

Sa δ je označen koeficijent površinskog napona. On izražava silu po jedinici dužine, a zavisi od tečnosti na koju se odnosi, kao i fluida koji se sa tom tečnošću graniči površinom na kojoj deluje površinski napon. Na primer, daje se vrednost za vodu ograničenu vazduhom, i za takvu površinu δ ima vrednost zavisnu samo od temperature. Za istu temperaturu je konstanta, pa se δ naziva „kapilarna konstanta” jer je za dejstvo površinskog napona veoma pogodan primer penjanja nivoa u kapilarnoj cevi. Taj primer biće kasnije prikazan slikom 121–4.

Deljenjem koeficijenta δ sa gustinom ρ dobija se kinematički koeficijent površinskog napona $\delta_k (\delta_k = \delta/\rho)$, uveden sa (62–14).

Za postizanje Veberove sličnosti, zahteva se istovetnost We-broja na modelu i na objektu (We = idem tj. $We_* = 1$). Taj uslov na osnovu jednačine (121–10) dovodi do:

$$\left(\frac{u^2 L}{\delta_k}\right)_* = 1 \qquad \text{tj.} \qquad u_*^2\, L_* = \delta_{k,*} \tag{121–11}$$

Za isti fluid na modelu i na objekat ovaj uslov dovodi, baš kao i uslov za Rejnoldsovu sličnost, do za praksu nepogodnih rešenja, jer što je model manji zahteva se veća brzina. Ako su na modelu i objektu isti fludi (voda u dodiru sa vazduhom), i ako se zahteva Frudova sličnost, što su i redovne okolnosti u modelisanju objekata iz prakse, Veberova sličnost se uopšte ne može postići. Međutim, o uticaju površinskog napona retko se vodi računa.

Kroz celu Knjigu drugu uticaj površinskog napona, odnosno uticaj We-broja naveden je samo kod veoma tankih prelivnih mlazeva, u jednačini (106–69), i kod isticanja iz suda kroz maleni otvor malenom brzinom, povodom slike 107–11. U Poglavlju 111. razmatrano je uvlačenje vazduha u vodu, gde površinski napon ima uticaj, ali sporedan, jer je bitna razvijenost turbulencije (a njen pokazatelj je Re-broj), koja stvara uznemirenu površinu vode koja „grabi" vazduh.

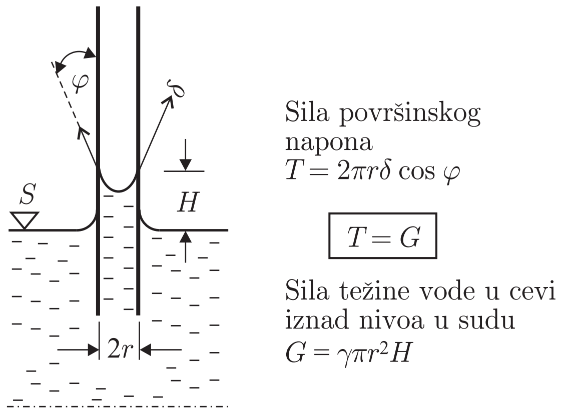
* * *

Dejstvo površinskog napona uočljivo je u tankom mlazu gde je on ograničen tankom opnom, po kojoj taj napon deluje. Za deblji mlaz opna se iskida, vazduh prodire u mlaz, on je ovazdušen. Po zahtevu sličnosti, deblji mlaz trebao bi da bude sličan sa tanjim, a to se očigledno ne postiže. Kap vode na horizontalnoj čvrstoj površini ne može se uvećati, ne mogu da budu dve kapi geometrijski slične, a jedna znatno veća.

Dodirna površina kapi i površine na kojoj kap stoji je krug, pa se njegovim povećanjme N puta toliko puta poveća i obim toga kruga, po kome deluje sila površinskog napona, koja je stoga povećana takođe N puta, jer je jednaka obimu kruga pomonoženom koeficijentom δ površinskog napona $\delta = \text{const}$, a toliko puta je povećana i vertikalna komponenta te sile, koja se uravnotežava sa silom težine kapi (i tako se kap ne ruši). Međutim, sila težine se povećava N^3 puta (toliko puta se poveća zapremina). Prema tome, obe sile ne povećavaju se podjednako da bi bile u ravnoteži i kada se kap poveća. Upravo, veća kap ne može se održati.

U nastavku prikazaće se dva primera delovanja površinskog napona, koji mogu biti zanimljivi za praktične potrebe.

Vrlo ubedljiv primer delovanja površinskog napona je izdizanje H nivoa u cevi iznad nivoa u sudu u koji je uronjena cev (slika 121–4). Težina vode u cevi $G = \gamma\pi r^2 H$ ne može da spusti nivo u njoj na nivo u sudu, jer se tome protivi površinski napon. Po obimu cevi, jednakom $2\pi r$, on deluje silom koja po jedinici dužine iznosi δ, pa je vertikalna komponenta sile površinskog napona za ceo obim $T = 2\pi\, r\, \delta \cos\varphi$. Jedinična sila, dimenzije [sila/dužina], označena sa δ, je koeficijent površinskog napona, i on zavisi od tečnosti čiji se nivo posmatra i fluida koji ograničava taj nivo. Tako se određena vrednost za δ odnosi na primer za vodu u dodiru sa vazduhom.



Slika 121–4 Izdizanje vode u cevi uronjenoj u sud usled dejstva površinskog napona.

Sile G i T su u međusobnoj ravnoteži pa je:

$$\gamma\pi r^2 H = 2\pi r\delta \cos\varphi$$

tj. :

$$rH = 2\frac{\delta}{\gamma}\cos\varphi = 2\frac{\delta_k}{g}\cos\varphi$$

Ovde je iskorišćeno izražavanje sa kinematičkim koeficijentom δ_k površinskog napona ($\delta_k = \delta/\rho$), i zamena specifične težine γ sa ρg.

Najveće penjanje H će se dobiti (za istu vrednost za r) ako je $\varphi = 0$, a ta se vrednost može usvojiti, jer je u stvarnosti ugao φ blizak nuli. Sa $\cos\varphi = 1$, predhodna jednačina se piše:

$$rH = 2\frac{\delta_k}{g} \tag{121–12}$$

Vrednost koeficijenta δ_k, za temperature vode od 5 i 20 °C, upisane su u izraze (106–70), pa se za temperature u tim granicama može uzeti $10^6\,\delta_k = 74\,\mathrm{m^3s^{-2}}$. Sa tom vrednošću, uvrštenom u (121–12), dobija se:

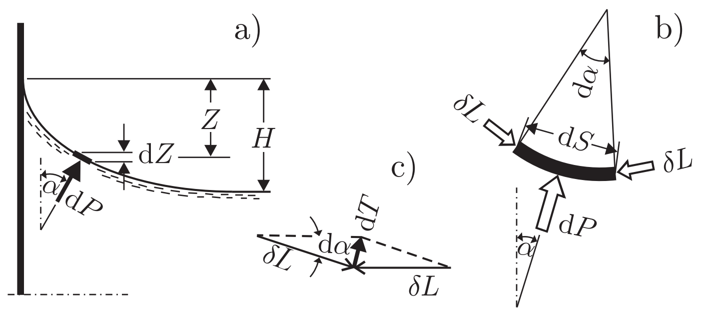
$$rH = 0{,}15\,\mathrm{cm}^2 \tag{121–13}$$

Za cevčicu prečnika $D = 2r = 3$ mm dobija se podizanje nivoa $H =$ 1 cm, a za $D = 3$ cm, podizanje H je svega 1 mm. Nadvišenje je osetno u cevima malenoga prečnika, koje se obično nazivaju „kapilarne cevi" ili „kapilari" (što ukazuje da je nešto tanko, usko). Nadvišenje nivoa se naziva „kapilarno penjanje". Povećanje prečnika nekoliko puta, uz postizanje sličnosti, dalo bi nadvišenje toliko puta, a to se ne događa, jer nije postignuta Veberova sličnost. Naprotiv, ako je prečnik veći, penjanje je manje.

Razmotriće se još jedan primer kapilarnog penjanja prikazan na slici 121–5. Na crtežu ,,a" se prikazuje površina tečnosti u blizini zida suda, gde ta površina nije horizontalna, iako tečnost miruje – to je posledica delovanja površinskog napona. Jasno je da se ne uspostavlja sličnost za visinu penjanja, nije ona onoliko puta veća na objektu od one na modelu koliko puta je smanjen model (u odnosu na objekat), jer su na oba mesta iste vrednosti. Na crtežu je upisana i sila $\mathrm{d}P$ na elementarni deo površine, koja ima pravac normale na površinu (normala zatvara ugao α sa vertikalom). Sila $\mathrm{d}P$, shodno hidrostatičkim zakonitostima, iznosi:

$$\mathrm{d}P = p\,\mathrm{d}A = \gamma Z L\,\mathrm{d}s = \gamma Z L\frac{\mathrm{d}Z}{\sin\alpha} \tag{121–14}$$

Pri pisanju prethodnoga najpre je sila $\mathrm{d}P$ izražena kao proizvod pritiska p i elementarne površine $\mathrm{d}A$, a potom je pritisak p izražen sa γZ (γ specifična težina, a Z visinska razlika između kote nivoa uz zid i visinskog položaja posmatrane elementarne površine), dok je $\mathrm{d}A$



Slika 121–5 Uz zid nivo vode u mirovanju nije horizontalan, horizontalnoj sili suprostavlja se sila površinskog napona.

zamenjeno sa $L\,\mathrm{d}s$. Sa L se označava širina (merena normalno na crtež) posmatrane površine (zadatak se rešava kao ravanski). Na kraju je $\mathrm{d}s$ zamenjeno sa $\mathrm{d}Z/\sin\alpha$.

Nehorizontalna površina vode u blizini zida ne bi se mogla održati da deluju samo sile hidrostatičkog pritiska, održava se zahvaljujući silama površinskog napona. Na crtežu ,,b" ucrtane su sile površinskog napona: sa svake strane elementarnog dela površine deluje sila $\delta\,L$ (deluje po dužini L sa silom po jedinici dužine jednakom koeficijentu δ površinskog napona). Rezultanta te dve sile ucrtana je na crtežu ,,c" i obeležena sa $\mathrm{d}T$. Iz crteža se vidi da za elementarnu promenu $\mathrm{d}\alpha$ ugla α sila $\mathrm{d}T$ iznosi:

$$\mathrm{d}T = 2L\,\delta\sin\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{2}\right)$$

S obzirom da je $\mathrm{d}\alpha$ elementarna promena ugla, može se $\sin(\mathrm{d}\alpha/2)$ zameniti sa $\mathrm{d}\alpha/2$, pa se dobija:

$$\mathrm{d}T = L\,\delta\;\mathrm{d}\alpha \qquad (121–15)$$

Ta sila deluje u istom pravcu sa silom $\mathrm{d}P$ i međusobno se uravnotežuju ($\mathrm{d}T = \mathrm{d}P$), pa se koristeći izraze (121–14) i (121–15) dobija jednačina uravnoteženja:

$$\gamma\,Z\,\mathrm{d}Z = \delta\sin\alpha\;\mathrm{d}\alpha \qquad (121–16)$$

Za integrisanje ovoga izraza određeni su granični uslovi:

$$\begin{array}{lll} \alpha = \alpha_0 & \text{za} & Z = 0 \\ \alpha = 0 & \text{za} & Z = H \end{array}$$

Prvi uslov odnosi se na dodir vodene površine i zida suda gde normala sa vertikalom zatvara ugao α_0, a drugi na rastojanje od zida gde je nivo horizontalan (odakle počinje podizanje nivoa ka zidu suda). Za navedene uslove integrisanje (121-16) daje:

$$\gamma \frac{Z^2}{2} \Big|_0^H = \delta \cos\alpha \Big|_{\alpha_0}^0$$

$$\gamma \frac{H^2}{2} = \delta(1 - \cos\alpha_0)$$

Vrednost za α_0 je bliska $\pi/4$, jer je tu tangenta na vodenu površinu približno vertikalna, odnosno normala je približno horizontalna. Ako se uzme $\alpha_0 = \pi/4$ greši se malo, dobiće se malo precenjena vrednost nadvišenja H, što se može prihvatiti. Za taj uslov, prethodni izraz daje:

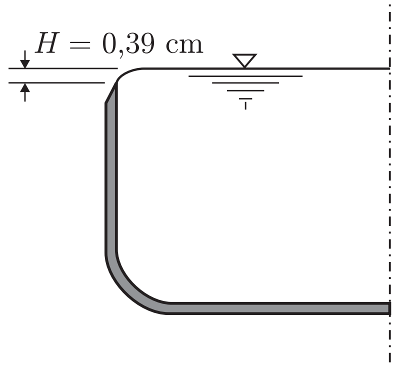
$$H = \sqrt{2\frac{\delta}{\gamma}} = \sqrt{2\frac{\delta_k}{g}}$$

Ovde su obavljene zamene: δ sa $\rho\delta_k$ i γ sa $g\rho$.

Prihvatiće se za δ_k/g vrednost primenjena pri prelasku sa (121–12) na (121–13). Dobija se:

$$H = 0{,}39\,\mathrm{cm} \tag{121–17}$$

Ovako maleno nadvišenje nema praktičnog značaja sem kod izuzetnih zadataka. Isto toliko nadvišenje nivoa vode obrazuje se uz tanki zid suda (slika 121–6). Do tog rezultata doveo bi načelno isti postupak kao kod prethodnog primera, samo što površinski napon sad deluje smerom od vazduha prema vodi. Tako on sprečava da hidrostatički pritisak obori nadvišenje. Ova pojava se primećuje kod oštroivičnog preliva, gde se po prestanku prelivanja, nivo iznad preliva ustali iznad kote prelivne ivice, pa bi se grešilo ako bi se kota prelivne ivice određivala kotom nivoa vode po završenom prelivanju.



Slika 121–6 Nivo u sudu je viši od kote ivice suda usled dejstva površinskog napona.

VI
SLIČNOST ZA UTICAJE HRAPAVOSTI

Iz razmatranja u Odeljku I, Poglavlja 99., moglo se zaključiti da je potpuni geometrijski opis hrapavosti čvrste granične površine koja ograničava strujanje veoma težak, čak i nesavladiv zadatak. Naime, hrapavost bi se morala prikazati izbočinama na površini statistički sređenom raspodelom visina, i na neki način opisati njihov oblik, raspored po površini itd. Stoga se u praksi hrapavost izražava samo jednim podatkom, jednom visinom izbočina koja na neki način predstavlja hrapavost za posmatrani primer. Ta visina može se nazvati „ekvivalentna apsolutna hrapavost". Uz naredna izlaganja biće korisno osvrnuti se na objašnjenja u Odeljku III, Poglavlja 94.

Strogo uzevši, jedan podatak za određenje hrapavosti dovoljan je samo ako je hrapavost jednolika (ista visina izbočina istog oblika i istovetnog rasporeda po površini). To je namerno postignuto jednolikom peščanom hrapavošću, ostvarenom lepljenjem za zid cevi peščanih zrna istog prečnika. Eksperimentalna istraživanja sa navedenom hrapavošću opisana su u Poglavlju 94. i rečeno je da ih je sproveo Nikuradze. Sa tom, može se reći veštačkom hrapavošću obavljeni su eksperimenti da bi se došlo do zakonitosti u kojima otpor zavisi od apsolutne hrapavosti merljive samo jednom dužinom. Te zakonitosti dovele su do obrazaca (96–19) i (96–36) za otpor trenja, upravo njima je određen koeficijent trenja λ, a u njih ulazi apsolutna hrapavost k.

U nekom praktičnom primeru za apsolutnu hrapavost uzima se ona jednolika peščana hrapavost koja daje približno isti otpor kao hrapavost u posmatranom primeru. Stoga se govori o ekvivalentnoj peščanoj hrapavosti. Taj postupak može se prihvatiti uz ozbiljne primedbe. Čak da je hrapavost jednolika, a nije peščana, nego drugog oblika, ne može da se tvrdi da će se ostvariti ista zakonitost za otpor trenja kao za peščanu hrapavost, jer nije ostvarena sličnost. Pogotovo se to ne može tvrditi za nejednoliku hrapavost različitog oblika izbočina, kakva je obično u praktičnim primerima.

Prihvatanjem stava da je hrapavost izražena jednim podatkom apsolutnom hrapavošću k, koja ima dimenziju dužine, može se govoriti o razmeri k_* za hrapavost ($k_* = k_{\text{obj}}/k_{\text{mod}}$), i ta razmera je određena razmerom za dužine ($k_* = L_*$). Relativna hrapavost k/L (gde je L karakteristična dužina na poprečnom preseku struje na primer, za kružni presek, to je prečnik D), kao svaka bezdimenzionalna veličina prenosi se nepromenljiva sa modela na objekat ($k/D = \text{idem}$).

Za model sa koga se rezultati prenose na niz sličnih objekata, zahtev $k/D = \text{idem}$, nalaže da se bi apsolutna hrapavost zavisila od veličine objekta: što veći objekat mora da bude i veća apsolutna hrapavost. To nije podesno za praktične potrebe. Ako se model odnosi samo na jedan objekat, opet dolazi do nevolja, jer je teško na modelu aposlutnu hrapavost onoliko puta smanjiti koliko zahteva razmera za dužine, pogotovo ako na objektu hrapavost nije velika. Ako je pak hrapavost na objektu velika može se na modelu površina ohrapaviti lepljenjem izbočina ili pak nekim drugim načinom, da bi se uticaj hrapavosti približio onome što zahteva zadovoljenje sličnosti. Međutim, još ima nevolja sa postizanjem sličnosti za hrapavost, jer je postizanje $k/D = \text{idem}$ dovoljno samo ako se trenje na modelu i objektu nalazi u oblasti hrapavih provodnika, gde se ne oseća uticaj viskoznosti, odnosno Re-broja. Za područje prelaza iz glatkih u hrapave provodnike uticajan je Re-broj, pa se zahteva Rejnoldsova sličnost, a ona se, kako je u Odeljku III objašnjeno, teško ostvaruje.

Sve navedene teškoće, bolje rečeno nemogućnosti za postizanje sličnosti za hrapavost (čak ako je i uslovno, ako se podešava samo ekvivalentna apsolutna hrapavost) otpadaju ako se modeliše primer u kome je učešće trenja od malenoga značaja u odnosu na lokalne promene. Misli se na lokalnu promenu kinetičke energije i na lokalno otuđenje energije u vrtloge, a to se dešava u objektu koji se naziva „kratak objekat". U prilog zanemarivanju uticaja trenja treba primetiti da trenje deluje i na modelu, i na objektu. Odstupanja od sličnosti čini samo razlika ostvarenog dejstva trenja na modelu i onoga koji bi trebalo da se ostvari da je postignuta potpuna sličnost.

U uvodnom tekstu u Desetom delu, a u samom naslovu toga dela, naglašeno je da će se izlaganja odnositi na „kratke objekte". Predmet izlaganja tog dela knjige su „kratki objekti" jednostavnog geometrijskog oblika uz granične uslove koji se lako i prosto opisuju, i za koje su eksperimentalnim radom (modelima) određene zakonitosti za praktičnu primenu. Trenje se uglavnom zanemarivalo, a može se zanemariti i u modelskom istraživanju jednog pojedinačnog objekta.

Uticaj trenja teško je izdvojiti iz celokupnog uticaja na pojavu. Može se pokušati da se uticaj trenja izdvoji, što se pokazalo kod postupka za određivanje lokalnog gubitka energije objašnjenog uz sliku 101–1. Granični preseci za određivanje lokalnog gubitka moraju biti dovoljno udaljeni od uticaja lokalne promene, da bi se u njima pojavilo strujanje koje zanemarljivo odstupa od strujanja u pravolinijski položenoj cevi. To je nužno, jer stanje u graničnim presecima mora da bude lako odredivo (u praktičnoj primeni sa jednom pijezometarskom kotom za presek). Ta neminovnost, međutim, uvlači uticaj trenja, koga je nemoguće izdvojiti. Stoga se uzima kao da je trenje u području lokaliteta isto kao u pravolinijskoj cevi iste dužine, pa se tako sračunat gubitak (koji se pripisuje trenju) oduzme od ukupnog gubitka između graničnih preseka (koji daju merenja na modelu), a ostatak se pripisuje lokalnom gubitku.

To načelno uzevši, nije ispravno, ali se može opravdati, jer se kao lokalni gubitak smatra višak gubitka iznad gubitka koje bi dalo samo trenje na istoj dužini cevi, kako je i objašnjeno na početku Poglavlja 101. Na taj način određeni lokalni gubitak računa se kao da se dešava u jednom preseku, a do tog preseka, i iza njega, obračunava se trenje kao u pravolinijski položenoj cevi. Grafički prikaz svodi se na skokovito (naglo) lokalno spuštanje linije energije – slike 101–1 i 101–3 i niz narednih slika koje se odnose na lokalne gubitke. I kod određivanja sila na lokalnu prepreku računa se za silu trenja kao da je trenje u području lokalnog gubitka isto kao u pravolinijskoj cevi, primeri su na slikama 101–7 i 101–10.

Na opisani način određeni lokalni gubitak prenosi se sa modela na objekat kao da se dešava u jednom preseku, a ispred i iza tog preseka računa se gubitak na trenje na objektu.

Lokalni gubitak energije, u svim primerima u Poglavlju 105., računat je, a prikazivan takođe kao da se dešava u jednom preseku. I hidraulički skok ucrtavan je skokovitim (naglim) povišenjem nivoa. Ispred i iza lokaliteta linija energije se spušta postepeno, kako zahteva trenje, bez naglih promena nivoa, izuzev samog skoka.

122
MODELISANJE STRUJANJA POD PRITISKOM KROZ KRATKE OBJEKTE

Za modelisanje strujanja nestišljive tečnosti pod pritiskom (bez slobodne površine) nepotrebno je postizanje Košijeve sličnosti (jer se razmatra nestišljiv fluid) a ni Frudove i Veberove sličnosti (jer nema slobodne površine), pa u obzir dolazi samo Rejnoldsova sličnost. Uz to se, kao i svuda, podrazumeva postizanje sličnosti za granične uslove.

U rešavanju zadataka tečenja neophodno je, pre svega odrediti pijezometarske kote, jer se uvidom u pijezometarsko stanje dolazi do zadovoljenja pretežnog dela potreba prakse.

Naslov je ograničio modelisanje na ono što se naziva „kratak objekat”, što znači da je to objekat gde se odvijaju nagle i osetne promene u strujanju, uz zanemarljiv uticaj trenja.

Kako je u Odeljku IV prethodnog, 121-og poglavlja, objašnjeno, (i slikom 121–3 prikazano) za strujanje pod pritiskom merodavna je pijezometarska razlika. Neka je Π pijezometarska kota na proizvoljnom mestu, a Π_0 kota od koje se računaju ostale kote (to je obično jedan od graničnih uslova), pa se određuje pijezometarska razlika $\Pi - \Pi_0$, za sva ona mesta koja su u rešavanju zadataka merodavna. Primećuje se da objekat i model mogu da budu proizvoljno postavljeni u odnosu na vertikalu, jer nije nužna Frudova sličnost.

Iako je $\Pi - \Pi_0$ visinska razlika, pa ima dimenziju dužine, ona suštinski predstavlja potencijalnu energiju (upravo energetsku razliku). Isto je bilo i sa izgubljenom energijom E_{izg}, i ona takođe predstavlja energiju, a ima dimenziju dužine. (Napominje se da su u $\Pi - \Pi_0$, i E_{izg}, energije po jedinici težine). U Odeljku II Poglavlja 101. prikazano je kako se primenom dimenzionalne analize došlo do izraza (101–3). Dimenzionalni sklad neće biti poremećen, ako se leva strana toga izraza pomnoži sa 2, a tako se u imenitelju dobija brzinska visina $v^2/2g$. Naime, dobija se:

$$\frac{E_{\text{izg}}}{v^2/2g} = f(Re, Ko) \tag{122–1}$$

Tamo je rečeno da se na taj način izgubljena energija meri sa odgovarajućim radom težine (na spuštanju za E_{izg}), a to ne znači da baš težina mora da svojim radom naknadi gubitak energije. Sa tim radom se samo upoređuje (meri) izgubljena energija. Odatle gravitaciono ubrzanje g u prikazanom izrazu, iako se ne traži Frudova sličnost.

Pošto je $\Pi - \Pi_0$ visinska razlika koja meri energiju, baš kao i E_{izg}, na isti način, kao sa E_{izg} sa (122–1), može se napisati:

$$\frac{\Pi - \Pi_0}{v^2/2g} = f\,(Re, Ko) \tag{122–2}$$

Brzina v je karakteristična brzina za posmatrani primer – obično je to brzina kroz presek koji se uzima kao karakterističan ($v = Q/A$, gde je Q proticaj, a A površina karakterističnog preseka).

Leva strana u prethodnom izrazu je bezdimenzionalna zamena za $\Pi - \Pi_0$, i označiće se sa C_Π, pa je:

$$C_\Pi = \frac{\Pi - \Pi_0}{v^2/2g} \tag{122–3}$$

a na osnovu (122–2) piše se:

$$C_\Pi = C_\Pi\,(Re, Ko) \tag{122–4}$$

Za jedan model i sve njemu slične objekte, Ko se ne menja, pa se za jednu određenu tačku na modelu i njoj odgovarajuću na objektu, piše:

$$C_\Pi = C_\Pi\,(Re) \tag{122–5}$$

Ako se smatra da je uticaj Re-broja zanemarljiv, on se izostavlja u prethodnim izrazima, pa i u poslednjem napisanom (122–5), koji se onda svodi na:

$$C_\Pi = \mathrm{const} \tag{122–6}$$

ili se, uz primenu (122–3), svodi na:

$$C_\Pi = \frac{\Pi - \Pi_0}{v^2/2g} = \mathrm{const} \tag{122–7}$$

Iz prethodno napisanog može se zaključiti da se na modelu merenjem pijezometarske razlike $\Pi-\Pi_0$ samo za jednu brzinu (propuštanjem samo jednog izmerenog proticaja) može odrediti C_Π za pojedinu tačku, jer je konstanta (važi za sve proticaje). To znači uspostavljanje kvadratne zakonitosti, upravo srazmernosti između pijezometarske razlike i kvadrata brzine, pa se za bilo koju brzinu v primenom (122–7) određuje $\Pi - \Pi_0$. Koeficijent C_Π se određuje za sve one tačke za koje se to zahteva u rešavanju praktičnog zadatka.

Sa propuštanjem toga jednog proticaja na modelu određeni su i koeficijenti C_Π na objektu. Svakoj tački na modelu odgovara određena tačka na objektu, a koeficijent C_Π, kao svaka bezdimenzionalna veličina, nepromenjen se prenosi sa modela na objekat. Stoga se piše:

$$C_{\Pi,\,\mathrm{mod}} = C_{\Pi,\,\mathrm{obj}} \tag{122–8}$$

ili korišćenjem (122–7):

$$\left(\frac{\Pi - \Pi_0}{v^2/2g}\right)_{\mathrm{mod}} = \left(\frac{\Pi - \Pi_0}{v^2/2g}\right)_{\mathrm{obj}} \tag{122–9}$$

što se svodi na:

$$(\Pi - \Pi_0)_{\mathrm{obj}} = (\Pi - \Pi_0)_{\mathrm{mod}} \left(\frac{v_{\mathrm{obj}}}{v_{\mathrm{mod}}}\right)^2 \tag{122–10}$$

gde su $(\Pi - \Pi_0)_{\mathrm{mod}}$ i v_{mod} izmerene veličine na modelu za jedan proticaj, pa se $(\Pi - \Pi_0)_{\mathrm{obj}}$ sračuna prethodnim izrazom za bilo koju brzinu v_{obj}. Na slici 122–1, na gornjem delu, prikazan je prenos sa modela na objekat, a prema prethodnoj jednačini.

Prethodnim je obrazloženo kako se, uz nepostizanje Rejnoldsove sličnosti, dolazi do utvrđivanja pijezometarskog stanja na objektu (što je sa praktičnog stanovišta najvažnije i najzanimljivije).

Ako se želi ulaziti u raspored brzina, odnos brzine u u tački prema karakterističnoj brzini v, kao bezdimenzionalna veličina, prenosi se nepromenjena sa modela na objekat (u/v = idem).

* * *

Izraz (122–9) se preobličava u:

$$\frac{(\Pi - \Pi_0)_{\mathrm{obj}}}{(\Pi - \Pi_0)_{\mathrm{mod}}} = \left(\frac{v_{\mathrm{obj}}}{v_{\mathrm{mod}}}\right)^2 \tag{122–11}$$

što pokazuje da je:

$$(\Pi - \Pi_0)_* = v_*^2 \tag{122–12}$$

Ovo kazuje da razmera za pijezometarsku razliku mora da bude jednaka kvadratu razmere za brzine. To je jedini uslov za međusobno usklađivanje razmera (da bi se postigla sličnost), ako se ne zahteva Rejnoldsova sličnost.

Treba naglasiti da razmera L_* za dužine koje određuju objekat (opisuje ga u geometrijskom smislu), nije ničim uslovljena (nije vezana ni za razmere $(\Pi - \Pi_0)_*$ i v_*). Takođe su i visinski smeštaj i nagib modela proizvoljni, jer nije potrebna Frudova sličnost, pošto je strujanje pod pritiskom.

Objašnjeno je Odeljku III prethodnog 121-og poglavlja da se nepostizanje Rejnoldsove sličnosti opravdava neuticanjem Re-broja na osrednjene vrednosti hidromehaničkih veličina, ako je turbulencija dovoljno razvijena da je taj uticaj zanemarljiv. Kako je turbulencija razvijenija kada je Re-broj veći, treba očekivati da će doći do neuticanja kada Re-broj pređe određenu vrednost (koja zavisi od predmeta proučavanja i izbora karakteristične dužine i brzine za forminje Re-broja). Na modelu treba propuštati niz proticaja (a ne samo jedan) da bi se utvrdila granica neuticanja Re-broja. Za manje proticaje ostvaruje se $C_\Pi = C_\Pi(Re)$, a povećanjem proticaja povećava se Re-broj pa se ulazi u područje neuticanja Re-broja, gde je $C_\Pi = \text{const}$, a to je onda područje gde se rezultati sa modela mogu prenosti na objekta bez postizanja Rejnoldsove sličnosti.

Može se uopšteno reći da bezdimenzionalna veličina (kako za model i sve njemu slične objekte) ne zavisi od Re-broja kada on pređe određenu vrednost (kada se turbulencija toliko razvije da se to postigne). U načelnom razmatranju Rejnoldsove sličnosti, u Odeljku III, navedeni su primeri koji potkrepljuju ovaj navod. Bezdimenzionalne veličine uzete za primere su koeficijent trenja λ, koeficijent lokalnog gubitka ξ i koefijent proticaja C_Q za dijafragmu, gde se na slikama (96–1),(96–3), odnosno (101–4) i (101–5), odnosno (103–5), vidi da te veličine postaju konstante kada pređu neku određenu vrednost.

Sa praktičnog stanovišta povoljno je što se i bez postizanja Re sličnosti mogu modelski rezultati prenositi na objekat za veće proticaje (i za najveći), a oni su merodavni za projektovanje objekta.

Izrečenu proizvoljnost u izboru geometirjske razmere (razmere za dužinu) ne treba shvatiti kao neograničenu slobodu izbora razmere za dužine, jer isuviše sitan model dovodi do Re-brojeva na modelu koji nisu dovoljno veliki da bi se ušlo u područje neuticanja Re-broja.

Postizanje Rejnoldsove sličnosti razmatrana je u Odeljku III prethodnog 121-og poglavlja. Tamo je sa (121–1) napisan uslov za postizanje te sličnosti kojim se razmera u_* za brzine uslovljava sa:

$$u_* = \frac{\nu_*}{L_*} \tag{122–13}$$

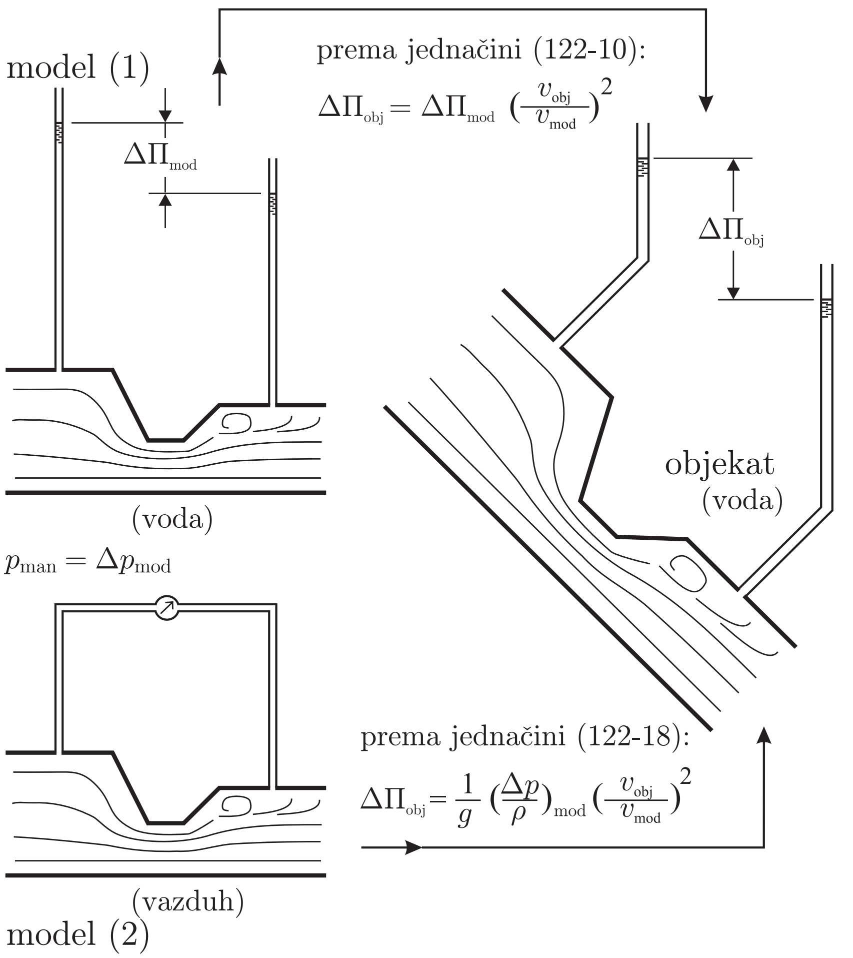
Ovo pokazuje da je razmera za brzine u_* zavisna od razmere L_* za dužine (u vezu ulazi i ν_* razmera za koeficijent viskoznosti). U pomenutim razmatranjima u prethodnom poglavlju objašnjeno je, na osnovu izraza (121–1) da su malene i veoma ograničene mogućnosti da se u praksi postigne Rejnoldsova sličnost, jer se sa istim fluidom na modelu i objektu (sa $\nu_* = 1$) dobijaju na modelu veće brzine od onih na objektu (podrazumeva se da je model smanjen u odnosu na objekat). Rečeno je još da se ne može doći do prihvatljivih odnosa za razmere ako se na modelu uzme fluid drugačije viskoznosti (ne iste kao na objektu).

Za postizanje Rejnoldsve sličnosti, zadovoljenjem uslova (122–13) mora se zadovoljiti i ranije napisani uslov (122–12).

Teškoće oko postizanja sličnosti za uticaje hrapavosti objašnjene su u Odeljku VI prethodnog, 121-og poglavlja. Iz tih objašnjena može se zaključiti da se mogu očekivati prenosivi rezultati sa modela na objekat ako je uticaj trenja zanemarljiv u odnosu na uticaje koje unosi lokalna promena, tj. ako se radi o onome što se nazvalo "kratak objekat", a takav se obično i modeliše. Sam naslov ovoga poglavlja ukazuje da se razmatranja ograničavaju na takav objekat. Tamo, u Poglavlju 121, je navedeno da se u nekim primerima može uticaj trenja obračunati (prema modelima na deonicama objekta gde deluje isključivo trenje) i oduzeti od ukupnog dejstva, pa ostatak pripisati lokalnom uticaju.

* * *

U eksperimentalnim istraživanjima primenjuju se i modeli kroz koje struji vazduh, a rezultati se prenose na objekat (ili objekte) kroz koje protiče voda (slika 122–1). Za to je neophodno da se gustina vazduha na modelu zanemarljivo menja (može se smatrati da je konstantna),



Slika 122–1 Modelisanje objekta kroz koji teče voda, modelom (1) kroz koji teče voda i modelom (2) kroz koji struji vazduh.

čime se izbegava uslov za postizanje Košijeve sličnosti. Pored toga ne računa se težinom vazduha na modelu, jer je njen uticaj beznačajan.

Uslov da se uticaj težine može izostaviti obično je ispunjen, objašnjava se sledećim:

Spuštanjem sa kote Z_{II} na kotu Z_{I} pritisak se usled delovanja težine poveća za $(p_{\text{I}} - p_{\text{II}}) = g\rho(Z_{\text{II}} - Z_{\text{I}})$. Ovde je uračunata samo promena pritiska usled delovanja težine, to se određuje, a ne celokupna promena pritiska, čemu doprinosi i promena celokupne kinetičke energije.

Promena koja se određuje proizilazi iz hidrostatičke jednačine (71–5), uz napomenu da se gustina veoma malo menja. Ako se pretpostavi da u jednom zadatku kratkog objekta visinska razlika $Z_{\mathrm{II}} - Z_{\mathrm{I}}$, ne prelazi 10 m, a radi se o vazduhu, gde je pri normalnom pritisku gustina reda vrednosti $1\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, povećanje pritiska (za gornju granicu $Z_{\mathrm{II}} - Z_{\mathrm{I}} = 10\,\mathrm{m}$) iznosi:

$$p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}} = g\rho\,(Z_{\mathrm{II}} - Z_{\mathrm{I}}) \simeq 10^2 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s^2}} = 10^2\,\mathrm{Nm^{-2}} \qquad (122\text{–}14)$$

a to iznosi svega 0,1% od atmosferskog pritiska ($= 10^5\,\mathrm{Nm^{-2}}$), pa se može prihvatiti zanemarljivost uticaja težine. Čak da je $Z_{\mathrm{II}} - Z_{\mathrm{I}} =$ 100 m, navedena relativna greška bila bi oko 1%.

Usvajanju uslova da je promena gustine zanemarljiva može doprineti sledeće rasuđivanje:

U zadacima koji će biti razmatrani neka se Mahovi brojevi kreću od $Ma_{\mathrm{I}} = 0$ do $Ma_{\mathrm{II}} = 0{,}2$ (kako bi kod vazduha obuhvatilo brzine od nule do skoro 70 m/s). Za vazduh je adijabatski koeficijent $K = 1{,}4$, pa jednačina (43–21) daje:

$$\left(\frac{\rho_{\mathrm{II}}}{\rho_{\mathrm{I}}}\right)^{0{,}4} = \frac{1}{1 + 0{,}008}$$

što znači da je odnos najniže i najviše vrednosti gustine:

$$\frac{\rho_{\mathrm{II}}}{\rho_{\mathrm{I}}} = \left(\frac{1}{1{,}008}\right)^{2{,}5} = 0{,}98 \qquad (122\text{–}15)$$

Menjanje gustine za oko 2% može se shvatiti kao malo uticajno.

Razmotriće se da li promena fluida (u modelu vazduha, u objektu voda) doprinosi postizanju Rejnoldsove sličnosti. Kinematički koeficijent ν vode opada sa porastom temperature, i iznosi otprilike $1{,}5\,\mathrm{mm^2s^{-1}}$ za 5 °C, a $0{,}8\,\mathrm{mm^2s^{-1}}$ za 30 °C, dok za vazduh sa temperaturom raste, za navedene temperature on iznosi oko 14, odnosno $16\,\mathrm{mm^{-2}s^{-1}}$. Razmera $\nu_* = \nu_{\mathrm{obj}}/\nu_{\mathrm{mod}}$, prema tome, nalazi se približno u granicama 1/20 do 1/10. Ovi podaci dokazuju da je kinematički koeficijent za vazduh veći 10 do 20 puta od istog koeficijenta za vodu. Napominje se da je dinamički koeficijent viskoznosti μ za vazduh, oko 50 do 100 puta manji od istog koeficijenta za vodu (jer je viskozno trenje u vazduhu znatno manje). Međutim, gustina ρ vazduha je skoro 1000 puta manja, pa je kinematički koeficijent $\nu = \mu/\rho$ znatno veći kod vazduha.

Primenom jednačine (122–13) čije zadovoljenje znači postizanje Rejnoldsove sličnosti, za $\nu_* = \nu_{\mathrm{obj}}/\nu_{\mathrm{mod}}$ u granicama od 1/10 do 1/20 (koliko je malo pre prikazano), dobija se:

$$u_* = \frac{1}{20\,L_*} \quad \text{do} \quad \frac{1}{10\,L_*}$$

Za razmeru za dužine $L_* = 1$ (model i objekat su međusobno jednaki, ili na objektu kroz koji će teći voda prethodno se obave eksperimentalna istraživanja sa vazduhom) brzine na modelu treba da budu 10 do 20 puta veće od odgovoarajućih na objektu, pa je Rejnoldsova sličnost postignuta. Ako se na modelu omogući brzina do 70 m/s (to je praktično ostvarljivo a to je i granica za brzinu da bi se, shodno prethodnim objašnjenima, mogla promena gustine vazduha zanemariti), to se na objektu odnosi na brzine od 3,5 do 7 m/s a očekivana brzina na objektu obično ne premašuju te granice. Međutim, za model smanjen svega 5 puta u odnosu na objekat zahtevaju se na modelu brzine 50 do 100 puta veće od onih na objektu, a to je paktično posmatrano, neprihvatljivo. Iz navedenoga se može izvući zaključak da je za model manji od objekta teško ostvariti Rejnoldsovu sličnost.

Dejstvo težine na modelu gde struji vazduh izostavlja se kao zanemarljivo, pa se izostavlja kota Z u izrazu za pijezometarsku kotu, i ona je:

$$\Pi = \frac{p}{\gamma} = \frac{p}{\rho g} \tag{122–16}$$

Ovo se koristi u izrazu (122–9), i on se, ako je na objektu voda, a na modelu vazduh, svodi na:

$$\underbrace{\left(\frac{\Pi - \Pi_0}{v^2/g}\right)_{\mathrm{obj}}}_{\text{voda}} = \underbrace{\left(\frac{p - p_0}{\rho\, v^2}\right)_{\mathrm{mod}}}_{\text{vazduh}} \tag{122–17}$$

čime je određena razlika $(\Pi - \Pi_0)_{\mathrm{obj}}$ za brzinu v_{obj}, i na osnovu izmerene razlike $(p - p_0)_{\mathrm{mod}}$, pri brzini v_{mod}:

$$(\Pi - \Pi_0)_{\mathrm{obj}} = \frac{1}{g}\left(\frac{p - p_0}{\rho}\right)_{\mathrm{mod}} \left(\frac{v_{\mathrm{obj}}}{v_{\mathrm{mod}}}\right)^2 \tag{122–18}$$

*   *   *

Pri prenošenju rezultata sa modela na objekat mora se voditi računa da se ne može ostvariti negativan apsolutni pritisak:

$$(Z - \Pi)_{\mathrm{obj}} > p_{\mathrm{atm}}/\gamma \tag{122–19}$$

tj. pijezometarska kota Π može se spustiti ispod položajne Z, samo do granice da apsolutni pritisak bude nula (negativnog apsolutnog pritiska nema).

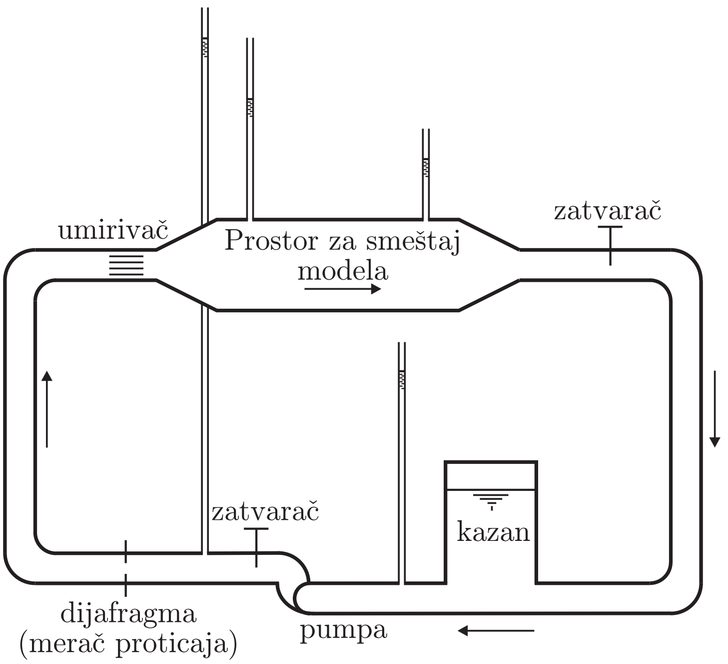
Ako se pri prenošenju sa modela na objekat dobije ono što prikazuje napisana nejednačina, ti rezultati se odbacuju, iako je odgovarajuća razlika na modelu ostvarena (na modelu su visinske razlike, apsolutno uzevši manje).

*   *   *

Slika 122–2 šematski prikazuje model jednog primera strujanja pod pritiskom. Obično se model ugrađuje u zatvoreni sistem tečenja, gde pumpa stvara potreban pritisak da zahtevani maksimalni proticaj može da protiče kroz model. Za pojedini opit proticaj se podešava zatvaračem koji se nalazi između pumpe i modela. Umirivači pred modelom smiruju strujanje da bi se prilagodilo ulaznim uslovima za model. U sistemu se nalazi i uređaj za merenje proticaja. Na slici je, primera radi, kao merač proticaja ugrađena dijafragma, a može se koristiti i neki drugi merač. Iz modela voda teče do kazana (rezervoara) iz koga pumpa crpi vodu. Pritiskom vazduha iznad vode u kazanu podešava se pijezometarsko stanje u sistemu (mogu se kote podići ili spustiti). Mogu se isisavanjem vazduha iz kazana pritisci u modelu toliko spustiti da se minimalni apsolutni pritisci spuste do pritiska bliskog nuli, pa voda isparava i na uobičajenim temperaturama. Dolazi do kavitacije kojoj je posvećeno Poglavlje 112. Zadatak istraživanja je onda pronalaženje rešenja koje neželjenu pojavu kavitacije ne dozvoljava.

Kazan može da bude otvoren (sa slobodnom površinom vode), a u tom slučaju pijezometarsko stanje u modelu podešva se zatvaračem iza modela.

Model je na slici prikazan simbolično, a on mora biti geometrijski sličan sa objektom, uz omogućavanje obrazovanja graničnih uslova



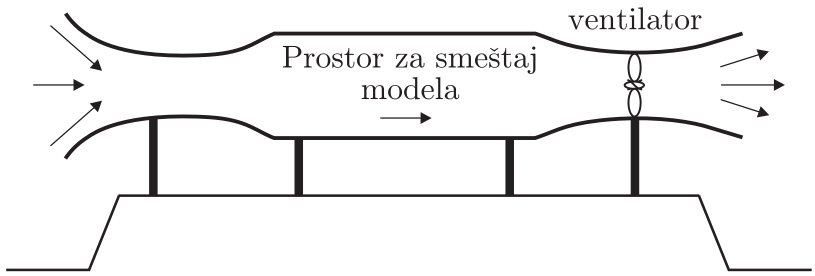
Slika 122–2 Model kroz koji teče voda.

sličnim sa odgovarajućim na objektu. Visinski položaj modela i njegov nagib prema horizontali mogu se proizvoljno izabrati, jer je za postizanje sličnosti nužna samo istovetnost pijezometarskih razlika.

U instituciji koja se bavi eksperimentalnim istraživanjima model se obično uključuje u sistem u koji je uključen još neki model, dok se slikom htelo, radi pojednostavljenja, prikazati sistem samo za jedan model.

Navedeni način modelisanja sa zatvorenim tokom (sa povratnim strujanjem) može se primeniti i na modele sa vazduhom, gde je u zatvorenoj cirkulaciji smešten ventilator koji podiže pritisak i tako omogućuje povratno strujanje.

Model kroz koga struji vazduh u otvorenom sistemu strujanja (slika 122–3), završava se ventilatorom koji ispred sebe stvara osetne potpritiske, pa se tako vazduh usisava u model. Takvo modelisanje može se nazvati ,,bez povratnog strujanja" za razliku od onog ,,sa povratnim strujanjem".



Slika 122–3 Model sa strujanjem vazduha.

Pri prenošenju rezultata sa modela na objekat koristi se izraz (122–18), pa se mora znati kolika je gustina vazduha koji protiče kroz model. Gustina vazduha se ne određuje neposredno, nego se sračuna, pošto se izmere pritisak p i temperatura Θ, pa se primenom jednačine stanja (42-7) sračuna gustina:

$$\rho = \frac{p}{R\Theta} \tag{122–20}$$

Napominje se da u prethodnom izrazu p označava apsolutni pritisak, a Θ temperaturu izraženu u Kelvinovim stepenima (K), gde je numerička vrednost za K jednaka $273^\circ + \Theta(\mathrm{C})$ tj. na temperaturu izraženu u Celzijusovim stepenima dodaje se 273° (naime nula u Kelvinovim stepenima je temperatura od $-273\,^\circ\mathrm{C}$). Gasna konstanta R u prethodnom izrazu za vazduh iznosi $287\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2\,\mathrm{K}$.

Napomena. Pošto su izlaganja u knjizi namenjena primeni za hidrotehničke objekte, i u ovom poglavlju razmotreno je modelisanje objekata kroz koje teče voda, bilo modelom sa vodom, ili vazduhom. Međutim, izloženo se može koristiti i za objekte kroz koje struji vazduh (u granicama u kojima se može gustina smatrati konstantnom, a uz korišćenje modela sa vodom, ili vazduhom). U prvom slučaju treba u jednačini (122–17) međusobno zameniti ,,obj" i ,,mod", pa se dobija:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{vazduh}}}{\left(\frac{p-p_0}{\rho}\right)_{\mathrm{obj}}} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{voda}}}{g\,(\Pi-\Pi_0)_{\mathrm{mod}}} \left(\frac{v_{\mathrm{obj}}}{v_{\mathrm{mod}}}\right)^2 \tag{122–21}$$

U drugom slučaju (vazduh na objektu i modelu) izmereno na modelu prenosi se na objekat sa:

$$\left(\frac{p - p_0}{\rho}\right)_{\text{obj}} = \left(\frac{p - p_0}{\rho}\right)_{\text{mod}} \left(\frac{v_{\text{obj}}}{v_{\text{mod}}}\right)^2 \tag{122–22}$$

Ovo je preobličena osnovna jednačina (122–10), sa zamenom Π sa $p/(\rho\, g)$, kako pokazuje (122–16).

Na kraju može se naglasiti, iako je iz izlaganja jasno, da su prenošenja napisana sa (122–10), (122–18), (122–21) i (122–22) u važnosti ako su model i objekat u području gde se uticaj Re-broja može zanemariti, i ako se može smatrati da je konstantna gustina vazduha, i uticaj njegove težine zanemarljiv.

123
MODELISANJE STRUJANJA SA SLOBODNOM POVRŠINOM TEČNOSTI KROZ KRATKE OBJEKTE

U brojnim hidrauličkim laboratorijama širom sveta modeli sagrađeni po načelima Frudove sličnosti primenjuju se za istraživanje objekata sa slobodnom površinom vode, i to uglavnom „kratkih objekata”. Naziv „kratki objekt” je u naslovu Desetog dela, a objašnjen je u Uvodu u taj deo. U Odeljku VI Poglavlja 121. ponovo je objašnjeno da je to objekat koga karakterišu lokalne energetske promene (nagle promene kinetičke energije i značajni lokalni gubici energije), dok je uticaj trenja malo značajan. To su lokalne promene u cevima i kanalima, prelivi, ispusti, vodozahvati, račvanje i spajanje tokova, objekti za regulisanje nivoa i proticaja, merni objekti za određivanje proticaja i sl.

U uvodnim razmatranjima 121-og Poglavlja navedeno je da se istraživanja sa jednog modela mogu primeniti na niz sličnih objekata, i tako se dolazi do zakonitosti za objekte sa jednostavnim graničnim uslovima, kako u oblikovanju objekta, tako i u uzvodnom i nizvodnom tečenju. Tamo je rečeno da potrebu za modelskim istraživanjima jednog pojedinačnog objekta nameću posebni, za taj objekat osobeni granični uslovi u obliku samog objekta, i okolnog terena, kao i u toku ispred i u toku iza objekta.

U objektima kroz koje je strujanje pod pritiskom (bez slobodne površine), ne traži se postizanje Frudove sličnosti, pa u prethodnom Poglavlju 122. i nije uslovljavana. Treba primetiti da je nužna ako je ispred, ili iza, objekta sa strujanjem pod pritiskom, tok sa slobodnom površinom.

Pogodnost razmera koju zahteva Frudova sličnost vidi se iz napisanoga sa (121–6) i (121–7), jer je zaista pogodno da model smanjen u odnosu na objekat zahteva manje brzine (pa i manje proticaje) od onih na objektu. Pogodnost je i u tome što je ista razmera za sve visinske razlike (između kota koje određuju položaj objekta, kao i pijezometarskih i energetskih kota, što je objašnjeno iza izraza (121–8).

Uz Frudovu sličnost sa istim fluidom na modelu i objektu ne može se postići još jedna sličnost (Rejnoldsova ili Veberova), a i promena fluida ne bi dovela do za praksu podesnih razmera. Za postizanje i Frudove, i Rejnoldsove sličnosti, uslov je napisan sa (64–10), a prateća objašnjenja ukazuju da su zahtevane razmere nepodesne za primenu u praksi, čak ako se na modelu ne uzme isti fluid kao na objektu. Stoga treba razmotriti modelisanje sa istim fluidom na modelu i objektu (sa razmerom $\nu_* = 1$ za koeficijent viskoznosti). Kako je Rejnoldsov broj $Re = uL/\nu$, razmera za njega je:

$$Re_* = \frac{u_* L_*}{\nu_*} \qquad (123\text{–}1)$$

sa $\nu_* = 1$, i zahtevom za Frudovu sličnost $u_* = L_*^{1/2}$, dobija se:

$$Re_* = L_*^{3/2} \qquad (123\text{–}2)$$

Dakle, pošto se primerom Frudove sličnosti ne postiže i Rejnoldsova sličnost, Re-broj nije isti na modelu i objektu, na modelu je manji, a to smanjenje je izrazitije ukoliko je model više smanjen, u odnosu na objekat.

Ranije je, u Odeljku III Poglavlja 121., objašnjeno da se nepostojanje Rejnoldsove sličnosti može prihvatiti ako je viskoznost neuticajna na osrednjenje vrednosti hidrodinamičkih veličina, a to se događa ako je Re-broj dovoljno veliki, ako pređe određenu granicu. Ovo nameće preporuku da treba izbegavati jako smanjenje modela u odnosu na objekat, jer su tada Re-brojevi nedovoljno veliki da turbulencija bude toliko razvijena da se uđe u oblast neuticanja Re-broja, čak i za najveće proticaje. Iz iskustva sa upoređenjem rezultata sa modela i sagrađenog objekta uviđa se da li je model, barem za veće proticaje, dao rezultate koji su saglasni sa primećenim na objektu. To iskustvo se može preneti na nove modele. Ponegde su građeni isti modeli u više razmera, pa se uvidelo koliko utiče nepostojanje Rejnoldsove sličnosti, a gde je to zanemarljivo.

Na modelu sa istim fluidom kao na objektu ne može se uz Frudovu sličnost postići i Veberova. Međutim, prema objašnjenjima u Odeljku V

Poglavlja 121. uticaj površinskog napona u pretežnom delu praktičnih primera se može zanemariti. U Odeljku I Poglavlju 121. raspravljalo se, između ostalog, o uvlačenju vazduha u vodeni tok, sa naglaskom da se o tome mora voditi računa u praktičnim primenama. O postizanju, odnosno nepostizanju sličnosti za tu pojavu, biće reči kasnije.

Postizanje sličnosti za uticaj hrapavosti razmatrano je u Odeljku VI Poglavlja 121., i tamo su objašnjene sve nepoželjne okolnosti koje prate želju za postizanje te sličnosti, pa ih ovde ne treba ponavljati. Tamo je primećeno da te teškoće nemaju praktičnog značaja ako je uticaj trenja zanemarljiv u odnosu na lokalne uticaje, a to se ostvaruje u objektima nazvanim „kratki objekti". U modelisanju „dugačkih objekata", gde je uticaj trenja značajan, upravo dominantan, teško se postiže sličnost. U narednom Poglavlju 124. raspravljaće se o modelima dugačkih objekata koji su pod pretežnim uticajem trenja, a ovaj odeljak neka se odnosi na kratke objekte.

Prva iskustva modelisanja rečnih tokova, gde je uticaj trenja presudan, pokazala su da nepostizanje sličnosti ima za posledicu velike razlike u tečenju na modelu i na kasnije regulisanom koritu (regulisanom prema preporukama sa modela). To je odbijalo stručnjake od primene modelisanja. Međutim, ispravnost dobijenog na modelu pokazala su se kod „kratkih objekata", sazdanih po načelu Frudove sličnosti, i to je doprinelo poverenju u modelska istraživanja, pa su za takve objekte oni redovno primenjuju u hidrotehničkoj praksi.

Ovi navodi dozvoljavaju da se primeti da se sličnost ostvaruje u primerima gde bi se, na prvi pogled, ona mogla manje očekivati, nego u primerima gde se površno zaključuje da je postizanje sličnosti lakše. Naime kod „kratkih objekata" gde su promene u strujanju nagle, uz primetnu poremećenost u strujanju, obično praćenu vrtloženjem, ostvaruje se sličnost, a sumnjivo je njeno ostvarenje kod „dugih objekata" gde su promene u strujanju blage i postepene, ali je strujanje pod premoćnim uticajem trenja, a za to se teško postiže sličnost. Otežavajuće dopunske teškoće kod rečnih tokova su sličnosti za kretanje nanosa.

* * *

Nejednačina (122-19), napisana u prethodnom poglavlju, može se napisati i za ovdašnja razmatranja. Neka je na modelu ostvareno i izmereno:

$$(Z - \Pi)_{\mathrm{mod}} < p_{\mathrm{atm}}/\gamma$$

što bi na objektu, uz razmeru $\Pi_* = Z_* = L_*$, gde je L_* razmera za dužine, moglo dovesti do:

$$(Z - \Pi)_{\mathrm{obj}} = L_* \, (Z - \Pi)_{\mathrm{mod}} > p_{\mathrm{atm}}/\gamma$$

a to je neostvarivo.

Ovo znači da se ne mogu prenositi sa modela na objekat rezultati koji bi doveli do ostvarenja poslednje napisane nejednačine.

* * *

Ako se kao postizanje sličnosti smatra da će se za objekat dobiti tačni podaci ako se na modelu izmerene vrednosti pomnože sa odgovarajućom razmerom za odnosnu veličinu, može se reći da se to u potpunosti ne postiže. Za manje proticaje uticaj *Re*-broja (pa i *We*-broja) kvari sličnost, a tome doprinosi i teškoće oko sličnosti za hrapavost. No, za veće proticaje, a oni su zanimljivi za projektovanje, sličnost se može postići barem onolika koju zahtevaju praktične potrebe.

Postizanje sličnosti otežavaju dopunski uslovi koje nameću okolnosti ako vodeni tok pokreće nevezani materijal na dnu, ili ako uvlači vazduh. Ti dopunski uslove proističu iz okolnosti da se ne radi o tečenju same vode, nego i u uzajamnom dejstvu vode i pokretljivog dna, odnosno vode i vazduha. Takve pojave događaju se u dobrom delu hidrotehničkih objekata, pa se na osnovu modelskih istraživanja moraju proceniti posledice na objektu, upravo mora se doći do rešenja koje će biti prihvatljivo. Stoga će se u nastavku izlaganja razmatrati postizanje, odnosno nepostizanje sličnosti za navedene pojave.

* * *

U zadatak modelskih istraživanja često ulazi i procena dejstva erozije u rečnom toku uzrokovane ulaženjem u korito vodenog toka sa velikom brzinom, što može da dovede do razornog dejstva. Taj tok potiče od nekog sagrađenog objekta – na primer, sa preliva na brani, ili uz nju, i ispusta na brani. Može da bude izlazni tok iz hidroelektrane ili nekog drugog postrojenja, ili uvođenje drugoga toka sa većim brzinama.

Dejstvo erozije se ispoljava produbljenjem korita i obrušavanjem obala što nameće zadatak kako to štetno dejstvo sprečiti, a to se rešava istraživanjima na modelu.

Teško je postići kvantitativnu sličnost, kojom bi se dobile promene u koritu potpuno geometrijski slične sa onima koje će ostvariti na objektu. Kvantitativna sličnost postiže se u izuzenim okolnostima gde je na objektu krupniji šljunak (nevezani materijal) prostijeg granulometrijskog sastava, koji je moguće modelisati smanjenim zrnima onoliko puta kolika je razmera za dužine, i uz istu specifičnu težinu.

U praktičnim primerima nije redovno tako, granulometrijski sastav nije jednostavan, a uz to neretko se dešava da geometrijska sličnost zahteva presitan materijal na modelu. U velikom broju slučajeva materijal na dnu nije rastresit (zrnast) nego je vezan (koherentan) – na primer glinoviti materijali. Ponegde su izmešani zrnasti i vezani materijali. Posebnu teškoću zahtevalo bi postizanje sličnosti za eroziju stene na dnu.

Da bi se došlo do odgovora koje nameću praktični zahtevi često se treba zadovoljiti kvalitativnom sličnošću – umesto kvantitativne. To znači da se upoređuju različita rešenja i dolazi do rešenja koje neće izazvati preteranu eroziju, opasnu po stabilnosti objekta i rečnog korita, a da se pri tome ne tvrdi da je postignuta potpuna geometrijska sličnost za promene u koritu. Ako je potrebno, projektuje se objekat u kome se nailazeći rušilački tok smiri, a potom se tok usmeri tamo, gde se znatno ne ugrožava ni objekat, ni nizvodne obale (mogu se preporučiti i obaloutvrde).

Primer sa slike 106–9 pokazuje da prelivni ulaz ne ugrožava objekat, jer povratni mlaz gura materijal sa dna ka objektu. Takva, i slična rešenja, mogu preporučiti modelska istraživanja. Primer sa slike 102–24 pokazuje da oblikovanje nizvodnog završetka tunela dovodi do manjih brzina izlivanja, pa onda i manjeg erozionog dejstva. Tamo je savetovano da se izlaženje iz tunela ne usmerava normalno na rečni tok, nego barem donekle u pravcu rečnog toka, tako se manje ometa rečni tok. Kako će se to postići, odgovoriće modelska istraživanja.

U nekim zadacima u području erozije ne unosi se nanos, jer je on zadržan objektom, iza koga se istražuju erozija (na primer, iza brane).

U tom slučaju u uzvodni granični uslov ne ulazi unošenje nanosa u model. Ako to nije tako, na proces erozije utiče unošenje nanosa, i što je to unošenje veće, erozija (produbljivanje dna) je manja, u odnosu na stanje kada ulaženja nema, jer se energija vodenoga toka troši ne samo na kopanje dna nego i na pronošenje nanosa. Primer za objekat gde se u područje erozije unosi nanos je kaskada (naglo supštanje dna), koja se često gradi u regulacionim zahvatima. Ako se nanos unosi u područje erozije, sličnost zahteva da se na početak modela sa uzvodne strane ubacuje odgovarajući proticaj nanosa, a to bi trebalo da bude u odgovarajućoj razmeri, pa bi trebalo imati terenske podatke, ili se prihvati poverenje u obrasce koji to izražavaju. Ako se na modelu ne unosi nanos erozija će na njemu, shodno prethodnim navodima, biti veća od one koja bi se dobila da se unosi, pa je rešenje koje se dobije, kako se to obično kaže „na strani sigurnosti". Modelisanje na taj način prihvatljivo je, ako se želi kvalitativna sličnost.

Ispred objekta, na primer – vodozahvata, treba sprečiti zasipanje i onemogućiti nepoželjno ulaženje nanosa u objekat. Smeštaj ulaza i njegovo oblikovanje zajedno sa okolnim terenom može se rešiti na hidrauličkom modelu. Ako se ne može postići kvantitativna sličnost, može se oceniti da se rešenjem koje se predlaže (na osnovu modelskih istraživanja) postiže da nanos neće ulaziti u objekat. Na uzvodnom kraju modela ne mora se postići kvantitativna sličnost sa stanjem na modelu. Na modelu se ubacuje onoliko nanosa koliko voda može da ponese i dovoljno je da se uvidi da se nanos ne taloži pred vodozahvatom i da ne ulazi u vodozahvat, ako se primeni rešenje koje se predlaže na osnovu modelskih istraživanja.

Dosadašnja razmatranja su se odnosila na eroziju iza objekta, odnosno na zasipanje ispred objekta, a ima primera gde je predmet istraživanja delovanje vodenog toka na dno ispred i iza objekta, kao i uz sam objekat. To su kratki objekti u svrhu regulisanja toka, gde se u istraživanje nameću teškoće oko podešavanja proticaja nanosa na ulazu u model.

Sličnost se ne postiže za uvlačenje vazduha u vodu, jer je vodeni tok na modelu, zbog manje razvijene turbulencije (manjih Rejnoldsovih brojeva), manje uzburkan, površina vode je manje uznemirena, manje su neravnine na njoj, pa su manje mogućnosti da voda prigrabi vazduh. Stoga odnos mase vazduha prema masi vode nije na modelu isti kao na objektu (na modelu je manji), pa je poremećena sličnost, jer bi taj odnos, kao svaka bezdimenzionalna veličina, morao da bude isti na modelu i objektu. Primećuje se da se ova nesličnost dešava i pri Rejnoldsovim brojevima za koje je postignuta sličnost za promene kinetičke energije, gubitke energije i ostale hidromehaničke veličine merodavne za prenošenje sa modela na objekat, u zadovoljavajućoj meri za praktične potrebe, dok je nepostizanje sličnosti za uvlačenje vazduha osetno i o tome se mora voditi računa.

Treba još dodati da je na modelu Veberov broj manji, ali za uvlačenje vazduha u vodu nepostizanje Veberove sličnosti je od manjeg značaja od nepostizanja Rejnoldsove sličnosti. Glavni uzrok uvlačenja vazduha je razvijena turbulencija, sa nemirnom površinom vode, a pri tome je zanemarljiv uticaj površinskog napona na sprečavanje prodiranje vazduha u vodu.

Nesličnost za uvlačenje vazduha očigledno i ubedljivo se ispoljava u nizu primera hidrotehničke prakse. Na primer, na površini hidrauličkog skoka na modelu obično se nazire vazduh uvučen u vodu, ili ga uopšte nema, dok je na objektu ceo skok pokriven debljim slojem pene (mešavine vode i vazduha). Penom je pokrivena vodena površina u kanalu sa velikom brzinom (tkzv. „brzotoku"). Isto je i u mlazu koji se sliva niz branu, i na nizu primera, gde je ovazdušenje na objektu značajno, a na modelu zanemarljivo.

Primećuje se da se u Poglavlju 109., u Odeljku I, naslovljenom „Aeracija", raspravljalo o uvlačenju vazduha u vodeni tok. Tako je i objašnjeno da se mora voditi računa o ostavljanju prostora za uvučeni vazduh. To je posebno važno kod zatvorenih provodnika gde je vazduh uvučen u vodu. Oni moraju imati veći presek od onoga koji daje hidraulički račun tečenja vode. Takođe kod kanala sa velikim brzinama (tkzv. „brzotoka") treba da bočni zidovi budu nadvišeni da ima prostora da iznad vode teče mešavina vode i vazduha. Isto se odnosi i na bočne zidove uz hidraulički skok.

Tamo, u pomenutom razmatranju u Poglavlju 109., navedeno je da je masa vazduha, u mešavini vode i vazduha, zanemarljiva jer je gustina vazduha skoro 1000 puta manja od gustine vode, pa ne treba razmišljati o dopunskim silama (ili energiji) za pronošenje vazduha u vodi, ali se, kako je objašnjeno, mora voditi računa o prostoru koji zatheva vazduh.

Pri prenošenju rezultata sa modela gde ima srazmerno manje vazduha nego na objektu (ili ga na modelu uopšte nema) mora se na to skrenuti pažnja, upravo treba shvatiti da će tok na objektu biti „naduvan”. Tako, u pomenutom razmatranju o uvlačenju vazduha, u Poglavlju 109., rečeno je da treba ostaviti barem 20% poprečnog preseka iznad preseka kroz koji bi tekla sama voda.

* * *

Sve navedene primedbe o nepostizanju potpune sličnosti između objekta i modela sazdanog prema Frudovoj sličnosti mogu dovesti do zaključka da je takvo modelisanje nepreporučljivo. To je površan zaključak (pa i pogrešan), jer odstupanja od potpune sličnosti ne mogu dovesti do modelskih rezultata koji se ne mogu primeniti u projektovanju objekta. Ne treba od modela očekivati ono što se njime ne može postići (ne može se postići potpuna sličnost), treba se zadovoljiti sa onim što se može (može se njome doći do zadovoljavajućeg projekta). Nedovoljno upućeni u značaj i korist od modelskih istraživanja mogu da precene mogućnosti modela, smatrajući da se sve u potpunosti može na njemu ostvariti tačno u razmerama za sve veličine. Drugi pak mogu modelska istraživanja da potcene, jer su navodno beskorisna, a onda i nepotrebna – navodno bez njih se mogu rešavati svi zadaci hidrotehničke prakse.

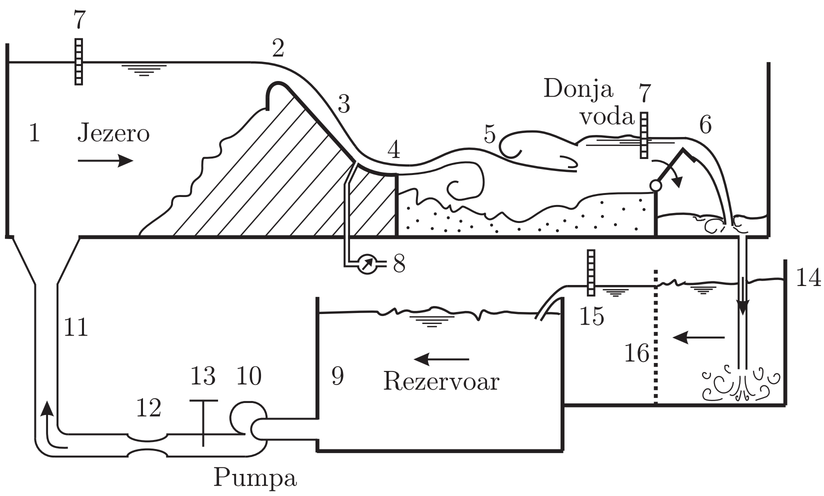
Možda je isuviše pažnje posvećeno odstupanju od sličnosti, uz preteranu kritičnosti, pa to može da unese sumnju u korisnost modelskih istraživanja. Stoga, na kraju izlaganja, treba naglasiti da se modelskim istraživanjima objekat pouzdano oblikuje, da bude prilagođen strujanju, da se dobro oblikuje i teren oko njega. Sa dovoljnom tačnošću dobijaju se nivoi, i propusna moć objekta, kao i brzine kroz njega. Sem toga, pouzdano se određuje opterećenje vode na njega. Treba dodati da se postiže sličnost i za fluktuacije pritisaka u području gde su one zanimljive, to je mesto prvostvorenih velikih vrtloga, gde viskoznost ima zanemarljiv uticaj na njihovo obrazovanje. Ostale okolnosti (erozija oko i iza objekta, na primer) mogu se dobro proceniti.

Bez modelskih istraživanja teško je doći do dobrog projekta, kako su granični uslovi za objekat osobeni za njega. Pri ovome se misli na terenske uslove, na uslove priticanja ka objektu i oticanja sa njega, kao i na oblik samoga objekta. U nekoliko navrata rečeno je, a može se, naglašavanja radi i ovde ponoviti, da se poznate hidrauličke zakonitosti (za lokalne promene u cevima i kanalima, za prelive i isticanje i dr.), napisane u udžbenicima i priručnicima, odnose na vrlo proste granične uslove, često nametnute, da bi se dobila zavisnost prostoga izraza. Za objekat, gde sve nije tako jednostavno, nužna su modelska istraživanja namenjena samo tom pojedinačnom objektu.

Na kraju mora se dodati da modelska istraživanja često otkriju i nešto o čemu se nije ni pomišljalo. To se mora posebno istaći, jer se posle saznanja proizašlih iz modelskih ispitivanja nađe razumljivo i prihvatljivo objašnjenje za primećeno na modelu, a pri tome se prenebegava da to pre modelskih istraživanja nije bilo poznato, niti se čak na to pomišljalo. Tako modelska istraživanja mogu nekom poslužiti da bude „naknadno pametan".

* * *

Slika 123–1 šematski prikazuje jedan model kratkog objekta sagrađenog prema Frudovoj sličnosti – za primer je uzeto prelivanje. Iz jezera (označeno sa „1" na slici) voda preko preliva (2) ulazi u strmi kanal (3) sa velikim brzinama (u „brzotok") koji završava odskokom (4), kojim se voda odbacuje u nizvodno korito (5).



Slika 123–1 Jedan primer modela kratkog objekta – u pratećem tekstu daju se objašnjenja za pojedine numerisane sastavne delove modela.

Sličnost za uzvodni granični uslov obezbeđena je ako su u jezeru, izuzev blizine preliva, brzine zanemarljive (praktično uzevši, stanje se može shvatiti kao mirovanje). Nizvodni granični uslov se postiže podešavanjem nivoa donje vode na koti koji odgovara koti u prirodi – to podešavanje obavlja se pokretnom ustavom (6).

Brzotok se ugrađuje u teren, naglo se spušta niz bok rečne kotline, treba ga sprovesti ka nizvodnom koritu. Razumljivo je nastojanje da se on prilagodi terenskim okolnostima, da bude što manje građevinskih radova. Međutim, u brzotoku je tečenje burno sa velikim brzinama, koje je teško usmeravati da se prilagode terenskim uslovima. Modelskim istraživanjima se poverava oblikovanje brzotoka koje će biti prihvatljivo. Uz to treba na modelu rešiti i sređivanje terena ispred preliva.

U zadatak modelskih istraživanja ulazi i procena dejstva erozije u nizvodnom koritu (produbljivanje, obrušavanje obala) i ne može se prihvatiti rešenje gde erozija dovodi do neprihvatljivih posledica, pa se traži da se dođe do povoljnog rešenja.

Na modelu se, pre svega, mere nivoi u nizu tačaka da se dobije linija nivoa kroz ceo objekat. Na slici to je, primera radi, ucrtano (7) na dva mesta (u jezeru i u donjoj vodi). Mere se i pritisci – prikazano je sa (8) za jednu tačku. Mogu se meriti i brzine. Nephodno je da se mere promene u nizvodnom koritu uzrokovane prelivanjem.

Navedeno je model u užem smislu reči, gde je postignuta sličnost sa objektom. Mora se obezbediti proticanje kroz model: voda se mora uvesti u model i izvesti iz njega. Za primer modela, prikazanog slikom, to se postiže zatvorenom cirkulacijom, kruženjem vode. Iz rezervoara (9) pumpa (10) crpi i kroz dovodnu cev (11) potiskuje vodu u model. Mora se znati proticaj modelom i on je izmeren Venturijevim vodomerom (12), ili nekim drugim meračem. Zatvaračem (13) se reguliše proticaj, da bi se doveo na vrednost koju zahteva istraživanje. Po izlasku iz modela odvodnom cevi (14) voda se vraća u rezervoar. Rezervoar mora da bude dovoljne zapremine kojom se može napuniti model sa dovodom i odvodom, jer je to zapremina uzeta iz rezervoara (tolika mora da bude pre početka rada modela). Na slici je prikazano i merenje proticaja prelivom (15) ispred koga je voda smirena umirivačem (16). Taj preliv ne mora se graditi ako se proticaj meri Venturijevim vodomerom (ili nekim drugim meračem), a nije na odmet meriti i na dva mesta, provere radi. Ako nema drugog merača, preliv je neophodan. Međutim, ni preliv nije neophodan, jer se proticaj može meriti volumetrijski (izmeri se zapremina i vreme kroz koje je ona protekla). Voda kroz izvesno vreme, koje se meri, puni komoru postavljenu uz model, i izmeri se zapremina koja je dotekla u komoru. To se postiže skretačem kojim se tok skrene u mernu komoru, a posle izvesnog vremena skretač odstrani tok od komore.

Slikom prikazano može se shvatiti kao primer jednog samostalnog modela u kome voda smirena ulazi na preliv, zahvaljujući modelu „jezera" (1). Ako je početak modela tečenje u cevi, ili kanalu, ne sme se voda iz pumpe direktno potiskivati u model, jer bi tok na modelu bio nekontrolisano uznemiren od uticaja pumpe i dovoda do modela. Tada se mora graditi gornji tkzv. „stabilizacioni rezervoar" koji održava smireno ulazno pijezometarsko stanje. Obično u hidrauličkoj laboratoriji ima više modela, pa ona ima veliki i stalni donji rezervoar i jedan ili više gornjih u koje se pumpa iz donjeg. Iz jednog od tih rezervoara snabdeva se pojedinačni model.

Model ne mora da bude u zatvorenom sistemu, da neprekidno koristi istu vodu, kako je prikazano na slici. Može model da bude protočan – voda koja uđe u njega, prolazi kroz njega, i iz njega nepovratno odlazi. U tom slučaju otpada rezervoar i pumpanje. Takva mogućnost se veoma retko pruža, izuzetne okolnosti su da ima dovoljno vode koja se može slobodno uzeti i da ima dovoljno visinske razlike. Napominje se da je nerazumeno uzimati vodu iz komunalnog vodovoda, i istu po prolasku kroz model, ispuštati u kanalizaciju, jer tu vodu treba platiti, i ti troškovi su veći od troškova pumpanja.

Pri prenošenju rezultata sa modela na objekat treba voditi računa o prethodnim napomenama o nepostizanju sličnosti za uvlačenje vazduha u brzotok (treba u njemu ostaviti prostor za uvučeni vazduh), kao i za eroziju u nizvodnom koritu (treba se zadovoljiti za kvalitativnom sličnosti).

124
MODELISANJE DUGAČKIH OBJEKATA

U strujanju kroz objekte koji se mogu nazvati „dugački objekti" trenje ne samo da nije zanemarljivo, nego je njegov uticaj presudan. Razmatraće se modelisanje toka sa slobodnom površinom, uz pretpostavku da je i na modelu, i na objektu, tečenje u području hrapavih provodnika, gde ne utiče *Re*-broj, izuzimajući, razume se, malene proticaje.

Pošto se proceni hrapavost za objekat, na modelu se podesi da se dobije izgubljena energija usled trenja koju zahteva razmera za visinu. Jasno je da taj postupak ne znači postizanje sličnosti u doslovnom smislu reči, nije postignuta potpuna geometrijska sličnost, koja uključuje i izbočine i neravnine na zidu provodnika. Zadovoljava se dostignućem da nivoi na modelu, koji su posledica dejstva trenja, budu približni onima koji zahteva odgovarajuća razmera.

Uvodnom rečenicom naglašeno je da će raspravljati o modelisanju dugačkih objekata, što nameće pomisao da ni modeli takvih objekata neće biti kratki. Ako razmera za dužine, merena duž provodnika, bude ista kao razmera za dužine merene u poprečnom preseku, javljaju se teškoće. Za poprečni presek na modelu, dovoljno velik da se na njemu mogu obaviti zadovoljavajuća opažanja i merenja, ispunjavanjem geometrijske sličnosti dovešće do preterano dugačkog modela. Ako se pak dužina modela svede na razumnu meru, biće poprečni preseci isuviše maleni. Može se ovo potkrepiti primerom u kome bi trebalo modelisati 10 km toka u kome treba opažati i zbivanja gde je dubina 1 m, pa čak i manja. Sa modelom potpuno geometrijski sličnim i smanjenim 20 puta u odnosu na objekat dobila bi se na modelu prihvatljiva dubina od 5 cm, ali bi model bio dug 500 m, što je teško prihvatiti. Za prihvatljivu dužinu modela od 50 m geometrijski sličan model dao bi premalenu dubinu od svega 1,2 cm, gde je značajan uticaj viskoznosti, odnosno *Re*-broja, pa čak i površinskog napona, a za to se ne postiže sličnost.

Navedeni razlozi dovode do primene modela sa različitim razmerama za dužine u osnovi (horizontalnoj ravni) i visine. Za ovu geometrijsku nesličnost pogodna je reč „distorzija", što se može prevesti kao „izobličenje" (promena oblika), pa je uobičajeni naziv „model u distorziji", ili „distordovani model" za modele koji nisu potpuno geometrijski slični.

Distorzija, pored skraćivanja, može da uključi i sužavanje modela u odnosu na geometrijski sličan, tako da suženi model nema geometrijski slične poprečne preseke sa objektom, jer nije ista razmera B_* za širine (merene u poprečnom preseku) i za dubine, koja je Z_* tj. razmera za visine. Sužavanje modela se postiže da model ne bude jako širok uz dubine koje nisu premalene.

* * *

Pod postignutom sličnošću podrazumeva se mogućnost prenošenja rezultata sa modela na objekat, a da se pri tome ne koriste jednačine koje bi taj prenos uslovljavale – zahteva se samo istovetnost bezdimenzionalnih veličina na modelu i na objektu. Distordovani model zahteva poverenje u neke od jednačina i one nameću uslove sličnosti, upravo prema njima se pravi model.

Prihvata se kao verodostojna jednačina (92–37), što opravdava pretpostavka da se poprečni presek struje menja postepeno, veoma blago, uz neznatne lokalne uticaje, pa se dozvoljva kontinualno proučavanje struje, uz vezivanje hidrauličkih veličina za poprečni presek.

Da bi se obezbedilo postizanje sličnosti, što znači mogućnost prenošenja rezultata sa modela na objekat, mora da bude razmera za sve članove pomenute jednačine (92–37) ista, jer moraju biti u istoj meri smanjeni svi uticaji koji sadejstvuju u zbivanju i koje predstavljaju pojedini članovi jednačine.

Pomenuta istovetnost razmera piše se sa:

$$\left(\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}\right)_* = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)_* = \left[\frac{\partial \left(v^2/2g\right)}{\partial x}\right]_* = (I_E)_* \tag{124–1}$$

što dovodi do:

$$\frac{v_*}{t_*} = \frac{\Pi_*}{L_*} = \frac{v_*^2}{L_*} = I_{E*} \tag{124–2}$$

Razmera za rastojanje x duž toka je razmera L_* za dužine, merene duž provodnika – to je korišćeno pri pisanju prethodnog izraza.

Izjednačenje prvog i drugog dela prethodnog izraza daje:

$$t_* = \frac{v_*}{\Pi_*} L_* \tag{124–3}$$

a izjednačenje prvog i trećeg dovodi do:

$$t_* = \frac{L_*}{v_*} \tag{124–4}$$

Napisana razmera za vreme t_* ista je u oba izraza, pa je:

$$\Pi_* = v_*^2 \tag{124–5}$$

Isto se dobija i izjednačenjem drugog i trećeg dela.

Pijezometarska kota za otvoren tok je zbir kote dna Z_D i dubine h:

$$\Pi = Z_\mathrm{D} + h \tag{124–6}$$

Mora da bude postignuta sličnost za oba sabirka posmatrana pojedinačno, jer se mora uspostaviti kako sličnost za položaj dna, tako i za liniju nivoa. Uz ovu napomenu prethodne dve jednačine dovode do:

$$(Z_\mathrm{D})_* = h_* = \Pi_* = v_*^2 \tag{124–7}$$

što se svodi na:

$$Z_* = v_*^2 \tag{124–8}$$

gde je Z_* opšta razmera za visine, u koju se uključuju razmere za kote dna, za dubine, za pijezometarske kote (to su kote nivoa) i za energetske kote, jer je i razmera $(v^2/2g)_*$ jednaka Z_*.

Iz (124–7) proizilazi:

$$\left(\frac{\partial Z_\mathrm{D}}{\partial x}\right)_* = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)_* = \left[\frac{\partial(\Pi + v^2/2g)}{\partial x}\right]_* = \frac{Z_*}{L_*} = I_* \tag{124–9}$$

što pokazuje da je ista razmera – označena je sa I_* – za nagib dna, za nagib pijezometarske linije (to je nagib nivoa), i za nagib linije energije, koga predstavlja treći član prethodnog izraza (kota energije je $E = \Pi + v^2/2g$).

Dakle,

$$I_{E*} = \frac{Z_*}{L_*} = I_* \tag{124–10}$$

Nagib je bezdimenzionalna veličina i ima istu vrednost na modelu i objektu, npr. razmera za nju je jedinica ($I_* = 1$), i to važi za model geometrijski sličan sa objektom, ali ne i za distordovani model, on je skraćen u odnosu na geometrijski sličan, pa je $Z_* < L_*$, odnosno $I_* < 1$.

Razmera za nagib:

$$I_* = \frac{Z_*}{L_*} \tag{124–11}$$

može se nazvati „stepen distorzije”, jer pokazuje skraćenje modela – na primer, $I_* = 1/4$ iskazuje da je dužina skraćenog modela 1/4 dužine modela koji bi bio geometrijski sličan (i gde bi bila ista razmera za dužine, merene duž provodnika, i za dužine kojima se meri poprečni presek i spuštanje dna).

* * *

Zahtev (124–10) kazuje da razmera I_{E*} za nagib linije energije mora da bude jednaka Z_*/L_*, pa treba objasniti kako će se taj zahtev zadovoljiti. Nagib I_E linije energije je posledica trenja i, u jednom poprečnom preseku, zavisi od hrapavosti, dubine i brzine.

Za tu zavisnost napisano je niz obrazaca, od kojih treba izabrati jedan, onaj u koga se ima najviše poverenja. Izabran je sledeći:

$$I_E = 0{,}029 \left(\frac{k}{R}\right)^{1/3} \frac{v^2}{2gR} \tag{124–12}$$

Ovde je I_E nagib linije energije, k apsolutna hrapavost, R hidraulički radijus i v srednja brzina kroz proticajni presek.

Prethodni obrazac je napisan korišćenjem osnovne jednačine za trenje (91–19), sa koeficijentom C_τ određenim izrazom (91–31).

Primećuje se da se u praksi za uticaj trenja najčešće upotrebljava Maningov obrazac, napisan sa (91–32), pa je stoga ovde prihvaćeno napisano sa (124–12), jer se tako dobija isti rezultat kao primenom Maningovog obrasca, ako je veza između apsolutne hrapavosti k i Maningovog koeficijenta n utvrđena izrazom (91–35).

Za još nesagrađeni objekat mora se pretpostaviti uticaj trenja, koristi se pri tome napisani obrazac (124–12) i odgovarajućom jednačinom sračunaće se za objekat linije nivoa, za niz proticaja u ustaljenom tečenju, uz pretpostavljenu hrapavost. Na modelu treba da se za proticaje, prema razmeri određenoj za njih, ostvare linije nivoa sa dubinama u zajedničkoj razmeri Z_* za sve visine, sa kojom je sagrađen model. To će se barem približno postići ako se hrapavost na modelu podesi da se to ispuni. U narednim izlaganjima objašnjavaće se kako se to postiže.

U ovom podešavanju modela nije nužno da se zna kolika je računska apsolutna hrapavost na modelu, bitno je da se dobije tečenje sa dubinama koje nameće razmera za visine.

Prethodno izlaganje postavlja, kao umesno, pitanje: Zašto modelisati kada su već sračunate dubine za objekat? Odgovor je u obrazloženju da se računalo samo ustaljeno tečenje, a svrha modelskih ispitivanja je proučavanje neustaljenog tečenja, uključivši i nagle promene kroz vreme i duž objekta, koji će se odvijati na modelu, a čije računanje je manje pouzdano od modelskih opažanja.

Napominje se da se hrapavost na još nesagrađenom objektu ne može tačno oceniti, mogu se oceniti gornja i donja granica između kojih se može očekivati hrapavost koja će se ostvariti na objektu. O tome je raspravljano u ranijim izlaganjima, a Napomena 1 na kraju Odeljka I, Poglavlja 99. može se shvatiti kao zaključak iz koga se nameće savet da bi bilo opravdano modelisati sa hrapavostima koje odgovaraju gornjoj i donjoj granici očekivane hrapavosti na objektu, što će dati donje i gornje granice nivoa.

Ako se modelska istraživanja odnose na postojeći objekat nezamenljivi doprinos valjanosti modelskih istraživanja pružaju merenja na objektu (pre svega, zavisnosti dubina od proticaja). Na modelu se hrapavost podešava dok se ne dobije stanje koje odgovara, prema razmerama za merodavne veličine, onome što je opaženo i izmereno, na terenu. Modelisanje u navedenim okolnostima na prvi pogled izgleda besmisleno, jer zašto modelisati pojave koje se mogu posmatrati na već izvedenom objektu. Malo pre je postavljeno pitanje čemu model za ono što je već sračunato za objekat. I ovde se može dati isti odgovor i treba još dodati da zadatak istraživanja mogu da budu promene koje će biti posledice građevina koje treba izgraditi, a oblikovanje tih građevina, da se dođe do zadovoljavajućeg rešenja, poverava se modelskim istraživanjima. Može da u zadatak modelskih istraživanja uđe i prikazivanje na modelu pojava koje se mogu dogoditi na objektu, a ne mogu se u dogledno vreme posmatrati – na primer, očekivane velike vode, poplavni talasi usled rušenja brane. I u ovim slučajevima terenska merenja, iako za manje proticaje (koji su se mogli posmatrati), mogu da doprinesu postizanju sličnosti.

$*\quad *\quad *$

I Prvi način modelisanja

Poprečni preseci na modelu geometrijski su slični sa odgovarajućim presecima na objektu (slika 124–1, modelisanje I). Razmera B_* za širine (merene po preseku) je ista kao razmera Z_* za dubine (odnosno za sve visinske razlike), a druga je razmera L_* za dužine (merene po pravcu pružanja vodotoka), jer je model skraćen u odnosu na geometrijski sličan model. Ostvaruju se razmere:

$$B_* = Z_* < L_* \tag{124–13}$$

II Drugi način modelisanja

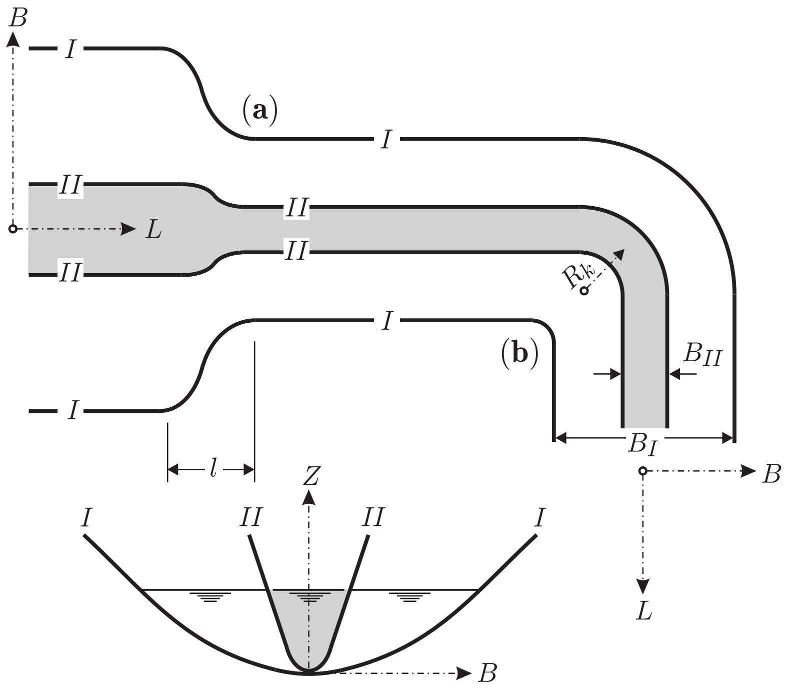
Model je geometrijski sličan sa objektom u osnovi, u horizontalnoj ravni (slika 124–1, modelisanje II) tj. razmera L_* za dužine (merene u pravcu toka) i razmera B_* za širine (merene u poprečnom preseku) su iste ($B_* = L_*$). Ne postoji geometrijska sličnost poprečnog preseka, jer je presek stešnjen u odnosu na geometrijski sličan presek: razmera B_* za širine nije ista kao razmera Z_* za visine i dubine, nego je $B_* > Z_*$. Model je i skraćen u odnosu na geometrijski sličan, $L_* > Z_*$. Dakle, model je skraćen i stešnjen. Za razmere se piše:

$$B_* = L_* > Z_* \tag{124–14}$$

$*\quad *\quad *$

Napominje se da razmera za širine ne mora da bude ista sa razmerom za dužine, ni sa razmerom za visine. Nema nikakve načelne primedbe da se primeni:

$$Z_* < B_* < L_* \tag{124–15}$$



Slika 124–1 Modelisanje I. Geometrijska sličnost poprečnih preseka – ista razmera za širine i visine, druga razmera za dužine merene duž toka ($B_* = Z_* < L_*$). Modelisanje II. Geometrijska sličnost u osnovi – ista razmera za širine i dužine, druga razmera za visine ($B_* = L_* > Z_*$). Napomene: • Sužavanje (**a**) i krivina (**b**) ne mogu se modelisati sa geometrijskom sličnošću u osnovi u Modelisanju I. • Poprečni preseci nisu geometrijski slični u Modelisanju II. • Za prikazano na crtežu podrazumeva se u oba načina ista razmera za visine Z_* i dužine L_*.

* * *

Primenom Prvog načina modelisanja postiže se sličnost strujanja u poprečnim presecima, a to se postiže i na geometrijski sličnom modelu, upravo strujanje kroz poprečni presek istovetno je na distordovanom modelu sa strujanjem na geometrijski sličnom (neskraćenom) modelu, kroz odgovarajući presek. Sva rastojanja između poprečnih preseka, na distordovanom modelu, skraćena su onoliko puta koliko puta je skraćena ukupna dužina modela. Drugim rečima, strujanje na distordovanom modelu je sabijeno (sažeto), u odnosu na strujanje na geometrijski sličnom modelu, a ta sabijenost je ravnomerna celom dužinom modela.

U Drugom načinu modelisanja pored skraćivanja modela, poprečni preseci nisu slični sa objektom, oni su suženi, pa je razmera za proticaj određena sa:

$$Q_* = A_* v_* = B_* Z_*^{3/2} \tag{124–16}$$

jer je razmera A_* za poprečni presek jednaka razmeri B_*, za širine pomnoženoj sa razmerom Z_* za dubine, a razmera v_* za brzine, shodno (124–8) jednaka je $Z_*^{1/2}$.

Za Prvi način modelisanja, gde je $B_* = Z_*$ dobija se:

$$Q_* = Z_*^{5/2} \tag{124–17}$$

* * *

Sve izloženo o razmerama, počevši sa izrazom (124–1) pa zaključno sa (124–11), važi za oba načina modelisanja, pa to važi i za (124–8), koja iskazuje da je $v_*^2 = Z_*$. Za oba načina modelisanja postiže se isti *Fr*-broj za presek na modelu i na objektu. Taj broj napisan je sa (92–20), a njegova istovetnost nameće da je razmera za njega jednaka jedinici. Da je to zaista tako pokazuje se sledećim:

$$Fr_* = \left(\frac{v^2 B}{gA}\right)_* = \frac{v_*^2 B_*}{A_*} = \frac{v_*^2}{Z_*} = 1 \tag{124–18}$$

U prethodnom izvođenju korišéno je $A_* = B_* Z_*$ i $v_*^2 = Z_*$. Kod geometrijski sličnog modela uslov je $v_*^2 = L_*$, što v_*^2 veže sa razmerom L_* za dužine. To je razmera za sve dužine, za one merene duž provodnika i one u poprečnom preseku, dok napisano sa (124–8) v_*^2 izjednačuje samo sa razmerom Z_* za visine odnosno za dubine, dok v_*^2 nije jednako razmeri L_* za dužine merene duž provodnika.

* * *

Nagovešten je način podešavanja hrapavosti na modelu, bez ulaženja u to kolika je ekvivalentna apsolutna hrapavost kojom se to postiže. To će se pokušati odrediti u narednom izlaganju.

Treba se podsetiti da se kroz sva razmatranja, počevši od Poglavlja 94., apsolutna hrapavost shvata kao računski pojam. Naime, trenje računato sa jednolikom hrapavošću k treba da dovede do istog rezultata koji daje i stvarna hrapavost u posmatranom primeru, koja nije jednolika ni po visini izbočina, ni po obliku (zbog toga je k ekvivalentna jednolika hrapavost). Na navedenom shvatanju počivaju i objašnjenja u Odeljku VI, Poglavlja 121.

Može se tako shvaćena apsolutna hrapavost sračunati za model. Izraz (124–12) se preobličava u bezdimenzionalni oblik:

$$\frac{v^2}{2\,g\,R\,I_E}\left(\frac{k}{R}\right)^{1/3} = 0{,}029 = \text{const} \tag{124–19}$$

Napisana bezdimenzionalna konstanta, kao svaka bezimenzionalna veličina, prenosi se nepromenljiva sa objekta na model (i obrnuto), pa je razmera za nju jedinica. Tako se dolazi do međusobne veze razmera:

$$\left[\frac{v^2}{2\,g\,R\,I_E}\left(\frac{k}{R}\right)^{1/3}\right]_* = 1 \tag{124–20}$$

što se svodi na:

$$\frac{k_*^{1/3}}{R_*^{4/3}}\,v_*^2 = I_{E*} \tag{124–21}$$

Kako je $I_{E*} = I_*$, što je opšta razmera za nagibe, a to je Z_*/L_*, a $v_*^2 = Z_*$, shodno (124–8), prethodni izraz se može svesti na:

$$\left(\frac{k}{R}\right)_*^{1/3} = \left(\frac{R}{L}\right)_* \tag{124–22}$$

*   *   *

Napomena. U svim prethodnim izrazima može se razmera k_* zameniti sa n_*^6, gde je n_* razmera za Maningov koeficijent ($n_* = n_{\text{obj}}/n_{\text{mod}}$). Ovo proizilazi iz veze k i n date sa (91–35). Tako se umesto (124–21) može napisati:

$$\frac{n_*^2}{R_*^{4/3}}\,v_*^2 = I_{E*} \tag{124–23}$$

*   *   *

U Prvom načinu modelisanja, zbog geometrijske sličnosti poprečnog preseka, razmera O_* za okvašeni obim je ista kao razmera za dubine i širine, tj. $O_* = Z_*$, pa je razmera za hidraulički radijus:

$$R_* = \frac{A_*}{O_*} = Z_* \tag{124–24}$$

jer je razmera za površinu poprečnog preseka $A_* = Z_*^2$.

Napominje se da je postizanje sličnosti za hidraulički radijus značajno, jer je ta veličina merodavna za određivanje trenja, što se vidi i iz (124–12).

Korišćenjem $R_* = Z_*$, i uz to $v_*^2 = Z_*$, jednačina (124–22) se svodi na:

$$\left(\frac{k}{Z}\right)_* = \left(\frac{Z}{L_*}\right)^3 \qquad \text{tj.} \qquad \left(\frac{k}{Z}\right)_* = I_*^3 \tag{124–25}$$

Pošto je $h_* = Z_*$ (razmera za dubine je razmera za sve visine), uz prethodnog izraza proizilazi:

$$\left(\frac{k}{h}\right)_* = \frac{(k/h)_{\text{obj}}}{(k/h)_{\text{mod}}} = I_*^3 \tag{124–26}$$

Odnos k/h se može shvatiti kao relativna hrapavost, pa prethodno napisano pokazuje kako se odnose relativne hrapavosti na objektu i modelu.

Pošto je model skraćen, relativna hrapavost na modelu je veća od odgovarajuće na objektu, jer prethodni izraz uz $I_* < 1$ daje:

$$\left(\frac{k}{h}\right)_{\text{mod}} > \left(\frac{k}{h}\right)_{\text{obj}} \tag{124–27}$$

Ovo je lako objasniti. Povećani pad na distordovanom modelu zahteva veću relativnu hrapavost da bi se uprkos povećanom nagibu uspostavila brzina koju zahteva postizanje sličnosti. Veća relativna hrapavost na modelu je dobro došla, što se može zaključiti iz sledećeg izlaganja.

Sva razmatranja o trenju zasnivaju se na pretpostavci da se ne zahteva Rejnoldsova sličnost, smatra se da nema uticaja *Re*-broja, a to znači da se ulazi u oblast hrapavih provodnika. Za taj uslov važi i prihvaćena zavisnost za trenje (124–12), na kojoj se zasnivaju i sva razmatranja o njemu. Da li je posmatrani primer ušao u oblast hrapavih provodnika može se za cevi zaključiti iz slike 96-3, može se, naime, zaključiti da li je primer ušao u oblast (V) na slici. Za procenu (kao približnost) može se zakonitost za cev preneti na otvoreni tok, uz isti hidraulički radijus u oba slučaja, jer je on merodavna veličina za trenje (ulazi u obrasce). Kako je za cev $R = D/4$, a za ovde razmatrano strujanje uzeto je $R = h$, izjednačenje R daje $D = 4h$. Iz ovoga sledi da slika 96–3 može da posluži za procenu da li primer sa dubinom h ulazi u oblast (V) za hrapave provodnike. Treba samo zamisliti da Re na slici ne predstavlja $D\,v/\nu$, nego $4\,h\,v/\nu$, a da k/D predstavlja $k/4h$.

Iz prikazanog na pomenutoj slici 96-3 vidi se da se u oblast hrapavih cevi (u oblasti V na slici) ulazi sa manjom vrednošću Re-broja, ako je relativna hrapavost k/D veća (ovo načelno važi za sve provodnike, a ne samo za cevi). Tako veća relativna hrapavost omogućava da se na modelu sa manjim brzinama i dubinama uđe u oblast hrapavih provodnika, a to znači i mogućnost primene manjeg modela, što je poželjno. Ovim je potvrđeno nagovešteno, da je veća hrapavost dobro došla.

Nije isključena ni mogućnost da apsolutna hrapavost na modelu bude veća nego na objektu. Izraz (124–25) pokazuje da će se ostvariti $k_* < 1$ (tj. $k_{\text{obj}} < k_{\text{mod}}$) kada je $Z_*\,I_*^3 < 1$. To znači da veće skraćenje modela (manji I_*) dovodi do većeg smanjenja dubina, pa one za veće skraćenje mogu postati premalene za istraživanje. Na primer, za model gde je $I_* = 1/5$ (model skraćen 5 puta u odnosu na geometrijski sličan) razmera za dubine je $Z_* > 125$.

Prethodno ukazuje da se, radi zadovoljenja prethodnih uslova za sličnost za delovanje hrapavosti, ona može da bude toliko velika da se na modelu to postiže hrapavljenjem zidova, lepljenjem izbočina (na primer, zrna peska), ubadanjem šiljaka koji će štrčati iz obloge, oblaganjem mrežastim površinama, ili na neki drugi pogodni način.

Primenom Drugog načina modelisanja poprečni presek na modelu nije geometrijski sličan sa odgovarajućim presekom na objektu. Umesto preseka (*I*), na slici 124–1, modeliše se presek (*II*), koji je spljošten (sužen) i to onoliko puta koliki je odnos B_*/Z_* (odnos razmere za širine i visine).

Navedena teškoća, zbog nemogućnosti postizanja sličnosti za hidraulički radijus, može se otkloniti prihvatanjem približnosti da je hidralički radijus jednak dubini ($R = h$). U tom slučaju razmera za njega je razmera za dubine, odnosno za visine tj. $R_* = h_* = Z_*$, a onda važi (124–25).

Približnost se može opravdati kod veoma širokog korita, približno pravougaonog preseka, gde je dubina h malena u odnosu na širinu b, pa je $R = A/O = h$. Naime, može se izostaviti trenje o bokove, jer je njihova površina malena u odnosu na površinu dna, pa je $O = B$, dok je $A = B\,h$. Ne mora da bude korito veoma široko, pa da se prihvati $R = h$. Dovoljno je da je dno izrazito hrapavije od bokova, pa se trenje obavlja pretežno po dnu.

Prethodna razmatranja o sličnosti za hidraulički radijus mogu se, međutim, smatrati izlišnim prihvatanjem ranijeg upustva da se hrapavost na modelu podešava dok se ne ostvare dubine u zavisnosti od proticaja, koje su u skladu sa odgovarajućim razmerama. To se mora podešavati iako je računom, prema navedenim obrascima, sračunata apsolutna hrapavost na modelu k_{mod}, jer se unapred ne može tačno predvideti čime se to može postići. Sračunata hrapavost k_{mod} može samo da uputi sa kakvom hrapavošću treba otpočeti podešavanje. Treba primetiti da se kroz podešavanja hrapavosti obuhvata i uticaj hidrauličkog radijusa za oba načina modelisanja.

* * *

Postignuta sličnost za uticaje trenja, koja je prethodno raspravljena, bila bi i dovoljna ako uticaj lokalnih promena nije značajan, tj. ako su krivine blage (sa velikim radijusom zakrivljenja) i manjih skretanja, i ako su promene preseka postepene. U takvim slučajevima dopunski gubici energije, koji se dodaju na trenje, mogu da budu maleni u odnosu na gubitke usled trenja. Ako to nije tako, dolazi do teškoća u postizanju sličnosti.

Modelisanjem po Prvom načinu može se postići sličnost za lokalnu naglu promenu preseka, koja svojim oblikovanjem zauzima zanemarljivi deo dužine provodnika, i ako je promena u prvolinijski položenom provodniku. Primeri za to su naglo proširenje ili suženje preseka, tanka pregrada, naglo spuštanje, ili podizanje dna, skokovite promene nivoa i slično. U takvim primerima lokalni gubitak energije, ako se on shvata kao dodatak sračunatom gubitku na trenje celom dužinom provodnika (a tako se shvata i računa), isti je na distordovanom kao na geometrijski sličnom modelu. Za lokalne promene, koje se svojim oblikom protežu izvesnom dužinom provodnika, modelisanjem po Prvom načinu odstupa se znatno od geometrijske sličnosti sa objektom. Na slici 124–1, pod (**a**), je označeno sužavanje preseka, koje se obavlja na dužini l. Nije postignuta sličnost za sužavanje, jer sličnost zahteva istu razmeru za l i za širinu B. Prva je, međutim, L_*, a druga B_*, a one nisu međusobno jednake, jer je $B_* = Z_* < L_*$, tj. sužavanje je skraćeno (u odnosu na geometrijski slično), naglije je. Krivina (**b**), na istoj slici, nije u osnovi geometrijski slična sa objektom. Namerno se prikazalo da se uopšte nije mogla uklopiti (ne može se izvesti unutrašnja zakrivljenost), ako se sledi linija (I).

Drugim načinom modelisanja ne postiže se sličnost za poprečni presek, a to dovodi do nesličnosti i za lokalne promene. Za promenu koja zauzima izvesnu dužinu provodnika Drugi način može da se nešto više približi postizanju sličnosti od Prvoga. Za sužavanje (**a**), na slici 124–1, iako poprečni preseci nisu slični, isti je odnos između preseka ispred i iza sužavanja, a on merodavno utiče na lokalni gubitak energije, a uz to je odnos l/B istovetan na modelu i objektu. Za krivinu (**b**), na istoj slici, isti je odnos R_k/B (između radijusa zakrivljenja i širine toka), a on mnogo više utiče na zbivanje u krivini od odnosa R_k/h (gde je h dubina) za koji nije postignuta sličnost.

Ako je lokalni uticaj od većeg značaja, može se sagraditi i poseban kratki model sa lokalnom promenom, potpuno geometrijski sličan, i uz primenu Frudove sličnosti. Dakle, prema uslovima za kratke modele, odnosno prema izloženom u Poglavlju 123. Rezultati sa toga modela koriste se sa svrhom da se oni nametnu dugačkom modelu celine objekta gde, usled distorzije, nije ostvarena geometrijska sličnost. Upravo, na modelu celine podešavanjem treba da se dobiju isti rezultati kao na kratkom modelu lokalne promene.

* * *

Uzvodni i nizvodni uslovi, koji se mogu menjati vremenom, moraju na modelu da budu podešeni prema odgovarajućim na objektu, tako da je zadovoljena sličnost.

Za primere gde voda iz provodnika ističe u bazen (ili više bazena), ili ističe iz bazena u provodnik (ili povremeno jedno, i povremeno drugo), mora da bude zadovoljena jednačina:

$$Q\,\mathrm{d}t = \Omega\,\mathrm{d}Z \tag{124–28}$$

koja iskazuje da je zapremina koju proticaj Q za vreme dt unosi u bazen (leva strana jednačine) jednaka promeni zapremine u bazenu (desna strana jednačine, gde je dZ promena nivoa, a Ω horizontalna površina vode u bazenu).

Prethodna jednačina uslovljava za razmere:

$$Q_*\,t_* = \Omega_*\,Z_* \tag{124–29}$$

Razmera za Q_* zameniće se sa $A_*\,v_*$ (pomnožene razmere za poprečni presek provodnika A_* i brzine v_*), a za razmeru t_* će se uzeti da je jednaka L_*/v_*, kako je napisano sa (124–4), pa se dobija:

$$\Omega_* = A_*\frac{L_*}{Z_*} = \frac{A_*}{I_*} \tag{124–30}$$

Napisano pokazuje da razmera za poprečni presek provodnika i razmera za horizontalni presek bazena nisu jednake.

Navešće se još jedan primer nametanja razmere da se postigne sličnost za granični uslov.

Za primere gde iz provodnika voda preliva iz njega, ili u njega, preko preliva na njegovom boku sa dužinom b prelivne ivice (mereno duž provodnika) treba omogućiti sličnost i za prelivanje. Na osnovu jednačine prelivanja, (106–13) piše se:

$$Q = m_H\,b\,\sqrt{2gH^3} \tag{124–31}$$

gde je Q proticaj, a H visina prelivnog mlaza, dok je m_H koeficijent prelivanja.

Sa istim koefijentom prelivanja na modelu (što se ostvaruje oblikovanjem krune preliva prema geometrijskoj sličnosti), prethodna jednačina daje sledeću vezu između razmera:

$$Q_* = b_*\,Z_*^{3/2} \tag{124–32}$$

jer razmera za visinu prelivnog mlaza mora da bude razmera Z_* za visine. Napisana razmera za Q_* mora da bude ista kao razmera za proticaj u provodniku, a ta je određena sa (124–17) za Prvi način modelisanja, a sa (124–16) za Drugi. Izjednačenje (124–32) sa prvom, odnosno drugom navedenom razmerom daje:

$$b_* = Z_* \qquad \text{i} \qquad b_* = B_*$$

Primenom (124–13), odnosno (124–14), prethodno se svodi na:

$$b_* < L_* \qquad \text{i} \qquad b_* = L_* \tag{124–33}$$

U prvom slučaju zahtev za dužinom preliva je veći nego što dozvoljava razmera za dužine L_*, pa ga je nemoguće smestiti po dužini, dok je u drugom slučaju dužina za preliv baš ona koja i za dužine, merene pravcem pružanja provodnika.

* * *

Utvrđene veze između razmera za pojedine veličine važe i za tečenje pod pritiskom (potpuno ispunjen presek), pa se na modelu mogu istraživati primeri gde je jedan deo provodnika sa slobodnom površinom, a drugi pod pritiskom, i gde se na istom mestu vremenom smenjuju obe vrste tečenja. Obrazloženje za ovaj zaključak daje se u nastavku.

Razmatranja u ovom odeljku zasnivala su se na jednačini (92–37), koja važi za tečenja sa slobodnom površinom, ali i za tečenja pod pritiskom, i u oba slučaja u jednačinu ulazi pijezometarska kota Π.

Na osnovu jednačine (92–37) došlo se do izraza (124–2), kojim se usklađuju razmere za pojedine veličine, a to, i sve što iza toga sledi, važi i za tečenje sa slobodnom površinom, i za tečenje pod pritiskom. Uz jednačinu (124–2) razmatranja su se temeljila i na jednačini (124–20), a i ona važi za obe vrste tečenja. Prema tome, sve napisano, uključivši i (124–30) važi za tečenje sa slobodnom površinom, a može se primeniti na provodnike gde se tečenje sa slobodnom površinom smenjuje sa tečenjem pod pritiskom. Hidrotehnička praksa rešava i takve primere, gde je prelazak iz slobodne površine u potpuno ispunjen presek, što je teško računski obuhvatiti, pa modelska istraživanja mogu korisno poslužiti.

* * *

Modeliše se provodnik, gde je celom dužinom i kroz sve vreme strujanje pod pritiskom, pa se ne mora zadovoljiti Frudova sličnost, a to znači da se provodnik može postaviti proizvoljno u odnosu na vertikalu, i da razmera za visinu poprečnog preseka ne mora biti ista kao razmera za pijezometarsku razliku. Ovo je razjašnjeno u Poglavlju 112., koje je razmatralo modelisanje tečenja pod pritiskom.

U provodniku pod pritiskom mogu se zbivanja u njemu izraziti u integralnom vidu, posmatrajući ceo provodnik. To praktično znači da se napisano u jednačini (92–37) posmatra u integralnom vidu, pa u razmatranje ulazi integral trećega člana (integriše se u jednom trenutku, a po dužini provodnika), koji iznosi $(\Pi + v^2/2g)_{\mathrm{I}} - (\Pi + v^2/2g)_{\mathrm{II}}$, gde se indeks (I) odnosi na početak, a (II) na kraj provodnika. Ta razlika može se zameniti sa pijezometarskom razlikom $\Pi_{\mathrm{I}} - \Pi_{\mathrm{II}} = \Delta\Pi$, ako je razlika brzinskih visina $v_{\mathrm{I}}^2/2g - v_{\mathrm{II}}^2/2g$ zanemarljiva u odnosu na pijezometarsku razliku $\Delta\Pi$.

U praktičnim primerima obično u provodnik ulazi voda iz nekog bazena (ili šahta, ili uopšteno iz nekog objekta sa slobodnom površinom), a i izlazi u takav objekat, pa je $\Delta\Pi$ razlika između nivoa u uzvodnom i nivoa u nizvodnom objektu. Primećuje se da se obično izučavaju kolebanja tih nivoa uzrokovana neustaljenošću tečenja u provodniku.

Prethodno objašnjenje o mogućnosti zanemarenja razlika brzinskih visina $\Delta(v^2/2g)$, u odnosu na pijezometarsku razliku $\Delta\Pi$, dopušta da se u jednačini (124–2) može izostaviti treći član, a ostale treba zadržati. Izjednačenje drugog i četvrtog člana daje:

$$\frac{\Pi_*}{L_*} = I_{E*} \tag{124–34}$$

Ovde treba naglasiti da se leva strana ne može zameniti sa Z_*/L_*, jer ovde ne postoji opšta razmera za visine, a merodavna je samo razmera za pijezometarske kote (Π_*).

Zamenom I_{E*} u prethodnoj jednačini sa levom stranom izraza (124–21) dobija se:

$$\frac{\Pi_*}{L_*} = \frac{k_*^{1/3}\, v_*^2}{R_*^{4/3}} \tag{124–35}$$

Razmeru v_* za brzinu određuju razmere za proticaj i poprečni presek Q_* i A_* $(v_* = Q_*/A_*)$, pa se izražavanjem brzine na taj način dobija:

$$\frac{\Pi_*}{L_*} = \frac{k_*^{1/3}\, Q_*^2}{R_*^{4/3}\, A_*^2} \tag{124–36}$$

Za kružni poprečni presek provodnika, gde je $R_* = D_*$, a $A_* = D_*^2$ (D_* je razmera za prečnik), piše se:

$$\frac{\Pi_*}{L_*} = \frac{k_*^{1/3} Q_*^2}{D_*^{16/3}} \tag{124–37}$$

U ovoj jednačini od pet razmera ($\Pi_*, L_*, k_*, Q_*, D_*$), četiri se mogu izabrati, što ukazuje na znatno veću slobodu izbora od one za provodnike sa slobodnom površinom. Tamo su morali da se, pored ovde navedenih, ispuni i uslovi $\Pi_* = D_*$, kao i $\Pi_* = v_*^2$, što znatno smanjuje mogućnosti za podešavanje razmere.

Napominje se da se razmera k_*, za apsolutnu hrapavost, može zameniti sa n_*^6, gde je n_* razmera za Maningov koeficijent hrapavosti, što je već objašnjeno u „napomeni" iza jednačine (124–22).

Za horizontalnu površinu uzvodnog i nizvodnog basena (smeštenih ispred, odnosno iza provodnika) primenjuje se jednačina (124–28), uz zamenu dZ sa dΠ (jer pijezometarska kota obeležava nivo), pa se piše:

$$Q\,\mathrm{d}t = \Omega\,\mathrm{d}\Pi \tag{124–38}$$

iz čega sledi:

$$Q_*\,t_* = \Omega_*\,\Pi_* \tag{124–39}$$

Skreće se pažnja da se ovde za razmeru t_*, za vreme, ne može uzeti napisano sa (124–4), što je uzeto za ispisivanje (124–30), jer je za ovdašnji primer u jednačini (124–2) baš izostavljen treći član, koji je korišćen za pisanje (124–4). Stoga se mora uzeti drugi izraz za razmeru t_*, a to je (124–3). Korišćenjem toga izraza za zamenu u (124–39) dobija se:

$$\Omega_* = \frac{Q_*\,v_*\,L_*}{\Pi_*^2} \tag{124–40}$$

ili, zamenom v_* sa Q_*/A_*:

$$\Omega_* = \frac{Q_*^2\,L_*}{A_*\,\Pi_*} \tag{124–41}$$

* * *

Iz izloženog u ovom poglavlju nameće se pitanje: Ako se distordovani modeli izgrađuju sledeći određene jednačine (bez njih se ne može), zašto se onda ne bi po tim jednačinama računalo i tako rešio zadatak bez upotrebe modela? I drugo pitanje: Koliko treba smatrati model pouzdanim sredstvom za donošenje rezultata, koji se prenose na objekat, kada je prihvaćeno niz pretpostavki, pa i približnosti pri obrazovanju modela?

U ranije vreme računanje je bilo težak i skoro nesavladiv posao (misli se na vreme pre korišćenja savremenih digitalnih računara) i tada je model bio primamljivo i često primenjivano sredstvo, pa se sada, kada su računarske mogućnosti veće, može pomisliti da je istraživanje na modelu nepotrebno. To bi ipak bio brzoplet zaključak, jer model i danas može doprineti u rešenju zadataka. Pre svega, može se proveriti ispravnost jednačine upoređujući rezultate koje ona daje za strujanje na modelu sa stvarno opaženim na njemu. Mogu se uneti i ispravke da se to uskladi. U računanju se trenje, za nejednoliko i neustaljeno strujanje, uzima kao da je ono isto kao za jednoliko i ustaljeno (za istu dubinu i brzinu). Pitanje je da li je to zaista tako, pogotovu za nagle promene od preseka do preseka i kroz vreme. Na modelu se samo ustaljeno i približno jednoliko tečenje usklađuje prema onome što daje jednačina, dok se neustaljena strujanja, uzorkovana brojnim mogućim graničnim uslovima, sa modela prenose na objekat bez posredstva jednačine. U računu tokova gde se smenjuju duž provodnika, ili kroz vreme, (ili oboje) tečenje sa slobodnom površinom i tečenje pod pritiskom, istraživanja na modelu mogu da doprinesu da se taj prelaz razjasni.

U završetku izlaganja o lokalnim uticajima napomenuto je da se za lokalni uticaj može sagraditi poseban (izdvojen) model – to je model kratkog objekta geometrijski sličnog sa objektom. Na modelu celokupnog objekta, koji je distordovan, podešava se oblikovanje tako da se dobiju rezultati isti kao na modelu lokalnog uticaja. Treba primetiti da odustajanje od modelisanja celokupnog dugačkog objekta ne mora da znači i potpuno odustajanje od modelisanja, jer lokalni uticaj treba (može se reći da često i mora) modelski istražiti na modelu kratkog objekta.

Treba, na kraju, naglasiti, da eksperimentalna istraživanja nisu vezana isključivo za model smanjen u odnosu na objekat. Ona su nužna i na objektu (to su terenska merenja) i račun treba proveriti (i doterati) da pruži rezultate saglasne sa opaženim na terenu. Sa tako proverenim načinom računanja može se računati ono što će se na objektu dešavati i za uslove koji se nisu obuhvatili terenskim merenjima. Ako se računa objekat koji će se tek graditi, korisno je po njegovom puštanju u rad obaviti terenska merenja i proveriti ispravnost računa. Saznanja iz upoređenja rezultata računa i stvarnog stanja postaju dragocena za projektovanje budućih objekata.

deo trinaesti
STRUJANJE PODZEMNIH VODA

Umesto naslova „Strujanje podzemnih voda” mogao se uzeti „Strujanje kroz porozne sredine” što bi bilo opravdanije, jer je bitno da se strujanje obavlja kroz poroznu sredinu, a ona ne mora da bude pod zemljom. Izabrani naslov se opravdava time što su problemi strujanja podzemnih voda u hidrotehničkoj praksi uglavnom vezani za podzemne vode.

131
DARSIJEV ZAKON FILTRACIJE

U strujanju podzemnih voda u hidrotehničkoj praksi primenjuje se Darsijev zakon filtracije:

$$v = K\, I_\Pi \tag{131–1}$$

v = brzina filtracije,

K = koeficijent filtracije,

I_Π = nagib pijezometarske linije $= -\,\mathrm{d}\Pi/\mathrm{d}s$, gde je s pravac strujanja.

Koeficijent filtracije zavisi od fluida koji struji kroz poroznu sredinu i od karakteristika te sredine (od poroznosti i od granulometrijskog sastava svrstavanjem materijala po krupnoći, zatim od oblika zrna). „Filtracija” se može prevesti kao „proceđivanje”.

U Darsijev zakon (131–1) ulazi brzina filtracije, označena sa v, koja je računska, a ne stvarna brzina i koja se ponegde naziva „Darsijeva brzina”:

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{A_0 + A_s} \tag{131–2}$$

Q = proticaj

A_0 = presek pora (proticajni presek za strujanje)

A_s = presek kroz čvrst materijal

A = $A_0 + A_s$ = ukupan presek

Uvodi se i koeficijent poroznosti:

$$m = \frac{A_0}{A} \tag{131–3}$$

Pošto je $A_s = A - A_0$, onda je odnos između preseka A_s kroz čvrst materijal i celokupnog preseka A dat sa:

$$\frac{A_s}{A} = 1 - \frac{A_0}{A} = 1 - m \tag{131–4}$$

Stvarna brzina vode v_0 kroz pore veća je od računske brzine v:

$$v_0 = v\,\frac{A}{A_0} = \frac{v}{m} \tag{131–5}$$

Koeficijent filtracije K, koji ulazi u zakon (131–1), mora da bude poznat, da bi se mogla utvrditi veza između brzine v (preko nje i proticaja) i nagiba I_Π pijezometarske linije. Pošto je K jedina veličina koju unosi čvrst materijal, kroz koga se odvija filtracija, nameće se pitanje: Kako odabrati vrednost koeficijenta filtracije?

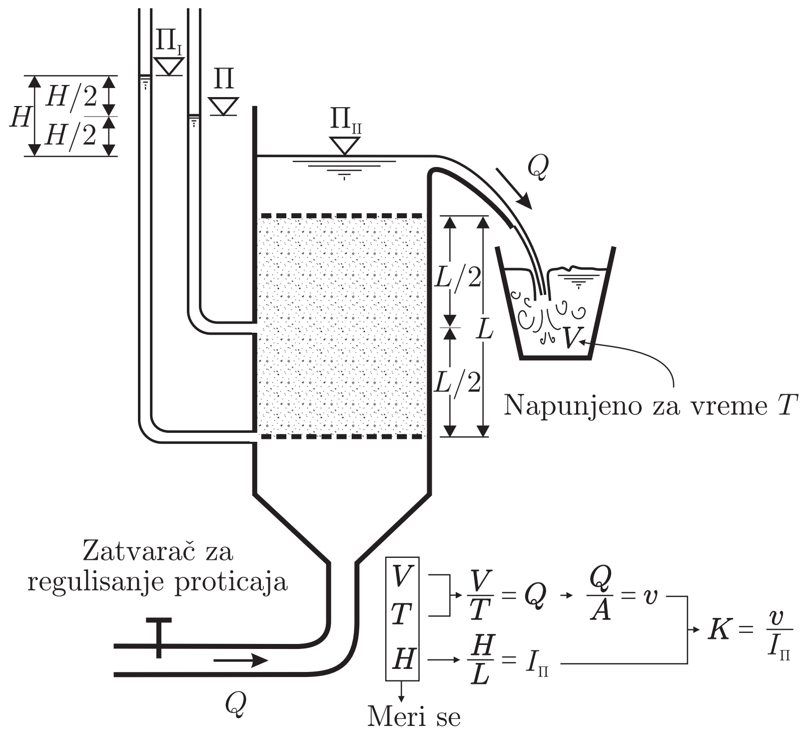
Ima podosta preporuka za izbor koeficijenata filtracije. Po njima njegovu vrednost nameće krupnoća materijala (šljunka, peska i sl.), ponegde se navodi i poroznost. Ima obrazaca koji uvode tzv. „temperaturni faktor", kojim se unosi uticaj temperature. Time se zapravo unosi uticaj viskoznosti fluida, a ona se menja sa promenom temperature. Nevolja nije u tome da nema preporuka nego u tome što ih ima mnogo, pa nije lako odabrati.

Pouzdano se koeficijent filtracije može da odredi eksperimentalnim postupkom. Slika 131–1 prikazuje kako se to može uraditi. U cilindričnom sudu smešten je materijal i kroz njega na dužini L filtrira voda (ili neki drugi fluid) uz spuštanje pijezometarske kote za visinu H, sa Π_I na Π_II, pa je:

$$I_\Pi = \frac{\Pi_\mathrm{I} - \Pi_\mathrm{II}}{L} \tag{131–6}$$

Brzina filtracije v je, kako je objašnjeno, računska brzina. U posmatranom primeru ona je $v = Q/A_u$, gde je A_u unutrašnji presek suda u koji je smešten materijal (ako je taj presek krug, $A_u = D_u^2\,\pi/4$, gde je D_u prečnik). Meri se proticaj Q. Na slici je napisano da je određen sa V/T gde je V protekla zapremina za vreme T. Pored toga meri se pijezometarska razlika H. Podaci za Q i H posredno određuju koeficijent filtracije K:

$$K = \frac{v}{I_\Pi} = \frac{Q\,L}{A_u\,H} \tag{131–7}$$



Slika 131–1 Eksperimentalno određivanje koeficijenta filtracije.

Za pisanje prethodnoga korišćeni su izrazi (131–1) i (131–6).

Pri određivanju K, kao što se vidi, nije potrebno poznavati vrednost koeficijenta poroznosti m.

Opite bi trebalo obaviti sa nizom proticaja. Ako se prethodnim obrascem sa svima dobija približno ista vrednost koeficijenta filtracije, ostvaruje se zakon (131–1).

Određena vrednost za K može se koristiti svuda gde se filtracija obavlja kroz materijal korišćen u eksperimentima. Upravo, eksperimenti se obavljaju sa materijalom koji je u praktičnom primeru koji se rešava. Preporučljivo je da se koeficijent filtracije odredi istraživanjima na terenu, i to neposredno na terenu čije su podzemne vode predmet zadatka koji praksa treba da rešava. Jednačine namenjene strujanju podzemnih voda povezuju proticaj (ili brzinu) sa pijezometarskom razlikom koja proticanje omogućava. Koeficijent filtracije obavezno ulazi u te veze. Ako se izmeni i proticaj i pijezometarska razlika, primenom jednačine (131–7) sračuna se koeficijent filtracije. Primer za to je „probno crpenje” iz bunara, koje će biti opisano u Odeljku I, Poglavlja 136. i prikazano slikom 136–2, gde se iz merenja proticaja crpenja i pijezometarske razlike za dve tačke, sračuna vrednost koeficijenta filtracije.

* * *

Radi razjašnjenja kako bi otprilike izgledao izraz kojim bi se određivala vrednost koeficijenta filtracije K, posmatraće se tečenje kroz cev kružnog preseka, veoma malenoga prečnika, da bi presek cevi bio reda vrednosti preseka kroz pore. Tako cev može poslužiti kao jedan idealizovan protočni put kroz poroznu sredinu.

Prema zakonu (131–1) za određeni porozni materijal brzina v je srazmerna sa I_Π, pa je i brzina v_o kroz pore srazmerna sa I_Π (radi se o istom materijalu, dakle o istoj poroznosti). Srazmernost brzine v_o i nagiba I_Π pijezometarske linije znači linearan zakon otpora, a on važi za laminarno tečenje.

Za laminarno tečenje u cevi kružnog preseka napisan je, iz izraza (96–28), obrazac za određivanje linije energije, a toliki je i nagib I_Π pijezometarske linije:

$$I_\Pi = 32\,\frac{\nu}{g\,D^2}\,v_0 \tag{131–8}$$

gde je:

ν = kinematski koeficijent viskoznosti

g = gravitaciono ubrzanje

D = prečnik cevi

v_0 = brzina u cevi ($v_0 = 4\,Q/\pi\,D^2$)

U Hidraulici je uobičajeno da se za nekružni presek kao predstavnik preseka, umesto prečnika, uzima hidraulički radijus:

$$R = \frac{A}{O} = \frac{\text{površina preseka}}{\text{obim preseka}} \tag{131–9}$$

U hidrauličkoj praksi u obrascima za cev kružnog preseka zamenjuje se D sa $4R$ (jer je hidraulički radijus u cevi kružnog preseka $R = D/4$) i obrazac sa tom zamenom se primenjuje na nekružne preseke.

Stavljanjem u (131–8) $D = 4R$, dobija se:

$$I_\Pi = 2\,\frac{\nu}{g\,R^2}\,v_0 \tag{131–10}$$

iz čega se za brzinu v_0 piše:

$$v_0 = \frac{g\,R^2}{2\,\nu} I_\Pi \tag{131–11}$$

Sada treba pokušati da se proceni koliko otprilike iznosi R za strujanje kroz pore.

Pretpostavlja se da je čvrsti materijal jednolik, tj. zrna su iste krupnoće (koja se izražava tzv. „prečnikom zrna” d) i istog oblika. Za te pojednostavljen uslove može se napisati za presek čvrste materije:

$$A_s = \text{const}_1\, d^2 \tag{131–12}$$

što znači srazmernost (proporcionalnost) između A_s i d^2, što važi za navedenu pojednostavljenu uslovnost (jednolikost). Međutim, u praktičnom primeru obično nema te jednolikosti, pa će se, pri konačnom zaključivanju o tome voditi računa.

Deljenjem (131–3) sa (131–4) uspostavlja se odnos između preseka A_0 kroz pore i preseka A_s čvrste materije:

$$\frac{A_0}{A_s} = \frac{m}{1-m}$$

pa se za presek kroz pore piše, ako se iskoristi napisano sa (131–12):

$$A_0 = \text{const}_1\, \frac{m}{1-m}\, d^2$$

Za obim pora O_0 (to je okvašeni obim proticajnog preseka) može se kao približnost uzeti da je srazmeran sa prečnikom zrna d:

$$O_0 = \text{const}_2\, d \tag{131–13}$$

Uvrštavanjem napisanog za A_0 i O_0 dovodi do:

$$R = \frac{A_0}{O_0} = \text{const}_3\, \frac{m}{1-m}\, d \tag{131–14}$$

gde je $\mathrm{const}_3 = \mathrm{const}_1/\mathrm{const}_2$.

Korišćenjem prethodnog izraza za zamenu R u (131–11), dobija se:

$$v_0 = \mathrm{const}\,\frac{g}{\nu}\,\frac{m^2}{(1-m)^2}\,d^2 I_\Pi \tag{131–15}$$

Ovde je $\mathrm{const} = \mathrm{const}_3^2\,/\,2$.

Izraz se odnosi na brzinu v_0 kroz pore (jer su prenešeni stavovi iz tečenja kroz cev, gde je brzina takođe označena sa v_0). Za računsku brzinu v, s obzirom da je prema (131–5) $v = m\,v_0$, odgovarajući izraz je:

$$v = \mathrm{const}\,\frac{g}{\nu}\,\frac{m^3}{(1-m)^2}\,d^2 I_\Pi \tag{131–16}$$

Ako se prethodni izraz uporedi sa osnovnim zakonom (131–1), uviđa se da je napisano desnoj strani, ispred I_Π, ustvari koeficijent filtracije K. Stoga je razumljiv obrazac koji se često navodi i koji glasi:

$$K = 0{,}008\,\frac{g\,m^3}{\nu\,(1-m)^2}\,d^2 \tag{131–17}$$

Ovde je vrednost const iz (131–16) određena sa 0,008.

Vrednost kinematskog koeficijenta viskoznosti ν u zavisnosti od temperature Θ napisane su u sledećoj Tablici:

$\Theta[^\circ\mathrm{C}]$	5	10	15	20
$\nu[\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}]$	0,0152	0,0131	0,0114	0,1020

Iz upisanih vrednosti u Tablici uviđa se da je koeficijent viskoznosti za 5 °C otprilike 1,5 puta veći nego za 20 °C. Brzina v je srazmerna sa koeficijentom K (pri istoj pijezometarskoj razlici), pa će za isti materijal (iste poroznosti, isti prečnik) brzina v biti čak 1,5 puta veća za 20 °C od one za 5 °C.

Uticaj poroznosti unosi faktor:

$$\Psi = \frac{m^3}{(1-m)^2} \tag{131–18}$$

i to veoma utiče na vrednost koeficijenta K. Ako se uzme da su $m =$ 0,25 i $m = 0{,}40$ granice između kojih se može naći koeficijent poroznosti m, vrednost za Ψ (sa kojim je srazmerna vrednost za K) je u veoma velikom rasponu, od otprilike 0,028 do 0,18.

Izloženo ukazuje da vezivanje koeficijenta filtracije K samo za prečnik zrna d unosi mogućnost samo za grubo ocenjivanje koeficijenta filtracije. Ako se uzme ipak neka srednja vrednost za $m = 1/3$ dobija se $\Psi = 0{,}083$. Za tu vrednost i za $\nu = 0{,}0125\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$, obrazac (131–17) daje:

$$K \cong 50\, d^2 \qquad K\,[\mathrm{cm/s}],\ \ d\,[\mathrm{cm}] \tag{131–19}$$

Za ekstremne slučajeve, gde je koeficijent viskoznosti najniži od navedenih vrednosti, a poroznost najveća ($\nu = 0{,}01\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$, $m = 0{,}40$), dobija se K oko 2,6 puta veća od prethodno nevedene, a gde koeficijent viskoznosti ima najveću od navedenih vrednosti, a poroznost najmanju ($\nu = 0{,}015\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$, $m = 0{,}25$), dobija se K oko 3,6 puta manji. Ovo ukazuje na velike teškoće pri određivanju vrednosti K, jer se temperatura menja, a i poroznost (na primer, teren pritisnut građevinom postaje zbijeniji).

Zanimljivo je da se u praksi preporučivao obrazac:

$$K = d^2 \qquad K\,[\mathrm{cm/s}],\ \ d\,[\mathrm{mm}] \tag{131–20}$$

koji upoređen sa (131–19) pokazuje da je tamošnje 50 ovde zamenjeno sa 100.

Svakako da prethodni obrazac, svojom savršenom jednostavnošću ne može izraziti veoma složenu zavisnost od koje zavisi koeficijent filtracije. On je gruba procena, ali ipak ukazuje gde se otprilike nalazi koeficijent filtracije.

Sve nevolje oko određivanja koeficijenta filtracije nisu još raspravljene. Do sada je sastav materijala bio iskazivan samo jednim podatkom, sa jednom krupnoćom zrna označenom sa d, i to bi se moglo bez ikakve sumnje prihvatiti samo ako je materijal jednolik, a on to u praktičnim primerima nije. Za d u obrascima za koeficijent filtracije stoga se uz obrazac daje i preporuka da se uzme negde između d_{10} i d_{20} (zrno od koga sitnija zrna čine 10, odnosno 20% od ukupne mase), što ukazuje da su za filtraciju merodavnija sitnija zrna, jer ona ne dozvoljavaju obrazovanje pora koja daju krupnija. Od izbora merodavne krupnoće za određivanje koeficijenta filtracije zavisi njegova vrednost u nezanemarljivoj meri. Treba dodati i da oblik zrna ima uticaj na propustljivost (na vrednost koeficijenta filtracije). Nije svejedno da li su zrna okruglasta ili pljosnata, da li su zaobljena ili oštroivična itd. Uostalom, konstante const_1 i const_2, u izrazima koji prethode (131–14), zavise od oblika zrna.

Raznolikost krupnoće zrna i različitost oblika zrna navode na pomisao da vrednost konstante (const = 0,008) u (131–17), ne mora da bude opšte važeća. U nekom pojedinačnom slučaju bila bi podesnija neka druga vrednost konstante, ali bi uvek bila srazmernost između brzine v i pijezometarskog nagiba I_Π („linearna zakonitost").

* * *

Osnovni zakon filtracije, nazvan „Darsijev", napisan na samom početku, sa (131–1), van svake sumnje je veoma jednostavan izraz. Nešto prostije se ne može ni zamisliti. To ga čini veoma primamljivim, jer na prvi pogled izgleda da se svaki zadatak veoma prosto rešava. Međutim, zakon je jednostavan jer je nedorečen, on samo iskazuje srazmernost između brzine i pijezometarske razlike, a to je kod svakog laminarnog strujanja neminovno, a izražavanje sve složenosti okolnosti u kojima se strujanje odvija, zakon je prepustio koeficijentu filtracije, čije određenje je u stvari merodavno za rezultate koje će dati računanje. Može se reći da je zakon jednostavan, ali njegova primena nije jednostavna, jer dovodi do teškoća oko izbora koeficijenata filtracije.

Napomene:

1. Sve navedeno i objašnjeno važi ako je strujanje laminarno (tada važi linearna zavisnost između v i I_Π). Za cev se pouzdano može reći da se laminarno strujanje održava ako Rejnoldsov broj ($Re = v_0\, D/\nu$) ne pređe 2000. Ako se ta granica pređe, viskoznost nije sposobna da održi slojevitost laminarnog strujanja i javlja se turbulencija. Načelno isto se dešava i u strujanju u poroznim sredinama. Za peščani materijal koji je približno jednolik navodi se da se laminarno strujanje ostvaruje ako je:

$$Re = \frac{v\, d}{\nu} < 5 \tag{131–21}$$

I ovde, kao i ranije, d je prečnik zrna, v je brzina filtracije a ν kinematički koeficijent viskoznosti. Odakle tako malena granična vrednost Re-broja (kod cevi je 2000)? Odgovor je:

Pre svega, nije karakteristična dužina ista u oba slučaja. Kod porozne sredine čak nije uzeta veličina koja meri pore. Sem toga, strujanje je kroz veoma nepravilan presek, kroz pore, gde iz njih štrče pojedina zrna čvrstog materijala, koja uznemiravaju strujanje, pa veoma lako počinje turbulencija.

Kriterijum (131–21) u nekim primerima nije zadovoljen, ali to u praktičnom smislu ne treba da stvara zabrinutost, jer se kriterijum može i prekoračiti, a dobija se prihvatljiv rezultat. Ako je čak $Re = 100$, koeficijent filtracije će biti svega za 10% veći od onoga za $Re = 5$, a to se može podneti, s obzirom na neminovnu približnost u određivanju koeficijenta filtracije, koga nameću ostale okolnosti.

Što je veća brzina i veći presek pora (veći je Re-broj) turbulencija je razvijenija i može doći čak do strujanja kome odgovara strujanje kroz hrapav provodnik, gde je nagib pijezometarske linije srazmeran kvadratu brzine ($I_\Pi \sim v^2$), a nije srazmeran brzini kao u Darsijevom zakonu. U tečenju podzemnih voda u karstu, kroz provodnike nepravilnog oblika sa jako hrapavim površinama i znatnog preseka provodnika (čak nekoliko decimetara kvadratnih), zaista dolazi do kvadratne zakonitosti.

2. U tečenju kroz porozne sredine brzine su jako malene, a to je pogotovo brzinska visina ($v_0^2 / 2\,g$) za brzinu kroz pore. Ako se $v_0^2 / 2\,g$ zanemari, a može se, onda se za kotu energije $E = \Pi + v_0^2 / 2\,g$ može uzeti pijezometarska kota Π, pa je pijezometarska razlika $\Delta\Pi$ jednaka energetskoj ΔE ($\Delta E = \Delta\Pi$), a nagib I_Π pijezometarske linije je i nagib I_E energetske.

   Sve pijezometarske razlike $\Delta\Pi$, navedene u celokupnom izlaganju, kao i nagib I_Π pijezometarske linije, počevši od izraza (131–1), treba shvatiti kao izražavanje gubitka energije na tečenju usled prodiranja strujanja kroz pore.

132
LINIJSKI ZADACI

Predmet ovog poglavlja, kako sam naslov kaže, su *linijski zadaci*, a to znači da sve veličine koje se određuju (pijezometarske kote, brzine, dubine) zavise samo od rastojanja, merenog u pravcu strujanja (duž jedne linije).

Poglavlje je podeljeno na dva dela. Prvi deo se odnosi na *strujanje pod pritiskom* kroz propustljivi sloj ograničene debljine, iznad koga je nepropustljivi sloj (tačnije rečeno, veoma slabo propustljivi sloj) kroz koga je strujanje zanemarljivo. Pijezometarske kote za strujanje, koje se odvija u propustljivom sloju, su iznad gornje granice toga sloja, i stoga je on pod pritiskom. Primer za ovakvo strujanje je na slici 132–2. Drugi deo odnosi se na *strujanje sa slobodnom površinom*, u kom slučaju propustljivi sloj nije sa gornje strane ograničen. Jedan od primera za to je prikazan slikom 132–5.

I
STRUJANJE POD PRITISKOM

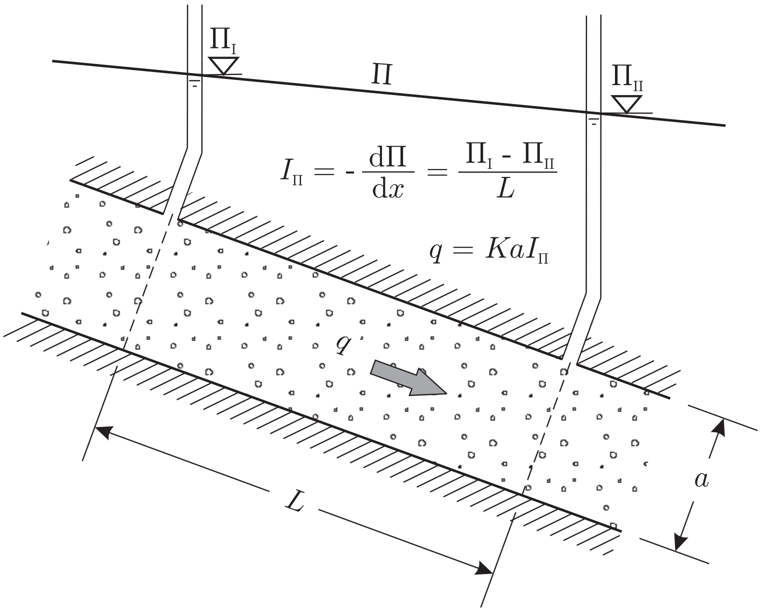
Na slici 132–1 prikazan je jedan deo struje (dužine L) pod pritiskom kroz propustljivi sloj konstantne debljine a. Svuda je propustljivost porozne sredine ista ($K = \text{const}$). Pijezometarska kota se menja samo u pravcu brzine i nepromenljiva je u jednom poprečnom preseku. Stoga se pijezometarska kota menja samo duž strujnica, što znači da je zadatak linijski.

Prema jednačini (131–1) $I_\Pi = v/K$, pa je za razmatrani primer $I_\Pi = \text{const}$, jer su v i K konstantni i piše se (vidi sliku 132–1):

$$I_\Pi = -\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}x} = \frac{\Pi_\mathrm{I} - \Pi_\mathrm{II}}{L} \tag{132–1}$$

Proticaj po jedinici širine struje (širina se meri u pravcu normalnom na ravan crteža):

$$q = a\,v = a\,K\,I_\Pi \tag{132–2}$$



Slika 132–1 Jednoliko strujanje pod pritiskom.

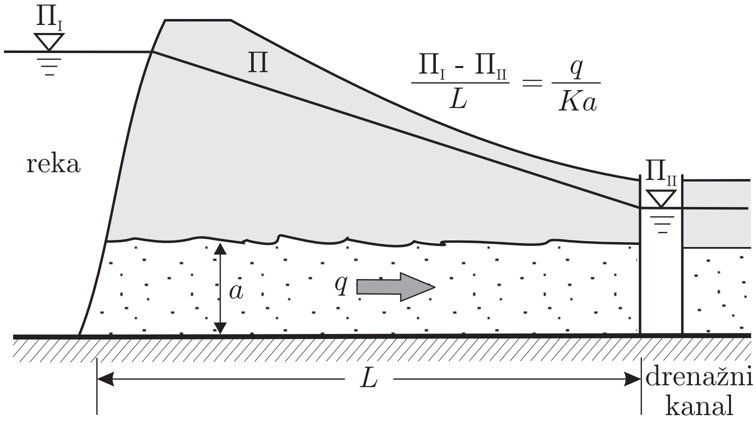
gde je a debljina propustljivog sloja.

Za širinu strujanja b proticaj je:

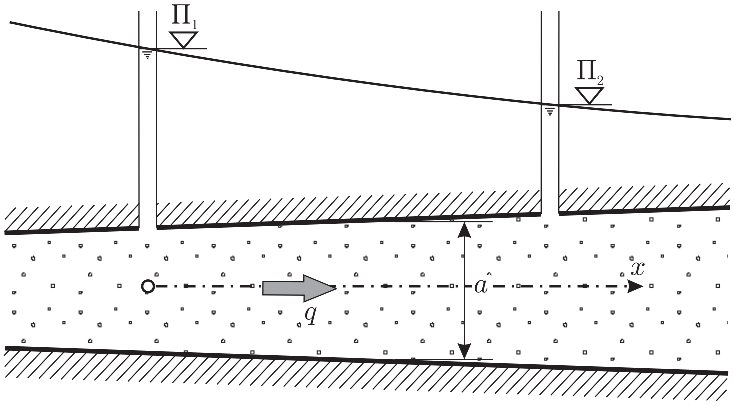
$$Q = b\,q = b\,a\,K\,I_{\Pi} \tag{132–3}$$

Praktičan primer ovakvog strujanja je strujanje kroz propustljiv sloj konstantne debljine, kroz koji podzemna voda struji od reke u drenažni kanal prokopan paralelno sa rekom (sl. 132–2). U tom kanalu zahtevani nivo se postiže ako iz kanala voda može slobodno oticati, ili se mora nivo održavati crpljenjem (pumpanjem). Razlog za spuštanje nivoa podzemne vode u drenažnom kanalu je sprečavanje plavljenja terena, jer bi se, bez ugradnje kanala, ona popela u priobalje na kotu koja je u reci (na slici 132–2 to je kota Π_1).

Primer sa slike 132–3 može se računati kao da je strujanje *linijsko*, jer su brzine uglavnom upravljene u jednom pravcu (podužnom). Komponente u poprečnom pravcu su zanemarljive ako je promena preseka blaga, postepena, a to se pretpostavlja – radi se, dakle, o približno paralelnom strujanju. Za taj slučaj debljina sloja a je promenljiva, ona je funkcija od rastojanja x, tj. $a = a(x)$. Prema tome proticaj q je



Slika 132–2 Primer jednolikog strujanja podzemne vode pod pritiskom – od reke do drenažnog kanala, kroz propustljivi sloj konstantne debljine (a).



Slika 132–3 Strujanje kroz propustljivi sloj čija se debljina postepeno menja, pa se zadatak može rešavati kao linijski.

jednak:

$$q = a(x)\,v = a(x)\,K\left(-\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}x}\right)$$

Kako je $q = \mathrm{const}$ duž toka, integraljenje prethodnog izraza daje:

$$\frac{q}{K}\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{a(x)} = \Pi_0 - \Pi \qquad (132\text{–}4)$$

gde je $\Pi = \Pi_0$ za $x = 0$.

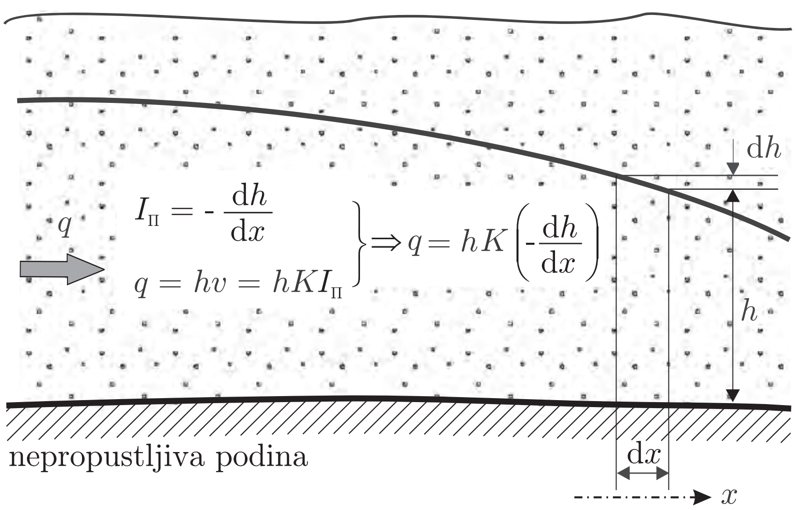
Poznavanjem funkcije $a(x)$, što mora da bude zadato, i ako je izraz (132–4) integrabilan, dolazi se do pijezometarske kote duž toka, ili se, za poznatu pijezometarsku razliku, određuje proticaj. Ako izraz nije integrabilan, pristupa se rešavanju podelivši celu dužinu x na veći broj elementarnih delova dužine Δx. Neka je $\Delta x = x_2 - x_1$, gde su x_1 i x_2 bliska rastojanja, na kojima su pijezometarske kote Π_1, odnosno Π_2, pa se jednačina svodi na:

$$\frac{q}{K}\,\frac{x_2 - x_1}{(a_1 + a_2)/2} = \Pi_1 - \Pi_2 \qquad (132\text{–}5)$$

gde se debljine sloja a_1 i a_2 odnose na odgovarajuće preseke. Ukupna pijezometarska razlika za celu dužinu provodnika dobija se sabiranjem pijezometarskih razlika za posebne sastavne delove dužine $\Delta x = x_2 - x_1$.

II
STRUJANJE SA SLOBODNOM POVRŠINOM VODE

Slika 132–4 odnosi se na *strujanje sa slobodnom površinom* podzemne vode na *horizontalnoj* nepropustljivoj *podini*. Pretpostavlja se da je nagib slobodne površine malen, dubina se postepeno (veoma blago)



Slika 132–4 Strujanje sa slobodnom površinom podzemne vode kroz propustljiv sloj na horizontalnoj nepropustljivoj podini.

menja, pa se strujanje može shvatiti kao približno paralelno, usmereno u horizontalnom pravcu. Kako se pijezometarska kota menja samo u pravcu brzine, ona će za sve deliće u istom poprečnom preseku biti ista – tj. Π-kota na vrhu preseka, na nivou vode. Spuštanje nivoa $-\mathrm{d}h$ je ujedno i spuštanje Π-kote, pa je $-\mathrm{d}\Pi = -\mathrm{d}h$. Navedeno dovodi do:

$$I_\Pi = -\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \tag{132–6}$$

Brzina filtracije je onda:

$$v = K\, I_\Pi = K\left(-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right) \tag{132–7}$$

pa je proticaj po jedinici širine struje (širina se meri normalno na ravan prikazivanja):

$$q = v\, h = K\left(-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right) h \tag{132–8}$$

Izrazi (132–6) i (132–8) napisani su i na slici 132–4.

Kako je duž cele struje $q = \mathrm{const}$ iz prethodnog izraza integraljenjem se dobija:

$$\frac{q}{K}\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x = \int_{h_1}^{h_2} -h\,\mathrm{d}h$$

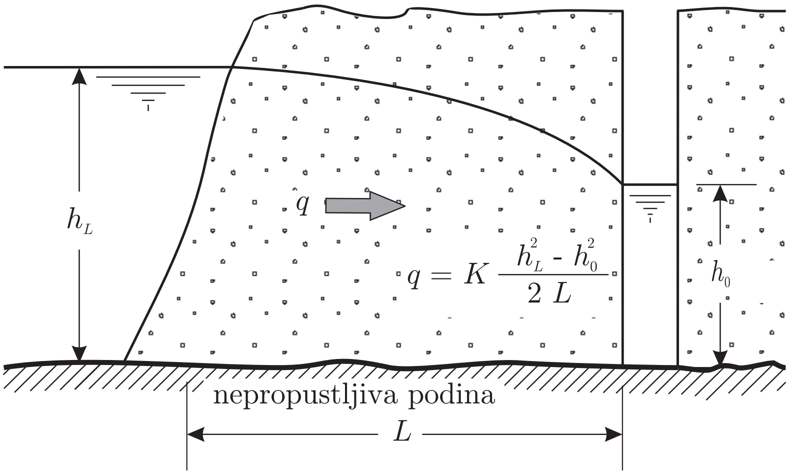
pa je:

$$\frac{q}{K}\,(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}\left(h_1^2 - h_2^2\right) \tag{132–9}$$

Praktičan primer prikazan je slikom 132–5, gde je $x_2 - x_1 = L$, $h_1 = h_L$, $h_2 = h_0$, što dovodi do:

$$\frac{q}{K} = \frac{h_L^2 - h_0^2}{2\,L} \tag{132–10}$$

Drugi primer je slivanje u drenažni sistem (sl. 132–6), čime se nivo podzemne vode snižava na zahtevani nivo. Voda iz kanala drenažnog sistema otiče u sabirni kanal u kome se nivo održava na koti koja omogućava oticanje iz drenažnih kanala. Proticaj u jedan kanal, po

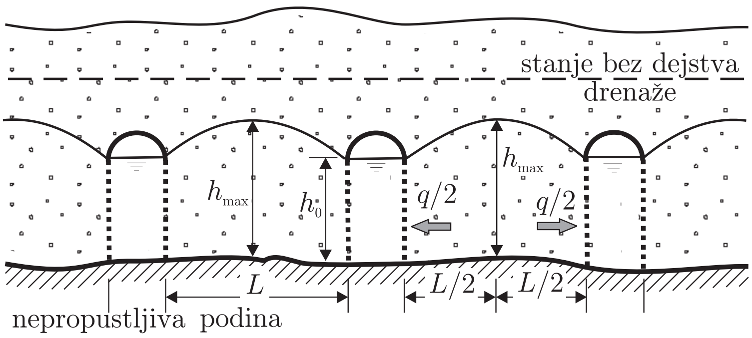


Slika 132–5 Primer strujanja podzemne vode sa slobodnom površinom kroz propustljiv sloj na nepropustljivoj horizontalnoj podini (odgovarajući primer strujanja pod pritiskom prikazan je slikom 132–2).

jedinici dužine, označiće se sa q, pa sa jedne strane protiče proticaj $q/2$ koji prema prethodnoj jednačini (132–10) iznosi:

$$\frac{q}{2} = K\,\frac{h_{\max}^2 - h_0^2}{L}$$

gde su h_0 i $h_{\max}$ dubina u kanalu i maksimalna dubina podzemne vode, a L rastojanje između kanala (vidi sliku 132–6).



Slika 132–6 Drenažni sistem snižava nivo podzemne vode u propustljivom sloju na horizontalnoj podini.

U jednačini (132–10) nizvodni granični uslov nameće dubina h_0. Ako je nivo posle izlivanja iz nepropustljivog sloja ispod kote podine, ne može se postaviti nizvodni granični uslov u vidu dubine h_0, pa se postavlja pitanje: Kako sračunati proticaj? Dubina nizvodnim smerom se smanjuje, a linija nivoa je sve nagnutija i zakrivljenija, pa se za malene dubine ne ostvaruje osnovna pretpostavka o paralelnom strujanju, na kojoj se zasniva napisana jednačina (132–8). Proizvod h i $(-\mathrm{d}h/\mathrm{d}x)$ morao bi skroz imati istu vrednost $(= q/K)$, jer tako pokazuje jednačina (132–8), a to znači da kada dubina teži ka nuli, nagib nivoa teži ka neizmerno velikim vrednostima. Navedeno ukazuje na neprimenljivost jednačine (132–8) za malene dubine, pa je neodređen maksimalni mogući proticaj, za vrednost dubine h_L na uzvodnom kraju, koji se približava vrednosti:

$$q = K\,\frac{h_L^2}{2\,L}$$

* * *

Za strujanje podzemne vode *sa slobodnom površinom* kroz propustljivi sloj na *nagnutoj nepropustljivoj podini* nagib podine I_D određen je uglom α – vidi sliku 132–7 :

$$I_\mathrm{D} = \sin\alpha = -\frac{\mathrm{d}Z_\mathrm{D}}{\mathrm{d}x} \tag{132–11}$$

gde je Z_D kota podine.

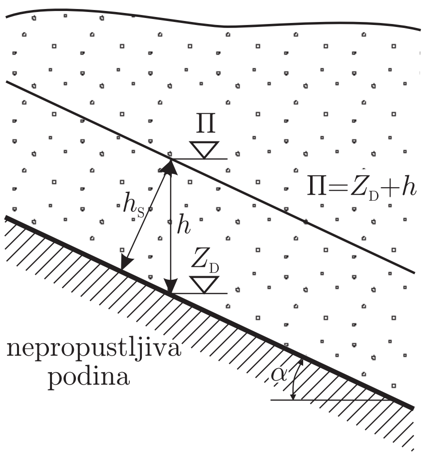
Pijezometarska kota je određena sa:

$$\Pi = Z_\mathrm{D} + h \tag{132–12}$$

Ovde je sa h označena dubina, merena po vertikali.

Prema prethodnim jednačinama (132–11) i (132–12) ovde će se napisati:

$$\begin{aligned} v &= K\left(-\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}x}\right) = K\left(-\frac{\mathrm{d}Z_\mathrm{D}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right) = K\left(I_\mathrm{D} - \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right) \\ q &= h\,v = hK\left(I_\mathrm{D} - \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right) \end{aligned} \tag{132–13}$$



Slika 132–7 Merenje dubine vode pri strujanju podzemne vode sa slobodnom površinom. Dubina (h) se u jednačini (132–12) meri po vertikali.

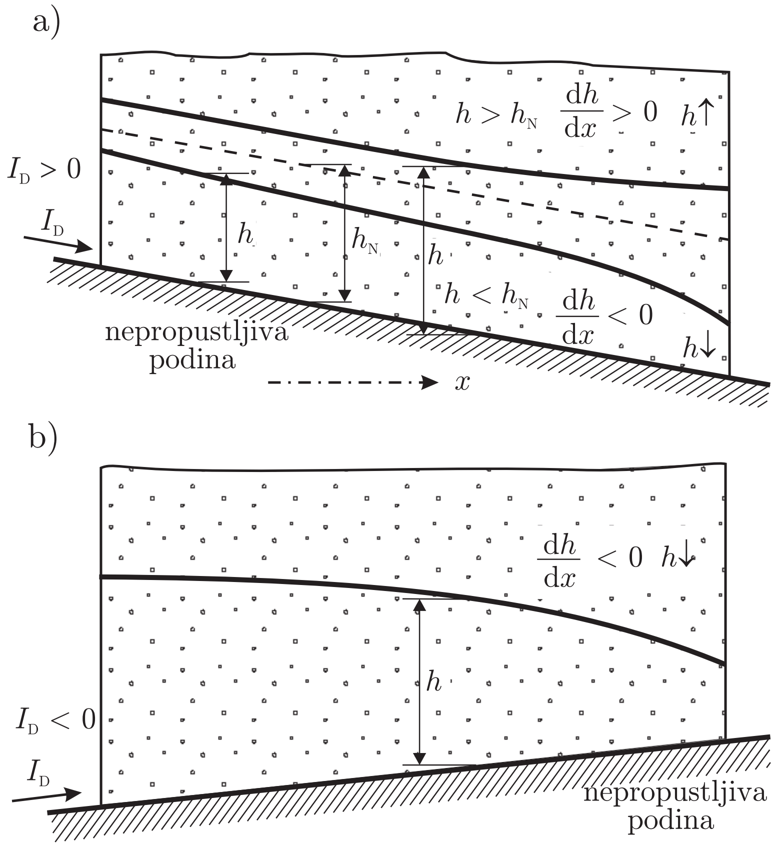
Primeni ovih jednačina treba staviti ozbiljne zamerke, koje nameće nagnutost podine, jer se ne ostvaruju pretpostavke na kojima se zasnivala jednačina (132–8), a onda i izvođenje (132–13). Proticajni poprečni presek ne određuje dubina h, nego debljina struje h_s, vidi sliku 132–7. Brzina nije normalno usmerena na vertikalni presek, po kome se meri dubina, pa pijezometarska kota nije ista za sve deliće na tom preseku. Ova odstupanja mogu se tolerisati ako je nagib podine malen i stoga se korišćenje (132–13) ograničava na malene nagibe podine. Treba primetiti da ostaje uslov dat za strujanje na horizontalnoj podini tj. da nagib nivoa vode treba da bude malen. Prema tome, da budu maleni i nagib nivoa i nagib podine.

Kako je u jednačini (132–13) vrednost za $q\,/\,h\,K$ pozitivna, takva mora biti i razlika $I_D - \mathrm{d}h/\mathrm{d}x$ tj. mora da bude zadovoljeno:

$$I_D - \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} > 0 \qquad (132\text{–}14)$$

Iz ove nejednačine proističu zaključci:

1. Za $I_D = 0$ mora da bude $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x < 0$. To je slučaj sa slike 132–4 koji je razmotren.
2. Za $I_D > 0$ (sl. 132–8, a)) $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x$ može da bude i pozitivno i negativno. Sa $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x < 0$, leva strana u (132–14) je nesporno



Slika 132–8 Linije nivoa podzemne vode pri nagibu nepropustljive podine u smeru strujanja a) i smeru suprotnom strujanju b).

pozitivna, odnosno uslov je zadovoljen. Međutim, i za $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x > 0$, leva strana u (132–14) može da bude pozitivna (ako je $I_\mathrm{D} > \mathrm{d}h/\mathrm{d}x$). Ostaje da se raspravi – i to će biti i učinjeno – kako se obrazuje slobodna površina kada je $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x$ pozitivno, odnosno negativno.

3. Za $I_\mathrm{D} < 0$ (sl. 132–8, b)) podina je u „kontra nagibu" ona se penje smerom strujanja. Zbog $I_\mathrm{D} < 0$ mora da bude $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x < 0$ (tj. smerom strujaja dubina opada) da bi se uslov (132–14) ispunio.

Raspravljanje najavljeno pod 2. obaviće se lakše i preglednije ako se uvede dubina h_N kojom bi zadati proticaj q po nagnutoj podini tekao jednoliko, sa dubinom h_N (tj. $h = h_\mathrm{N} = \mathrm{const}$). Ta dubina bi odgovarala „normalnoj dubini" u otvorenim kanalskim tokovima (u kanalu je tada celom dužinom dubina jednaka h_N). Pri jednolikom tečenju nagib I_Π pijezometarske linije (to je nagib slobodne površine) i nagib I_D dna su isti pa je:

$$q = h_\mathrm{N}\, K\, I_\Pi = h_\mathrm{N}\, K\, I_\mathrm{D} \tag{132–15}$$

Izjednačavanjem desnih strana (132–15) i (132–13) dobija se:

$$\frac{h_\mathrm{N}}{h} = \frac{I_\mathrm{D} - \mathrm{d}h/\mathrm{d}x}{I_\mathrm{D}} = 1 - \frac{\mathrm{d}h/\mathrm{d}x}{I_\mathrm{D}} \tag{132–16}$$

iz čega sledi:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = I_\mathrm{D}\left(1 - \frac{h_\mathrm{N}}{h}\right) \tag{132–17}$$

Razmatra se oblast sa $I_\mathrm{D} > 0$, pa prethodna jednačina ukazuje da je $\mathrm{d}h\,/\,\mathrm{d}x > 0$ (dubina raste niz struju) za $h > h_\mathrm{N}$, dok je $\mathrm{d}h\,/\,\mathrm{d}x < 0$ (dubina opada) za $h < h_N$. To je i prikazano na sl. 132–8, a). Primer sa sl. 132–7 ulazi u oblast gde je $h > h_\mathrm{N}$.

Jednačina (132–16) se preobličava u:

$$\frac{h_\mathrm{N}}{h} = 1 - \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{h}{h_\mathrm{N}}\right)}{\mathrm{d}\left(\dfrac{I_\mathrm{D}\, x}{h_\mathrm{N}}\right)} \tag{132–18}$$

što omogućava uvođenje bezdimenzionalnih veličina:

$$\eta = \frac{h}{h_\mathrm{N}} \qquad \xi = \frac{I_\mathrm{D}\, x}{h_\mathrm{N}} \tag{132–19}$$

pa se prethodna jednačina piše sa:

$$\frac{1}{\eta} = 1 - \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} \tag{132–20}$$

Rastavljajem promenljivih (ξ i η) dobija se:

$$\mathrm{d}\xi = \frac{\eta}{\eta - 1}\,\mathrm{d}\eta$$

što, integrisano sa granicama od ξ_1 do ξ_2, gde su na tim granicama vrednosti za η jednake η_1 i η_2, daje:

$$\xi_2 - \xi_1 = \eta_2 - \eta_1 + \ln \frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1} \tag{132–21}$$

ili vraćanjem na vezu između x i h, odnosno izražavanjem ξ i η prema (132–19):

$$I_{\mathrm{D}} \frac{(x_2 - x_1)}{h_{\mathrm{N}}} = \frac{h_2}{h_{\mathrm{N}}} - \frac{h_1}{h_{\mathrm{N}}} + \ln \frac{(h_2/h_{\mathrm{N}}) - 1}{(h_1/h_{\mathrm{N}}) - 1} \tag{132–22}$$

* * *

Zanimljivo je uporediti strujanje pod pritiskom u propustljivom sloju konstantne debljine i strujanje sa slobodnom površinom kroz propustljivi sloj na nepropustljivoj horizontalnoj podini, upravo uporediti jednačine (132–2) i (132–8) koje daju:

$$\frac{q}{K} = a\, I_{\Pi} = a \left(-\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}x} \right) \tag{132–23}$$

$$\frac{q}{K} = h \left(-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(-\frac{h^2}{2} \right) \tag{132–24}$$

Za isti proticaj q i isti koeficijent filtracije K, upoređenje desnih strana u prethodna dva izraza dozvoljavaju da se napiše pravilo:

$a\,\mathrm{d}\Pi$ strujanje pod pritiskom	zamenjuje se sa	$\mathrm{d}(h^2/2)$ strujanje sa slobodnom površinom	(132–25)

Integrisanje prethodnoga ukazuje da se:

$$\boxed{a\,(\Pi_{\mathrm{II}} - \Pi_{\mathrm{I}}) \qquad \text{zamenjuje se sa} \qquad \frac{h_{\mathrm{II}}^2 - h_{\mathrm{I}}^2}{2}} \tag{132–26}$$

Desna strana se može zameniti sa:

$$\frac{h_{\mathrm{II}} + h_{\mathrm{I}}}{2} \left(h_{\mathrm{II}} - h_{\mathrm{I}}\right)$$

gde se $(h_{\mathrm{II}} + h_{\mathrm{I}})\,/\,2$ može shvatiti kao prosečna debljina struje i to zamenjuje debljinu sloja a, a $h_{\mathrm{II}} - h_{\mathrm{I}}$ je pijezometarska razlika, pa tako se i desna strana (132–26) može shvatiti kao $a\,(\Pi_{\mathrm{II}} - \Pi_{\mathrm{I}})$.

133
OSNOVE ZA PROUČAVANJE RAVANSKIH STRUJANJA

I
STRUJNA MREŽA U RAVANSKIM ZADACIMA: STRUJNICE I EKVIPOTENCIJALNE LINIJE

Darsijev zakon napisan izrazom (131–1) primenjen je u prethodnom razmatranju na linijske zadatke. Isti zakon može se proširiti i na ravanske i prostorne zadatke. U tu svrhu, po ugledu na izraz (131–1), može se napisati jednačina:

$$\boxed{v_i = -K\,\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}} \tag{133–1}$$

pa su komponente brzine:

$$v_1 = -K\,\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \tag{133–2}$$

$$v_2 = -K\,\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \tag{133–3}$$

$$v_3 = -K\,\frac{\partial \Pi}{\partial x_3} \tag{133–4}$$

Jednačina (133–1) sa vektorskim obeležavanjem se piše:

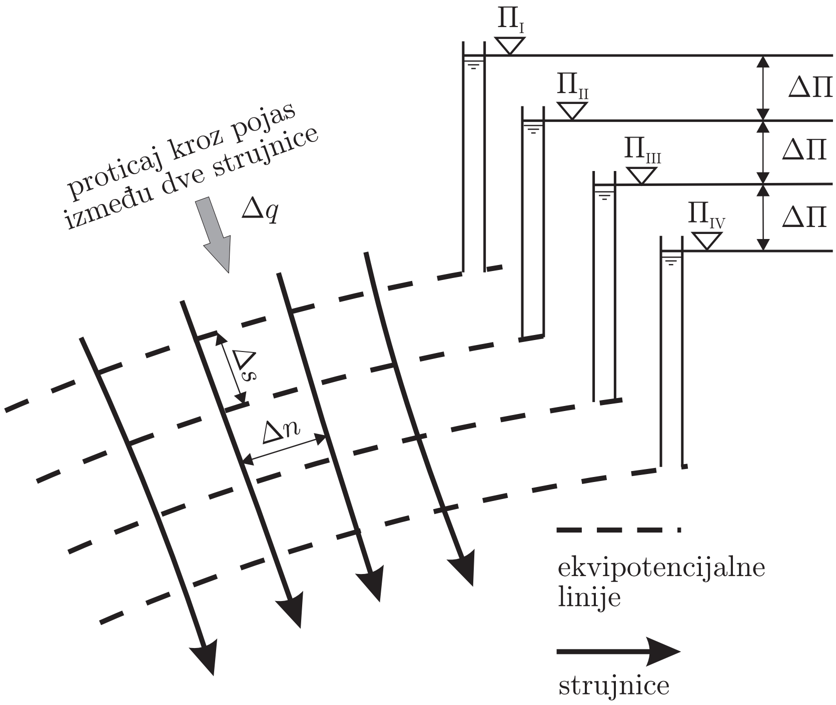
$$\vec{v} = -K\,\mathrm{grad}\,\Pi \tag{133–5}$$

Iz zakonitosti izražene jednačinom (133–1) ili (133–5) vidi se da će pijezometarska kota u određenom pravcu naglije opadati, ako je u tom pravcu brzina veća. Tačnije, postoji srazmernost između brzine v_1 i

$-\partial\Pi/\partial x_1$ (isto se može reći i za pravce 2 i 3). Faktor srazmernosti je koeficijent filtracije K.

Navedena jednačina (133–1), ili (133–5), kaže da je brzina u nekoj tački normalno usmerena na površine koje sačinjavaju tačke u kojima je pijezometarska kota ista. Te površine se nazivaju *ekvipotencijalne površine* (površine istog potencijala), a taj potencijal je ovde pijezometarska kota. Znak „minus" u jednačinama ukazuje da je brzina usmerena od veće ka manjoj pijezometarskoj koti (dakle u smeru opadanja potencijala).

Posmatraće se ravanski zadatak gde ekvipotencijalne površine postaju *ekvipotencijalne linije*, a na njih su normalno usmerene *strujnice* (čija tangenta u svakoj tački ima pravac brzine), koje su, kod ustaljenog tečenja (kakvo se razmatra) ujedno i trajektorije (putanja delića tečnosti). Ekvipotencijalne linije i strujnice čine *strujnu mrežu* (sl. 133–1).



Slika 133–1 Strujna mreža – strujnice usmerene normalno na ekvipotencijale.

Jednačina (133–1), primenjena duž strujnice, svodi se na:

$$v = -K \frac{\partial \Pi}{\partial s} \tag{133–6}$$

gde je ds elementarna dužina strujnice, a s je pravac brzine u datoj tački.

Napisana jednačina, ako se pređe sa elementarne dužine ds na konačnu Δs, svodi se na:

$$v = -K \frac{\Delta \Pi}{\Delta s} \tag{133–7}$$

$\Delta\Pi$ je pijezometarska razlika između dve susedne ekvipotencijalne linije koje seku strujnicu u tačkama između kojih je elementarni deo Δs. Normala na strujnicu u datoj tački je n pravac, pa je rastojanje između dve susedne strujnice Δn (slika 133–1). Proticaj u pojasu između dve susedne strujnice označiće se sa Δq. Primećuje se da je to proticaj po jedinici dužine (gde se ta dužina meri normalno na ravan crteža). Dimenzija za Δq je [proticaj/dužina], odnosno [dužina^2/vreme]. Iz slike 133–1 se vidi da je:

$$\Delta q = v\, \Delta n \tag{133–8}$$

ili zamenom v, primenjujući (133–7) i (133–8):

$$\Delta q = K \left(-\frac{\Delta \Pi}{\Delta s} \right) \Delta n \tag{133–9}$$

Oznaka Δq treba da ukaže da je to deo ukupnog proticaja u datom zadatku, koji iznosi q. To je deo kroz jedan pojas između dve susedne strujnice.

Pošto se u jednom pojasu, između dve strujnice, proticaj Δq ne menja (to zahteva jednačina održanja mase ili jednačina neprekidnosti), pojas je uži gde je brzina veća. Upravo za $q = \text{const}$, izraz (133–8) pokazuje da je širina pojasa obrnuto srazmerna sa brzinom v.

Može se podesiti da nacrtana strujna mreža bude *„kvadratna mreža"*, čije su elementarne površine (između susednih ekvipotencijalnih linija i strujnica) približno kvadrati. Tačnije rečeno, treba podesiti da za svaku elementarnu površinu bude $\Delta s = \Delta n$. Pored toga, treba mrežu crtati da priraštaj $\Delta\Pi$, za dve susedne ekvipotencijalne linije, bude za celu mrežu iste vrednosti. U tom slučaju, izraz (133–7) pokazuje da je v obrnuto srazmerno sa Δs, pa će ekvipotencijalne linije biti na manjem rastojanju (gušće) što je brzina veća. Za kvadratnu mrežu, usled $\Delta s = \Delta n$, su onda i strujnice gušće, što je u skladu sa ranijim navodom o sužavanju pojasa između dve susedne strujnice pri povećanju brzine.

Treba istaći da je za kvadratnu mrežu proticaj Δq kroz jedan pojas isti za sve pojaseve, što se uviđa iz (133–9), uz $\Delta s = \Delta n$ i $\Delta\Pi = \text{const}$, pa je:

$$\Delta q = K(-\Delta\Pi) \tag{133–10}$$

gde je $\Delta\Pi$ pijezometarska razlika između dve susedne ekvipotencijalne linije. Pošto je ona ista za celu kvadratnu mrežu, ukupan proticaj kroz celo strujno polje koje se izdelilo na N pojaseva je:

$$q = N\Delta q \tag{133–11}$$

ili, zamenom Δq prema (133–10):

$$q = NK(-\Delta\Pi) \tag{133–12}$$

* * *

Nacrtana strujna mreža (sl. 133–1), kada se primeni na sloj konstantne debljine a (kroz koji je strujanje pod pritiskom) tamošnji proticaj Δq (između dve susedne strujnice) se jednostavno množi sa a i dobija se proticaj ΔQ između dve strujnice, ali kroz ceo sloj:

$$\Delta Q = a\,\Delta q \tag{133–13}$$

Izraz (133–9) pomnožiće se sa a, pa se dobija:

$$\Delta Q = a\,\Delta n\,K\left(-\frac{\Delta\Pi}{\Delta s}\right) \tag{133–14}$$

a za kvadratnu mrežu, gde je $\Delta n = \Delta s$, dobija se:

$$\Delta Q = a\,K\,(-\Delta\Pi) \tag{133–15}$$

Proticaj ΔQ je isti za svaki pojedinačni pojas. Za N pojaseva koji obuhvataju celokupno strujanje, ukupan proticaj (kroz sve pojaseve) iznosi:

$$Q = N\,\Delta Q = N\,a\,K\,(-\Delta\Pi) \tag{133–16}$$

Prethodna izlaganja mogu se primeniti na ravansko strujanje pod pritiskom kroz propustljivi sloj konstantne debljine i na ravansko strujanje sa slobodnom površinom kroz propustljivi sloj na nepropustljivoj horizontalnoj podini. Moći će da se iskoristi ono što je proučeno u Poglavlju 132., promena je samo u tome što su tamo brzine usmerene samo u jednom pravcu, a ovde u dva pravca (oba u ravni proučavanja).

Za strujanje sa slobodnom površinom proticaj ΔQ kroz jedan pojas dobija se množenjem $h\,\Delta n$ (to je poprečni presek struje, h je dubina, Δn je širina pojasa) sa brzinom v, koja se u ovom slučaju izražava sa $K\,(-\Delta h/\Delta s)$ (jer se $\Delta\Pi$ zamenjuje sa Δh). Tako se dobija:

$$\Delta Q = h\,\Delta n\,v = h\,\Delta n\,K\left(-\frac{\Delta h}{\Delta s}\right)$$

$$\Delta Q = \Delta n\,K\left[\frac{-\Delta\,(h^2/2)}{\Delta s}\right] \tag{133–17}$$

Upoređenje ovoga izraza sa (133–14) pokazuje da se tamošnje $a\,\Delta\Pi$ zamenjuje ovde sa $\Delta(h^2/2)$. Ta zamena je u skladu sa zamenom u linijskim zadacima, navedenom sa (132–24).

Ekvipotencijalne linije treba da spajaju tačke duž kojih je $h^2/2 =$ const, i ako je ista razlika $\Delta(h^2/2)$ za sve susedne ekvipotencijale, kvadratna mreža (gde je $\Delta s = \Delta n$) daće, na osnovu (133–17), isti proticaj kroz bilo koji pojedini pojas:

$$\Delta Q = K\left[-\Delta\!\left(\frac{h^2}{2}\right)\right] \tag{133–18}$$

pa će celokupno strujanje koje obuhvata N pojaseva imati za proticaj:

$$Q = N\,\Delta Q = N\,K\left[-\Delta\!\left(\frac{h^2}{2}\right)\right] \tag{133–19}$$

II
OPŠTE JEDNAČINE ZA RAVANSKI ZADATAK U HORIZONTALNOJ RAVNI

Počeće se sa razmatranjem strujanja sa slobodnom površinom, koje se može proučavati kao ravansko (u horizontalnoj ravni), a iza toga će se izloženo primeniti na strujanje pod pritiskom.

Strujanje sa slobodnom površinom će se opisivati bez pojednostavljenja uslova, koja su u prethodnim izlaganjima pretpostavljana, pa će se dobiti složeniji izrazi koji će tačnije ukazivati na zbivanja u strujanju. Radi se o sledećim uslovima:

1. Ne pretpostavlja se da je $K = \text{const}$, nego je on promenljiva veličina, upravo zavisi od tačke na koju se odnosi tj.

$$K = K(x_1, x_2) \tag{133–20}$$

2. Nepropustljiva podina ispod strujanja sa slobodnom površinom nije horizontalna, pa se kote te podine izražavaju sa:

$$Z_\mathrm{D} = Z_\mathrm{D}(x_1, x_2) \tag{133–21}$$

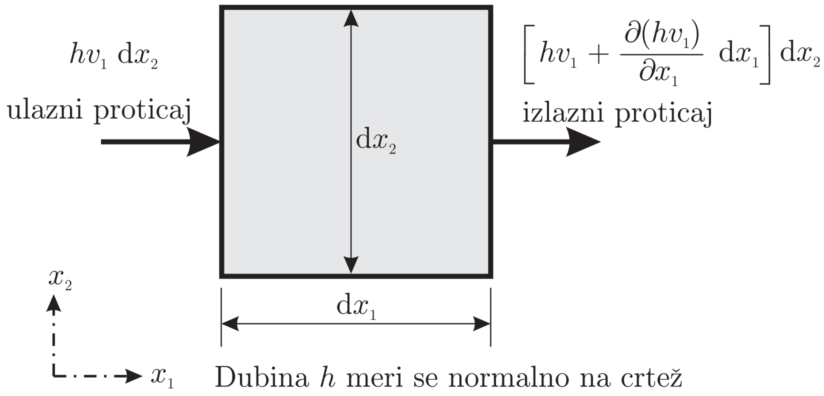
   Pijezometarska kota je:

$$\Pi = Z_\mathrm{D} + h \tag{133–22}$$

   gde je h dubina, merena po vertikali, od podine (kote Z_D) do slobodne površine vode (kote Π), koja je ujedno i pijezometarska kota. Z_D i Π odnose se na jednu vertikalu, one su funkcije koordinata u horizontalnoj ravni $Z_\mathrm{D} = Z_\mathrm{D}(x_1, x_2)$ i $\Pi = \Pi(x_1, x_2)$. Strujanje se posmatra kao približno horizontalno, sa brzinama v_1 i v_2 usmerenim horizontalno, pa se uslovljava da nagib podine i nagib slobodne površine budu maleni. (Primećuje se da je to isto bilo uslovljeno i za linijski zadatak strujanja sa slobodnom površinom na nagnutoj podini.)

3. Strujanje je neustaljeno, pa se jednačina piše za jedan trenutak, jer se strujanje vremenom menja.

Posmatra se elementarna zapremina sa osnovom površine $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$ i dubinom h (sl. 133–2), gde su osovine x_1 i x_2 horizontalne, i leže u ravni crteža, a dubina h se meri normalno na crtež, tj. u vertikalnom pravcu. Kroz prednju (levu) graničnu površinu, normalnu na x_1 pravac, ulazi proticaj $h\,\mathrm{d}x_2\,v_1$, gde je $h\,\mathrm{d}x_2$ površina ulaznog preseka, v_1 brzina u x_1 pravcu. Kroz stražnju površinu, normalnu na x_1 pravac, izlazi proticaj koji je od ulaznog veći za priraštaj veličine $h\,v$ na priraštaju $\mathrm{d}x_1$ rastojanja i odgovarajući proticaj je upisan na desnoj strani slike



Slika 133–2 Uz izvođenje izraza (133–23).

133–2. (Izlaz – ulaz) proticaja, ili zapremine u jedinici vremena, u pravcu x_1 iznosi:

$$\left[h\,v_1 + \frac{\partial(h\,v_1)}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1\right]\mathrm{d}x_2 - h\,v_1\,\mathrm{d}x_2 = \frac{\partial(h\,v_1)}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$

Na isti način izraziće se i (ulaz – izlaz) u x_2 pravcu tj. kroz granične površine normalne na taj pravac, a potom će to biti sabrano sa prethodnim izrazom. Dobiće se:

$$\begin{array}{c}\text{(izlaz – ulaz)}\\ \text{zapremine u jedinici}\\ \text{vremena}\end{array} \qquad \left[\frac{\partial(h\,v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h\,v_2)}{\partial x_2}\right]\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \varphi \qquad (133\text{–}23)$$

Ako je strujanje ustaljeno, ovaj izraz je jednak nuli, jer izlaz mora biti jednak ulazu, pošto se tada zapremina vode u posmatranoj elementarnoj zapremini ne menja.

Za neustaljeno strujanje dubina se vremenom menja. Za elementano vreme $\mathrm{d}t$, priraštaj dubine je $(\partial h/\partial t)\,\mathrm{d}t$, pa se na površini $\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$ zapremina poveća za:

$$m\,\frac{\partial h}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \psi \qquad (133\text{–}24)$$

Sa m je označen koeficijent poroznosti, jer se računa sa zapreminom vode u porama. Takođe, napisano sa (133–23) je dobijeno iz proticanja vode.

(Izlaz – ulaz) zapremine u jedinici vremena, napisan sa (133–23), pomnožen sa dt daće (izlaz – ulaz) zapremine za vreme dt, a za toliko će se smanjiti zapremina vode u posmatranoj zapremini (da bi se nadoknadio višak izlaza nad ulazom). Upravo mora da bude:

$$\varphi \, \mathrm{d}t = -\psi$$

pa se, korišćenjem (133–23) i (133–24) dobija:

$$\frac{\partial(h\, v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h\, v_2)}{\partial x_2} + m\, \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \tag{133–25}$$

Brzine v_1 i v_2 izraziće se sa $-K\, \partial\Pi/\partial x_1$ i $-K\, \partial\Pi/\partial x_2$. Napominje se da se, ako podina nije horizontalna, ne sme izjednačavati $\partial\Pi$ i ∂h. To proizilazi iz uslova napisanoga pod 2.). Zamenom brzina prema navedenom izrazu dobija se:

$$\frac{\partial\,(h\, K\, \partial\Pi/\partial x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial\,(h\, K\, \partial\Pi/\partial x_2)}{\partial x_2} - m\, \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \tag{133–26}$$

Jednačina važi za jedan trenutak, a računanje se obavlja sa konačnim priraštajima Δx_1, Δx_2, i Δt, i za to postoje preporučeni postupci, uz poštovanje zadatih graničnih i početnih uslova.

Ako se stvar uprosti i uzme se da je $K = \mathrm{const}$ jednačina se svodi na:

$$\frac{\partial\,(h\, \partial\Pi/\partial x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial\,(h\, \partial\Pi/\partial x_2)}{\partial x_2} - \frac{m}{K}\, \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \tag{133–27}$$

Pri ustaljenom strujanju otpada treći član u (133–26). Za ustaljeno strujanje i $K = \mathrm{const}$, dobija se:

$$\frac{\partial\,(h\, \partial\Pi/\partial x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial\,(h\, \partial\Pi/\partial x_2)}{\partial x_2} = 0 \tag{133–28}$$

Ako je još i podina horizontalna, zamenjuje se Π sa h, pa se dobija:

$$\frac{\partial^2\big(h^2/2\big)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\big(h^2/2\big)}{\partial x_2^2} = 0 \tag{133–29}$$

* * *

Za strujanje pod pritiskom, dubinu h u (133–26) zamenjuje debljina sloja a, pa se tom zamenom dolazi do:

$$\frac{\partial(a\,K\,\partial\Pi/\partial x_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(a\,K\,\partial\Pi/\partial x_2)}{\partial x_2}=0 \tag{133–30}$$

Debljina sloja vremenom se ne menja $\partial a/\partial t=0$, pa je otpao član koji bi odgovarao trećem članu u (133–26). Debljina sloja menja se po prostoru i u prethodnoj jednačini se smatra da a nije konstanta, nego je $a=a(x_1,x_2)$. Takođe se dozvoljava i promenljivost koeficijenta filtracije tj. $K=K(x_1,x_2)$.

Za $a=\text{const}$ prethodni izraz se svodi na:

$$\frac{\partial(K\,\partial\Pi/\partial x_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(K\,\partial\Pi/\partial x_2)}{\partial x_2}=0 \tag{133–31}$$

Ako je i $K=\text{const}$, dobija se:

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Pi}{\partial x_2^2}=0 \tag{133–32}$$

* * *

Mnogi fizički procesi, rešavani kao ravanski zadatak, matematički se izražavaju sa:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=0 \tag{133–33}$$

ϕ se naziva potencijal, jer promena te veličine omogućava odvijanje procesa.

Upoređivanje ovoga izraza sa (133–32), odnosno (133–29), pokazuje da za potencijal ϕ treba uzeti:

– za strujanje pod pritiskom:

$$\phi=\Pi \tag{133–34}$$

– za strujanje sa slobodnom površinom:

$$\phi=h^2/2 \tag{133–35}$$

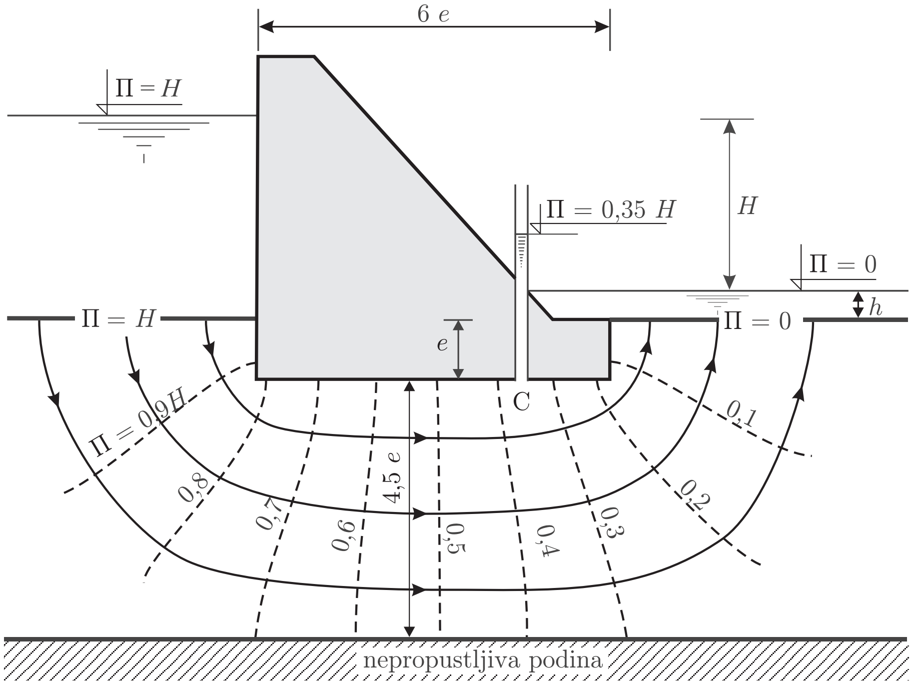
Napominje se da se za računanje, primenom jednačine (133–33), koriste brojni numerički postupci i odgovarajući programi, jer se ista primenjuje u mnogim problemima iz Fizike. Jasno je da se u proračunu moraju nametnuti granični uslovi koje zahteva pojedinačni zadatak.

134
STRUJANJE PODZEMNE VODE ISPOD OBJEKTA

I
PRIMENA KVADRATNE MREŽE NA STRUJANJE ISPOD HIDROTEHNIČKOG OBJEKTA

Jedan praktičan primer primene kvadratne mreže prikazan je na slici 134–1. To je strujanje ispod jednog hidrotehničkog objekta. Ispod objekta voda struji kroz porozni materijal na koji je objekat postavljen, i kroz to strujanje se utroši (na trenje) raspoloživa pijezometarska razlika H. Na slici 134–1 se vidi da je za nulti nivo (gde je $\Pi = 0$) uzet nivo vode iza objekta. Zadatak se proučava kao ravanski (u vertikalnoj ravni), pa su granične ekvipotencijalne linije, sa vrednostima $\Pi = H$ i $\Pi = 0$, linije dna ispred, odnosno iza objekta.

Do pijezometarskih kota, a time i do ekvipotencijalnih linija po celom području može se doći računskim putem. Rečeno je da se rešava ravanski zadatak, u vertikalnoj ravni, dok se u prethodnom 133. Poglavlju, u Odeljku II, razmatra takođe ravanski zadatak, ali u horizontalnoj ravni. Tamo napisana jednačina (133–32) može se primeniti i ovde, sa napomenom da je ovde jedna od osa vertikalna, a druga horizontalna. Za granične uslove treba uzeti pijezometarske kote ispred i iza brane: $\Pi = H$ i $\Pi = 0$. Na graničnu strujnicu (uz objekat i po donjoj nepropustljivoj podlozi) ekvipotencijalna linija mora biti normalno usmerena, pa je tu (na granici) $\partial\Pi/\partial n = 0$, gde je n normala na granicu. Međutim, ovde će se zadatak rešavati jednostavnim postupkom – crtanjem kvadratne mreže. Na slici 134–1, na osnovu graničnih ekvipotencijalnih linija, procesom dužeg doterivanja nacrtana je kvadratna mreža, uz napomenu da su granične strujnice uz konturu objekta i uz donju nepropustljivu podinu, na kojoj leži propustljivi sloj kroz koga se odvija strujanje.



Slika 134–1 Strujna mreža ispod objekta.

U usvojenim graničnim strujnicama duž konture objekta i uz nepropustljivu podinu brzina sa kojom se računa nije jednaka nuli, pa se nameće pitanje kako to opravdati pošto se protivi stavu da je brzina vode na čvrstoj granici jednaka nuli. Treba, međutim, da se primeti da brzina filtracije nije stvarna brzina nego je računska, jer se kao presek struje ne računa samo presek pora nego presek pora plus presek čvrste mase, pa tako treba shvatiti i brzinu duž granične strujnice – to je računska brzina kroz tanak sloj porozne sredine uz objekat, odnosno uz nepropustljivu podlogu.

Primećuje se da nacrtana strujna mreža važi uz uslove da je dužina temelja objekta jednaka $6e$, gde je e proizvoljna dubina ukopavanja (donja površina temelja je spuštena za visinu e ispod terena), i za debljinu propusnog sloja (kroz koji se obavlja strujanje) jednaku $5{,}5e$ (vidi sliku 134–1). Međutim, mreža se odnosi na bilo koju dubinu vode h iza objekta i bilo koju denivelaciju H.

Praksu zanimaju pritisci podzemne vode na objekat. Ti pritisci odozdo na objekat dovode u pitanje stabilnost objekta, jer ga mogu izdići – govori se o *„uzgonu"*. Za bilo koju tačku pritisak p je izražen sa:

$$\frac{p}{\gamma} = \Pi - Z \tag{134–1}$$

Sa γ je označena specifična težina, sa Z položajna kota, a sa Π pijezometarska kota. Nulta ravan od koje se računaju Z i Π je nivo vode iza objekta (gde je $Z = 0$, $\Pi = 0$).

Za tačku „C", na slici 134–1, $\Pi = 0{,}35\,H$, jer je ona na ekvipotencijalnoj liniji $\Pi = 0{,}35\,H$. Kako je $Z = -(e + h)$, gde je e dubina ukopavanja, a h dubina iza objekta, shodno prethodnoj jednačini za tačku „C" piše se:

$$\frac{p_{\mathrm{C}}}{\gamma} = 0{,}35\,H + e + h \tag{134–2}$$

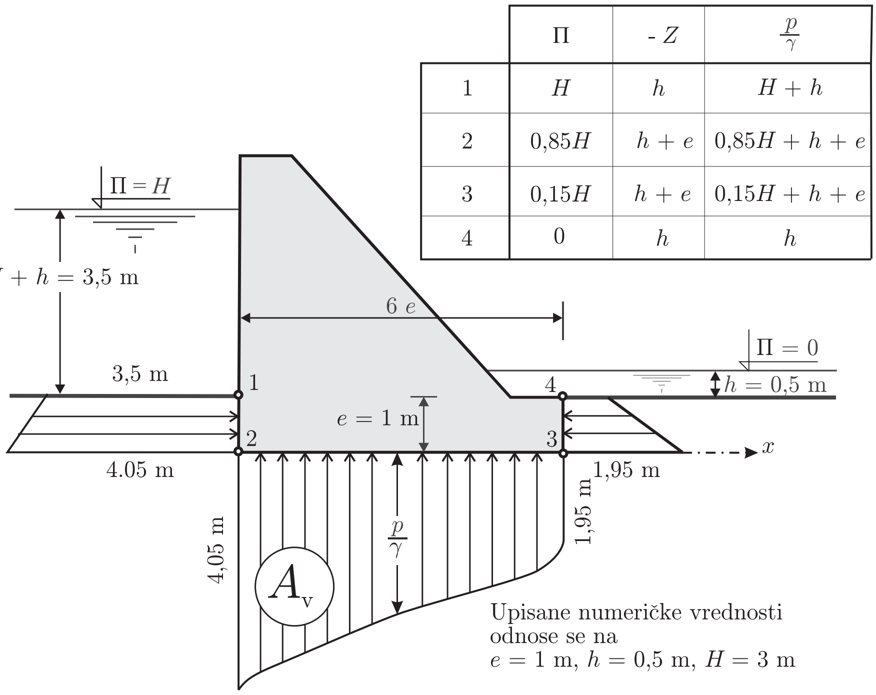
Na isti način mogu se odrediti pritisci duž cele konture objekta, a time je određeno opterećenje. To je i urađeno i rezultat je prikazan na slici 134–2. Na istoj slici u Tablici su upisane vrednosti za p/γ za tačke od 1 do 4 i vidi se da one zavise od e, H i h, što je u skladu sa objašnjenjem da se razmatranja odnose na proizvoljne vrednosti te tri veličine. Uz nacrtani grafikon opterećenja, primera radi, upisane su numeričke vrednosti za p/γ, a za $e = 1$ m, $h = 0{,}5$ m i $H = 3$ m. Za maksimalnu vrednost p/γ, koja se javlja u tački 2, i za uzeti primer, to iznosi 4,05 m, što daje približno pritisak od 40 kN/m^2.

Za silu po jedinici dužine P_{v} (mereno normalno na ravan crteža), kojom u vertikalnom pravcu deluje na objekat podzemna voda (uzgon), može se napisati da je $P_{\mathrm{v}} = \gamma A_{\mathrm{v}}$, gde je γ specifična težina vode, a A_{v} tako označena osenčena površina na slici 134–2. To proizilazi iz toga što integrisanje pritiska po površini daje silu (ovde se, u ravanskom zadatku, integrisanje obavlja po dužini, i to mereno u horizontalnom pravcu x):

$$P_{\mathrm{v}} = \int_0^{L_x} p\,\mathrm{d}x = \gamma \int_0^{L_x} \frac{p}{\gamma}\,\mathrm{d}x = \gamma A_{\mathrm{v}} \tag{134–3}$$

gde je L_x ukupna dužina u x pravcu ($L_x = 6e$).

Horizontalne sile kojima podzemna voda deluje na objekat mogu se takođe prikazati odgovarajućim površinama, koje su osenčene na slici 134–2.



	Π	$-Z$	$\frac{p}{\gamma}$
1	H	h	$H+h$
2	$0{,}85H$	$h+e$	$0{,}85H+h+e$
3	$0{,}15H$	$h+e$	$0{,}15H+h+e$
4	0	h	h

Slika 134–2 Opterećenje objekta delovanjem podzemne vode.

Određivanjem sila kojima deluje podzemna voda na objekat stvorena je mogućnost da se obavi statički račun, u koji će ući sve sile koje na objekat deluju.

Sila P_{v} nastoji da podigne objekat i time neposredno utiče na njegovu stabilnost. Ali ona utiče i posredno, jer smanjuje trenje između objekta i tla na kome objekat stoji, a to trenje sprečava pomeranje objekta u horizontalnom pravcu delovanjem horizontalnih sila. Naime, trenje je veće ako je pritiskivanje objekta na tlo veće, a to uzgon smanjuje. Iz ovoga sledi da treba nastojati da uzgon bude manji, a to se može postići ugrađivanjem dodataka na objekat – što će biti tema Odeljka III.

Nacrtana kvadratna mreža omogućava da se proceni brzina filtracije. Primenom jednačine (133–7) na posmatrani primer dobija se:

$$v = -K\frac{\Delta\Pi}{\Delta s} = K\frac{H}{10\,\Delta s} \qquad (134\text{–}4)$$

jer je $-\Delta\Pi = H/10$ (toliko iznosi smanjenje pijezometarske kote za pojedini kvadratni elemenat mreže), a Δs je označena dužina dela struje koji pripada elementu u kome se određuje brzina.

Primenom (133–12) proticaj podzemne vode ispod objekta iznosi:

$$q = NK(-\Pi) = 3{,}5K\frac{H}{10} = 0{,}35KH \qquad (134\text{–}5)$$

N predstavlja ukupan broj pojaseva koji obuhvataju celokupno strujanje, a iz slike 134–1 se vidi da je od četvrtog pojasa zahvaćena otprilike polovina, pa je uzeto $N = 3{,}5$.

Da bi se stekao uvid u vrednost proticaja uzeće se, primera radi, H =300 cm i $K = 0{,}1$ cm/s. Ta vrednost za K odgovarala bi, shodno približnoj zavisnosti (131–19), prečniku zrna d oko 0,05 cm. Sa tim podacima dobija se: $q = 0{,}35 \times 0{,}1\,\mathrm{cm\ s^{-1}} \times 300\,\mathrm{cm} = 10{,}5\ \mathrm{cm^2\ s^{-1}}$, ili približno 10 $\mathrm{cm^2\ s^{-1}}$.

Za 1 m širine strujanja (širina se meri normalno na crtež) proticaj je: $Q = 100\ \mathrm{cm} \times 10\ \mathrm{cm^2\ s^{-1}} = 1000\ \mathrm{cm^3\ s^{-1}}$, ili 1 lit/s po metru širine.

Napominje se da za jedan određeni objekat, sa istom dubinom h iza objekta i sa istom denivelacijom H, pijezometarske kote i pritisci ne zavise od koeficijenta filtracije K, uz uslov da je on isti po celom strujnom području, dok su brzine i proticaj srazmerni vrednosti tog koeficijenta.

* * *

Treba primetiti da bi stabilnost objekta bila neobezbeđena ako strujanje ispod brane pokrene materijal na kome objekat stoji i pomeri ga i na kraju iznese iz objekta. Takvo ispiranje materijala ostavlja objekat bez oslonca. O tome će biti reči u Odeljku II.

* * *

Crtanje strujne mreže zahteva veliku strpljivost, jer zahteva dugotrajno doterivanje kojim se može doći do zadovoljavajućeg rešenja. Stoga se prihvata i približna procena pritisaka duž granične strujnice (po konturi objekta) koja će dovesti do približnog opterećenja. Ta procena prihvata pretpostavku da je duž navedene granične strujnice brzina v konstantna, pa se sa $K = \text{const}$, primenom jednačine (133–7) dobija da je $\Delta\Pi/\Delta s = \text{const.}$ Ovo znači da će Π kota duž strujnice opadati ravnomerno, pa će od početka strujnice do određene tačke smanjivanje Π kote biti srazmerno dužini s (merenoj po strujnici), od njenog početka do odnosne tačke. To se piše sa:

$$\frac{H-\Pi}{H} = \frac{s}{L} \qquad \text{tj.} \qquad \frac{\Pi}{H} = 1 - \frac{s}{L}$$

gde je H pijezometarska kota na početku strujnice (za $s = 0$), a L ukupna dužina strujnice. Na njenom kraju (za $s = L$) je $\Pi = 0$.

Račun za tačke 2 i 3, primenom prethodnog izraza, dovodi do $\Pi/H = 7/8 = 0{,}875$ za tačku 2, za koju je $s/L = 1/8$, dok je $\Pi/H = 1/8 = 0{,}125$ za tačku 1. Te vrednosti se veoma malo razlikuju od očitanih iz kvadratne mreže na slici 134–1 (0,85 i 0,15).

Proticaj ispod objekta može se, bez nacrtane kvadratne mreže, proceniti primenom (132–2) uzimajući za debljinu struje $a = 4{,}5\,e$ (toliko iznosi debljina sloja ispod objekta), a za I_Π uzeće se da je prosečna vrednost duž strujnice u sredini sloja, pa je $I_\Pi = H/l$, gde je H ukupna pijezometarska razlika, a l dužina strujnice. Uzeće se i da je strujnica u sredini sloja otprilike 1,5 puta dužine granične strujnice (po konturi objekta), pa je $l = 12\,e$, jer je dužina granične strujnice $8\,e$. Onda je:

$$q = aKI_\Pi = 4{,}5\,eH/12\,e = 0{,}375\,KH$$

Ovo se mnogo ne razlikuje od sračunatog sa (134–5).

II
O NESTABILNOSTI OBJEKTA USLED IZNOŠENJA MATERIJALA NA KOME JE POSTAVLJEN

Praktični razlozi nameću da se odgovori na pitanje: da li voda pri izlasku iz podzemlja može da iznosi materijal. Ako je materijal pokrenut ispod objekta, što znači da dolazi do ispiranja podloge na kojoj leži objekat, a to dovodi do njegove nestabilnosti koja dovodi do rušenja. Bitno je da postoji mogućnost da pokrenuti materijal može da bude iznešen iz podnožja objekta, upravo da neposredno iza objekta podzemna voda može da podigne materijal. Za veoma jednostavan slučaj (sl. 134–3) posmatraće se iznošenje materijala u zapremini

$V = A\,s$, gde je A horizontalni presek te zapremine, a s njena debljina. Materijal se neće pokrenuti ako je zadovoljena nejednačina:

$$\underbrace{p_0\,A}_{\text{(I)}} + \underbrace{\gamma_s\,A\,s\,(1-m)}_{\text{(II)}} + \underbrace{\gamma\,A\,s\,m}_{\text{(III)}} > \underbrace{p_C\,A}_{\text{(IV)}} \qquad (134\text{–}6)$$

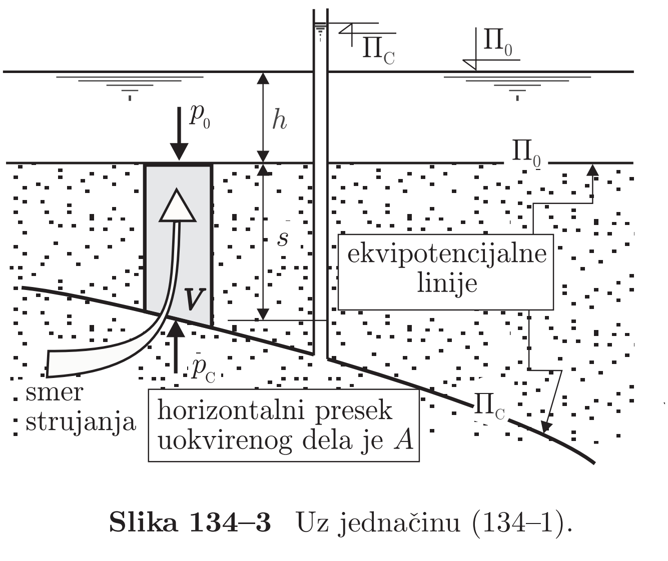
(I) predstavlja silu pritiska sa gornje strane, a (IV) sa donje, dok je (II) težina zrnastog materijala specifične težine γ_s, a (III) je težina vode u porama. Koeficijent poroznosti (to je udeo pora, odnosno vode, u celoj zapremini) označen je sa m. Desna strana (IV) je sila koja izdiže materijal, a tome se suprotstavlja leva strana, koja treba da bude nadmoćna ako se zrnasti materijal ne izdiže.

Deljenjem prethodne jednačine sa $\gamma\,A\,s$ dobija se:

$$\frac{\gamma_s}{\gamma}(1-m) + m > \frac{p_C - p_0}{\gamma\,s} \qquad (134\text{–}7)$$

Označivši sa Z_0 i Z_C položajne kote delovanja pritisaka p_0 i p_C piše se:

$$\frac{p_C}{\gamma} - \frac{p_0}{\gamma} = (\Pi_C - Z_C) - (\Pi_0 - Z_0) = \Pi_C - \Pi_0 + (Z_0 - Z_C)$$
$$\frac{p_C}{\gamma} - \frac{p_0}{\gamma} = \Pi_C - \Pi_0 + s$$



Slika 134–3 Uz jednačinu (134–1).

Koristeći napisano (134–7) svodi se na:

$$\frac{\gamma_s}{\gamma}(1-m)+m > \frac{\Pi_C-\Pi_0}{s}+1$$

$(\Pi_C-\Pi_0)/s$ je nagib I_Π pijezometarske linije, pa se prethodni izraz piše sa:

$$\left(\frac{\gamma_s}{\gamma}-1\right)(1-m) > I_\Pi \tag{134–8}$$

Može se pretpostaviti da je $\gamma_s/\gamma = 5/2$ (γ_s je približno $2{,}5\,\gamma$), a koeficijent poroznosti je reda vrednosti 1/3, pa se prethodni izraz svodi na:

$$I_\Pi < 1 \tag{134–9}$$

Radi postizanja velike sigurnosti ne dozvoljava se za I_Π ni približno jedinica, savetuje se kao granica:

$$I_\Pi < 0{,}2 \tag{134–10}$$

Kako je nagib I_Π, shodno osnovnom zakonu, napisanom sa (131–1), jednak v/K, izlaznu brzinu v treba ograničiti na $K/5$.

Za primer sa slike 134–1, gde je na izlasku vode iza objekta $I_\Pi = -\Delta\Pi/\Delta s = 0{,}15\,H/e$, jer se na izlasku Π kota spušta za $0{,}15\,H$ na dužini e. To je razlika za pijezometarsku kotu između tačaka 3 i 4 (vidi sliku 134–2). Uslov (134–10) bi stoga zahtevao:

$$\frac{0{,}15\,H}{e} < 0{,}2 \qquad \text{tj.} \qquad \frac{H}{e} < \frac{4}{3}$$

što znači da bi H moralo da bude manje od $4\,e/3$, pa da objekat bude stabilan, a to je zaista veoma malena dozvoljena denivelacija. Ovo ubedljivo ukazuje da treba nekako otkloniti mogućnost da iza objekta dođe do podizanja i odnošenja materijala koji se ispira ispod objekta. Kako će se to postići objasniće se u Odeljku III.

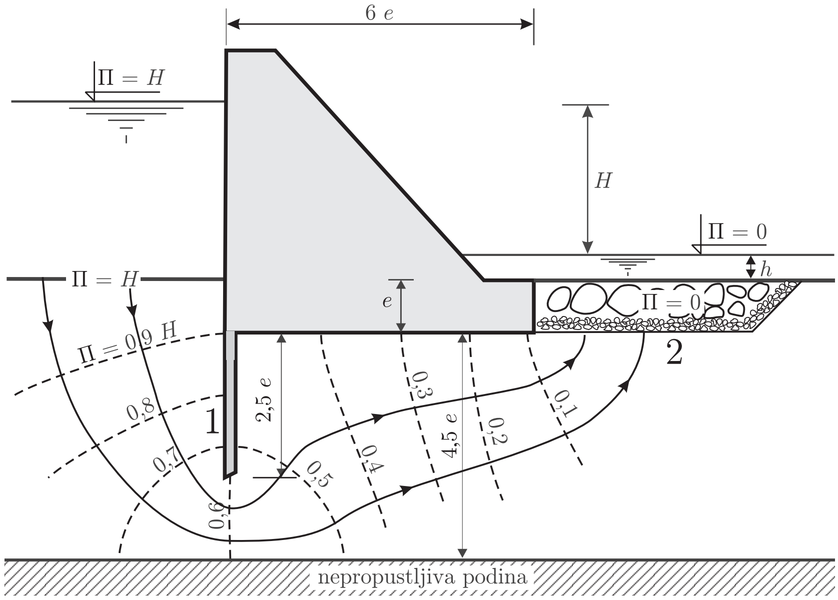
III
UGRAĐIVANJE DODATNIH DELOVA OBJEKTA SA SVRHOM OBEZBEĐENJA OD ŠTETNIH POSLEDICA DELOVANJA PODZEMNE VODE

Iz prethodnog razmatranja proizilazi da treba nastojati da se smanji pritisak podzemne vode odozdo (uzgon) i da treba onemogućiti podizanje materijala iza objekta i njegovo odnošenje. Navedeno će se i ostvariti ugrađivanjem dodatnih delova objekta koji su predmet narednih razmatranja.

Mogućnost za ispiranje i odnošenje materijala ispred brane smanjuje se ako se smanji brzina filtracije, a smanjivanjem brzine smanjiće se i proticaj procurivanja. Brzine filtracije, pa i izlazne, smanjiće se ako se produži strujnica koja obilazi objekat, jer duža strujnica, za istu pijezometarsku razliku dovodi do manjeg nagiba I_{Π}, pa i manje brzine. To se postiže ugrađivanjem nepropustljive, odnosno zanemarljivo propustljive, betonske zavese (ekrana) na uzvodnom kraju objekta. Ekran se može ugraditi i pobijanjem čeličnih, ili drvenih talpi. Uzvodna zavesa se obično naziva *priboj*. Priboj je ucrtan na slici 134–4, i on doprinosi stabilnosti objekta i time što se duž njega utroši deo raspoložive pijezometarske razlike H, pa je za temelj neposredno iza priboja pijezometarska kota već znatno snižena.

Upoređenjem slika 134–1 i 134–4 može se zaključiti da priboj ispunjava zadatak koji mu je namenjen. Granična strujnica, po konturi objekta produžena je sa $8\,e$ na $12\,e$, što dovodi do smanjenja brzina filtracije uz objekat. Proticaj procurivanja smanjen je: bez priboja, na slici 134–1, broj pojaseva proticaja procenjen je na 3,5, a sa pribojem broj pojaseva je nešto malo veći od 2. Iz upoređenja navedenih slika može se zaključiti da priboj smanjuje uzgon, jer bez njega na uzvodnom kraju horizontalne donje konture objekta (tačka 2 na slici 134–2) pijezometarska kota je $\Pi = 0{,}85\,H$, dok se ugrađivanjem priboja na istom mestu uspostavlja $\Pi = 0{,}45\,H$. To znači značajno smanjenje pritisaka odozdo na objekat, a onda i sile koju oni daju tj. uzgona. Ako bi se primenio postupak sa kraja Odeljka I dobilo bi se za slučaj sa ugrađenim pribojem $\Pi = 0{,}5\,h$, u tački 2 (jer je dužina strujnice do te tačke $s = 6\,e$, dok je ukupna dužina strujnice $L = 12\,e$), a to se malo razlikuje od prethodno napisanog što je pokazala kvadratna mreža.

Na sprečavanje iznošenja materijala vrlo delotvorno dejstvo ima



Slika 134–4 Strujna mreža ispod objekta sa ugrađenim pribojem (1) i drenažom (2).

drenaža. Njena primena je neizbežna u pretežnom delu objekata ispod, i oko kojih se filtrira voda. Ona je i ucrtana na slici 134–4. Drenaža se obrazuje na sledeći način: krupnoća materijala povećava se smerom naviše, ali tako da strujanje ne može sitniji materijal ugurati u krupniji i proneti kroz njega, a onaj najgornji toliko je krupan da ga voda ne može izneti. Pošto je drenaža znatno propustljivija od materijala ispod nje pijezometarska kota kroz nju se beznačajno menja, pa se može uzeti pijezometarska kota sa izlaza.

Slojevi složeni uz postepenu promenu krupnoće obično se nazivaju *„filter"* i primenjuju se na prelazu sa jedne na drugu krupnoću, ako je razlika među njima takva da strujanje može da ispere sitniji materijal kroz krupniji.

U razmatranom primeru drenaža ispunjava svoj zadatak onemogućavanjem iznošenja materijala iza objekta. Iza drenaže izlazni pijezometarski nagib I_{Π} je malen, jer se pijezometarska razlika $\Delta\Pi$ postiže na dugačkom delu strujnice, a to znači da do podizanja materijala neće doći. Sem toga, treba primetiti da su izlazne brzine malene, pa je tu proticanje maleno, dok je kroz drenažu veće, ali je tu obezbeđena nemogućnost izdizanja materijala.

*   *   *

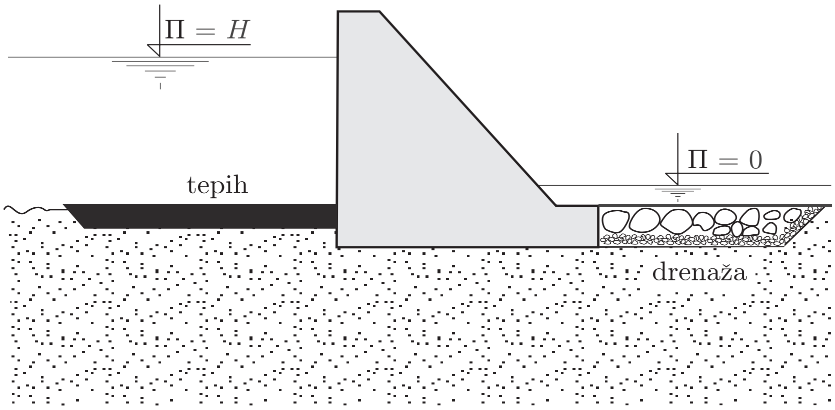
Napomena. Napominje se da se drenaža primenjuje svuda na izlasku vode iz porozne sredine ako bi, bez ugradnje drenaže, voda iznosila materijal. Naime treba omogućiti izlazak vode, a sprečiti iznošenje materijala. Treba primetiti da se u hidrotehničkoj praksi pod pojmom „drenaža" obično podrazumeva odvodnjavanje zemljišta, što ulazi u hidrotehničke melioracije. Međutim, sa hidrotehničkog stanovišta bitno je da se radi o izlasku vode iz porozne sredine, a nije bitno gde se ona odvodi. Prikazano na slici 132–6 odnosi se baš na drenažu zemljišta, na odvodnjavanje, a isto rešenje može da bude i za zahvatanje vode iz podzemlja – na primer, za vodosnabdevanje. U svakom slučaju treba ugraditi „drenažu u užem smislu reči", što znači da iza zidova sa otvorima (rupama), kroz koje voda izlazi, treba da bude materijal dovoljno krupan da ga voda ne može da iznese kroz otvore na zidu. Iza njega, smerom suprotnim od strujanja treba da se ređaju slojevi sa sve sitnijim materijalom, sve do onoga od koga je sastavljeno zemljište – tako da voda ne može da iznosi materijal, jer ne može pronositi sitniji materijal kroz krupniji na koga nailazi.

IV
KRATAK OSVRT NA STRUJANJE PODZEMNE VODE ISPOD BRANE

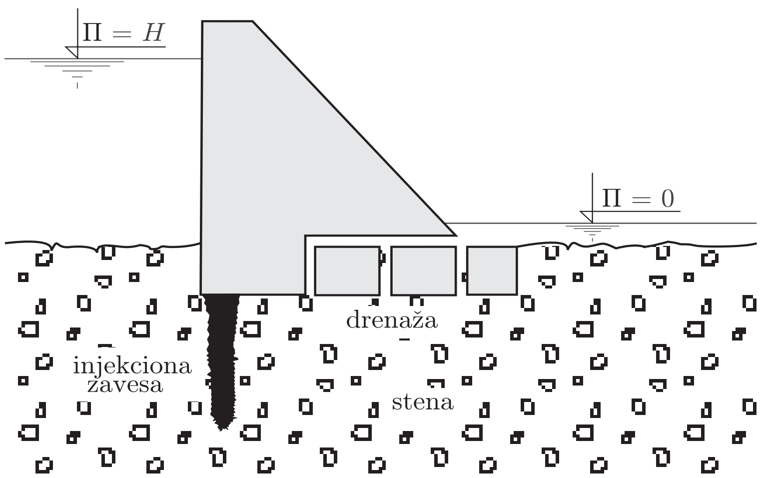
Prethodna razmatranja dopuštaju da se shvate mere koje se primenjuju radi otklanjanja štetnih posledica usled strujanja ispod brane. To su mere tzv. „antifiltracione zaštite" i svode se uglavnom na priboj i drenažu (sl. 134–4).

*   *   *

Isti učinak kao priboj postiže i tepih od nepropustljivog, odnosno slabo propustljivog materijala – (glina, na primer) postavljen u dnu ispred brane (sl. 134–5). Treba primetiti tepih treba da bude dva puta duži od priboja, da bi se postigao isti učinak (isto produženje zaobilazne strujnice). Mogu se ugraditi i priboj i tepih.



Slika 134–5 Tepih produžava strujanje i smanjuje i brzinu i uzgon.



Slika 134–6 Injekciona zavesa i drenaža uz objekat podignut na steni.

Načelno ista rasuđivanja, koja su dovela do mera kojima su izbegnute štetne posledice filtracije u prethodnim primerima, prethode i rešavanju problema za objekte podignute *na steni* (slika 134–6). Ni stena nije apsolutno nepropustljiva, delimično je porozna, jer i u njoj ima pukotina i ostalih puteva za prodiranje vode. Umesto priboja (koji se ne može pobijati u stenu) ubrizgava se *injekciona zavesa.* Kroz cev se pod pritiskom utiskuje cementna masa koja popunjava pukotine. Pored zavese obavezno se primenjuje i drenaža.

V
ZAVRŠNE PRIMEDBE

Uz razmatranja u prethodnim odeljcima (od I do IV) mogu se staviti primedbe koje se u nastavku navode.

Prvo, prikazani primeri su obrađeni kao da je strujanje *ravansko*. To se može opravdati da je stanje u ravni u kojoj se zadatak rešava najnepovoljnije po stabilnost objekta (kod brane je to presek gde je ona najviša, gde je temelj na najnižoj tački). Međutim, strujanje se obavlja i ispod objekta, i oko objekta pa zadatak nije ravanski nego *prostorni*.

Zaobilazno, bočno strujanje može dovesti do nepoželjnih posledica, koje se sprečavaju sličnim postupcima (bočne zavese od slabo propustljivog materijala), sprovođenjem drenaže ka najnižoj tački objekta.

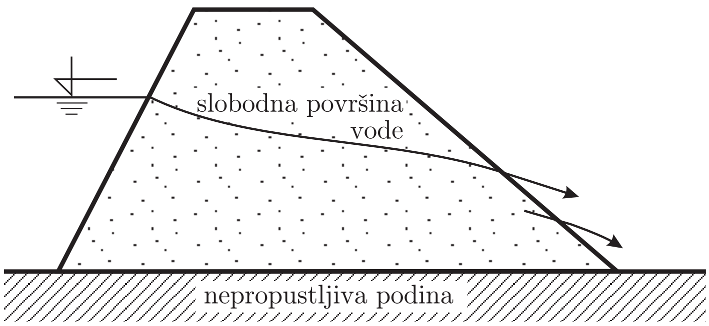
Drugo, uslovljavalo se da je porozni materijal homogen u smislu da je svuda ista propustljivost, svuda isti koeficijent filtracije K. Može se, barem kvalitativno, oceniti kakvi će biti uticaji ako to nije tako. Manja propustljivost na uzvodnom kraju poboljšava stanje, jer se time postiže isto što i pribojem, ili tepihom. Taloženje sitnijeg materijala na dnu ispred objekta (što se može očekivati) poboljšava stabilnost objekta i smanjuje procurivanje. Veća propustljivost na nizvodnom kraju pridonosila bi načelno isto kao drenaža, ali bi nepoželjna okolnost nastala ako bi dolazilo do ispiranja materijala. Obratne okolnosti (veća propustljivost uzvodnog kraja, a manja nizvodnog) pogoršavaju stabilnost objekta.

Treće, iako su izlagani jednostavni primeri sa uproštenim uslovima (homogen materijal, približne metode određivanja pritisaka) to je moglo da posluži da se objasne pojave i putevi praktičnog rešavanja, dok će se praksa baviti i složenijim primerima i nastojati da se zadatak reši i kao prostorni – razume se, složenijim matematičkim modelima.

Četvrto, može se izvući jedan opšte primenljiv zaključak: na uzvodnom kraju treba zatvarati put vodi (priboj, tepih i sl.), a nizvodni kraj treba drenirati, uz kontrolisan izlazak vode iz podzemlja, da ona ne bi iznosila materijal.

135
STRUJANJE KROZ NASUTE BRANE I NASIPE

Razmatraće se praktični zadatak – strujanje kroz nasutu branu ili nasip. Slikom 135–1 želi se prikazati da bi voda koja prodire kroz branu izlazila na nizvodnoj kosini, gde bi odnosila materijal i rušila branu. Da bi se to sprečilo ugrađuje se drenaža (sl. 135–4 i 135–5) koja privlači vodu i ona ne izlazi na nizvodnu kosinu. Razume se da drenaža mora da bude od krupnijeg materijala koga voda ne može pokrenuti.



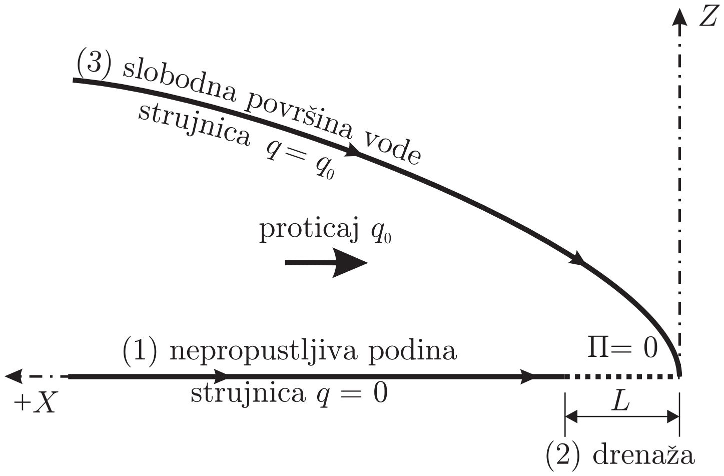
Slika 135–1 Proviranje vode kroz nizvodnu kosinu nasute brane je nedozvoljeno, jer iznosi materijal iz brane i ruši je. To se sprečava drenažom (sl. 135–4 i 135–5).

Za rešavanje primera sa slike 135–4 može da posluži teorijsko rešenje za koga se nameću sledeći uslovi (sl. 135–2):

a) strujanje je ravansko – proučava se u ravni crteža;

b) porozna sredina odozdo je ograničena nepropustljivom horizontalnom podinom – nacrtano kao „1” na slici;

c) uz podinu smeštena je drenaža dužine L, koja će prihvatiti svu vodu koja provire kroz branu – „2” na slici;



Slika 135–2 Prikaz zadatka koji se proučava. Granični uslovi su (1), (2) i (3).

d) strujanje sa gornje strane ograničeno slobodnom površinom vode – „3" na slici;

e) sa uzvodne strane (sa leve strane na slici) ulazi proticaj q_0 (po jedinici širine, gde se širina meri normalno na ravan proučavanja, normalno na ravan crteža);

f) podrazumeva se da je porozna sredina (izuzev drenaže) homogena u smislu propustljivosti – koeficijent filtracije K ima svuda istu vrednost.

Jednačine koje opisuju posmatrano strujanje, prikazano na slici 135–2, su:

$$X = \frac{q_0}{2\,K}\left[\left(\frac{K\,\Pi}{q_0}\right)^2 - \left(\frac{q}{q_0}\right)^2 + 1\right] \tag{135–1}$$

$$Z = \Pi\frac{q}{q_0} \tag{135–2}$$

Osa Z je vertikala, a osa X je horizontala položena po donjoj granici (po podini), usmerena uzvodno sa početkom u završnoj tački drenaže. Proticaji se smatraju pozitivnim, a ukupan proticaj (od podine do slobodne površine) iznosi q_0. Strujnica ima vrednost q, a proticaj od nepropustljive podine (gde strujnica ima vrednost $q = 0$) do odnosne strujnice iznosi q. Tako je strujnica $q = q_0$ slobodna površina. U jednačinama Π označava pijezometarsku kotu, a K koeficijent filtracije.

Napisani sistem jednačina (135–1) i (135–2) prihvata se na poverenje, a da on zaista opisuje posmatrano strujanje dokazi su sledeći:

1. za $q = 0$, tj. za strujnicu na nepropustljivoj podini, gde je $Z = 0$, a jednačina (135–2) to i pokazuje. Jednačina (135–1), za $q = 0$, se svodi na:

$$X = \frac{q_0}{2\,K}\left[\left(\frac{K\,\Pi}{q_0}\right)^2 + 1\right]$$

iz čega sledi:

$$X \geq \frac{q_0}{2\,K}$$

što znači da X-osa može da bude strujnica samo uz zadovoljenje prethodnog uslova. Za $0 < X < q_0/2K$, nalazi se drenaža (što će se kasnije i dokazati), pa je dužina drenaže:

$$\boxed{L = \frac{q_0}{2\,K}} \tag{135–3}$$

2. za $q = q_0$ tj. za strujnicu na slobodnoj površini vode, pijezometarska kota jednaka je položajnoj, $\Pi = Z$, jer nema pritiska, pa jednačina (135–1), za $q = q_0$ i $\Pi = Z$, daje:

$$X = \frac{q_0}{2\,K}\left(\frac{K\,\Pi}{q_0}\right)^2 = \frac{K}{2\,q_0}Z^2$$

što korišćenjem izraza (135–3) daje jednačinu slobodne površine kao funkcije $X = X(Z)$:

$$\boxed{X = \frac{Z^2}{4\,L}} \tag{135–4}$$

3. za $\Pi = 0$, što treba da se ostvari na drenaži, jednačina (135–1) pokazuje da je:

$$X = \frac{q_0}{2\,K}\left[1 - \left(\frac{q}{q_0}\right)^2\right]$$

Pošto je $q/q_0 \leq 1$, izraz u ugaonoj zagradi je pozitivan, ali je manji od jedinice (granična vrednost mu je jedinica) pa se, koristeći to saznanje, piše:

$$X \leq \frac{q_0}{2\,K}$$

S obzirom da je, prema (135–4), desna strana jednaka dužini drenaže L, piše se:

$$X \leq L$$

Prema tome, ekvipotencijalna linija $\Pi = 0$ se proteže samo do $X = L$, a za veće vrednosti X duž podine je strujnica $q = 0$, kako je pod 1) i pokazano.

Izloženim pod 1), 2) i 3) dokazuje se da sistem jednačina (135–1), (135–2) zaista opisuje strujanje sa slike 135–2.

* * *

Jednačine (135–1) i (135–2) napisaće se upotrebom bezdimenzionalnih veličina, koristeći dužinu L drenaže kao osnovnu dužinu. Pri pisanju navedenih jednačina koristiće se i izraz (135–3). Preobličene jednačine (135–1) i (135–2) su:

$$\frac{X}{L} = \frac{1}{4}\left(\frac{\Pi}{L}\right)^2 - \left(\frac{q}{q_0}\right)^2 + 1 \tag{135–5}$$

$$\frac{Z}{L} = \frac{\Pi}{L}\,\frac{q}{q_0} \tag{135–6}$$

Iz ovih jednačina odstranjivanjem Π/L dobiće se funkcija $f(X/L,\, Z/L,\, q/q_0) = 0$ koja će predstavljati strujnice. To se postiže ako se u prvoj jednačini zameni Π/L sa $Z\,q_0/L\,q$ (koliko daje druga). Dobija se jednačina strujnice:

$$\boxed{\frac{X}{L} = \frac{1}{4}\left(\frac{q_0}{q}\right)^2\left(\frac{Z}{L}\right)^2 - \left(\frac{q}{q_0}\right)^2 + 1} \tag{135–7}$$

U prvoj jednačini zamenjuje se q/q_0 sa Z/Π, što omogućava druga – dobija se jednačina ekvipotencijalne linije:

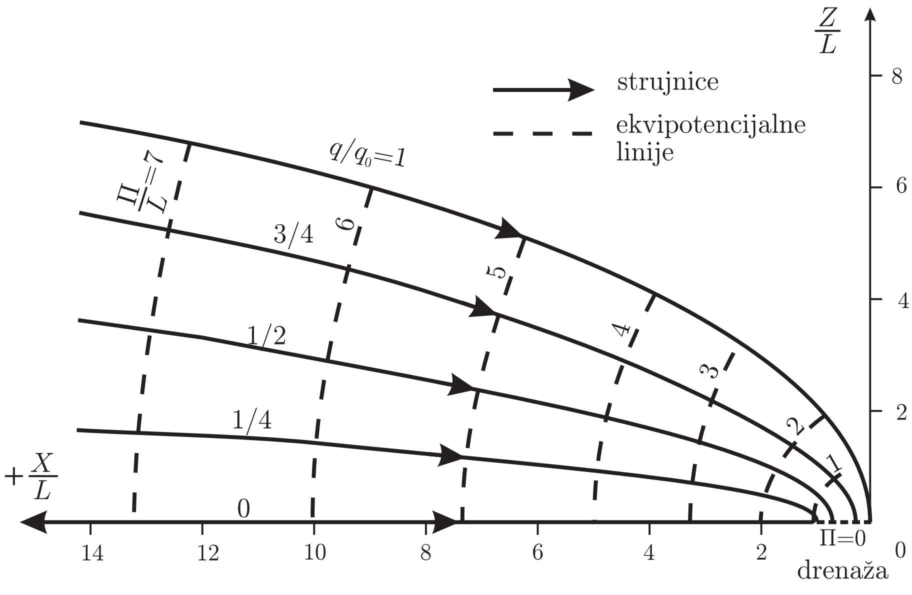
$$\boxed{\frac{X}{L} = \frac{1}{4}\left(\frac{\Pi}{L}\right)^2 - \left(\frac{Z}{L}\right)^2 \left(\frac{L}{\Pi}\right)^2 + 1} \tag{135–8}$$

Za slobodnu površinu vode, na osnovu (135–4), za $q = q_0$, dobija se izraz sa bezdimenzionalnim veličinama:

$$\boxed{\frac{X}{L} = \frac{1}{4}\left(\frac{Z}{L}\right)^2} \tag{135–9}$$

Strujnice za q/q_0 jednako 0, 1/4, 1/2, 3/4 i 1 nacrtane su na sl. 135–3 koristeći jednačinu (135–7), a ekvipotencijalne linije za Π/L jednako 1, 2, ..., 7 nacrtane su kako nalaže jednačina (135–8). Tako je na slici 135–3 nacrtana strujna mreža (doduše nije kvadratna, ali veoma pregledno opisuje strujanje).

Za drenažu gde je $1 \geq X/L \geq 0$ i $Z/L = 0$ jednačina (135–7) daje $X/L = 0$ za $q/q_0 = 1$, tj. strujnica $q = q_0$ (slobodna površina) izlazi



Slika 135–3 Strujna mreža za strujanje usmereno u drenažu.

u koordinatni početak, a strujnica $q/q_0 = 0$ (po X-osi) izlazi u tački $(X/L = 1,\ Z/L = 0)$, tj. na uzvodnom kraju drenaže. Ostale strujnice izlaze u drenažu između prethodno navedene dve, koje su granične. To se uviđa i sa slike 135–3. Na osnovu slike se može primetiti i da ekvipotencijalne linije sve manje odstupaju od vertikale što je Π/L veće.

U nastavku će se dokazati da su strujnice i ekvipotencijalne linije međusobno normalne. To se mora ispuniti na svakoj ispravno nacrtanoj strujnoj mreži. Strujnica $q/q_0 = (q/q_0)_* =$ const i ekvipotencijalna linija $\Pi/L = (\Pi/L)_* =$ const u tački gde se seku imaće međusobno normalne tangente ako je:

$$\left[\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{X}{L}\right)}{\mathrm{d}\left(\dfrac{Z}{L}\right)}\right]_{\mathrm{St}} \cdot \left[\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{X}{L}\right)}{\mathrm{d}\left(\dfrac{Z}{L}\right)}\right]_{\mathrm{Ep}} = -1$$

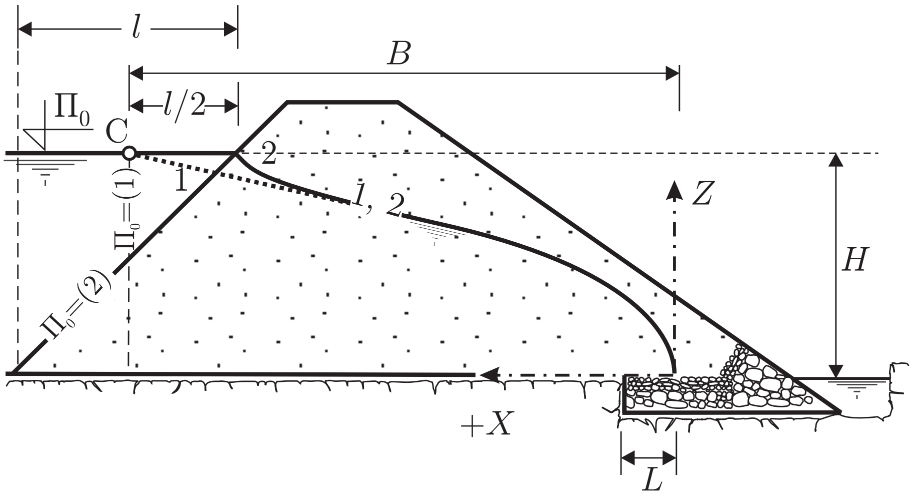
Indeksi St i Ep odnose se na strujnicu, odnosno ekvipotencijalnu liniju. Za navedenu strujnicu $(q/q_0)_*$ i ekvipotencijalnu liniju $(\Pi/L)_*$ (koje su konstantne vrednosti) prethodni izraz, uz korišćenje izraza (135–7) i (135–8), dovodi do:

$$\left[\frac{1}{4}\left(\frac{q_0}{q}\right)_*^2 2\left(\frac{Z}{L}\right)_*\right] \cdot \left[2\left(-\frac{Z}{L}\right)_*\left(\frac{L}{\Pi}\right)_*^2\right] = -\left(\frac{Z}{L}\right)_*^2\left(\frac{q_0}{q}\right)_*^2\left(\frac{L}{\Pi}\right)_*^2$$

$(Z/L)_*$ se odnosi na tačku preseka linija $(q/q_0)_*$ i $(\Pi/L)_*$. Jednačina (135–6) pokazuje da je desna strana prethodne jednačine jednaka –1, a time je dokazano ono što se nameravalo.

* * *

Teorijsko rešenje (slika 135–3) bilo bi ostvareno ako bi uzvodna granica brane bila jedna od ekvipotencijalnih linija sa slike. Po njoj bi pijezometarska kota bila $\Pi_0 = H$, gde je Π_0 kota nivoa ispred brane, H odgovarajuća dubina, a strujnica q_0 bila bi linija slobodne površine vode kroz branu. Da bi se teorijsko rešenje približilo praktičnom primeru – brani (slika 135–4) ekvipotencijalna linija odgovarajućeg teorijskog rešenja, označena sa $\Pi_0(1)$ na slici, treba da izlazi na nivo vode ispred



Slika 135–4 Strujanje kroz nasutu branu. Ekvipotencijalna linija za $\Pi = \Pi_0 = H$, je uzvodni granični uslov: $\Pi_0(1)$ za teorijsko rešenje, $\Pi_0(2)$ za praktičan primer brane. Slobodna površina vode je (1) za teorijsko rešenje, a (2) za praktični primer.

brane u tački označenoj sa „C" – ona je na polovini rastojanja između tačke dodira nivoa vode ispred brane i kosine brane i tačke gde vertikala podignuta sa dna, od uzvodne nožice brane, seče nivo vode (vidi sliku 135–4). Linija $\Pi_0(1)$ odstupa malo od vertikale (što se zaključuje na osnovu slike 135–3 i uz objašnjenje uz nju). Ona seče uzvodnu kosinu brane otprilike na polovini njenog uronjenog dela.

Za naredna razmatranja merodavna je dužina B (vidi sliku) koja meri horizontalno rastojanje od tačke „C" do ose Z.

Za praktični primer brane odgovarajuća ekvipotencijalne linija je $\Pi_0(2)$, koja leži na uzvodnoj kosini brane. Linija (1) predstavlja slobodnu površinu vode za teorijsko rešenje, a (2) za praktični primer. Ova druga počinje normalno usmerena na kosinu brane, i uključuje se u (1), pošto je, izuzimajući početak strujanja, uticaj uslova sa početka strujanja niz struju sve slabiji (postaje zanemarljiv), a merodavni su uslovi slivanja u drenažu, koji su isti u oba slučaja.

Za $X = B$ i $Z = \Pi_0 = H$ iz jednačine za slobodnu površinu vode, napisanu sa (135–9), dobija se:

$$\frac{B}{L} = \frac{1}{4}\left(\frac{H}{L}\right)^2 \tag{135–10}$$

Deljenje (135–9) sa prethodno napisanom (135–10) dovodi do:

$$\frac{X}{B} = \left(\frac{Z}{H}\right)^2 \tag{135–11}$$

To je jednačina slobodne površine vode.

Sa (135–10) određena je dužina drenaže:

$$L = \frac{H^2}{4\,B} \tag{135–12}$$

Naglašava se da je to dužina drenaže u kojoj će se celokupni proticaj uliti u drenažu. Izgrađena drenaža je duža.

U tako određenoj dužini L drenaže, shodno jednačini (135–3) uliva se po jedinici širine (gde se širina meri normalno na ravan crteža) proticaj:

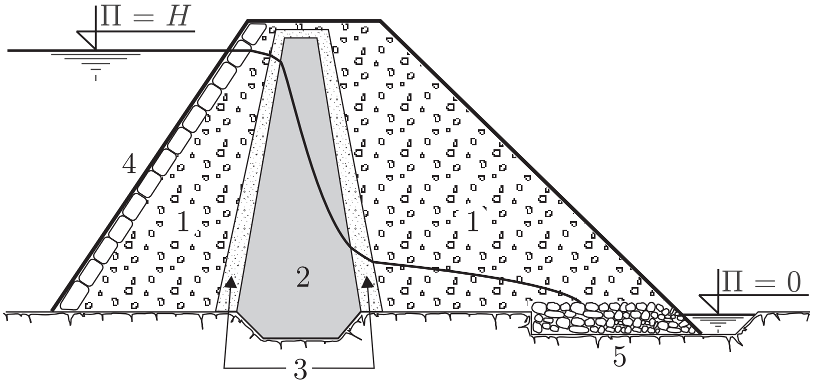
$$q_0 = 2\,K\,L \tag{135–13}$$

* * *

Da bi se smanjilo proticanje kroz branu (u drenažu) obično se gradi zavesa (ekran) u sredini brane (slika 135–5), ili na uzvodnoj kosini. Ekran je znatno nepropustljiviji od osnovnog materijala u brani (vrednost koeficijenta filtracije K, u njemu je mnogo manja) i stoga se tu naglo obori nivo slobodne površine vode, pa onda u drenažu ulazi i mnogo manji proticaj. Ako je osnovni materijal brane slabo propustljiv, jednačina (135–13) daje proticaj koji se može prihvatiti, pa se ne mora graditi ekran. To se podrazumevalo u primeru na slici 135–4.

Između materijala različitih krupnoća (između osnovnog materijala i drenaže, ili sa obe strane ekrana), ugrađuju se tzv. „filterski slojevi" (postepen prelaz iz jedne krupnoće u drugu), tako da voda ne može sitniji materijal odnositi i uvlačiti u krupniji, koji je iza sitnijeg, i ne može se krupniji utiskivati u sitniji iza krupnijeg.

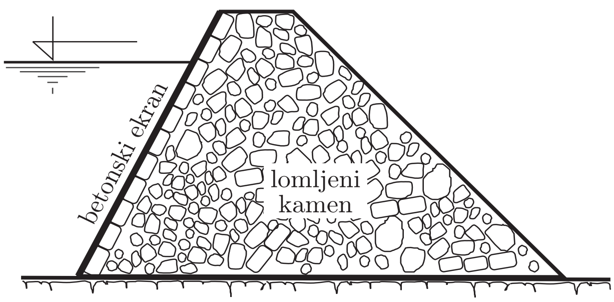
Praktični razlozi nameću zaštitu uzvodne kosine materijalom koga ne mogu pokrenuti talasi, ili pokrenuti voda iza brane kada se snizi nivo



Slika 135–5 Nasuta brana sa veoma slabo propustljivim ekranom (1 – osnovni materijal, 2 – veoma slabo propustljiv ekran, 3 – "filter" – prelaz iz 1 u 2, 4 – uzvodna zaštita i 5 – drenaža).

ispred nje. Taj zaštitni materijal su kamene kocke, betonske ploče i sl., što je simbolično prikazano na slici 135–5.

Na slici 135–6 prikazan je primer gde je drenaža nepotrebna. Osnovni materijal je lomljeni kamen, a ekran na uzvodnoj kosini je betonski. Ono malo vode što procuri kroz ekran prolazi kroz lomljeni kamen, čija krupnoća ne dozvoljava pokretanje.



Slika 135–6 Brana od lomljenog kamena, zaštićena uzvodno betonskim ekranom. Drenaža je nepotrebna.

*   *   *

Dodaje se jedna načelna primedba koja se odnosi na sve zadatke gde se obrazuje slobodna površina vode u poroznoj sredini. Ta površina (upravo linija ako je zadatak ravanski) nije unapred poznata granica, pa se mora obrazovati postepenim približavanjem (podešavanjem sve dotle dok se ne ispune uslovi za nju, a oni su: prvo, pijezometarska Π i položajna Z kota se podudaraju (nema pritiska, slobodna je površina), i drugo, ekvipotencijalne linije na liniju slobodne površine normalno su upravljene.

Izuzetak je bio zadatak sa slike 135–2, čije je rešenje na slici 135–3 dalo liniju slobodne površine, bez postepenog približavanja. Međutim, istini za volju treba reći da je to teorijsko rešenje, koje se ne ostvaruje u potpunosti.

136
BUNARI

UVODNA NAPOMENA

U odeljcima Poglavlja 136. od I do IV razmatraće se strujanje ka bunaru, ili ka bunarima, pod pritiskom kroz propustljivi sloj konstantne debljine. Granice toga sloja su horizontalne ravni: gornja je nepropustljivi pokrivač, a donja nepropustljiva podina. Poslednji odeljak V odnosi se na bunare u koje ulazi strujanje sa slobodnom površinom vode.

I
USAMLJENI BUNAR

Bunar poluprečnika r_0 pobijen je kroz propustljivi sloj do nepropustljive horizontalne podine (slika 136–1). Pretpostavlja se da je bunar *usamljen* što znači da na njega ne utiču nikakvi drugi uslovi sem njega samoga.

Brzine su usmerene ka bunaru, pa su strujnice horizontalne linije usmerene ka središtu bunara, a ekvipotencijalne površine su omotači kružnih cilindara gde je osovina u osovini bunara, a predstavljene su kružnicama, jer se zadatak posmatra kao ravanski.

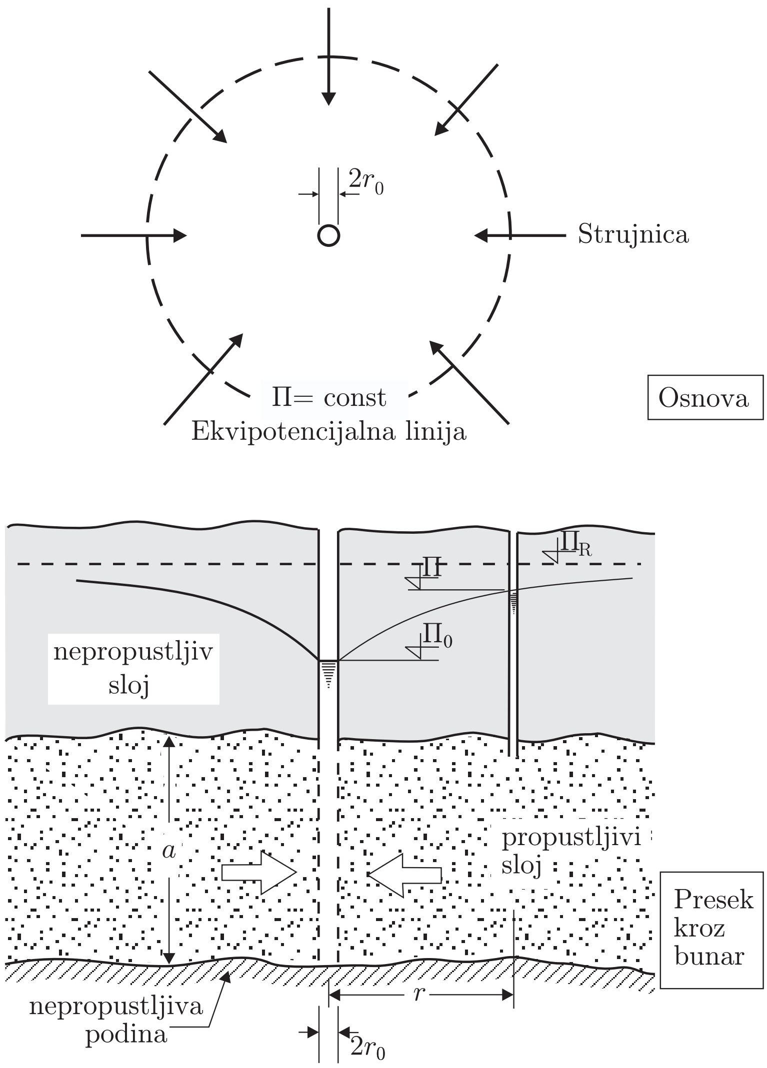
Brzina v na rastojanju r od osovine bunara izražena je sa:

$$v = K\,\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}r} \tag{136–1}$$

i to je brzina usmerena ka bunaru, a rastojanje r se meri od bunara, pa su v i $\mathrm{d}\Pi/\mathrm{d}r$ pozitivne vrednosti.

Proticaj Q ka bunaru kroz omotač kružnog cilindra poluprečnika r, visine a (jednake debljini nepropustljivog sloja), iznosi:

$$Q = 2\,\pi\,r\,a\,v$$



Slika 136–1 Strujanje ka usamljenom bunaru kroz propustljivi sloj konstantne debljine (a).

Zamenom brzine v, prema (131–1), iz prethodnog izraza, dobija se nagib pijezometarske linije:

$$\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}r} = \frac{Q}{2\,\pi\,a\,K\,r} \tag{136–2}$$

Rastavljanje promenljivih dovodi do:

$$\mathrm{d}\Pi = \frac{Q}{2\,\pi\,a\,K}\frac{\mathrm{d}r}{r} \tag{136–3}$$

Kroz omotač bilo koga cilindra (na bilo kome rastojanju r) proticaj mora da bude isti tj. $Q = \mathrm{const}$, pa uz konstantne vrednosti i za a, (jer se pretpostavlja da je sloj konstantne debljine) i za K, integrisanje prethodnog izraza u granicama r_I do r_{II}, gde su pijezometarske kote Π_I i Π_{II}, daje:

$$\Pi_{II} - \Pi_I = \frac{Q}{2\,\pi\,a\,K}\ln\frac{r_{II}}{r_I} \tag{136–4}$$

Ovaj izraz sa granicom (I) na obimu bunara gde je $r_I = r_0 =$ poluprečnik bunara, a $\Pi_I = \Pi_0 =$ kota nivoa u bunaru, a sa granicom (II) na proizvoljnom rastojanju od bunara, gde je $\Pi_{II} = \Pi$, $r_{II} = r$, dovodi do:

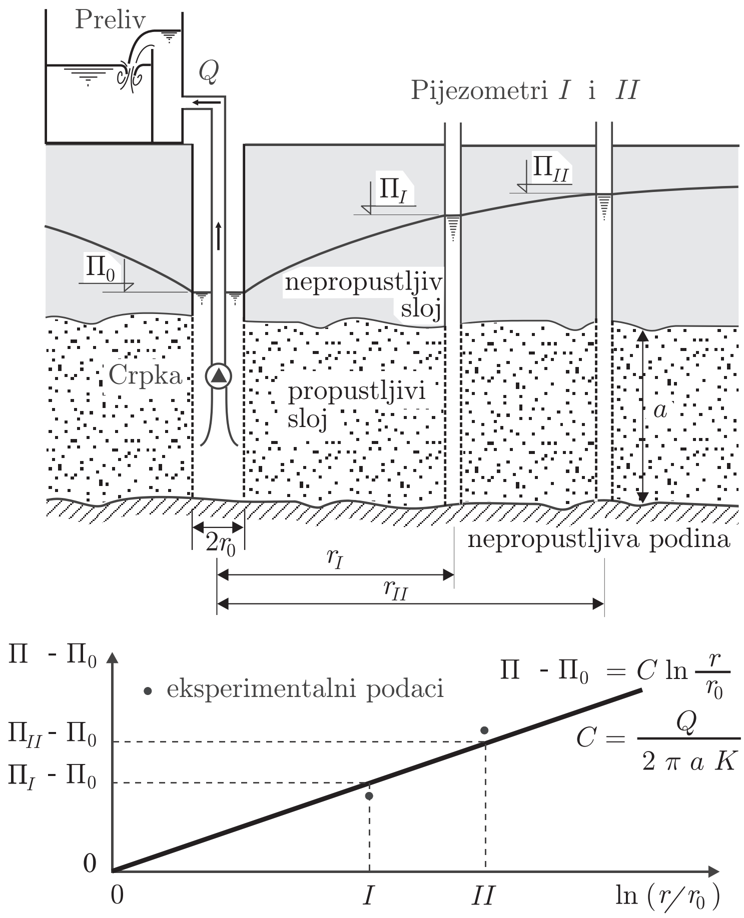
$$\Pi - \Pi_0 = \frac{Q}{2\,\pi\,a\,K}\ln\frac{r}{r_0} \tag{136–5}$$

$\Pi - \Pi_0$ je razlika između pijezometarske kote Π na proizvoljnom rastojanju r od osovine bunara i kote nivoa Π_0, bunara poluprečnika r_0.

Ova jednačina omogućava da se sračuna pijezometarska kota Π, na rastojanju r od bunara, za zadati proticaj Q, uz poznati nivo Π_0 u bunaru poluprečnika r_0 – razume se, uz poznatu debljinu sloja a i poznati koeficijent filtracije K. Ili, može se sračunati proticaj na osnovu poznate razlike $\Pi - \Pi_0$.

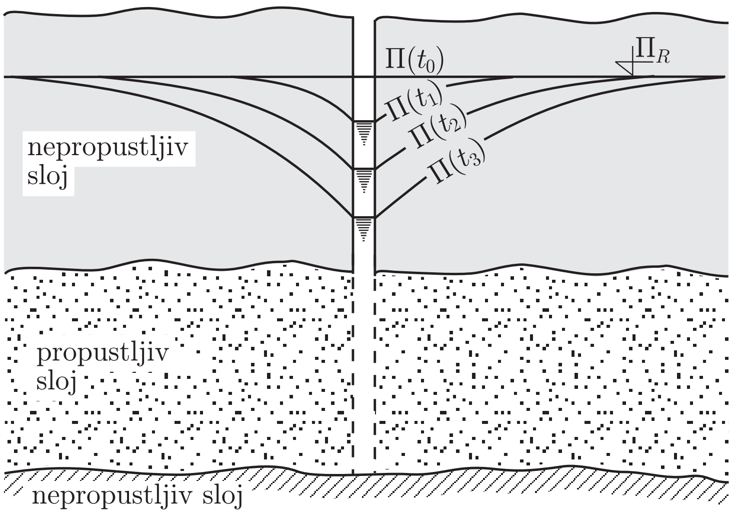
Ako se merenjem odrede pijezometarske kote Π i Π_0, i proticaj Q (meri se proticaj koji se crpi iz bunara) jednačinom (136–5) odredi se koeficijent filtracije K. To je onda eksperimentalno određivanje koeficijenta filtracije, kako se to obično kaže, „probnim crpljenjem". Jasno je da se koeficijent filtracije može odrediti računanjem primenom jednačine (136–4) ako su poznati proticaj Q i pijezometarske kote u dve tačke (Π_I i Π_{II}). Poželjno je da se uz to meri i nivo Π_0 u bunaru (sl. 136–2), pa se računom dobijaju dva podatka o koeficijentu filtracije, i onda se koeficijent filtracije pouzdanije procenjuje. Još je bolje ako ima i više pijezometarskih cevi, i kada se crpljenja obave sa više proticaja.

Praktični razlozi nameću pitanje: Ako je pre rada bunara nivo u njemu bio Π_{st} (statički nivo) koliko će se spustiti nivo ako se crpi proticaj Q? Na ovo pitanje moći će da se odgovori ako se pretpostavi da



Slika 136–2 Određivanje koeficijenta filtracije probnim crpljenjem.

će negde daleko od bunara pijezometarska kota ostati nepromenjena (tačnije rečeno, zanemarljivo će se spustiti ispod Π_{st}). Neka to bude na rastojanju R od bunara, tu je pijezometarska kota $\Pi_R = \Pi_{st}$. Udaljavanjem od bunara nagib pijezometarske linije postaje sve manji (jer su brzine sve manje), pa nagib postaje toliko malen da se može računati da se odatle nadalje pijezometarska kota ne menja. Prihvatanje ove načelne pretpostavke nameće sada pitanje: Koliko iznosi rastojanje bunara, označeno sa R? To rastojanje R, gde prestaje uticaj bunara naziva se obično „radijus dejstva”. Probnim crpljenjem konstantnog proticaja Q nivo u bunaru vremenom se snižava, a uticaj bunara prostire se do sve većeg rastojanja od njega (vidi sl. 136–3). Vremenom se nivo u bunaru sve sporije snižava i posle dugotrajnog crpljenja promene sa vremenom postaju zanemarljive. Proces se zaustavi na nivou Π_0 u bunaru (mogao bi da se zanemarljivo spušta uz veoma dugo vreme), a uticanje bunara ne napreduje više (tačnije rečeno zanemarljivo bi napredovao za veoma dugo vreme). Tako se dolazi do radijusa dejstva R.



Slika 136–3 Pijezometarske linije tokom crpljenja, u vremenskim trenucima t_0, t_1, t_2 i t_3 (gde je $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$). Na početku crpljenja (t_0) svuda je neporemećena kota (Π_R).

Pri rešavanju primera gde se nisu obavila probna crpljenja pretpostavlja se i koeficijent filtracije K i radijus dejstva. O procenjivanju vrednosti za K raspravljalo se u Poglavlju 131., a za radijus dejstva praktičari preporučuju R između 250 i 1000 m (i to veće vrednosti za krupniji materijal). Sa pretpostavljenim vrednostima za R, jednačina (136–4), sa $r_{II} = R$ i $r_I = r_0$, kao i sa $\Pi_{II} = \Pi_R$ i $\Pi_I = \Pi_0$, dovodi do sledećeg:

$$\Pi_R - \Pi_0 = \frac{Q}{2\,\pi\,a\,K}\,\ln\frac{R}{r_0} \qquad (136\text{–}6)$$

Navedeno je da se pretpostavlja da je R između 250 i 1000 m. Može se uzeti da je $R = 500$ m, jer će se pokazati da rezultati sa tom vrednošću ne odstupaju značajno od rezultata koji se dobijaju sa graničnim navedenim vrednostima ($R = 1000$ m, $R = 200$ m).

Uticanje pretpostavljene vrednosti za R na pijezometarsku razliku $\Pi_R - \Pi_0$, a za isti proticaj Q, može se proceniti iz sledećeg odnosa koji proizilazi iz (136–6):

$$\frac{(\Pi_R - \Pi_0)_2}{(\Pi_R - \Pi_0)_1} = \frac{\ln \dfrac{R_2}{r_0}}{\ln \dfrac{R_1}{r_0}} \tag{136–7}$$

gde su indeksom „1”, odnosno „2” označeni odgovarajući radijusi i sa njima dobijene pijezometarske razlike. Ako se za R_1 uzme 500 m, za R_2 1000 m, prethodni odnos za $r_0 = 0,1$ m iznosi 1,08, a za $R = 200$ m on iznosi 0,92. Za $r_0 = 0{,}5$ m odgovarajući odnosi su 1,11 i 0,89. Iz ovoga se zaključuje da će pijezometarska razlika $\Pi_R - \Pi_0$ biti za oko 10% veća ako se računa sa $R = 1000$ m, umesto $R = 500$ m, a da će za oko 10% biti manja ako se računa sa $R = 250$ m, umesto $R = 500$ m.

Ovo se može prihvatiti uz napomenu da se više greši zbog približnosti i procene koeficijenta filtracije.

Pijezometarska razlika $\Pi_R - \Pi$, tj. spuštanje kote sa Π_R na kotu Π na proizvoljnom rastojanju r od bunara, sračunaće se prema sledećem obrascu, do koga se dolazi iz (136–5), samo se umesto Π_0 stavlja Π, a umesto r_0 stavlja se r. On glasi:

$$\Pi_R - \Pi = \frac{Q}{2\,\pi\,a\,K}\,\ln\frac{R}{r} \tag{136–8}$$

Do ovoga obrasca može se doći i oduzimanjem (136–5) od (136–6).

* * *

Napomena. Oko bunara, u kome su otvori ili procepi za ulaženje vode, stavlja se drenažni sloj, odnosno filter, kojim se povećavanjem krupnoće zrna u smeru bunara, sprečava ispiranje sitnijeg materijala i unošenje u bunar.

II
GRUPA BUNARA

Do sada se razmatrao jedan bunar, a sada će se razmatrati *grupa bunara* u koje voda dotiče u istim okolnostima koje su bile i za jedan bunar (strujanje pod pritiskom kroz propustljivi sloj konstantne debljine, bunar pobijen do nepropustljive podloge).

U proizvoljnoj tački, koja je od prvog bunara udaljena za r_1, od drugog za r_2, od poslednjeg r_n, pijezometarska kota Π, za proticaje ka bunarima: $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, i za određenu debljinu nepropustljivog sloja a i određeni koeficijent filtracije K, je funkcija od rastojanja od svih bunara:

$$\Pi = \Pi(r_1,\, r_2,\, \ldots,\, r_n) \qquad (136\text{–}9)$$

Nagib pijezometarske linije u pravcu prvog bunara, da bi u njega ulazio proticaj Q_1, mora da bude:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r_1} = \frac{Q_1}{2\,\pi\, a\, K\, r_1} \qquad (136\text{–}10,1)$$

Ovo je napisano po ugledu na (136–2), samo što je tamo bio samo jedan bunar, za nagib se pisao totalni izvod $\mathrm{d}\Pi/\mathrm{d}r$, a ovde je izvod parcijalan, jer nagib ne zavisi od rastojanja samo od jednog bunara. Za sve bunare može se pisati isto što je pisano za prvi, pa je:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r_2} = \frac{Q_2}{2\,\pi\, a\, K\, r_2} \qquad (136\text{–}10,2)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r_3} = \frac{Q_3}{2\,\pi\, a\, K\, r_3} \qquad (136\text{–}10,3)$$

i tako do poslednjeg bunara (n):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r_n} = \frac{Q_n}{2\,\pi\, a\, K\, r_n} \qquad (136\text{–}10,n)$$

Pomnožiće se jednačina (136–10,1) sa $\mathrm{d}r_1$, jednačina (136–10,2) sa $\mathrm{d}r_2$ itd. i potom će se sabrati. Zbir levih strana jednačina daje:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r_1}\,\mathrm{d}r_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial r_2}\,\mathrm{d}r_2 + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial r_n}\,\mathrm{d}r_n = \mathrm{d}\Pi \qquad (136\text{–}11)$$

jer je Π funkcija od r_1, r_2, $\ldots$, r_n. Zbir desnih strana daje:

$$\frac{1}{2\pi aK}\left(Q_1\frac{\mathrm{d}r_1}{r_1}+Q_2\frac{\mathrm{d}r_2}{r_2}+\ldots+Q_n\frac{\mathrm{d}r_n}{r_n}\right)=\frac{1}{2\pi aK}\sum_{i=1}^{n}Q_i\frac{\mathrm{d}r}{r_i} \quad (136\text{–}12)$$

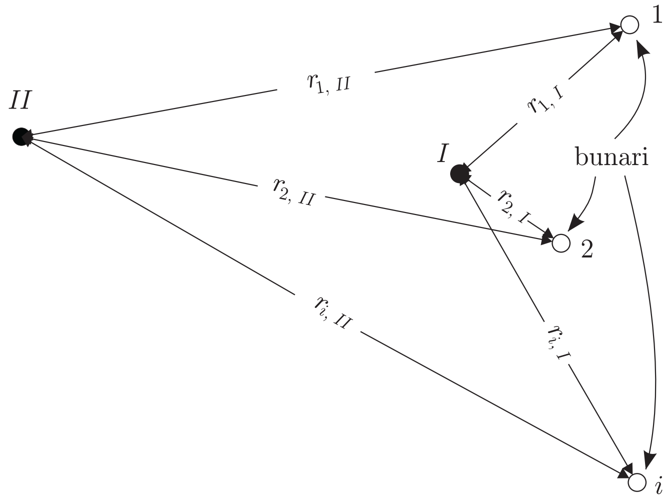
izrazi (136–11) i (136–12) su međusobno jednaki:

$$\mathrm{d}\Pi=\frac{1}{2\,\pi\,a\,K}\sum_{i=1}^{n}Q_i\frac{\mathrm{d}r_i}{r_i}$$

Integraljenjem u granicama od Π_I do Π_{II}, gde su to pijezometarske kote u tačkama (I) i (II), koje su na udaljenosti $r_{1,\,I}$ i $r_{1,\,II}$ od bunara (1), $r_{2,\,I}$ i $r_{2,\,II}$ od bunara (2), odnosno $r_{i,\,I}$ i $r_{i,\,II}$ od bunara (i), dobija se:

$$\Pi_{II}-\Pi_I=\frac{1}{2\,\pi\,a\,K}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{r_{i,\,II}}{r_{i,\,I}} \quad (136\text{–}13)$$

Rastojanja upisana u jednačinu ucrtana su na slici 136–4.



Slika 136–4 Rastojanja koja su upisana u jednačinu (136–13).

U prethodnom izrazu neka Π_I bude pijezometarska kota na rastojanju (r_i) od bunara (i), a neka Π_{II} nameće granični uslov $\Pi_{II}=\Pi_R$, gde je Π_R pijezometarska kota gde su uticaji bunara zanemarljivi, a to je rastojanje R nazvano u prethodnom podeljku „radijus dejstva”.

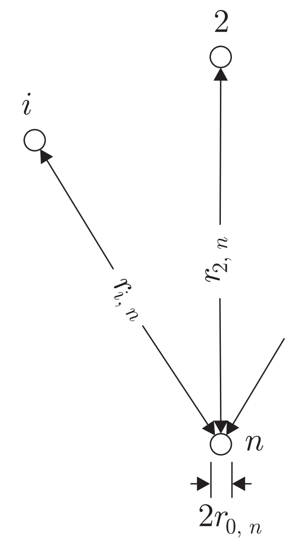
Prethodnim se pretpostavilo da je to rastojanje za sve bunare isto. Sa takvim uslovima (136–13) dovodi do obrasca za razliku između neporemećene pijezometarske kote Π_R, (koja je na udaljenosti R od bunara) i pijezometarske kote Π na proizvoljnom rastojanju r_i od pojedinog (i) bunara:

$$\Pi_R - \Pi = \frac{1}{2\,\pi\,a\,K} \sum_{i=1}^{n} Q_i \ln \frac{R}{r_i} \tag{136–14}$$

Ako se za proizvoljnu tačku uzme nivo $\Pi_{0,n}$ u bunaru (n), sa poluprečnikom $r_{0,n}$, dobija se razlika između neporemećene pijezometarske kote Π_R na rastojanju R od bunara i kote nivoa $\Pi_{0,n}$ u bunaru poluprečnika $r_{0,n}$:

$$\Pi_R - \Pi_{0,n} = \frac{1}{2\,\pi\,a\,K} \left(\sum_{i=1}^{n-1} Q_i \ln \frac{R}{r_{i,n}} + Q_n \ln \frac{R}{r_{0,n}} \right) \tag{136–15}$$

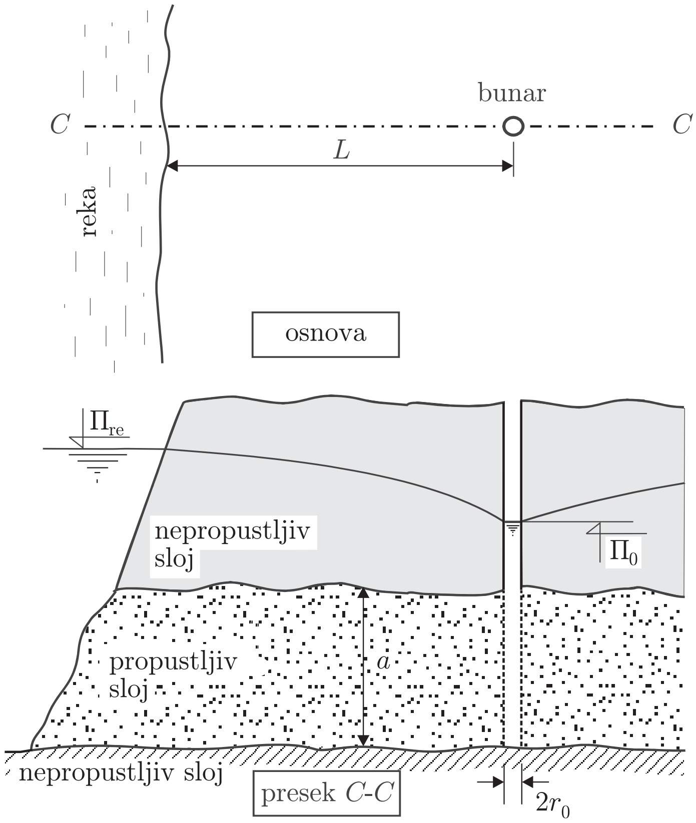
gde je $r_{i,n}$ rastojanje bunara (i) i bunara (n) prikazano slikom 136–5.



Slika 136–5 Rastojanja koja ulaze u jednačinu (136–15).

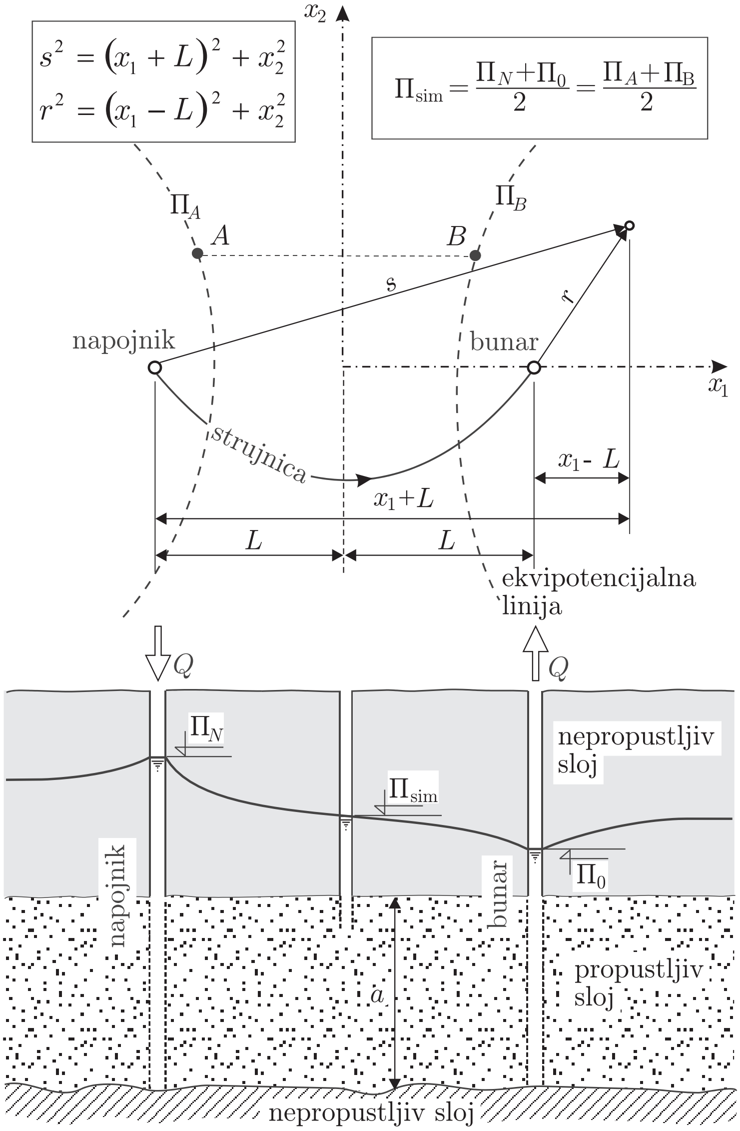
III
BUNAR PORED REKE

Razmatra se *bunar pored reke* na rastojanju L od reke, probijen do nepropustljive podine, kroz propustljivi sloj debljine a (slika 136–6).



Slika 136–6 Bunar pored reke u koga voda dotiče iz propustljivog sloja konstantne debljine (a).

Za rešavanje prikazanog primera koristiće se saznanja koja će proizaći iz primera sa slike 136–7. Na njoj se pored crpljenja iz bunara pretpostavlja i *napojnik* (kontra-bunar, izvor) koji napaja podzemlje proticajem Q, taman onoliko koliko se crpi iz bunara. To strujanje od napojnika do bunara, koji su na međusobnom rastojanju $2\,L$, omogućeno je pijezometarskom razlikom $\Pi_N - \Pi_0$, gde su sa Π_N, odnosno Π_0, označene pijezometarske kote (a to su ujedno i kote nivoa) u napojniku, odnosno



Slika 136–7 U napojniku se uvodi isti proticaj (Q) koji iz njega, kroz propustljivi sloj debljine (a), utiče u bunar iz koga se crpi.

bunaru. Izlazno strujanje iz napojnika simetrično je u odnosu na ulazno u bunar, a osa simetrije, u horizontalnoj ravni u kojoj se strujanje posmatra kao ravansko (to je ravan crteža), je osa x_2. Može se slikovito reći da je izlazno strujanje iz napojnika slika u ogledalu ulaznog strujanja u bunar, ako se ogledalo postavi u osu simetrije. Polovina svake strujnice (a svaka ide od napojnika do bunara) nalazi se u osi simetrije.

Opisana simetričnost dozvoljava da se napiše da je pijezometarska kota na simetrali Π_{sim} na polovini pijezometarske razlike $\Pi_N - \Pi_0$:

$$\Pi_{\mathrm{sim}} = \frac{\Pi_N + \Pi_0}{2} \tag{136–16}$$

Spuštanje pijezometarske kote od napojnika do tačke „A" je isto koliko je spuštanje od tačke „B" do bunara, ako su tačke simetrično postavljene (vidi sl. 136–7), pa se piše:

$$\Pi_N - \Pi_A = \Pi_B - \Pi_0 \tag{136–17}$$

Po ugledu na (136-10) može se napisati:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = \frac{Q}{2\,\pi\,a\,K\,r} \tag{136–18}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial s} = \frac{-Q}{2\,\pi\,a\,K\,s} \tag{136–19}$$

Ovde Π zavisi od rastojanja r od bunara i rastojanja s od napojnika – tj. $\Pi = \Pi(r, s)$, pa se mora ostvariti nagib pijezometarske linije ka bunaru, da bi u njega ulazio proticaj Q, što izražava (136–18), a mora se ostvariti i nagib od napojnika, da bi iz njega izlazio isti proticaj Q, što izražava (136–19), gde je stavljen predznak „minus", jer se radi o strujanju od napojnika, dok je strujanje usmereno ka bunaru.

Množenjem (136–18) sa dr, a (136–19) sa ds, i potom sabiranjem dobija se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial \Pi}{\partial s}\,\mathrm{d}s = \frac{Q}{2\,\pi\,a\,K}\left(\frac{\mathrm{d}r}{r} - \frac{\mathrm{d}s}{s}\right) \tag{136–20}$$

Leva strana je totalni izvod dΠ, pa se integrisanjem dobija:

$$\Pi_{II} - \Pi_I = \frac{Q}{2\,\pi\,a\,K}\ln\left(\frac{r_{II}\,s_I}{s_{II}\,r_I}\right) \tag{136–21}$$

gde su Π_{II} i Π_I pijezometarske kote u tačkama II i I, koje su na rastojanjima r_{II} i r_I od bunara, a s_{II} i s_I od napojnika.

Od ovako opisanoga i rešenoga zadatka nadalje će se posmatrati deo od simetrale do bunara, upravo desna polovina slike 136–7, pa je granični uslov simetrala. Potpuno isti granični uslov je linija obale reke na slici 136–6.

Primeniće se jednačina (136–21) na strujanje u bunar pored reke. Odrediće se razlika između nivoa u reci – to je Π_{re} – i pijezometarske kote Π na proizvoljnom mestu na rastojanju r od bunara i s od zamišljenog napojnika. Pri primeni jednačine biće, dakle, $\Pi_I = \Pi$, $r_I = r$, $s_I = s$, dok je $\Pi_{II} = \Pi_{\mathrm{re}}$, a $r_{II} = s_{II}$, jer je na tački na obali reke jednako rastojanje od bunara i simetrično postavljenog napojnika. Sa uvrštavanjem navedenih veličina u jednačinu (136–21) dobija se:

$$\Pi_{\mathrm{re}} - \Pi = \frac{Q}{2\,\pi\,a\,K} \ln \frac{s}{r} \tag{136–22}$$

Ovo je razlika između nivoa u reci Π_{re} i pijezometarske kote Π na proizvoljnom mestu na rastojanju r od bunara, s od zamišljenog napojnika.

Ako se za Π uzme nivo Π_0 u bunaru, onda je $s = 2\,L$ (dvostruko rastojanje od bunara do reke), a $r = r_0$ (poluprečnik bunara), iz prethodne jednačine sledi:

$$\Pi_{\mathrm{re}} - \Pi_0 = \frac{Q}{2\,\pi\,a\,K} \ln \frac{2\,L}{r_0} \tag{136–23}$$

to je razlika između nivoa Π_{re} u reci i nivoa Π_0 u bunaru, poluprečnika r_0, udaljenim za L od reke.

* * *

Ekvipotencijalne linije za strujanje od reke prema bunaru su kružnice – to će se u nastavku i dokazati. Za primenu jednog određenog bunara i pri određenom proticaju, u korišćenju jednačine (136–22) konstante su: Π_{re}, Q, a i K. Za istu ekvipotencijalnu liniju Π je konstanta, pa jednačina kaže da mora da bude:

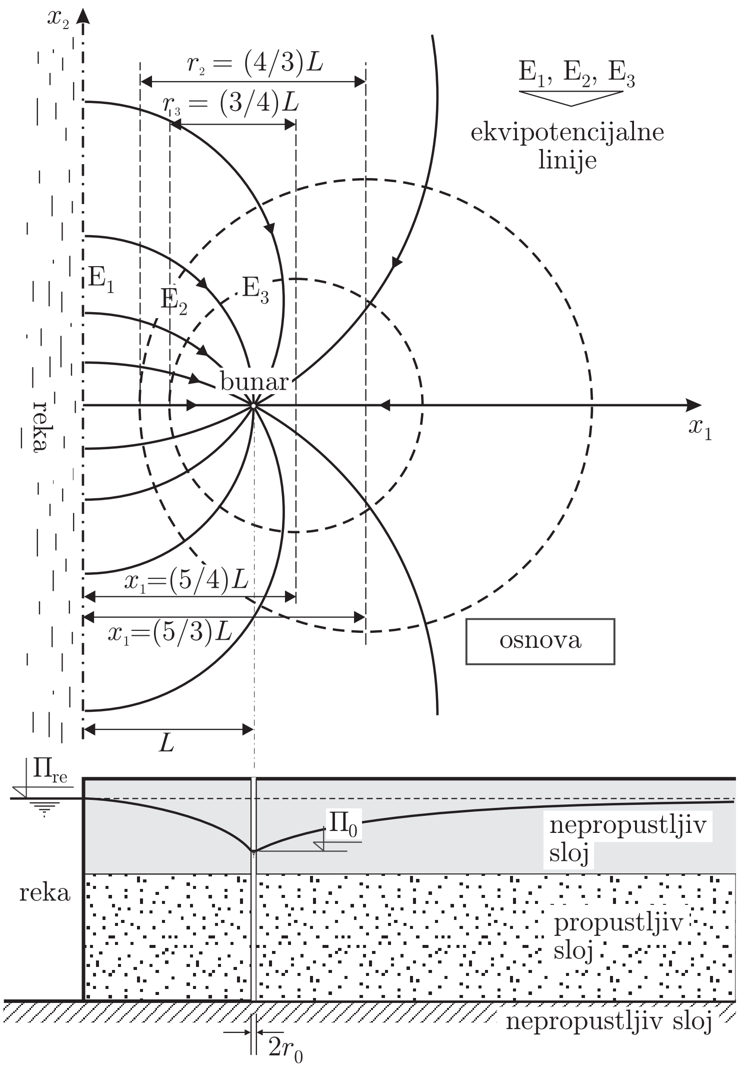
$$\frac{s}{r} = \mathrm{const} = C \tag{136–24}$$

Rastojanja s i r izraziće se kako je prikazano na slici 136–7, pa se, na osnovu prethodnog izraza, piše:

$$\sqrt{(x_1 + L)^2 + x_2^2} = C\left(\sqrt{(x_1 - L)^2 + x_2^2}\right) \tag{136–25}$$

Pošto je $C = \text{const}$, prethodno napisano je jednačina kružnice, a to je trebalo dokazati.

Primenom prethodne jednačine na slici 136–8 nacrtane su ekvipotencijale za $C = 3$, odnosno $C = 2$. Njihove jednačine su:



Slika 136–8 Ekvipotencijalne linije u strujanju od reke prema bunaru su kružnice.

$$E_3: \quad \left(\frac{x_1}{L}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{L}\right)^2 - \frac{5}{2}\frac{x_1}{L} + 1 = 0 \quad \text{za} \quad C = \frac{s}{r} = 3$$
$$E_2: \quad \left(\frac{x_1}{L}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{L}\right)^2 - \frac{10}{3}\frac{x_1}{L} + 1 = 0 \quad \text{za} \quad C = \frac{s}{r} = 2$$

Prva napisana jednačina grafički prikazana je kružnica, sa $r_3 = (3/4)L$ i sa središtem na x_1-osi, a na $x_1 = (5/4)L$. Za drugu napisanu jednačinu odgovarajući podaci su $r_2 = (4/3)L$, $x_1 = (5/3)L$.

Od reke do tačaka na ekvipotencijalnim linijama E_2, odnosno E_3, pijezometarska kota, prema (136–22), spusti se za:

$$\Pi_{\mathrm{re}} - \Pi_2 = \frac{Q}{2\,\pi\,a\,K}\ln 2$$
$$\Pi_{\mathrm{re}} - \Pi_3 = \frac{Q}{2\,\pi\,a\,K}\ln 3$$

To spuštanje u odnosu na ukupno spuštanje od reke do bunara $\Pi_{\mathrm{re}} - \Pi_0$, iznosi:

$$\frac{\Pi_{\mathrm{re}} - \Pi_2}{\Pi_{\mathrm{re}} - \Pi_0} = \frac{\ln 2}{\ln(2\,L/r_0)}$$
$$\frac{\Pi_{\mathrm{re}} - \Pi_3}{\Pi_{\mathrm{re}} - \Pi_0} = \frac{\ln 3}{\ln(2\,L/r_0)}$$

Granična ekvipotencijalna linija (ivica porozne sredine u dodiru sa rekom), označena sa E_1 na slici 136–8, podudara se sa x_2-osom tj.:

$$E_1: \qquad x_1 = 0 \tag{136–26}$$

I ova linija uključena je u (136–25), jer je za nju $s = r$, pa je, prema (136–24), $C = 1$, a za tu vrednost (136–25) se svodi na $x_1 = 0$. Ovu pravu treba shvatiti kao kružnicu beskonačnog velikog poluprečnika, a udaljavanjem od nje ekvipotencijalne linije su kružnice sve manjega prečnika, do najmanjega za koga je $r = r_0 =$ poluprečnika bunara.

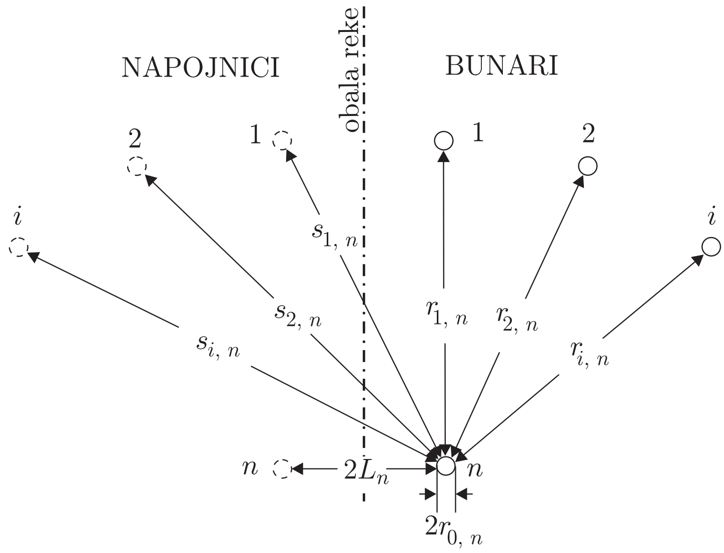
IV
GRUPA BUNARA PORED REKE

Iz bunara (1) crpi se proticaj Q_1, iz bunara (2) proticaj Q_2 itd, odnosno iz bunara (i) crpi se Q_i (slika 136–9). Za svaki od bunara zamišlja se odgovarajući simetrično postavljeni napojnik. Za proizvoljnu tačku, u kojoj je pijezometarska kota Π, rastojanja od bunara su $r_1, r_2, \ldots, r_n$, a od napojnika $s_1, s_2, \ldots, s_n$, gde je n ukupan broj bunara. Pijezometarska kota mora da opada ka svim bunarima i od svih napojnika. Zbog učešća bunara (1) nagibi pijezometarske linije su:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r_1} = \frac{Q_1}{2\,\pi\,a\,K\,r_1} \tag{136–27}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial s_1} = \frac{-Q_1}{2\,\pi\,a\,K\,s_1} \tag{136–28}$$

Ovo je napisano ugledajući se na (136–18) i (136–19).



Slika 136–9 Rastojanja koja ulaze u jednačinu (136–33).

Iste ovakve jednačine mogu se napisati sa svih n bunara, pa onda te jednačine treba pomnožiti sa $\mathrm{d}r_1, \mathrm{d}s_1, \mathrm{d}r_2, \mathrm{d}s_2, \ldots, \mathrm{d}r_n, \mathrm{d}s_n$. Kada se sve te jednačine saberu, na levoj strani dobiće se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r_1}\mathrm{d}r_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial s_1}\mathrm{d}s_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial r_2}\mathrm{d}r_2 + \frac{\partial \Pi}{\partial s_2}\mathrm{d}s_2, \ldots, + \frac{\partial \Pi}{\partial r_n}\mathrm{d}r_n + \frac{\partial \Pi}{\partial s_n}\mathrm{d}s_n = \mathrm{d}\Pi$$

jer je sada:

$$\Pi = \Pi(r_1,\, s_2,\, r_2,\, s_2,\, \ldots,\, r_n,\, s_n) \tag{136–29}$$

Sabrane desne strane ovih jednačina daju:

$$\frac{1}{2\,\pi\,a\,K}\left(Q_1\frac{\mathrm{d}r_1}{r_1} - Q_1\frac{\mathrm{d}s_1}{s_1} + Q_2\frac{\mathrm{d}r_2}{r_2} - Q_2\frac{\mathrm{d}s_2}{s_2}, \ldots\right) = $$
$$= \frac{1}{2\,\pi\,a\,K}\sum_{i=1}^{n} Q_i\left(\frac{\mathrm{d}r_1}{r_i} - \frac{\mathrm{d}s_i}{s_i}\right) \tag{136–30}$$

Izrazi (136–29) i (136–30) su međusobno jednaki. Posle izjednačenja i integrisanja u granicama od Π_I i Π_{II}, (Π_I je pijezometarska kota na rastojanjima $r_{i,\,I}$ od bunara (i), odnosno $s_{i,\,I}$ od odgovarajućeg napojnika, a Π_{II} na rastojanjima $r_{i,\,II}$ i $s_{i,\,II}$). Tako se dobija:

$$\Pi_{II} - \Pi_I = \frac{1}{2\,\pi\,a\,K}\sum_{i=1}^{n} Q_i \ln\frac{r_{i,\,II}\, s_{i,\,I}}{s_{i,\,II}\, r_{i,\,I}} \tag{136–31}$$

Napisaće se jednačina uz granični uslov na obali reke, gde je $\Pi_{II} = \Pi_{\mathrm{re}}$, a $r_{i,\,II} = s_{i,\,II}$ (jer je bilo koja tačka na toj liniji podjednako udaljena od bunara i njemu odgovarajučeg napojnika). Neka je uz to $\Pi_I = \Pi$ kota na proizvoljnoj tački. Dobija se:

$$\Pi_{\mathrm{re}} - \Pi = \frac{1}{2\,\pi\,a\,K}\sum_{i=1}^{n} Q_i \ln\frac{s_i}{r_i} \tag{136–32}$$

Sada će se za Π uzeti kota nivoa u bunaru „n", pa se dobija razlika između nivoa Π_{re} u reci i nivoa $\Pi_{0,\,n}$ u bunaru „n":

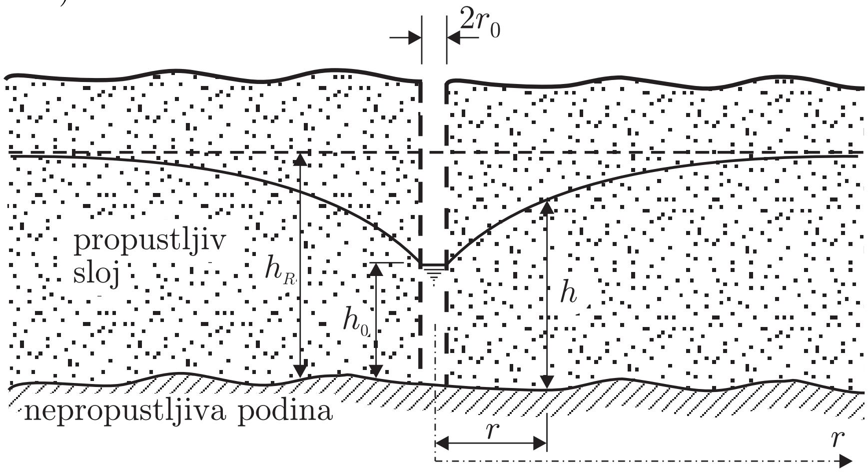
$$\Pi_{\mathrm{re}} - \Pi_{0,\,n} = \frac{1}{2\,\pi\,a\,K}\left(\sum_{i=1}^{n-1} Q_i \ln\frac{s_{i,\,n}}{r_{i,\,n}} + Q_n \ln\frac{2\,L_n}{r_{0,\,n}}\right) \tag{136–33}$$

gde je $r_{i,\,n}$ rastojanje između bunara „i" i posmatranog bunara „n", $s_{i,\,n}$ rastojanje između zamišljenog napojnika „i" i posmatranog bunara „n" i L_n = rastojanje bunara „n" od reke.

Rastojanja upisana u jednačinu ucrtana su na slici 136–9.

V
STRUJANJE KA BUNARIMA SA SLOBODNOM POVRŠINOM VODE

Strujanje *sa slobodnom površinom vode* u usamljeni bunar kroz propustljivi sloj na nepropustljivoj horizontalnoj podini prikazuje slika (136–10).



Slika 136–10 Strujanje u bunar toka sa slobodnom površinom vode.

Kroz omotač kružnog cilindra poluprečnika r i visinom, odnosno dubinom h, proticaj iznosi:

$$Q = 2\,\pi\,r\,h\,v \tag{136–34}$$

Brzina će se ovde izraziti na isti način kao brzina u izrazu (136–1) uz zamenu $\mathrm{d}\Pi$ sa $\mathrm{d}h$, jer je ovde priraštaj pijezometarske kote jednak priraštaju dubine. Dakle:

$$v = K\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r} \tag{136–35}$$

Napominje se da je ovde, kao i tamo kod pisanja (136–1), uslovljeno da je pozitivan smer za brzinu ka bunaru, a pozitivan smer za rastojanje r je od bunara.

Koristeći (136–35) za zamenu v u (136–34) dolazi se do:

$$Q = 2\,\pi\,r\,h\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r} \tag{136–36}$$

ili rastavljanjem promenljivih h i r:

$$h\,\mathrm{d}h = \frac{Q}{2\,\pi\,K}\frac{\mathrm{d}r}{r} \tag{136–37}$$

Integraljenjem izraza u granicama od r_I do r_{II}, gde su dubine h_I i h_{II}, dobija se:

$$h_{II}^2 - h_I^2 = \frac{Q}{\pi\,K}\ln\frac{r_{II}}{r_I}$$

U prethodnoj jednačini uzeće se za granične uslove: $h_{II} = h$, $h_I = h_0$, $r_{II} = r$, $r_I = r_0$, gde se veličine sa indeksom (II) odnose na proizvoljno rastojanje r od osovine bunara, gde je dubina h, a veličine sa indeksom (I) na bunar poluprečnika r_0 u kome je dubina h_0. Odgovarajući granični uslovi za strujanje pod pritiskom doveli su do jednačine (136–5). Ovdašnji granični uslovi dovode do:

$$h^2 - h_0^2 = \frac{Q}{\pi\,K}\ln\frac{r}{r_0} \tag{136–38}$$

Umesto jednačine (136–6) dobiće se za strujanje sa slobodnom površinom:

$$h_R^2 - h_0^2 = \frac{Q}{\pi\,K}\ln\frac{R}{r_0} \tag{136–39}$$

gde je h_R neporemećena dubina na rastojanju R od osovine bunara.

Upoređenje (136–37) sa (136–3), ili (136–38) sa (136–5), ili (136–39) sa (136–6), pokazuje da se:

$$\boxed{\begin{array}{c} a\,\mathrm{d}\Pi \\ \text{strujanje} \\ \text{pod} \\ \text{pritiskom} \end{array}} \quad \text{zamenjuje sa} \quad \boxed{\begin{array}{c} \mathrm{d}(h^2/2) \\ \text{strujanjem} \\ \text{sa slobodnom} \\ \text{površinom} \end{array}} \tag{136–40}$$

a upoređenje (136–38) sa (136–4) daje da se:

$$\boxed{a\,(\Pi_{II} - \Pi_I)} \quad \text{zamenjuje sa} \quad \boxed{\frac{h_{II}^2 - h_I^2}{2}} \tag{136–41}$$

To je potpuno u skladu sa (132–24), odnosno (132–25) – naime, isti su izrazi.

Za grupe bunara, umesto jednačine (136-10), za strujanje sa slobodnom površinom, došlo bi se do jednačine:

$$\frac{\partial h}{\partial r_1} = \frac{Q_1}{2\,\pi\,h\,K\,r_1} \tag{136–42}$$

jer je u tamošnjoj jednačini $\partial\Pi/\partial r_1$ zamenjeno sa $\partial h/\partial r_1$, a debljina a sa dubinom h.

Upoređenje (136–42) sa (136–10) pokazuje da se $\partial\Pi$ zamenjuje sa $h\,\partial h$, odnosno sa $\partial(h^2/2)$, pa će integrisanjem (136–42) i izraza za ostale bunare doći do jednačine u kojima će $\Pi_{II} - \Pi_I$ biti zamenjeni sa $(h_{II}^2 - h_I^2)/2$.

Dakle, i ovde važi zamena napisana sa (136–41). Isto će biti i kod bunara pored reke.

Primenom navedene zamene u (136–14), odnosno (136–15) dobija se:

$$h_R^2 - h^2 = \frac{1}{\pi\,K}\sum_{i=1}^{n} Q_i\,\ln\frac{R}{r_i} \tag{136–43}$$

$$h_R^2 - h_{0,\,n}^2 = \frac{1}{\pi\,K}\left(\sum_{i=1}^{n-1} Q_i\,\ln\frac{R}{r_{i,\,n}} + Q_n\,\ln\frac{R}{r_{0,\,n}}\right) \tag{136–44}$$

a iz (136–22), odnosno (136–23), dobija se:

$$h_{\mathrm{re}}^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi\,K}\,\ln\frac{s}{r} \tag{136–45}$$

$$h_{\mathrm{re}}^2 - h_0^2 = \frac{Q}{\pi\,K}\,\ln\frac{2\,L}{r_0} \tag{136–46}$$

I, na kraju (136–32), odnosno (136–33) dozvoljavaju da se napiše:

$$h_{\mathrm{re}}^2 - h^2 = \frac{1}{\pi\,K}\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i\,\ln\frac{s_i}{r_i}\right) \tag{136–47}$$

$$h_{\mathrm{re}}^2 - h_{0,\,n}^2 = \frac{1}{\pi\,K}\left(\sum_{i=1}^{n-1} Q_i\,\ln\frac{s_{i,\,n}}{r_{i,\,n}} + Q_n\,\frac{2\,L}{r_{0,\,n}}\right) \tag{136–48}$$

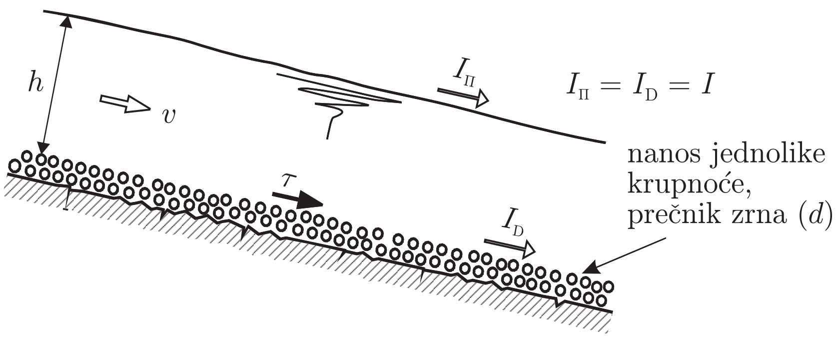
U napisanim jednačinama dubina h_R je neporemećena dubina na rastojanju R od osovine bunara (R = radijus dejstva), dok je h dubina na proizvoljnom rastojanju r od bunara, a h_0 označava dubinu u bunaru, čiji je poluprečnik r_0.

deo četrnaesti

VODENI TOKOVI SA KRETANJEM NANOSA PO DNU

141
PROCENA PROTICAJA VUČENOG NANOSA PO DNU VODOTOKA

Posmatra se ravansko, jednoliko i ustaljeno tečenje vode po dnu, sastavljenom od pokretnog nanosa jednake krupnoće, prikazano na slici 141–1. Za prečnik zrna d uzima se prečnik lopte koja ima istu zapreminu kao zrno nanosa. Nanos se neće kretati ako je napon trenja τ između vode i dna nedovoljan da pokrene pojedina zrna nanosa, jer se ona opiru trenjem o zrna ispod njih. Zanimljiva je *granična vrednost τ_c napona τ do koje je dno stabilno* tj. za $\tau \leq \tau_c$ nanos se ne kreće, odnosno tek za $\tau > \tau_c$ on se kreće.



Slika 141–1 Razmatra se jednoliko ravansko tečenje sa pokretnim nanosom na dnu.

U praktičnom smislu reči kao ravansko tečenje se može shvatiti tečenje u pravougaonom kanalu gde se iz razmatranja može isključiti strujanje uz bokove kao malo uticajno na pretežni deo strujanja, koje se onda može smatrati ravanskim. To se približno ostvaruje ako je širina kanala velika u odnosu na dubinu – tada se govori o „širokom koritu". Ne mora da bude širina ni izrazito velika, a da trenje o bokove bude zanemarljivo u odnosu na trenje o dno, ako su bokovi znatno manje hrapavosti od dna.

Eksperimentalna istraživanja u hidrauličkoj laboratoriji obično se izvode u širokom kanalu sa glatkim bočnim zidovima (na primer, staklenim) i dnom u nanosu.

Uslovljavanje jednolikosti tečenja znači dužinom kanala nepromenljivu dubinu (na slici označena sa h) – to je normalna dubina. Dužinom kanala ne menja se ni brzina v u preseku. Jasno je da su nagibi nivoa vode i dna isti, $I_{\Pi} = I_{\mathrm{D}}$ – stoga će se pisati jednostavno I.

Posmatranje zadatka kao ravanskog, čime se izostavilo trenje o bokove, kao obim po kome se obavlja trenje računa se samo dno, pa je $O = b =$ *širina kanala*, dok je porečni presek $A = b\,h$, pa je hidraulički radijus $R = A/O = h$, tj. zamenjuje ga dubina h.

Iz jedne od osnovnih hidrauličkih zakonitosti, napisane sa (91–12), zamenom R sa h dobija se:

$$\frac{\tau}{\gamma\,h} = I_{\mathrm{D}} = I_{\Pi}$$

Pošto je uvedena jednostavna oznaka I za $I_{\mathrm{D}} = I_{\Pi}$, piše se:

$$\tau = \gamma\,h\,I \tag{141–1}$$

Jednolikost i ravansko strujanje nameće da se napon trenja τ ne menja ni u poprečnom preseku ni duž struje.

Uz sve navedeno, što je zadatak pojednostavilo, uslovljava se da je nanos jednolik, iste krupnoće, pa se izražava samo jedan podatak prečnik zrna d, kao mera krupnoće.

Napisaće se funkcija koja će povezivati sve veličine koje međusobnim delovanjem uzrokuju kretanje, odnosno mirovanje nanosa. Te veličine su: dubina h, brzina v, gustina ρ, i koeficijent viskoznosti vode μ, te krupnoća d i gustina nanosa ρ_s. Proticaj nanosa (zapremina koja se prenosi u jedinici vremena), a po jedinici širine toka označiće se sa q_s. Uz to će uticaj težine unositi gravitaciono ubrzanje g. Nabrojenih 8 veličina čine vezu:

$$f^{\dim}(h,\, v,\, \rho,\, \mu,\, d,\, \rho_s,\, q_s,\, g) = 0 \tag{141–2}$$

Zameniće se ρ_s sa $\rho_s - \rho$, što omogućava okolnost da u vezu ulazi i ρ. Primeniće se dimenzionalna analiza koja će prethodnu vezu 8 dimenzionalnih veličina svesti na vezu $8 - 3 = 5$ bezdimenzionalnih veličina, pri čemu će se za osnovne veličine uzeti d, v, ρ, a ostalih 5 će svojim bezdimenzionalnim predstavnicama obrazovati sledeću vezu:

$$f^{\text{bezdim}}\left(\frac{h}{d}, \frac{\mu}{\rho\, d\, v}, \frac{\rho_s - \rho}{\rho}, \frac{q_s}{d\, v}, \frac{g\, d}{v^2}\right) = 0 \qquad (141\text{–}3)$$

Sa veličinama opisanim u (141–2) posredno je određen napon trenja vode o nanos τ, jer se shodno (96–20) može pisati:

$$\frac{\tau}{\rho\, v^2} = f\left(\frac{d}{h}, \frac{\mu}{\rho\, h\, v}\right) \qquad (141\text{–}4)$$

Ovo je dobijeno pošto je u funkciji f^{dim}, napisanoj ispred (96–20), zamenjena apsolutna hrapavost k sa d, a prečnik D sa dubinom h, i tako izmenjena funkcija f^{dim} povezuje τ sa veličinama od kojih zavisi u zadatku koji se sada razmatra. Bezdimenzionalna zamena za tako napisano f^{dim} je prethodni izraz (141–4).

Izraz (141–1) ukazuje da je određenjem napona τ, uz poznatu dubinu h, određen i nagib I. Dakle, sa (141–2) obuhvaćene su sve merodavne veličine koje određuju zadato strujanje.

Prethodno razmatranje pokazuje da bi uvođenje napona τ u razmatranje, upravo njegovo dodavanje u (141–2), unosilo jednu suvišnu veličinu. Ona se može uvesti, ali onda treba izostaviti jednu veličinu u (141–2). To će se i uraditi zamenom brzine v sa τ. Dimenzionalni sklad zahteva u veličinama u (141–3) zamenu v sa $\sqrt{\tau/\rho}$, što ima dimenziju brzine i često se naziva „brzina trenja", što je navedeno pri pojavi $\sqrt{\tau/\rho}$ u jednačini (94–10), a u objašnjenju iza te jednačine.

Zamenom v sa $\sqrt{\tau/\rho}$, u (141–3), i μ/ρ sa kinematskim koeficijentom viskoznosti ν, dobija se:

$$f\left(\frac{h}{d}, \frac{\nu}{d\sqrt{\tau/\rho}}, \frac{\rho_s-\rho}{\rho}, \frac{q_s}{d\sqrt{\tau/\rho}}, \frac{\rho\, g\, d}{\tau}\right)=0 \qquad (141\text{–}5)$$

(I) (II) (III) (IV) (V)

U ovoj funkciji obaviće se prepravke prema sledećem:

1. Član (V) unosi uticaj težine. Pošto težina nanosa ima bitan uticaj na pokretanje, odnosno nepokretanje nanosa, to treba istaći, a to će se postići povezivanjem članova (III) i (V), upravo njihovim množenjem, čime se dobija bezdimenzionalna veličina:

   $$\text{(VI)} \qquad \frac{(\rho_s-\rho)\, g\, d}{\tau}=\Psi \qquad (141\text{–}6)$$

   Treba primetiti da ova veličina predstavlja jednu bitnu karakteristiku zadatka koji se raspravlja, što se vidi iz sledećeg:

   Težina zrna nanosa umanjena za potisak vode, tzv. „olakšana težina", sa kojom se računa, iznosi $G = C_I\,(\gamma_s-\gamma)\,d^3$ (γ_s i γ su specifične težine nanosa, odnosno vode, a C_I je konstanta, pod pretpostavkom da su zrna istog oblika.) Ta težina deluje na površini $A = C_{II}\,d^2$, gde je C_{II} konstanta za zrna istog oblika. Po jedinici površine dejstvo težine izražava $G/A = (\gamma_s-\gamma)\,d\ C_I/C_{II}$, pa je $(\gamma_s-\gamma)\,d = (\rho_s-\rho)\,g\,d$ pokazatelj delovanja težine koja se suprotstavlja pokretanju nanosa. Po jedinici površine delujući uticaj koji pokreće nanos je napon τ, on se često naziva i „vučna sila". Objašnjeno ukazuje da član (VI), napisan sa (141–6), ukazuje na odnos uticaja koji se suprotstavlja pokretanju prema uticaju koji pokreće, a od toga zavisi pronošenje nanosa.

   Uvođenje člana (VI) dozvoljava izostavljanje (III) ili (V), izostaviće se (III).

2. Član (V) će se zameniti sa članom koji se dobija množenjem toga člana sa članom (I) – taj proizvod je jednak $\rho\, g\, h/\tau$, a to je, nadalje, ako se iskoristi (141–1), jednako $1/I$. Takav član može da se izostavi, jer je objašnjeno da su sa (141–2) obuhvaćene sve veličine koje određuju razmatrano strujanje, odnosno da je nagib I posredno određen određenjem veličina u (141–2). Tako se, umesto (I) i (V) zadržava samo (I), a u produžetku će se pokazati da se i on može izostaviti.

3. Može se izostaviti član (I), jer je za kretanje nanosa merodavan raspored brzine pri dnu, a za raspored počevši od zida napisana je funkcija (94–34), proizašla iz razmatranja u Poglavlju 94. Iz te funkcije čita se da je brzina v na proizvoljnom rastojanju x_2 od zida (ovde od dna) zavisi od τ, ρ, ν i k. Apsolutnu hrapavost k ovde zamenjuje prečnik zrna d, ν se može zameniti sa μ, pa onda brzinu v određuju τ, ρ, μ i d, koje su upisane u (141–2). U (94–34) nije upisana debljina struje, jer je tamo raspravljeno da je za raspored brzina, počevši od zida, bitna vrednost napona τ, a nije uticajno koja dubina h ga stvara. Ovim je opravdano ispuštanje člana (I).

Navedeno pod 1), 2) i 3) dozvoljava da se u (141–5) izostavi (I), da se zameni (III) sa (VI), i da se izostavi (V). Uz to će se umesto (II) uzeti njegova recipročna vrednost. Tako se dobija:

$$f\left(\underset{(a)}{\frac{d\sqrt{\tau/\rho}}{\nu}},\ \underset{(b)}{\frac{(\rho_s-\rho)\,g\,d}{\tau}},\ \underset{(c)}{\frac{q_s}{d\sqrt{\tau/\rho}}}\right)=0 \qquad (141\text{–}7)$$

Član (a) može se izraziti kao Re-broj, gde je d karakteristična dužina, a $\sqrt{\tau/\rho}$ se može shvatiti, shodno objašnjenju datom ispred (141–5), kao brzina.

Može se označiti kao oblik Re-broja:

$$Re_+ = \frac{d\sqrt{\tau/\rho}}{\nu} \qquad (141\text{–}8)$$

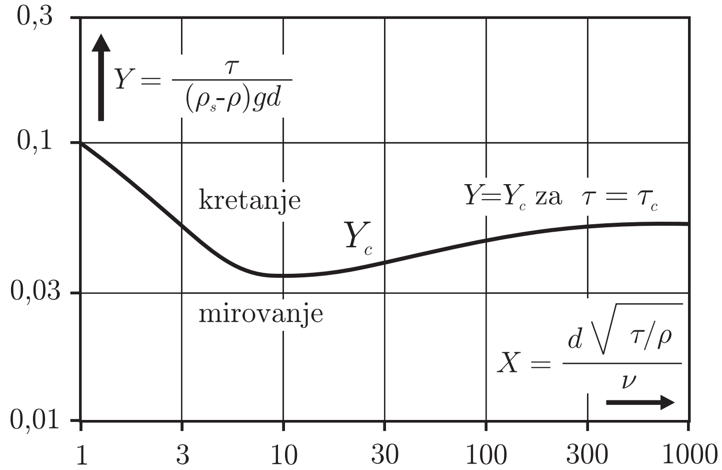
Veza napisana sa (141–7) poslužiće kao osnova za naredna razmatranja. Treba naglasiti da je dimenzionalna analiza svesno i smišljeno vođena da se dođe do bezdimenzionalnih veličina, koje se primenjuju u proučavanju kretanja nanosa, koje će biti korišćene u narednim izlaganjima, i koje su upisane u (141–7). Upravo, dimenzionalna analiza je poslužila da se zadatak opisan sa veličinama, napisanim u (141–2), zaista može svesti na vezu bezdimenzionalni veličina (141–7), koje se koriste u praktičnim razmatranjima.

* * *

Uslov za obezbeđenje stabilnosti dna (za mirovanje nanosa) određuje granična vrednost napona ($\tau = \tau_c$). U izrazu (141–7) će se uvrstiti $\tau = \tau_c$, a izostaviće se član (c), jer kretanje nanosa za $\tau = \tau_c$ još nema (ono nastaje ako je $\tau > \tau_c$). Tako se dobija veza dve bezdimenzionalne veličine:

$$f\left(\frac{d\sqrt{\tau_c/\rho}}{\nu}, \frac{(\rho_s - \rho)\, g\, d}{\tau_c}\right) = 0 \qquad (141–9)$$

Brojni eksperimentalni rezultati (sa različitom krupnoćom i specifičnom težinom nanosa) pokazali su da se mogu uklopiti u određenost funkcije (141–9) prikazanu na slici 141–2. Taj prikaz nalazi se u svim knjigama koje se bave ovom problematikom i obično se naziva *Šildsov dijagram* (SHIELDS).



Slika 141–2 Šildsov (SHIELDS) dijagram određuje granicu stabilnosti dna.

Za razvijenu turbulenciju uticaj viskoznosti se može izostaviti, pa otpada prvi član u prethodnom izrazu (141–9), a onda je drugi konstanta:

$$\frac{\tau_c}{(\rho_s - \rho)gd} = \text{const} = C \qquad (141–10)$$

Iz slike 141–2 vidi se da se to ostvaruje za otprilike $(d\sqrt{\tau/\rho}/\nu) > 200$.

Vrednost ove konstante, prema različitim navodima kreće se od 0,045 do 0,06 – može se kao približno uzeti:

$$C = 0{,}05 \tag{141–11}$$

* * *

Sem zadovoljenja jednačine (141–9) za stabilnost dna, mora se zadovoljiti i jednačina koja određuje proticanje vode.

Brzina v vodenog toka određena je jednom od osnovnih hidrauličkih zakonitosti (91–20), gde se R može zameniti sa h, što je objašnjeno pre pisanja (141–1), a I_E se zamenjuje sa I (i nagib I_E linije energije je isti kao nagib dna i nivoa). Dobija se:

$$v = \sqrt{\frac{1}{C_\tau} 2\, g\, h\, I} \tag{141–12}$$

Sa C_τ je označen koeficijent trenja za koga postoji niz obrazaca – uzeće se veoma često primenjivani (91–31), u kome će se R zameniti sa h, i apsolutna hrapavost k sa prečnikom zrna d, pa se piše:

$$C_\tau = 0{,}029\,(d/h)^{1/3} \tag{141–13}$$

Uvrštavanje tako određenog koeficijenta C_τ u (141–12) dovodi do:

$$v = \sqrt{\frac{h^{1/3}}{0{,}029\ d^{1/3}}}\sqrt{2\, g\, h\, I} \tag{141–14}$$

Veoma često je primenjivan Maningov obrazac (91–32), koji se za $R = h$ i $I_E = I$ piše sa:

$$v = \frac{1}{n}\, h^{2/3}\, I^{1/2} \tag{141–15}$$

Upoređenje prethodne dve jednačine pokazuje da daju isti rezultat, ako je veza između d i n:

$$n = d^{1/6}\sqrt{\frac{0{,}029}{2g}} \tag{141–16}$$

Ovo se moglo neposredno napisati iz (91–35), uzevši za apsolutnu hrapavost k i prečnik zrna nanosa d.

U (141–12) zamenjuje se $h\,I$ sa τ/ρ (čime se dobija veza v od τ):

$$v = \sqrt{\frac{1}{C_\tau}\,2\,g\frac{\tau}{\rho}} \tag{141–17}$$

Dno će biti stabilno ako je $\tau < \tau_c$, gde je τ_c granična vrednost napona τ, data sa (141–10). Prema tome, sa $\tau = \tau_c$ dobija se brzina $v = v_c$ na granici stabilnosti (za $v < v_c$ dno je stabilno):

$$v_c = \sqrt{\frac{1}{C_\tau}}\sqrt{2\,g\,C\left(\frac{\gamma_s-\gamma}{\gamma}\right)d} \tag{141–18}$$

odnosno uz zamenu C_τ prema (141–13) dobija se:

$$v_c = \sqrt{\frac{h_c^{1/3}}{0{,}029\ d^{1/3}}}\sqrt{2\,g\,C\left(\frac{\gamma_s-\gamma}{\gamma}\right)d} \tag{141–19}$$

Ako se želi izraziti korivsćenjem Maningovog koeficijenta n, treba koristiti (141–16), da se u (141–19) zameni $\sqrt{2\,g/0{,}029}/d^{1/6}$ sa $1/n$. Dobija se:

$$v_c = \frac{1}{n}\,h^{1/6}\sqrt{C\left(\frac{\gamma_s-\gamma}{\gamma}\right)d} \tag{141–20}$$

Treba primetiti da je prethodno napisano za jednoliki nanos krupnoće d. Za nanos koji nije jednolik, u izrazu (141–14), za d treba uzeti krupnoću d_{50} (polovina mase zrna je krupnija, a polovina sitnija od d_{50} – što bi se statističkim razmatranjem reklo da je d_{50} medijana), jer se time dobija vrednost koja izražava prosek u dejstvu odupiranja pokretanju nanosa. Koeficijent trenja C_τ međutim, zavisi od zrna koja najviše štrče, a to su najkrupnija zrna, pa se za d obično uzima d_{90} (90% ukupne mase zrna je sitnije od d_{90}). Ovo je već navedeno u Odeljku I Poglavlja 99. Prema tome, za apsolutnu hrapavost k u (91–31) treba uzeti d_{90}, pa bi trebalo uzeti $d = d_{90}$ u (141–13) i (141–14), kao i u prvom delu (141–19), dok bi u drugom delu trebalo uzeti $d = d_{50}$, pa se piše:

$$v_c = \sqrt{\frac{h_c^{1/3}}{0{,}029\ d_{90}^{1/3}}} \sqrt{2\,g\,C\left(\frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma}\right) d_{50}} \tag{141–21}$$

* * *

Ruski autori uzimaju graničnu vrednost brzine v_c kao pokazatelj stabilnosti dna i ono je stabilno ako je $v < v_c$. Obrasci kojima se određuje granična vrednost brzine v_c mogu se dovesti u vezu sa ovde napisanim izrazima. Šamov navodi da je $v_c = 4{,}4\ h^{1/6}\,d^{1/3}$, a obrazac (141–19) sa $C = 0{,}05$, koliko je procenjeno sa (141–11) i sa $\gamma_s/\gamma = 2{,}5$, koliko je otprilike za rečni nanos, daje $v_c = 5{,}7\ h^{1/6}\,d^{1/3}$. Napisana dva izraza su iste strukture, u obe je v_c srazmerno sa $h^{1/6}\,d^{1/3}$, samo su različiti faktori srazmernosti (4,4 odnosno 5,7). Manja vrednosti u prvom izrazu je posledica toga što se u obrascu Šamova podrazumeva da je brzina v_c pri dnu, a u drugom (kao u svim prethodnim izlaganjima) to je srednja (prosečna) brzina u struji.

Gončarov je napisao obrazac:

$$v_c = 0{,}54\ \log\left(\frac{8{,}8\ h}{d_{90}}\right)\sqrt{2\,g\left(\frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma}\right)\ d_{50}}$$

koji se izvodi iz logaritamske zavisnosti koeficijenta trenja od relativne hrapavosti. Može su u izrazu (141–18) C_τ izraziti logaritamskom zavisnošću – uzeće se (96–19), uz zamene: $\lambda = 4\,C_\tau$, $k = d_{90}$, $D = 4\,h$ (jer je $D = 4\,R$, a u u ovdašnjim izlaganjima se uzima da je $R = h$). Tako se iz (96–19) dobija C_τ, a ako se uzme da je $C = 0{,}05$, izraz (141–18) se dovodi do:

$$v_c = 0{,}89\ \log\left(\frac{14{,}8\,h}{d_{90}}\right)\sqrt{2\,g\left(\frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma}\right)\ d_{50}}$$

Ovaj izraz daje veće vrednosti od njemu prethodnog – objašnjenje se može naći kao kod prvog obrasca (obrasca Šamova).

* * *

Pronošenje nanosa određuje veličina q_s, za koji je objašnjeno da je zapreminski proticaj (proticaj zapremine u jedinici vremena) nanosa po jedinici širine toka. Njega bezdimenzionalno predstavlja član (c) u izrazu (141–7). U tom izrazu izostaviće se član (a), jer će se pretpostaviti da je turbulencija dovoljno izražena da viskoznost ne utiče na proticaj nanosa. Uz to će se član (c) zameniti sa (c)/$\sqrt{\text{(b)}}$. Dobija se:

$$f\left(\frac{(\rho_s - \rho)\, g\, d}{\tau},\ \frac{q_s}{\sqrt{g\, d^3\, (\rho_s - \rho)\, /\rho}}\right) = 0 \qquad (141–22)$$

Za prvi član je dato objašnjenje da je pokazatelj suprotstavljanja kretanju nanosa, on je pokazatelj odnosa sile suprotstavljanja prema raspoloživoj vučnoj sili. Od toga, van svake sumnje, zavisi pronošenje nanosa, čiji je pokazatelj drugi član u prethodnom izrazu.

Bezdimenzionalne veličine, koje su uobičajne u razmatranju kretanja nanosa, obeležiće se sa po jednim slovom:

$$\Psi = \frac{(\rho_s - \rho)\, g\, d}{\tau} \qquad (141–23)$$

$$\Phi = \frac{q_s}{\sqrt{g\, d^3\, (\rho_s - \rho)\, /\rho}} \qquad (141–24)$$

Funkcija (141–22) sada se može skraćeno napisati:

$$f\,(\Psi,\, \Phi) = 0 \qquad (141–25)$$

Ψ se može napisati i na sledeći način:

$$\Psi = \frac{(\gamma_s - \gamma)\, d}{\gamma\, h\, I} \qquad (141–26)$$

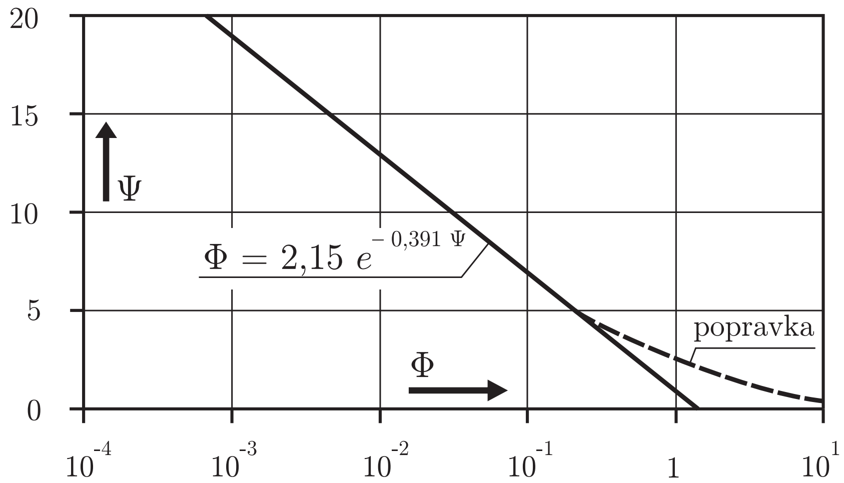
Što je dobijeno korišćenjem (141–1), upravo zamenom u (141–23) τ sa $\gamma\, h\, I$.

S obzirom da je suprotstavljanje pokretanju veće, ako je Ψ veće, a onda je manje pronošenje, sa porastom Ψ opada Φ.

Vezu između Ψ i Φ, tj. određenje funkcije (141–25) dao je Ajnštajn (EINSTEIN) u sledećem vidu (za jednoliki nanos):

$$\Phi = 2{,}15\ e^{-0{,}391\,\Psi} \qquad (141–27)$$

Grafički prikaz ove funkcije nacrtan je na slici 141–3. Ona se dobro prilagođava eksperimentalnim rezultatima za $\Psi > 5$, a za manje vrednosti odstupanja su primentna i ta zavisnost, prikazana isprekidanom linijom, približno izražava eksperimentalne rezultate.



Slika 141–3 Grafikon funkcije (141–27).

Ime za koje se veže prethodno napisana zakonitost nije Ajnštajn, tvorac teorije relativiteta, nego njegov sin Hans Albert, poznati istraživač iz hidraulike, posebno u teoriji vučenog nanosa.

Za $\tau = \tau_c$ primenom (141–23), (141–10) i (141–11) dobija se:

$$\Psi = \frac{(\rho_s - \rho)\, g\, d}{\tau_c} = \frac{1}{C} = 20 \tag{141–28}$$

pa bi za $\Psi = 20$ trebalo da bude $\Phi = 0$, a to ne daje jednačina (141–27), ali ona daje veoma malenu i zanemarljivu vrednost, $\Phi = 8{,}6 \times 10^{-4}$. Za tu vrednost, sa $(\rho_s/\rho) = 2{,}5$ i d od 0,001 do 0,1 m primenom jednačine (141–24) dobija se q_s otprilike 10^{-7} do 10^{-4} m^2/s, a to je doista zanemarljivo. Za veće vrednosti za Ψ dobijaju se još manje vrednosti za Φ, pa se može zaključiti da se za $\Psi > 20$ može računati sa $\Phi = 0$, odnosno $q_s = 0$.

Uz izraz (141–27) treba dodati objašnjenje da je Ajnštajn predložio prilično složen postupak za računanje proticaja nanosa. Vodi se računa o granulometrijskom sastavu nanosa, on se deli na više frakcija (klasa), u svaku ulaze krupnoća u određenom intervalu. Računaju se proticaji za pojedine frakcije i svi se saberu i to je celokupan proticaj nanosa. Računa se za svaku frakciju $\Phi = \Phi(\Psi)$, gde u Ψ i Φ ulaze krupnoća određene frakcije. Međutim, Ψ se ne uzima doslovno kao što je napisano sa (141–23), nego se unose korekcioni faktori zavisni od uslova za pokretljivost zrna, a njih opisuje raspored brzina pri dnu, debljina viskoznog podsloja, vertikalna komponenta sile koja odiže zrno i hrapavost koju nameće celokupni sastav nanosa.

Pored toga unosi se i verovatnoća kojom će se određeno zrno kretati u datim uslovima – dakle, primenjuju se i stohastičke metode. Ovde se u tu složenost neće ulaziti – navešće se samo da se za jednolik nanos Φ sračuna primenom (141–27), sa poznatim veličinama koje ulaze u Ψ, napisanom sa (141–23) ili (141–26). Ako je nanos nejednoliki uzima se $d = d_{50}$.

Jedan od poznatijih i u praksi veoma primenjivan je obrazac čiji je autor Majer-Peter (MEYER-PETER). On je napisao više obrazaca, ali se obično navodi sledeći:

$$\tau - \tau_c = 0{,}25 \left(\frac{\gamma}{g}\right)^{1/3} G^{2/3} \qquad (141–29)$$

Ovde je γ specifična težina vode, a G proticaj težine (težina koja se prenosi u jedinici vremena), a po jedinici širine. Treba naglasiti da se radi o težini olakšanoj u vodi, jer nju savladava vučna sila, pa je:

$$G = (\gamma_s - \gamma)\, q_s \qquad (141–30)$$

Jednačina (141–29) pokazuje da od delujućeg napona τ treba oduzeti kritični napon τ_c (koji odgovara granici stabilnosti), pa od toga viška napona zavisi proticanje nanosa. Za $\tau = \tau_c$, proticaj je nula, dok bi se za $\tau < \tau_c$ dobile negativne vrednosti za G, što je besmisleno. Treba reći da je jednačina primenjiva za $\tau \geq \tau_c$, a za $\tau \leq \tau_c$ treba uzeti da je $G = 0$.

Zanimljivo je primetiti da se i Majer-Peterov obrazac (141–29) uklapa u funkciji (141–25). Naime, i on se može napisati da se vidi da je $\Phi = \Phi(\Psi)$. U jednačini (141–29) treba G zameniti prema napisanim sa (141-30), i potom jednačinu podeliti sa $(\gamma_s - \gamma)\, d$. Dobija se:

$$\frac{\tau}{(\gamma_s - \gamma)\, d} - \frac{\tau_c}{(\gamma_s - \gamma)\, d} = 0{,}25\ \frac{\gamma^{1/3}}{g^{1/3}}\ \frac{q_s^{2/3}\,(\gamma_s - \gamma)^{2/3}}{(\gamma_s - \gamma)\, d} \qquad (141–31)$$

Prvi član leve strane jednačine je $1/\Psi$, što se uviđa iz (141–23), dok je drugi član konstanta označena sa C u (141–10). Koristeći ova dva navoda za zamenu u prethodnom izrazu, on se svodi na:

$$\frac{1}{\Psi} - C = 0{,}25 \left(\frac{q_s}{\sqrt{g\, d^3\, (\gamma_s - \gamma)\, / \gamma}} \right)^{2/3} \qquad (141\text{–}32)$$

Upoređujući desnu stranu sa (141–24) zaključuje se da je ona jednaka $0{,}25\ \Phi^{2/3}$, pa je:

$$\frac{1}{\Psi} - C = 0{,}25\ \Phi^{2/3} \qquad (141\text{–}33)$$

što pokazuje da je $\Phi = \Phi(\Psi)$. Konstanta C je u (141–11) procenjena sa $C = 0{,}05$.

Izraz (141–33) daje $\Psi = 20$, za $\Phi = 0$. Kako proticaj q_s ne može da bude negativan, besmislen je izraz (141–33), za $\Psi > 20$. Treba primetiti da izrazi Ajnštajna (141–28) i Majer-Petera (141–33) daju približno iste vrednosti za Φ u funkciji Ψ.

Majer-Peter je za svoju zakonitost usvojio $C = 0{,}047$. Uz to je on uz izraz za napon $\tau = \gamma\, h\, I$ dodao korekcioni faktor K_τ, koji je manji od jedinice – dakle $\tau = \gamma\, h\, I\, K_\tau$. To se objašnjava na sledeći način. Nagib nivoa nije posledica samo trenja, koje se računa sa apsolutnom hrapavošću d_{90}, nego je jednim delom posledica gubitka energije usled ulegnuća i izdizanja dna, što su dopunski otpori, koji se obračunavaju u trenje, ali to nije trenje o zrna nanosa. U Poglavlju 99., gde se raspravljalo o trenju, a posebno o hrapavosti, rečeno je da bi bilo pogrešno računati sa hrapavošću koju daju zrna nanosa, jer bitno utiče ulegnuće dna, što je simbolično prikazano slikom 99–5. Kako na pokretanje nanosa deluje samo trenje o zrna treba τ smanjiti, pomnožiti ga sa $K_\tau < 1$. Ako se primeni Maningova formula (141–15) računa se sa:

$$n = \frac{h^{1/6}}{v} \sqrt{h\, I} \qquad (141\text{–}34)$$

Međutim, Maningov koeficijent za d_{90} određuje se sa (141–16):

$$n_d = d_{90}^{1/6} \sqrt{\frac{0{,}029}{2\, g}} \qquad (141\text{–}35)$$

Računa se sa prvom vrednošću za n, da se uračunaju svi otpori, dok bi drugi obrazac dao n_d, gde je uračunato samo trenje o zrna.

Uz primenu Majer-Peterovog obrasca preporučuje se da se za korekcioni faktor K_τ uzima:

$$K_\tau = \left(\frac{n_d}{n}\right)^{3/2} \tag{141–36}$$

Sa $C = 0{,}047$ i unoseći korekcioni faktor K_τ Majer-Peterov obrazac se svodi na:

$$\underbrace{\gamma\, h\, I \left(\frac{n_d}{n}\right)^{3/2}}_{\tau} - \underbrace{0{,}047\,(\gamma_s - \gamma)\, d_{50}}_{\tau_c} = 0{,}025 \left(\frac{\gamma}{g}\right)^{1/3} G^{2/3} \tag{141–37}$$

U drugom članu uzeto je da se računa sa d_{50}, što je u skladu sa ranijim objašnjenjima.

Potreba uvođenja faktora K_τ može se uvideti u primeru rečnog toka koji se računa sa $n = 0{,}030\ \mathrm{m}^{-1/3}\mathrm{s}$ (toliko se na osnovu opaženih merenja može preporučiti). Da se sav gubitak pripisuje trenju o zrno, ono bi moralo da bude $d_{90} = 22{,}5$ cm – toliko se dobija primenom (141-35). Međutim, nije toliko velika krupnoća zrna u toku koji se računa sa navedenom vrednošću za n.

* * *

Za mirovanje i proticanje nanosa napisano je veoma mnogo obrazaca. Proticaj nanosa pri njima određuje razlika $\tau - \tau_c$, ili odnos τ/τ_c, gde je τ napon trenja koji deluje u datom primeru, a τ_c granična vrednost za stabilnost zrna.

Ruski autori uglavnom preporučuju obrasce kojima se određuje brzina v_c, a onda proticaj nanosa u zavisnosti od $v - v_c$, ili v/v_c. Upravo proticanje nanosa vežu za višak brzine iznad granične, ili za odnos brzine i granične brzine.

Ti obrasci, bez obzira da li se vezivali za τ_c ili v_c, imaju svojstvo da se njima računa proticaj nanosa, a to je ono što praksu prvenstveno zanima, oni obično pojednostavljuju uslove, i ne ulaze u složenost zbivanja u strujanju i pronošenja nanosa. Ima različitih pristupa za razmatranje pronošenja nanosa i niz veoma složenih postupaka iz čega proizilaze mnogi obrasci.

Treba primetiti da je većina obrazaca namenjena jednolikom ustaljenom tečenju, a tečenje u praktičnim zadacima je neustaljeno, i nejednoliko. Čak dobar deo obrazaca namenjen je ravanskom strujanju, što se mora shvatiti kao približnost.

Sve navedeno govori da proticanje nanosa može da se približno odredi, da se proceni, a da veću tačnost u odnosu na ono što se dešava u praktičnim primerima ne treba očekivati.

142
MODELI SA POKRETNIM DNOM

Modeli tokova sa pokretnim dnom obično su modeli rečnih i kanalskih tokova sa nanosom koji se kreće po dnu i gotovo redovno su u distorziji. Najčešće se modeliše po Drugom načinu (slika 124–2), gde je model i skraćen (po dužini) i sužen (po širini). Sve što je rečeno o distordovanim modelima (Poglavlje 124.) važi i ovde, uz napomenu da je tamo korito (uključivši i dno) nepokretno. Ovde se mogu očekivati dopunske zavisnosti koje unosi pokretljivost dna.

Isto kao u Poglavlju 124. i ovde će se razmera za dužine (merene duž toka) označivati sa L_*, a razmera za visinu sa Z_* (koja je razmera i za položaj dna i za dubine, $h_* = Z_*$). Skraćivanje modela nameće da je razmera za nagib $I_* = Z_*/L_*$ manji od jedinice ($I_* < 1$, jer je $I_{\text{obj}} < I_{\text{mod}}$). Zahtev da *Fr*-broj za presek na modelu bude isti kao na objektu uslovljava razmeru za brzine $v_* = Z_*^{1/2}$, što je i napisano sa (124–18). Razmera za proticaje Q_* određena je sa (124–16), odnosno (124–17).

Sličnost za uticaje trenja dovela je do izraza (124–25) na osnovu koga se, uz zamenu k_* sa d_{90*}, i Z_* sa h_*, piše:

$$\frac{d_{90*}}{h_*} = I_*^3 \tag{142–1}$$

Ovde se za apsolutnu hrapavost k uzela krupnoća nanosa d_{90}, što je u skladu sa objašnjenjem koji je prethodili ispisivanju (141–21). Razmera h_* za dubine je jednaka opštoj razmeri Z_* za visine, što je omogućilo zamenu Z_* sa h_*.

Na geometrijski sličnom (nedistordovanom) modelu nagib je isti na modelu i na objektu, pa je razmera $I_* = 1$, a onda je i relativna hrapavost d_{90}/h ista na modelu i na objektu – upravo obe strane u prethodnoj jednačini (142–1) su jednake jedinici. Na distordovanom modelu, usled $I_* < 1$, i $(d_{90}/h)_* < 1$, a to znači $(d_{90}/h)_{\text{obj}} < (d_{90}/h)_{\text{mod}}$, relativna hrapavost na modelu je veća nego na objektu. Isto je bilo i ranije, u Poglavlju 124., što je i napisano sa (124–27), ovde je samo k zamenjeno sa d_{90}.

U Poglavlju 124., napomenuto je da apsolutna hrapavost na modelu može da bude veća od one na objektu ($k_{\mathrm{mod}} > k_{\mathrm{obj}}$ tj. $k_* < 1$) i objašnjeno je kako se to može praktično ostvariti – veštačkom hrapavošću. Ovde hrapavost stvara nanos, pa bi prethodno značilo $d_{90,\,\mathrm{mod}} > d_{90,\,\mathrm{obj}}$, tj. krupniji nanos na modelu od onoga na objektu, a to bi mogao da bude prekrupan nanos za malenu dubinu na modelu.

Pored prethodno navedenih uslova za postizanje sličnosti ovde se nameće i dopunski uslov koji nameće pokretljivost dna, upravo treba postići sličnost za pokretanje nanosa i njegovo pronošenje.

Jedna od osnovnih zakonitosti za postizanje sličnosti uslovljava da bezdimenzionalna veličina na modelu i na objektu mora da bude ista. To se odnosi i na jednu od bezdimenzionalnih veličina koje su bitne za odvijanje strujanja – to je veličina Ψ napisana sa (141–26). Taj izraz se prepisuje:

$$\Psi = \frac{(\gamma_s - \gamma)\, d}{\gamma\, h\, I} \tag{142–2}$$

Prilikom uvođenja bezdimenzionalne veličine Ψ, uz izraz (141–6), objašnjeno je da je ona jedna od bitnih pokazatelja kretanja nanosa, jer je pokazatelj odnosa sile koja se suprotstavlja kretanju nanosa prema vučnoj sili koja nastoji da pokrene nanos. Istovetnost ove veličine na modelu i objektu ($\Psi = \mathrm{idem}$) je stoga neminovna, a to znači razmera za nju jednaka je jedinici. Za $\Psi_* = 1$, prethodni izraz (142–2) nameće:

$$\left[\left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1\right)\frac{d}{h\, I}\right]_* = 1$$

iz čega sledi:

$$\frac{d_{50*}}{h_*} = \frac{I_*}{(\gamma_s/\gamma - 1)_*} \tag{142–3}$$

Shodno prethodnim razmatranjima, u Poglavlju 141., ovde se za krupnoću zrna uzelo $d = d_{50}$ i to je korišćeno u pisanju prethodne jednačine.

Jednačine (142–1) i (142–3) moraju se zadovoljiti da bi se postigla sličnost za uticaje koje unosi nanos. Može se u (142–3) h_* zameniti sa

d_{90}/I_*^3, jer toliko proizilazi iz (142–1) – dobija se:

$$\left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1\right)\frac{d_{50*}}{d_{90*}} = \frac{1}{I_*^2} \tag{142–4}$$

Ovako napisan uslov za postizanje sličnosti povezuje razmere koje nameće nanos (leva strana izraza) sa stepenom distorzije (desna strana) i pogodan je da se izvedu zaključci.

Za istu razmeru, za obe krupnoće tj. za $d_{90*} = d_{50*}$ prethodni izraz se svodi na:

$$\left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1\right)_* = \frac{1}{I_*^2} \tag{142–5}$$

Na modelu i na objektu neka je voda, i nanos iste specifične težine, pa je $(\gamma_s/\gamma) - 1$ isto na objektu i na modelu, što znači da je razmera napisana na levoj strani jednaka jedinici. Prethodni uslov je moguće zadovoljiti samo ako je i desna strana jedinica, a to je nedistordovani model. Za distordovani model mora se uzeti nanos manje specifične težine od onoga na objektu da bi se prethodni uslov zadovoljio. Zamenom leve strane u prethodnom izrazu sa $(\gamma_s/\gamma - 1)_{\text{obj}} / (\gamma_s/\gamma - 1)_{\text{mod}}$ dobija se:

$$\left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1\right)_{\text{mod}} = \left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1\right)_{\text{obj}} I_*^2 \tag{142–6}$$

Za odnos specifične težine nanosa i vode na objektu $\gamma_s/\gamma = 2{,}65$ (toliko taj odnos otprilike iznosi i za rečni nanos), i, na primer, za $I_* = 1/4$ prethodna jednačina daje:

$$\left(\frac{\gamma_s}{\gamma}\right)_{\text{mod}} = 1 + \frac{1{,}65}{16} = 1{,}10$$

To može da zadovolji veoma lak materijal. Za $I_* = 1/3$ dobija se $\gamma_s/\gamma = 1{,}18$. Iako se distorzija svede na veoma malenu meru (za skraćenje svega 2 puta u odnosu na visinu, tj. za $I_* = 1/2$) dobija se $\gamma_s/\gamma = 1{,}41$, a i to zahteva veoma lak materijal. Napominje se da ima materijala koji svojom specifičnom težinom zadovoljavaju navedene uslove – to su pre svega samleveni (u zrnevlje) plastični materijali, veštačka smola, ćilibar, gde je γ_s/γ od 1,05 do 1,06, ugalj 1,20 do 1,30 i dr.

Bez učinjenog pojednostavljenja ($d_{50} = d_{90}$) jednačina (142–4) dovodi do:

$$\left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1\right)_{\text{mod}} = I_*^2 \, \frac{d_{50*}}{d_{90*}} \left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1\right)_{\text{obj}} \qquad (142\text{–}7)$$

Iz napisanoga izraza može se pročitati da se sa $d_{50*} > d_{90*}$ dobija veća vrednost za $(\gamma_s/\gamma)_{\text{mod}}$, a od one koja se dobija sa $d_{50*} = d_{90*}$ i to je poželjno, ali d_{50*} treba da bude znatno veće od d_{90*}. To dovodi do presitnog nanosa (jer je već na objektu sitan), koji će dovesti da Re, napisan sa (141–8), bude toliko malen da se uticaj viskoznosti ne može zanemariti, ne može se izostaviti prvi član u (141–7), a njegovo izostavljanje je pretpostavljeno pri razmatranju sličnih jednačina za kretanje nanosa.

* * *

Zahtev za olakšanje nanosa ne modelu može se protumačiti na sledeći način:

U Poglavlju 124., iza (124–7), objašnjeno je, a to važi i ovde, da povećani nagib na distordovanom modelu (u odnosu na nagib na geometrijski sličnom) zahteva veću relativnu hrapavost, da bi se uprkos povećanju pada dobile brzine koje zahteva sličnost. To se ocenjuje kao povoljnost, jer se povećava mogućnost da se uđe u oblast hrapavih provodnika, gde se mogu izostaviti uticaji viskoznosti, ne zahteva se Rejnoldsova sličnost, koja se uz Frudovu ne može postići. To se i podrazumevalo tokom izlaganja u ovom poglavlju. Krupniji nanos, međutim, unosi teškoće za postizanje sličnosti, jer je teže pokretljiv, pa ga treba olakšati smanjivanjem specifične težine.

Zadovoljavanje jednačine (142–4) nije dovoljno za usklađivanje svih merodavnih razmera, jer treba zadovoljiti i (142–1), upravo te dve jednačine čine sistem, kojim su određene veze između razmera. Taj sistem međusobno povezuje razmere koje se odnose na nanos – d_{50*}, d_{90*}, $(\gamma_s/\gamma - 1)_*$ sa razmerama I_* i h_*. Ako se sve te razmere odrede, određene su i ostale merodavne razmere prema objašnjenjima u uvodnim izlaganjima. Tako je razmera L_* za dužine, merene duž provodnika jednaka $I_* \, h_*$, a razmera v_* za brzine jednaka je $h_*^{1/2}$, pa je razmera za proticaje $Q_* = B_* h_*^{3/2}$, gde je B_* razmera za širinu, merenu u poprečnom preseku, što je već napisano sa (124–16).

Na modelu treba obezbediti granične uslove. Pored uslova koje mora da ispuni svaki model, a to je postojanje sličnosti za nivoe i proticaje, model sa pokretnim dnom mora da obezbedi sličnost za unošenje nanosa u model. Ako se raspolaže sa terenskim podacima, na modelu će se upuštati nanos, uz nastojanje da se postigne sličnost u razmeri za pronošenje nanosa. Ako tih podataka nema, ulazni proticaj nanosa će se, prema nekoj od jednačina koja se proporučuje, podesiti na primer po zakonostima (141–27) ili (141–33).

Bezdimenzionalna veličina za proticaj nanosa po jedinici širine, za q_s, napisana je sa (141–24) i označena sa Φ, ona, kao bezdimenzionalna veličina, mora da bude ista na modelu i objektu tj. razmera za nju mora da bude jedinica, pa se iz (141–24) dobija:

$$\Phi_* = \left[\frac{q_s}{\sqrt{(\rho_s/\rho - 1)\, g\, d^3}} \right]_* = 1 \tag{142–8}$$

iz toga sledi:

$$q_{s*} = \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right)_*^{1/2} d_*^{3/2} \tag{142–9}$$

Za masu koja se pronosi u jedinici vremena (za proticaj mase), a po jedinici širine, razmera je:

$$m_* = \rho_{s*}\, q_{s*} \tag{142–10}$$

* * *

Na prethodna razmatranja o sličnosti modela sa pokretnim dnom umesno je staviti sledeće primedbe:

1. Osnovno pravilo modelisanja, da se podese razmere za sve merodavne veličine tako da bezdimenzionalne veličine budu iste na modelu i objektu, i da se obezbedi istovetnost graničnih uslova, a da se ne mora verovati ni u kakve jednačine, za distordovani model ne važi, jer se oni grade uz poverenje u određene jednačine. To važi za sve distordovane modele, kako one napisane u Poglavlju 124. tako i za modele sa pokretnim dnom.

2. Jednačine koje se koriste u ovom Poglavlju izvedene su za ravansko strujanje, uz zamenu hidrauličkog radijusa sa dubinom, što je približnost. Ravansko strujanje uproštava izražavanje napona trenja o dno, on je navodno isti celom širinom korita.
3. Uticaji granulometrijskog sastava nanosa izražava se pojednostavljeno, sa svega dva podatka, dve krupnoće: d_{50} i d_{90}. Prva je merodavna za pokretanje nanosa, a druga za uticaj trenja.
4. Uticaj trenja u nizu praktičnih primera ne može se izračunati samo krupnoćom zrna nanosa, jer utiču i izdignuća i ulegnuća dna (nabori), što je objašnjeno uz ispisivanje jednačine (141–37).
5. O mogućnosti postizanja sličnosti za lokalne uticaje (bolje rečeno, o nemogućnostima postizanja potpune sličnosti) raspravljalo se u Poglavlju 124., i sve što je navedeno važi i ovde.
6. Proticaj nanosa se izražava po jedinici širine čime se unosi približnost, jer se zadatak tretira kao ravanski. Ako se ne raspolaže podacima sa terena, proticaj nanosa se računa primenom nekog od raspoloživih obrazaca, a svaki obrazac izveden je uz niz pretpostavki i pojednostavljenja.
7. Uslovi sličnosti postavljeni su uz pretpostavku da se ne mora voditi računa o uticaju viskoznosti, ne zahteva se Rejnoldsova sličnost (a ne može se ni postići uz zadovoljenje Frudove). Pokazalo se kako se ta pretpostavka može ispuniti barem za veće proticaje, ali treba napomenuti da se to ne može postići za malene proticaje, a to se smatra podnošljivim, jer ti proticaji nisu merodavni za projektantsko rešenje.

Sve navedeno upućuje na sumnju u prenosivost rezultata sa modela na objekat. Ipak se ne sme brzopleto zaključiti da su modelska istraživanja beskorisna, jer model može da doprinese rešavanju praktičnih zadataka. Obrazloženje za to daje se u nastavku.

Sva obrazloženja o korisnosti modelskih istraživanja Poglavlja 124. mogu se odnositi i na modele sa pokretnim dnom. Posebno treba istaći saznanja koja proizlaze iz povezivanja rezultata modelskih i istraživanja na objektu, na terenu. Mogu se na modelu propuštati proticaji kojima odgovaraju proticaji rekom koji su tekli u prošlosti, pa se model može doterati da približno prikazuje opaženo na terenu, čime se model osposobljava za istraživanje tečenja u drugim uslovima koji se u budućnosti mogu očekivati. Regulacione građevine sagrađene prema preporukama proizašlih iz modelskih istraživanja proveravaju se na terenu i dolazi se do zaključka o postignutoj sličnosti. Saznanje iz toga mogu poslužiti za naredna projektovanja. Ako se shvati da regulisanje reke nije jednokratan zahvat nego dugotrajnai stalna delatnost, model bi trebao da prati razvoj na reci i da daje preporuke kuda bi trebali raditi u narednom periodu da se stanje poboljša.

Ublažavanjem preteranih očekivanja od modelskih istraživanja, svođenjem na skromnije zahteve, dozvoljava se da se prihvati kvalitativna sličnost, umesto kvantitativne. O kvalitativnoj sličnosti bilo je reči u Poglavljima 123. i 124. Ne može se dobijeno na modelu preneti na objekat u odgovarajućim razmerama, tačno u kvantitatovnom smislu. Na modelu se ne obrazuju poprečni preseci tačno u razmerama za dubine i širine, ali se dobija sličnost u kvalitativnom smislu, pa se može zaključiti gde će se stvoriti zasipanja, a gde produbljivanja, gde se može očekivati obrušavanje obala. Uvideće se gde će kuda reka kani da pomeri korito, kako namerava da krivuda. Jasno je da ta saznanja imaju presudan uticaj za preduzimanje mera da se spreče štetna dejstva i da se reka usmerava onako kako je to prihvatljivo.

deo petnaesti

OTPORI TELA OPKOLJENIH FLUIDNOM STRUJOM

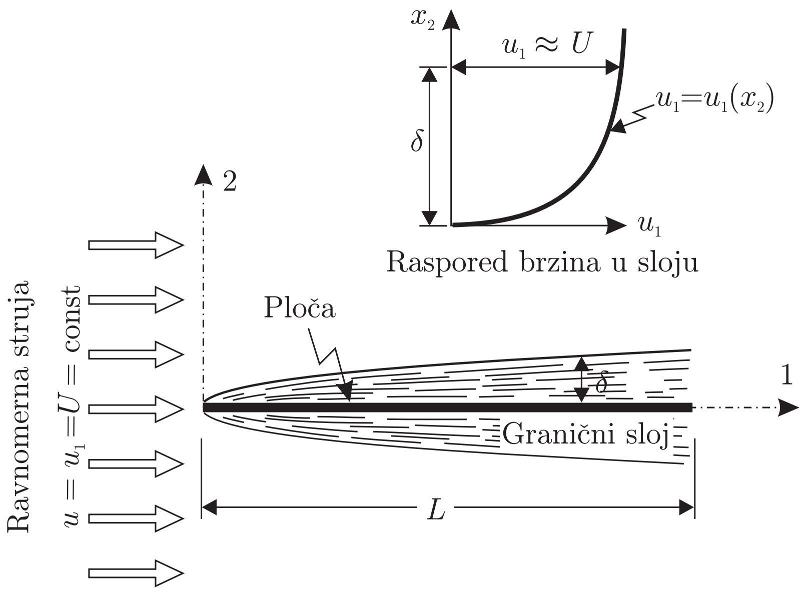
Ako se želi da se najkraće objasni tematika prethodnih poglavlja (u Knjizi drugoj, i ovoj, trećoj), može se reći da je to proticanje. To je proticanje kroz provodnike (cevi i kanale) ili kroz objekte (otvori, prelivi). Može se upotrebiti i naziv "unutrašnje struje". To je prikladan naziv, jer su to struje između čvrstih granica provodnika (ili objekta). U uvodnim izlaganjima Knjige druge rečeno je da reč „Hidraulika" ukazuje na „vodu" i „cev", upravo vodu u cevi (ili, uopšteno, unutar provodnika ili objekta), a to je onda unutrašnja struja. Praktični zadaci prvenstveno određuju proticanje između čvrstih granica, odnosno proticanje unutrašnjim strujama.

Ovo, 15-o poglavlje, baviće se zadacima „opticanja" (ili „opstrujavanja") ili „spoljnim strujama", gde struja optiče (opstrujava) oko tela, oko objekta, a ne unutar njega (kao kod „unutrašnjih struja"). Proučava se spoljni uticaj na telo kome se ono odupire, prevashodno se razmatra sila otpora tela.

Uz ova uvodna izlaganja treba dodati da će se razmatrati zadaci gde se može smatrati da je gustina fluida konstantna.

151
OTPORI TRENJA LAMINARNOG GRANIČNOG SLOJA UZ RAVNU PLOČU

U laminarno jednoliko strujanje (brzina je svuda $u = u_1 = U$) uroni se ravna ploča postavljena paralelno sa strujanjem. Ploča je postavljena tako da na fluidnu struju ne utiču nikakve granice sem same ploče – kaže se da je ploča „usamljena”. Strujanje se može smatrati kao ravansko, u ravni $(1, 2)$ – vidi sliku 151–1, jer je širina ploče u pravcu (3) velika u odnosu na njenu dužinu, pa se na pretežnom delu ploče ostvaruju uslovi ravanskog strujanja.



Slika 151–1 Ravna ploča uronjena u ravnomernu fluidnu struju.

Da nema ploče svuda bi bila ista brzina, a ploča nameće brzinu na njoj jednaku nuli, pa se brzina povećava u pravcu normalnom na ploču (pravac 2), od nule do brzine U. Taj prelaz, strogo uzevši, završava se u beskonačnoj udaljenosti od ploče, ali sa praktičnog stanovišta može se prihvatiti da se završi na rastojanju δ od ploče, gde se brzina zanemarljivo razlikuje od neporemećene brzine U. Praktični razlozi nameću, a stvarno stanje dozvoljava, da se u proučavanju odvoji granični sloj debljine δ, to je sloj uz ploču, uz granicu, pa odatle i naziv „granični". U tome sloju obavi se, po normali, nagao porast brzine: na kratkom udaljenju δ od ploče (sloj je tanak) brzina je već skoro U, dok je na ploči brzina jednaka nuli. Naglašava se da je sloj toliko tanak da se morao na slici 151–1 nacrtati debljim, jer crtanjem u istoj razmeri debljine δ i dužine ploče L ne bi dozvoljavalo da se sloj uopšte prikaže.

Nagli porast brzina po normali znači velika klizanja, pa je onda izrazito dejstvo tangencijalnih napona u graničnom sloju. Nasuprot tome, u preostalom delu strujnog polja brzina je ravnomerno raspoređena (zanemarljivo se razlikuje od konstante U), pa onda nema nikakvih devijatorskih deformacija, pa ni odgovarajućih napona. Stoga se ovde fluid može smatrati kao da je idealan (može se uzgred primetiti da nema ni sfernog dela deformacija, jer se izučava nestišljiv fluid).

Izuzimajući granični sloj, u celom preostalom strujnom polju može se prihvatiti konstantnost brzine:

$$u = U = \text{const}_1 \tag{151–1}$$

Jednačina energije (35–13) zamenom $Z + (p/\rho\,\gamma)$ sa Π (pijezometarska kota), i sa $u = U$, svodi se na $(U^2/2) + g\Pi = \text{const}$, što sa $U = \text{const}$ daje:

$$\Pi = \Pi_0 = \text{const}_2 \tag{151–2}$$

Ovo važi za sve strujnice van graničnog sloja, jer je za sve ista Π-kota ($= \Pi_0$), pa $\Pi = \Pi_0 = \text{const}$ važi za celo područje van graničnog sloja, a onda važi i za spoljnu granicu graničnog sloja.

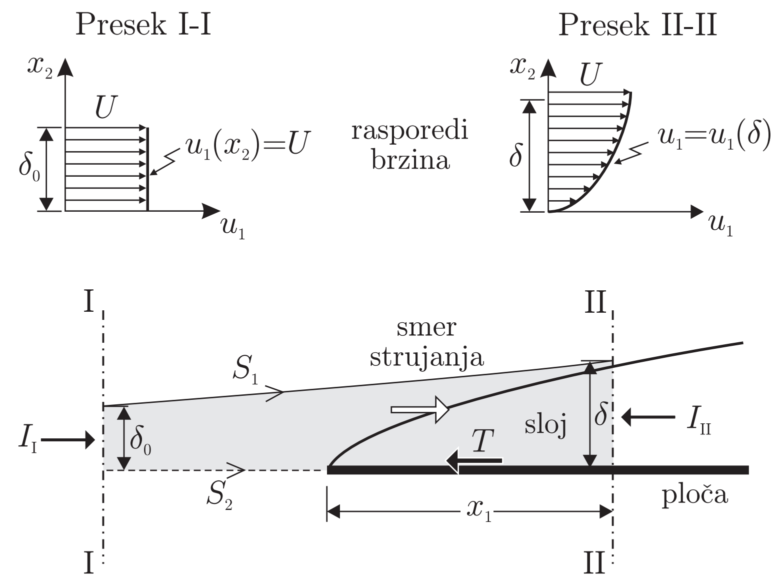
Rečeno je već da je granični sloj veoma tanak i izdužen, pa je strujanje u njemu skoro paralelno (brzina u je približno u_1, jer je $u_2 \ll u_1$), što dozvoljava da se prihvati pretpostavka o pravolinijskom i paralelnom strujanju, upravljenom normalno na poprečni presek. Za takvo strujanje pijezometarska kota je ista za sve tačke preseka, što je protumačeno u Poglavlju 81., pod III, kao uslov za proučavanje struje upoređenjem stanja u dva njena poprečna preseka. Pošto u jednom preseku promene pijezometarske kote nema, ona je u celom preseku ista kao na spoljnoj granici sloja, a rečeno je da promene te kote nema po celoj spoljnoj granici sloja. Ovo dovodi do zaključka da promene te kote nema u celom sloju, a ranije je zaključeno da se ne menja ni van sloja, pa je opšti zaključak da je $\Pi = \text{const}$ za celo strujanje (van sloja i u njemu).

Uz uvođenje pijezometarske kote navelo se da ona može izraziti zajedničko dejstvo zapreminske sile (težine) i pritiska. Te dve sile, po jedinici mase, upisane su kao prva dva člana desne strane u osnovnoj jednačini (33–3). Za težinu je, shodno (28–6), $f_j = g\,\partial Z/\partial x_j$, pa se zbir pomenuta dva člana svodi na :

$$f_j - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} = -g\frac{\partial}{\partial x_j}\left(Z + \frac{p}{\rho\, g}\right) = -g\frac{\partial \Pi}{\partial x_j} \qquad (151\text{–}3)$$

Ova jednačina pokazuje da je za celo područje zbir sila težine i pritiska jednak nuli, jer je nula za svaki pojedini delić, pošto je $\partial\Pi/\partial x_j = 0$, što je posledica $\Pi = \text{const}$.

Primeniće se dinamička jednačina na masu fluida smeštenu u zapreminu prikazanu na slici 151–2. Ta zapremina se pruža od preseka (I) gde je strujanje još neporemećeno do preseka (II) u sloju uz ploču.



Slika 151–2 Sile (I_{I}), (I_{II}) i (T) deluju na masu u osenčenoj zapremini (između preseka I − I i II − II).

Izuzevši navedene preseke, preostali deo granične površine oblikovan je tako da kroz njega nema proticanja, jer je u svakoj tački brzina usmerena tangencijalno na površinu. Naime granične linije S_1 i S_2 na slici 151–2 su strujnice.

Zadatak će se rešavati kao ravanski, pa je širina L_3 posmatrane zapremine proizvoljna, a meri se na pravcu normalnom na ravan proučavanja. To je pravac normalan na ravan crteža na slici 151–2.

Pošto su granične linije S_1 i S_2 strujnice, kroz preseke (I) i (II) teče isti proticaj:

$$Q = U\,L_3\,\delta_0 = L_3 \int_0^{\delta} u_1\,\mathrm{d}x_2 \tag{151–4}$$

gde je δ debljina sloja u preseku (II), a osa x_2 je postavljena normalno na ploču, dok je δ_0 debljina dela struje, koji će se uključiti u sloj do preseka (II). (Jasno je da je $\delta_0 < \delta$, i da δ i δ_0 zavise od x_1).

Dinamička jednačina se dovodi na oblik da prikazuje uravnoteženje sila, gde u sile ulazi i inercijalna „sila"– to je napisano jednačinom (33–10). Za praktičnu primenu te jednačine na masu fluida u zapremini između dva poprečna preseka struje, kroz koje je strujanje pravolinijsko i paraleleno, i normalno na presek (ili je približno takvo, kakvo je i u primeru koji se raspravlja), inercijalna „sila" se razlaže na sile po presecima. Svaka od njih ima intenzitet $\rho\,Q\,\beta\,v$, a smer je smer strujanja za presek (I), a suprotan za presek (II), ako je strujanje usmereno od (I) ka (II). Ovo je napisano na osnovu jednačine (84–3). Napominje se da ρ označava gustinu, Q proticaj, v srednju brzinu za presek, a β koeficijent neravnomernosti brzine po preseku, određen sa (81–8).

Prema prethodnom navodu za silu u jednom preseku piše se:

$$I = \rho\,Q\,\beta\,v = \rho \int_A u_1^2\,\mathrm{d}A \tag{151–5}$$

Ovde je Q zamenjeno sa $v\,A$, a koeficijent β je izražen prema (81–8).

U preseku (II) deluje sila:

$$I_{\mathrm{II}} = \rho \int_{A_{\mathrm{II}}} u_1^2\,\mathrm{d}A = \rho\,L_3 \int_0^{\delta} u_1^2\,\mathrm{d}x_2 \tag{151–6}$$

Pri pisanju ovoga korišćeno je da je $\mathrm{d}A = L_3\,\mathrm{d}x_2$.

U preseku (I) deluje sila:

$$I_{\mathrm{I}} = \rho \int_{A_{\mathrm{I}}} u_1^2\,\mathrm{d}A = \rho\,U^2\,A_{\mathrm{I}} = \rho\,U\,Q$$

jer je u preseku (I), gde strujanje još nije poremećeno pločom, $u_1 = U = \text{const}$, a pri pisanju prethodnoga korišćeno je i da je $A_{\mathrm{I}} = Q/U$. Proticaj Q može se izraziti prema (151–4), pa se prethodni izraz svodi na:

$$I_{\mathrm{I}} = \rho\, U\, L_3 \int_0^{\delta} u_1\, \mathrm{d}x_2 \tag{151–7}$$

Skreće se pažnja da se debljina δ napisana u prethodnoj jednačini odnosi na presek (II), u kome se i integriše, dok se sila odnosi na presek (I). Ovo je omogućeno time što kroz oba preseka protiče isti proticaj.

* * *

U osnovnoj jednačini (33-10) upisane su sem „inercijalne" još zapreminska i površinska sila. Površinska se može podeliti na silu pritiska i silu od devijatorskih napona, druga se može nazvati „sila trenja". Zapreminska sila je težina i ona se spaja sa silom pritiska, i njihovo združeno dejstvo je ravno nuli, što je objašnjeno iza jednačine (151–3). Ostaje, dakle, samo sila trenja, a ona deluje uz ploču, dok se njeno delovanje na graničnim površinama, prikazanim na slici sa S_1 i S_2, izostavlja, jer se tu, kako je rečeno, fluid može smatrati idealnim.

Sila trenja od početka ploče ($x_1 = 0$) do proizvoljnog rastojanja x_1 iznosi:

$$T = L_3 \int_0^{x_1} \tau\, \mathrm{d}x_1 \tag{151–8}$$

gde je τ napon trenja između fluida i ploče.

Uravnoteženje napisano u opštem obliku sa (33–10), za posmatrani primer, a prema izloženom, svodi se na:

$$I_{\mathrm{I}} - I_{\mathrm{II}} = T \tag{151–9}$$

jer se sila trenja T, koja deluje smerom suprotnim strujanju, uravnotežava razlikom sila $I_{\mathrm{I}} - I_{\mathrm{II}}$, od kojih moćnija I_{I} deluje smerom strujanja, a I_{II} suprotnim smerom. Napominje se da će ovakvim pisanjem sila trenja biti pozitivna, jer deluje pretpostavljenim smerom, smerom suprotnim smeru strujanja.

Sile upisane u (151–9) određene su sa (151–6), (151–7) i (151–8), pa se korišćenjem tih izraza jednačina (151–9) dovodi do:

$$\rho\, U \int_0^{\delta} u_1\, \mathrm{d}x_2 - \rho \int_0^{\delta} u_1^2\, \mathrm{d}x_2 = \int_0^{x_1} \tau\, \mathrm{d}x_1 \tag{151–10}$$

Ovim izrazom napisane su sile po jedinici širine sloja i dimenzija pojedinog člana je [sila/dužina].

Diferenciranje prethodne jednačine u pravcu 1 daje:

$$\rho U \,\mathrm{d}\left(\int_0^\delta u_1 \,\mathrm{d}x_2\right) - \rho \,\mathrm{d}\left(\int_0^\delta u_1^2 \,\mathrm{d}x_2\right) = \tau \,\mathrm{d}x_1 \tag{151–11}$$

Sve tri sile u (151–9), odnosno (151–10), zavise od položaja preseka (II), tj. od rastojanja x_1 od početka ploče i menjaju se sa promenom tog preseka, a onda se i presek (I) menja, jer mora da zahvati isti proticaj kao i presek (II). Napisana jednačina stoga važi do proizvoljnog rastojanja x_1, pa će se zadatak usmeriti da se dobije zavisnost $\delta(x_1)$ i $\tau(x_1)$, tj. debljina graničnog sloja i napon trenja o ploču u zavisnosti od rastojanja od početka ploče.

Radi olakšavanja narednih izlaganja jednačina (151–10) se preobličava u:

$$\rho U^2 \,\delta \left[\int_0^1 \frac{u_1}{U} \,\mathrm{d}\left(\frac{x_2}{\delta}\right) - \int_0^1 \left(\frac{u_1}{U}\right)^2 \mathrm{d}\left(\frac{x_2}{\delta}\right)\right] = \int_0^{x_1} \tau \,\mathrm{d}x_1 \tag{151–12}$$

Jednačina se može rešiti uz pretpostavku da je raspored brzina, ako se napiše bezdimenzionalno, isti za sve preseke graničnog sloja, tj. da se može napisati jedinstvena funkcija rasporeda brzina, nezavisna od rastojanja x_1:

$$\frac{u_1}{U} = f\left(\frac{x_2}{\delta}\right) \tag{151–13}$$

Ovo omogućava da integrali na levoj strani izraza (151–12) budu konstante. Neka su njihove vrednosti α_1 i α_2, one iznose:

$$\alpha_1 = \int_0^1 \frac{u}{U} \,\mathrm{d}\left(\frac{x_2}{\delta}\right) \tag{151–14}$$

$$\alpha_2 = \int_0^1 \left(\frac{u}{U}\right)^2 \mathrm{d}\left(\frac{x_2}{\delta}\right) \tag{151–15}$$

Uvođenje α_1 i α_2 u jednačinu (151–12), i potom diferenciranje iste, daje:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\,\rho U^2 \,\mathrm{d}\delta = \tau \,\mathrm{d}x_1 \tag{151–16}$$

Treba odrediti dve veličine – napon τ i debljinu δ graničnog sloja – u funkciji rastojanja x_1 od početka ploče, a raspolaže se, za sada, samo sa jednom, prethodnom jednačinom i to pretpostavljanjem rasporeda brzina tj. prethodnim određenjem funkcije (151–13). Druga jednačina biće neposredna veza δ i τ, koja će se uspostaviti u nastavku.

U početku razmatranja pretpostavilo se da je strujanje približno paralelno (jer je $u_2 \ll u_1$), pa je strujanje u jednom preseku graničnog sloja, gde je debljina δ, približno isto kao u polovini struje između dve ploče. To strujanje (između ploča) raspravljeno je u Poglavlju 93., gde je razmak između ploča $2\,h$ (vidi sliku 93–1), a na sloj će se preneti raspored brzina od zida do sredine struje: zamenjivaće se h sa debljinom sloja δ, a u_m (brzina u sredini, između ploča) sa brzinom U na spoljnoj granici sloja. Sa takvim zamenama raspored brzina napisan sa (93–11) prenešen na granični sloj piše se sa:

$$\frac{u_1}{U} = 2\frac{x_2}{\delta} - \left(\frac{x_2}{\delta}\right)^2 \tag{151–17}$$

Napon trenja τ fluida o ploču pri strujanju između ploča, prema izrazu (93–20), iznosi $2\,\mu\,u_m/h$, što se može preneti na sloj (opet uz zamene: u_m sa U, h sa δ), pa se za sloj dobija:

$$\tau = 2\,\frac{\mu\,U}{\delta} \tag{151–18}$$

Primenom (151–17) konstante α_1 i α_2, napisane sa (151–14) i (151–15), iznose:

$$\alpha_1 = \int_0^1 \left(2\frac{x_2}{\delta} - \frac{x_2^2}{\delta^2}\right) \mathrm{d}\left(\frac{x_2}{\delta}\right) = \frac{2}{3} \tag{151–19}$$

$$\alpha_2 = \int_0^1 \left(4\frac{x_2^2}{\delta^2} - 4\frac{x_2^3}{\delta^3} + \frac{x_2^4}{\delta^4}\right) \mathrm{d}\left(\frac{x_2}{\delta}\right) = \frac{8}{15} \tag{151–20}$$

Sa ovim vrednostima, i sa τ prema (151–18), jednačina (151–16) se dovodi na oblik:

$$\delta\,\mathrm{d}\delta = \frac{15\,\mu}{\rho\,U}\mathrm{d}x_1 \tag{151–21}$$

Granični sloj počinje da se obrazuje na početku ploče, stoga je:

$$\delta = 0 \qquad \text{za} \qquad x_1 = 0 \tag{151–22}$$

i to je granični uslov za integrisanje (151–21) i sa njim se dobija:

$$\delta^2 = \frac{30\,\mu}{\rho\,U} x_1$$

$$\delta = \sqrt{\frac{30\,\mu}{\rho\,U} x_1} \tag{151–23}$$

Ovo određuje debljinu δ graničnog sloja duž ploče. Poznavanjem δ poznata je i vrednost napona τ. Iz (151–18) sa (151–23) dobija se:

$$\tau = 2\sqrt{\frac{\mu\,\rho\,U^3}{30\,x_1}} \tag{151–24}$$

Dobija se neizmerno velika vrednost τ za $x_1 = 0$ na početku ploče, jer je tu pretpostavljeno $\delta = 0$. U praktičnim razmatranjima stoga se izuzima sam početak ploče (malene vrednosti za x_1), gde se ne ostvaruju, ni približno pretpostavke o paralelnom strujanju. Taj deo je, međutim, zanemarljiv u odnosu na dužinu ploče, a na celom preostalom delu se približno ostvaruje uzeta pretpostavka.

Napon opada duž ploče i na njenom kraju ($x_1 = L$), on iznosi:

$$\tau(L) = 2\sqrt{\frac{\mu\,\rho\,U^3}{30\,L}} \tag{151–25}$$

Iznos napona na proizvoljnom mestu x_1 prema onome na kraju dobija se deljenjem jednačine (151–24) sa (151–25):

$$\frac{\tau}{\tau(L)} = \sqrt{\frac{L}{x_1}} \tag{151–26}$$

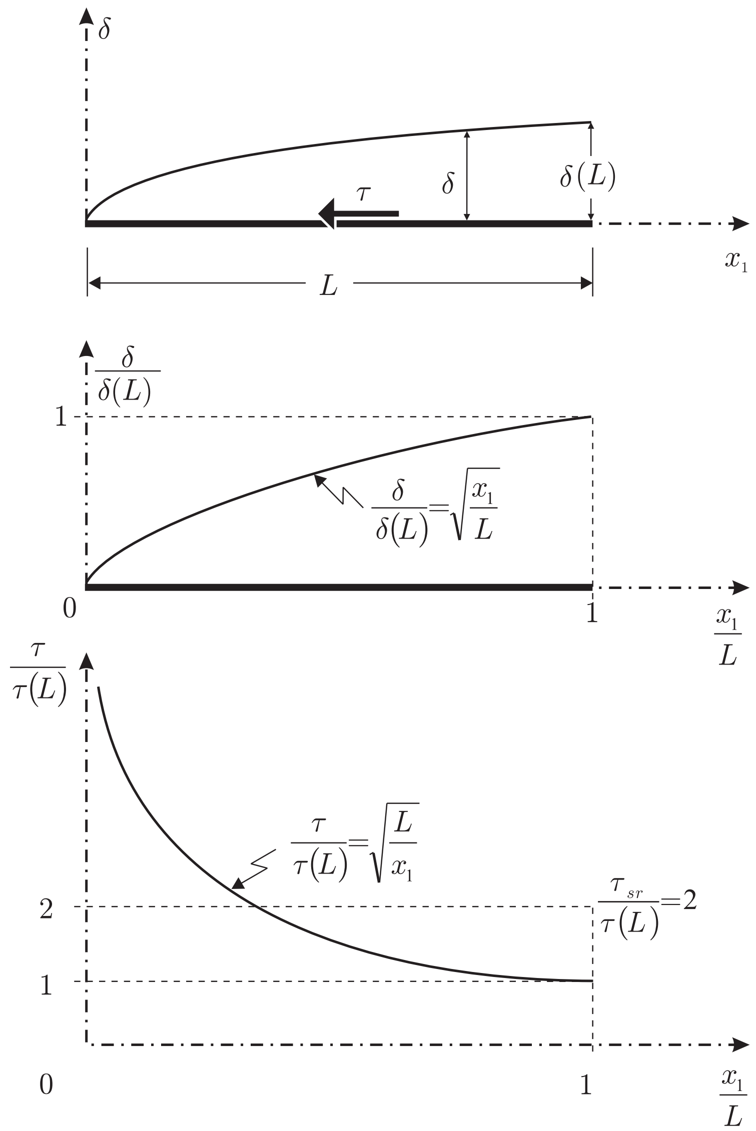
Primenom (151–23) na proizvoljno rastojanje x_1 i na kraj ploče ($x_1 = L$) dobija se odnos debljine sloja na rastojanju i na kraju ploče:

$$\frac{\delta}{\delta(L)} = \sqrt{\frac{x_1}{L}} \tag{151–27}$$

Na slici 151–3 prikazane su zavisnosti (151–26) i (151–27).

Sila trenja za ploču dobija se množenjem površine ploče A sa prosečnim tangencijalnim naponom (sa srednjom vrednošću), pa je:

$$F = A\,\tau_{\text{sr}} \tag{151–28}$$



Slika 151–3 Debljina (δ) graničnog sloja i napon trenja (τ) duž ploče u odnosu na odgovarajuće vrednosti na kraju ploče $\delta(L)$ i $\tau(L)$.

Za površinu se uzima $A = L\,L_3$, gde je L dužina ploče, a L_3 proizvoljno uzeta širina u pravcu (3), (normalno na ravan proučavanja), za koju se može uzeti jedinična vrednost. Uzeta površina odnosi se na jednu stranu ploče, pa treba uzeti dvostruku površinu ako se želi izraziti sila trenja sa obe strane ploče.

Prosečni (srednji) napon određen je sa:

$$\tau_{\rm sr} = \frac{1}{L}\int_0^L \tau \, \mathrm{d}x_1 \tag{151–29}$$

Uvođenjem $\tau(L)$ i korišćenjem (151–26) piše se:

$$\tau_{\rm sr} = \tau(L)\int_0^1 \frac{\tau}{\tau(L)}\,\mathrm{d}\Big(\frac{x_1}{L}\Big) = \tau(L)\int_0^1 \sqrt{\frac{L}{x_1}}\,\mathrm{d}\Big(\frac{x_1}{L}\Big) = 2\,\tau(L)$$

$$\tau_{\rm sr} = 2\,\tau(L) \tag{151–30}$$

Dakle, prosečan napon je jednak dvostrukom naponu na kraju ploče, koji je izveden sa (151–25). Poznavanjem $\tau_{\rm sr}$, poznata je i sila $F = A\,\tau_{\rm sr}$.

Koristiće se uobičajene bezdimenzionalne veličine: koeficijent trenja i Rejnoldsov broj.

$$C_\tau = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\,\rho\, U^2} \tag{151–31}$$

$$Re_x = \frac{U x_1}{\nu} \tag{151–32}$$

Koeficijent trenja C_τ napisan je po ugledu na (91–18), uz napomenu da je ovde karakteristična brzina U, a tamo je bila prosečna brzina u preseku v. Opšti izraz za Re-broj je (62–1), odnosno(62–15), a ovde su karakteristična dužina $L_0 = x_1$, a karakteristična brzina $u_0 = U$.

Korišćenjem (151–31) i (151–32) debljina sloja δ i napon τ, napisani sa (151–23) i (151–24), mogu se napisati sa:

$$\frac{\delta}{x_1} = \sqrt{\frac{30}{Re_x}} \tag{151–33}$$

$$C_\tau = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\,\rho\, U^2} = \frac{4}{\sqrt{30\, Re_x}} \tag{151–34}$$

Koeficijent C_F sile trenja F $(= A\,\tau_{\rm sr})$ izraziće se na uobičajen način za koeficijent sile, napisan u opštim razmatranjima o bezdimenzionalnim veličinama, u Poglavlju 61., sa (61–7):

$$C_F = \frac{F}{\frac{1}{2}\,\rho\, U^2 A} = \frac{\tau_{\rm sr}}{\frac{1}{2}\,\rho\, U^2} \tag{151–35}$$

Izražavanjem τ_{sr} sa (151–30) i uvođenjem bezdimenzionalne veličine $C_\tau(L)$ za $\tau(L)$, prethodni izraz se dovodi na:

$$C_F = \frac{2\,\tau(L)}{\dfrac{1}{2}\,\rho\,U^2} = 2\,C_\tau(L) \tag{151–36}$$

C_F je, prema tome, dvostruka vrednost od $C_\tau(L)$, a $C_\tau(L)$ se dobija stavljanjem $Re_L = Re_x$ u (151-34). Stoga je:

$$C_F = \frac{8}{\sqrt{30\,Re_L}} \tag{151–37}$$

gde je:

$$Re_L = \frac{\rho\,U\,L}{\mu} = \frac{U\,L}{\nu} \tag{151–38}$$

Koristiće se i Re-broj sa debljinom δ sloja kao karakterističnom dužinom:

$$Re_\delta = \frac{U\delta}{\nu} \tag{151–39}$$

Kako je Re_δ/Re_x jednako δ/x_1, može se, na osnovu (151–33) napisati:

$$\frac{Re_\delta}{Re_x} = \sqrt{\frac{30}{Re_x}} \tag{151–40}$$

Ovaj izraz omogućava da se C_τ izrazi u zavisnosti od Re_δ, kada se u (151–34) obavi smena prema prethodnom odnosu Re_δ/Re_x. Dobija se:

$$C_\tau = \frac{4}{Re_\delta} \tag{151–41}$$

*   *   *

Rešenja izložena u prethodnim razmatranjima temelje se, kao što je u uvodnim objašnjenjima istaknuto, na odvajanju dela strujanja uz ploču, nazvanog „granični sloj", od celine strujanja. Granični sloj ne postoji stvarno (u fizičkom smislu) kao odvojeni deo strujanja gde se oseća uticaj ploče. Strogo uzevši, uticaj ploče oseća se do beskonačnosti, pa se može uzeti da se neporemećena brzina U uspostavlja na neizmerno velikoj udaljenosti od ploče. Na toj, teorijski ispravnoj pretpostavci, zasniva se postupak rešavanja graničnog sloja koji se veže za ime Blaziusa

(BLASIUS). Taj postupak je znatno složeniji od ovde primenjivanog. Pored toga, u Blaziusovom postupku brzina u ima obe komponente u_1 (u pravcu paralelnom sa pločom) i u_2 (u pravcu normalnom na ploču), dok ovde primenjivan postupak izostavlja brzinu u_2, kao da je strujanje u sloju isključivo usmereno u pravcu pružanja ploče. Blazius dolazi do rešenja za raspored brzina u vidu:

$$\frac{u_1}{U} = f(\eta) \qquad \eta = x_2\sqrt{\frac{U}{\nu\, x_1}} \tag{151–42}$$

U bezdimenzionalnu veličinu η ulazi rastojanje x_1 od početka ploče i udaljenost x_2 od ploče (merena po normali na ploču), a kao rešenje u tabelarnom vidu daju se vrednosti za u_1/U u zavisnosti od η. Zanimljivo je da se ustanovi koliko iznosi u_1/U za rastojanje od ploče $x_2 = \delta$, gde je δ debljina graničnog sloja kada se računa sa graničnim slojem. Ako se stavi $x_2 = \delta$, a δ se odredi sa (151–23), dobija se $\eta = \sqrt{30}$, i to važi za bilo koje rastojanje x_1 od početka ploče. Za $\eta = \sqrt{30}$ Blaziusovo rešenje daje $u_1/U = 0{,}997$, što znači da se brzina u_1 približila brzini U (zanemarljivo odstupa), pa se može smatrati da je u_1 jednako U tj. da tu prestaje uticaj ploče. Ovo dokazuje da je debljina sloja δ, određena sa (151–23), dobro odmerena. Treba još dodati da se raspored brzina koji proizilazi iz Blaziusovog rešenja razlikuje od napisanog sa (151–17), ali da te razlike nisu značajne.

Blaziusov postupak dovodi do:

$$C_\tau = \frac{0{,}664}{\sqrt{Re_x}} \qquad C_F = \frac{1{,}328}{\sqrt{Re_L}} \tag{151–43}$$

I ovde je vrednost za C_τ dvostruka vrednost za $C_\tau(L)$ na kraju ploče – može se prepisati (151–36).

Ove vrednosti su nešto manje (za oko 10%) od vrednosti napisanih sa (151–34) i (151–37).

Mogu se na neki način zadovoljiti rešenja po oba postupka ako se uzmu vrednosti koje se nalaze između tih rešenja, pa se za praktične potrebe mogu preporučiti obrasci sa zaokruženom vrednosti konstanti:

$$C_\tau = \frac{0{,}7}{\sqrt{Re_x}} \tag{151–44}$$

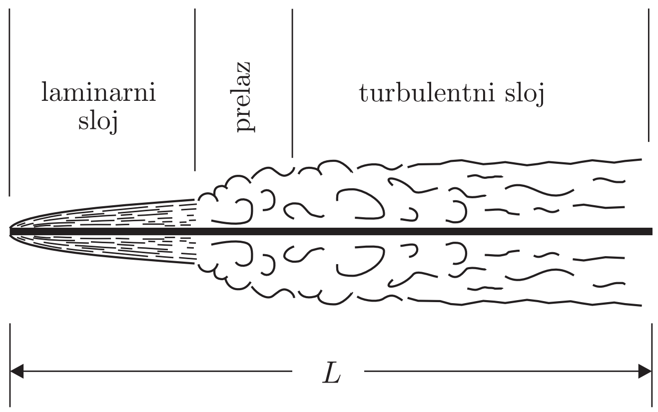
$$C_F = \frac{1{,}4}{\sqrt{Re_L}} \tag{151–45}$$

152
PRELAZ IZ LAMINARNOG U TURBULENTNI SLOJ

Laminarno strujanje može se održati samo dokle je viskoznost sposobna da deliće održava u slojevitom klizanju, a čim ona postane nemoćna za to (kada brzina poraste) ruši se slojevitost i nastaje turbulentno strujanje. To je objašnjavano na početku Poglavlja 51., a treba se podsetiti da je kasnije, u Poglavlju 64., prelaz iz laminarnog u turbulentno strujanje u cevi kružnog preseka prikazan kao primer Rejnoldsove sličnosti, sa objašnjenjem da taj prelaz treba da se dešava pri nekoj određenoj vrednosti Re-broja. Navedeno je da se laminarno strujanje pouzdano održava pri $Re < Re_{\mathrm{cr}}$, gde je Re_{cr} oko 2000 (za Re-broj se uzima prečnik D kao karakteristična dužina, a srednja brzina v kao karakteristična brzina, tj. tamo je bio $Re = D\,v/\nu$). Nadalje je razloženo da se granica između laminarnog i turbulentnog tečenja u jednom provodniku ne može potpuno tačno odrediti jednom opšte važećom konstantnom vrednošću Re-broja i ukazano na naizgled sitne i sporedne okolnosti, koje u datom pojedinačnom slučaju utiču na to. Dakle, postoji prelazna oblast vrednosti Re-broja u kojoj se može desiti i laminarno i turbulentno strujanje, pa se za granicu uzima ona do koje se laminarno tečenje pouzdano održava.

Konstantna vrednost kritičnog Re-broja za prelaz iz laminarnog u turbulentno strujanje, po načelima sličnosti, može se odnositi na sve provodnike istog oblika (za sve cevi kružnog preseka, na primer). Za provodnik drugog preseka obrazuje se Re-broj sa karakterističnom dužinom toga preseka, i njegova kritična vrednost je konstanta važeća za sve međusobno slične preseke.

Laminarnim slojem otpočinje obrazovanje graničnog sloja na početku ploče, pa se negde na ploči, ako se stvore odgovarajući uslovi, laminarni sloj preobrazi u turbulentni (slika 152–1). Sloj postepeno deblja i kada se postigne debljina δ_{cr}, koja se može nazvati „kritična” laminarni sloj se ne može dalje održati. Međutim, granica laminarnog



Slika 152–1 Sloj na početku ploče počinje kao laminaran. Ako se stvore uslovi on prelazi u turbulentni. (Napomena: Debljine sloja su znatno uvećane u odnosu na dužine.)

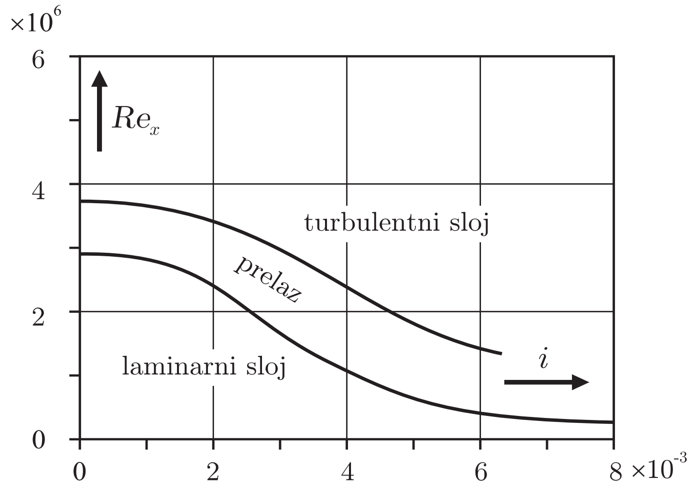
tečenja ne zavisi samo od debljine sloja, nego i od dolazeće brzine U i viskoznosti fluida (izražene kinematičkim koeficijentom viskoznosti ν). Upravo tu granicu određuje kritična vrednost Re-broja ($Re_\delta = U\delta/\nu$), što nameće i zakonitost za postizanje sličnosti. Kako je Re_δ jednoznačno vezan za Re_x, prema (151–40), može se umesto kritične vrednosti za Re_δ uzeti kritična vrednost za Re_x, napisana sa:

$$Re_{\mathrm{cr}} = \frac{x_{\mathrm{cr}} U}{\nu} \qquad (152\text{–}1)$$

Sa x_{cr} označeno je rastojanje od početka ploče do mesta gde prestaje laminaran sloj. Jasno je da je iz praktičnih razloga pogodnije koristiti x_{cr} (umesto δ_{cr}), jer se tako neposredno određuje mesto prestanka laminarnog sloja.

Do pojave turbulentnog sloja uopšte neće doći, laminarni sloj će se zadržati sve do kraja ploče, čija je dužina L, ako je $Re_{\mathrm{cr}} < Re_L$, gde je $Re_L = L\,U/\nu$.

Na slici 152–2 prikazani su, prema nizu sprovedenih eksperimentalnih istraživanja, Re-brojevi na prelazu iz laminarnog u turbulentni sloj, u zavisnosti od intenziteta turbulencije, izražene sa „intenzitetom turbulencije”, napisanim u Poglavlju 54., izrazom (54–8). Naime, nije Re_{cr} opšte važeća konstanta, nego mu je vrednost manja ako mu je



Slika 152–2 Prelaz iz laminarnog u turbulentni sloj, u zavisnosti od intenziteta turbulencije $i = 1/U\sqrt{\left(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}\right)/3}$.

turbulencija razvijenija. Iz slike se vidi da je granica laminarnog tečenja $Re_x = Re_{\mathrm{cr}}$, oko 3×10^5, za intenzitet turbulencije (i) približno 0,008. Laminarni sloj će se zadržati na većoj dužini za (i) blisko nuli, Re_{cr} će iznositi oko 3×10^6. Navedeno je lako objasniti: što je na dolazećoj struji turbulencija razvijenija, manje su mogućnosti da se laminarni sloj zadrži.

Intenzitet (i) je veličina pogodna za izražavanje razvijenosti turbulencije, jer je potkorenovani izraz prosek iz osrednjenih kvadrata sve tri komponente fluktuacione brzine, a ta se veličina (koja ima dimenziju brzine) izražava u odnosu na osrednjenu brzinu. Napominje se da iako je osrednjeno strujanje uspostavljeno u pravcu „1", fluktuacione brzine postoje u sva tri pravca.

Veoma velike vrednosti za Re broj za ploču, u odnosu na kritične vrednosti za cev (gde je ta vrednost oko 2000), ne treba da stvore nesporazum. Ako bi se kritične vrednosti Re-broja izražavale sa tim brojem, ali da u njemu debljina δ sloja bude karakteristična, dobile bi se kritične vrednosti Re_δ od 3 do $9{,}5 \times 10^3$, za malo pre navedene kritične brojeve Re_x od 0,3 do 3×10^6 – to se dobilo koristeći odnos Re_δ/Re_x, dat sa (151–40).

*　　*　　*

Nailazeća struja, i dok je neporemećena pločom, ravnomerna je u uslovnom smislu: ravnomerna je osrednjena brzina $\overline{u} = U = \text{const}$, dok se trenutne brzine kolebaju oko $\overline{u}$ (za pravac „1”), odnosno oko nule za ostala dva pravca. Brojni eksperimentalni rezultati, pa i prikazano na slici 152–2, potiču iz opita u aerotunelima velikog preseka (nekoliko kvadratnih metara), gde se u središnjem delu (a tu se postavlja ploča) postiže ravnomernost osrednjene brzine. Treba naglasiti da ravnomerna osrednjena brzina iste vrednosti, nema u svim slučajevima isti intenzitet turbulencije. Ako se ploča kreće jednoliko, brzinom U, kroz mirnu fluidnu sredinu (fluid bi bio potpuno miran da nema ploče), a strujanje se proučava relativno, u odnosu na ploču, onda je daleko od ploče i trenutna brzina konstantna, jer nema fluktuacija (intenzitet turbulencije je nula). Stoga treba zapaziti da nije potpuno isti otpor ploče koja se jednoliko kreće kroz mirnu fluidnu sredinu brzinom U, i otpor nepokretne ploče na koju nailazi „ravnomerna struja brzine U”. U drugom slučaju ravnomerna je samo osrednjena brzina. Drugim rečima, ta dva slučaja i nisu onda potpuno ista, iako se strujanje proučava uvek u odnosu na ploču. Ova napomena važi za sve otpore, a ne samo za posmatrani primer otpora ploče, pa će se kasnije pominjati.

153
OTPORI TRENJA TURBULENTNOG SLOJA UZ RAVNU PLOČU – LOGARITAMSKI RASPORED BRZINA

U jednačini za glavno strujanje u turbulentnom graničnom sloju, umesto proizvoda Uu_1 i u_1^2, koji ulaze u integrale napisane u (151–11), ti proizvodi ulaze osrednjeni:

$$\begin{aligned} \overline{U\,u_1} &= \overline{U}\,\overline{u_1} + \overline{U'\,u_1'} \\ \overline{u_1^2} &= \overline{u_1}^2 + \overline{u_1'^2} \end{aligned}$$

Tako se osrednjava proizvod fluktuacionih veličina, što je svojevremeno, u Poglavlju 52., razloženo i napisano sa (52–3).

Ako se smatra da su drugi sabirci u prethodnim izrazima zanemarljivi u odnosu na prve, zanemaruje se uticaj fluktuacija na osrednjene vrednosti, pa bi se jednačina (151–11) mogla primeniti i na turbulentni granični sloj, uz napomenu da su u njoj sve upisane vrednosti osrednjene. Navedeno zanemarenje je prihvatljivo sa praktičnog stanovišta.

U narednim izlaganjima neka se shvati da se sve veličine odnose na osrednjene vrednosti, i stoga se neće svuda iznad njih stavljati crtica, kao znak da su osrednjene. To se, dakle, podrazumeva.

U jednačini (151–11) spajaju se integrali i jednačina se deli sa ρ – dobija se:

$$\frac{\tau}{\rho}\,\mathrm{d}x_1 = \mathrm{d}\left[\int_0^\delta \left(U\,u_1 - u_1^2\right)\mathrm{d}x_2\right] \tag{153–1}$$

Razlika u zagradi pod integralom preuređuje se prema sledećem:

$$U\,u_1 - u_1^2 = U\,(U - u_1) - (U - u_1)^2 \tag{153–2}$$

pa se (153–1) svodi na:

$$\frac{\tau}{\rho}\,\mathrm{d}x_1 = \mathrm{d}\left\{\int_0^\delta \left[U\,(U - u_1) - (U - u_1)^2\right]\mathrm{d}x_2\right\} \tag{153–3}$$

U njoj se sada pojavljuje razlika $U - u_1$, koja se naziva „deficit brzine", a svrha preuređenja napisanog sa (153–2) baš je bila u tome da se stvori mogućnost da se iskoristi zakonitost za deficit brzine (94–14), namenjena ravanskom strujanju između dve ploče. Pri tom prenošenju sloj je polovina struje između ploča (od jedne ploče do sredine struje). Deficit znači smanjenje brzine i ovde on izražava smanjenje od neporemećene brzine U, a kod strujanja između ploča smanjenje od maksimalne brzine u_m (u sredini struje). U prenošenju (94–14) na sloj stoga treba zameniti u_m sa U, a h sa δ, što dovodi do:

$$\frac{U - u_1}{\sqrt{\tau/\rho}} = C_I \ln \frac{\delta}{x_2} \tag{153–4}$$

U jednačini (153–3) $U - u_1$ će se izraziti prema prethodnom napisanom, a uz to ce se integrisanje obavljati po $\mathrm{d}(x_2/\delta)$, umesto po $\mathrm{d}x_2$. Tako se dobija:

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\rho}\,\mathrm{d}x_1 &= \mathrm{d}\left[\delta U C_I \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \int_0^1 \ln\frac{\delta}{x_2}\,\mathrm{d}\left(\frac{x_2}{\delta}\right) - \delta C_I^2 \frac{\tau}{\rho} \int_0^1 \ln\left(\frac{\delta}{x_2}\right)^2 \mathrm{d}\left(\frac{x_2}{\delta}\right)\right] = \\ &= \mathrm{d}\left[\delta\left(U C_I \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} - 2\,C_I^2\,\frac{\tau}{\rho}\right)\right] \end{aligned} \tag{153–5}$$

Da bi naredna izlaganja bila razumljivija treba se podsetiti razjašnjenja pojmova „gladak", odnosno „hrapav zid". U Poglavlju 94. objašnjeno je da pojmovi „gladak" i „hrapav zid", odnosno „glatka" ili „hrapava cev" nisu isključivo geometrijska određenja, nego je ispravno reći „cev se ponaša kao glatka" odnosno „hrapava", jer se ista cev u različitim uslovima može ponašati kao glatka i kao hrapava. To zavisi od toga da li granični podsloj pokrije izbočine na zidu, i onda hrapavost ne utiče na raspored brzina (i na otpor trenja), pa se cev ponaša kao glatka, ili pak izbočine prodiru kroz podsloj, štrče iz njega, i onda utiču na raspored brzina, pa se cev ponaša kao hrapava. To je prikazano na slici 94–1. Ista tumačenja preneće se i ovde, na ploče, pa će se uvesti pojmovi „glatka" odnosno „hrapava" ploča.

Zanimljivo je da se primeti da su nazivi „sloj" i „podsloj" veoma prikladni pri strujanju uz ploču, jer se sloj jasno ispoljava kao granični sloj uz ploču, odvojen od celokupnog strujanja, a „podsloj" je, kao što sama reč kaže „pod slojem". Kod cevi se koriste naziv „sloj", ali on nije samo „granični nego obuhvata celokupno strujanje u cevi.

Treba naglasiti da jednačina (153–5) važi za turbulentni granični sloj uz glatku i uz hrapavu ploču, jer je i zavisnost (94–14), koja je ovde preneta, važila za struje sa glatkim i sa hrapavim zidovima. Jedna jednačina je nedovoljna za rešenje zadatka, potrebne su dve da se odrede funkcije $\delta(x_1)$ i $\tau(x_1)$ tj. da se za zadato rastojanje x_1, od početka ploče, odrede debljina δ graničnog sloja i napon τ trenja sloja o ploču. Uzeće se još jednačina koja će povezivati δ i τ – tako je postupljeno i kod laminarnog sloja. Ta druga jednačina, međutim, mora se napisati posebno za glatku, a posebno za hrapavu ploču.

* * *

Razmatra se *glatka ploča*, upravo granični sloj uz nju. Preneće se zakonitost za raspored brzina namenjen glatkim zidovima, napisan sa (94–23). U tom izrazu x_2 predstavlja udaljenost od zida, i tu je brzina $\overline{u}$. Primenjeno na spoljnu granicu sloja, gde je $x_2 = \delta$, a $\overline{u} = U$, dobija se :

$$\frac{U}{\sqrt{\tau/\rho}} = C_I \ln \frac{\delta\sqrt{\tau/\rho}}{\nu} + C_{II} = C_I \left(\ln \frac{\delta\sqrt{\tau/\rho}}{\nu} + \frac{C_{II}}{C_I} \right) \tag{153–6}$$

Ovo iskazuje vezu između δ i τ, koja je nagoveštena kao potrebna, da bi se sa njom, uz (153–5), rešio zadatak.

Poslednja napisana jednačina može se svesti na:

$$\frac{U}{C_I\sqrt{\tau/\rho}} = \ln \left(C_V \frac{\delta\sqrt{\tau/\rho}}{\nu} \right) \tag{153–7}$$

Ovde je uvedena nova konstanta, označena sa C_V, jer je ona „peta" (prve četiri su uvedene u Poglavlju 94).

Upoređenjem poslednja dva izraza uviđa se da je:

$$C_V = e^{C_{II}/C_I} \tag{153–8}$$

Umesto debljine sloja δ uvešće se odgovarajući *Re*-broj, ustvari prepisuje se (151-39):

$$Re_\delta = \frac{U\delta}{\nu} \tag{153–9}$$

Umesto (153–7), piše se:

$$\frac{U}{C_I\sqrt{\tau/\rho}} = \ln\left(C_V\,\frac{\delta\,U}{\nu}\frac{\sqrt{\tau/\rho}}{U}\right) = \ln\left(C_V\,Re_\delta\,\frac{\sqrt{\tau/\rho}}{U}\right)$$

iz čega se dobija:

$$Re_\delta = \frac{1}{C_V}\frac{U}{\sqrt{\tau/\rho}}\;e^{\,U/C_I\sqrt{\tau/\rho}} \tag{153–10}$$

Pogodno je, radi daljeg lakšeg i kraćeg izvođenja, uvesti promenljivu y:

$$y = \frac{U}{C_I\sqrt{\tau/\rho}} \tag{153–11}$$

Ona omogućava da se (153–10) zameni sa:

$$Re_\delta = \frac{C_I}{C_V}\,y\,e^y \tag{153–12}$$

Uvodi se uobičajeni koeficijent trenja C_τ, korišćen u Poglavlju 151., i napisan sa (151–31), čime se pokazuje da y u stvari izražava C_τ, jer je:

$$y = \frac{1}{C_I}\sqrt{\frac{2}{C_\tau}} \qquad \text{tj.} \qquad C_\tau = \frac{2}{(C_I\;y)^2} \tag{153–13}$$

Pošto y posredno izražava C_τ, a onda i napon τ, izraz (153–12) posredno povezuje debljinu sloja δ i napon trenja τ.

Jednačina (153–5) se preuređuje, deljenjem sa $U\nu$. Dobija se:

$$\frac{\tau}{\rho\,U^2}\;\mathrm{d}\!\left(\frac{x_1U}{\nu}\right) = \mathrm{d}\!\left[\frac{\delta U}{\nu}\left(\frac{C_I}{U}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} - 2\,\frac{C_I^2}{U^2}\,\frac{\tau}{\rho}\right)\right]$$

Ovo preuređenje imalo je za svrhu da se jednačina dovede na oblik gde se pojavljuju Re_x, Re_δ i y, uvedeni sa (151–32), te (153–9) i (153–11). Naime, jednačina se svodi na:

$$\frac{\tau}{\rho\,U^2}\;\mathrm{d}Re_x = \mathrm{d}\!\left[Re_\delta\left(\frac{1}{y} - \frac{2}{y^2}\right)\right] \tag{153–14}$$

Korišćenjem (153–11) $\tau/\rho U^2$ se zamenjuje sa $1/(C_I^2\, y^2)$, a Re_δ se zamenjuje korišćenjem (153–12). Tako se dobija:

$$\frac{\mathrm{d}Re_x}{C_I^2\; y^2} = \frac{C_I}{C_V}\,\mathrm{d}\left[e^y\left(1-\frac{2}{y}\right)\right] \qquad (153\text{–}15)$$

$$\mathrm{d}Re_x = y^2\,\frac{C_I^3}{C_V}\,e^y\left(1-\frac{2}{y}+\frac{2}{y^2}\right)\mathrm{d}y = \frac{C_I^3}{C_V}\,e^y\left(y^2-2y+2\right)\mathrm{d}y$$

Integrisanjem prethodnog izraza dobija se:

$$Re_x = \frac{C_I^3}{C_V}\left[e^y\left(y^2-4y+6\right)+\mathrm{const}\right] \qquad (153\text{–}16)$$

Iz ove jednačine treba odstraniti integracionu konstantu, što će se u narednom razmatranju i učiniti, (na osnovu prihvaćenog graničnog uslova), i onda će se jednačinom računati Re_x za zadate vrednosti veličine y. Tako će se dobiti međusobna veza Re_x i y, a to je u stvari veza između rastojanja x_1 i napona τ na tom rastojanju. Izrazom (153–12) odrediće se Re_δ za poznate vrednosti veličine y, a to će biti veza između debljine sloja δ i napona τ. Obe navedene veze posredno određuju i zavisnost debljine δ od rastojanja x_1. Time će biti omogućeno rešavanje praktičnih zadataka.

Za odstranjivanje integracione konstante, upisane kao „const”, mora se raspolagati sa graničnim uslovom, a on je na početku turbulentnog sloja. U Poglavlju 152. je objašnjeno da je sloj na početku ploče laminaran, a da se negde na ploči preobrazi u turbulentni, ako se za to stvore uslovi. Granični uslov za turbulentni sloj nalazi se, stoga, na mestu prelaza iz laminarnog u turbulentni sloj, upravo tamo gde turbulentni sloj počinje. Prelaz se obavlja kroz prelaznu oblast, gde je, zbog složenosti strujanja, veoma teško odrediti debljinu sloja i raspored brzina i napona, pa je određivanje graničnog uslova za početak sloja, praktično uzevši, nesavladiv zadatak. Može se uzeti da turbulentni sloj počinje od početka ploče, kao da ispred njega nema laminarnog sloja. To je prihvatljivo, uprkos nesaglasnosti sa stvarnim stanjem, jer omogućava formalno da se reši zadatak, a sa nadom da to rešenje ne odstupa značajno od onoga što pokazuju eksperimentalna saznanja, pogotovo kada laminaran sloj zauzima na početku ploče malenu dužinu, u odnosu na dužinu ploče, gde je onda pretežno turbulentni sloj. Razume se da takvo obrazloženje ne otklanja načelnu kritiku da nije granični uslov za turbulentni sloj postavljen tamo gde mu je mesto, u prelazu iz laminarnog sloja.

Navedeni uslov iskazuje se sa $\delta = 0$ za $x_1 = 0$, odnosno $Re_\delta = 0$ za $Re_x = 0$, a shodno (153–12), onda je $y = 0$, pa je integraciona konstanta u (153–16):

$$\text{const} = -\,6 \tag{153–17}$$

Treba primetiti da (153–13) pokazuje da za $y = 0$, C_τ ima neizmerno veliku vrednost, pa je takva vrednost i za τ. Tako je bilo i na početku laminarnog sloja, ali to nije imalo praktičnog značaja, jer se iz razmatranja može isključiti veoma malena dužina na početku ploče.

Granični uslov može se odrediti i prema sledećem:

Desne strane u (153–1) i (153–5) moraju da budu jednake, jer su im istovetne leve strane, a to znači da su jednake veličine koje se dobijaju integrisanjem desnih strana, što znači da je:

$$\int_0^\delta \left(Uu_1 - u_1^2\right) \mathrm{d}x_2 = \delta \left(UC_I\sqrt{\tau/\rho} - 2\,C_I^2\,\tau/\rho\right)$$

Kako je po celom jednom preseku sloja (na koji se odnosi napisano) $U > u_1$, jer je brzina u_1 u sloju manja od neporemećene brzine U, leva strana u prethodnom izrazu je pozitivna, onda je pozitivna i desna, pa se piše:

$$UC_I\sqrt{\tau/\rho} > 2\,C_I^2\,\tau/\rho$$

tj.

$$\frac{U}{C_I\sqrt{\tau/\rho}} > 2$$

Leva strana u prethodnoj nejednačini jednaka je veličini y, što se vidi iz (153–11), pa se nejednačina svodi na:

$$y > 2$$

Iz ovoga se zaključuje da y ne može biti manji od 2, pa se za granični uslov uzima:

$$y = 2 \qquad \text{za} \qquad Re_x = 0 \tag{153–18}$$

a onda je const u (153–16) jednaka:

$$\text{const} = -6\, e^2 = -44{,}3 \tag{153–19}$$

Za konstante C_I i C_{II} u (153–6) uzeće se vrednosti koje su prihvaćene u Poglavlju 94. i tamo su ušle u jednačinu (94-25), a upoređenjem te jednačine sa (94-23) pokazuje da su njihove vrednosti:

$$\begin{aligned} C_I &= 2{,}5 \\ C_{II} &= 5{,}5 \end{aligned} \tag{153–20}$$

pa je onda prema (153–8):

$$C_V = e^{2{,}2} = 9{,}025 \tag{153–21}$$

Za const u (153–16) vrednost je određena sa (153–17) ili (153–19), a te vrednosti su zanemarljive u odnosu na napisano u ugaonoj zagradi ispred const, ako je $y > 8$. Dokazaće se da je za praktična ostvarenja turbulentnog sloja $y > 8$ i time će će opravdati zanemarenje (izostavljanje) const u (153–16). Za $y = 8$, i za $C_I = 2{,}5$, $C_V = 9{,}025$, koliko je određeno sa (153–20) i (153–21), jednačina (153–16) daje Re_x otprilike 2×10^5. Područje sa $y < 8$ treba odbaciti, jer bi mu odgovarale vrednosti za Re_x manje od navedene, a u Poglavlju 152. je objašnjeno (i slikom 152–2 prikazano) da se turbulentni sloj ne može ostvariti za $Re_x < 3 \times 10^5$.

Prethodno navedeno dozvoljava da se (153–16) svede na:

$$Re_x = \frac{C_I^3}{C_V}\, e^y \left(y^2 - 4y + 6\right) \tag{153–22}$$

Sa malo pre navedenim vrednostima za C_I i C_V (2,5 i 9,05), jednačina se dovodi na:

$$Re_x = 1{,}731\, e^y \left(y^2 - 4y + 6\right) \tag{153–23}$$

Sa istim vrednostima za C_I i C_V (153–12) se svodi na:

$$Re_\delta = 0{,}277\, y\, e^y \tag{153–24}$$

Koeficijent C_τ određen je sa (153–13), i za $C_I = 2{,}5$ on iznosi:

$$C_\tau = \frac{0{,}32}{y^2} \qquad (153\text{–}25)$$

Jednačina (153–23) omogućava da se za zadato rastojanje x_1 od početka ploče (time je zadata vrednost za Re_x, uz poznatu brzinu i viskoznost) sračuna vrednost za y, doduše ne neposredno, nego postepenim približavanjem („probanjem"), a onda je, shodno (153–25) poznat koeficijent C_τ, odnosno napon trenja τ. Za sračunato y određuje se, korišćenjem (153–24), Re_δ, a time i debljina sloja δ na rastojanju x_1.

Da bi se stekao uvid u međusobne veze Re_x, Re_δ i C_τ obavljen je račun čiji su rezultati upisani u Tabelu 153-1. U istu Tabelu, u kolone (5) i (7) upisani su koeficijenti C_F za silu trenja za celu ploču, sračunati prema jednačinama koje će biti napisane u narednim izlaganjima.

Tabela 153–1 Rezultati računa turbulentnog sloja uz glatku ploču

pretpo-stavljeno y	Sračunato jednačinom					
	(153-25) $10^3\,C_\tau$	(153-24) $10^{-3}\,Re_\delta$	(153-23) $10^{-6}\,Re_x$	(153-33) $10^3\,C_F$	(153-26) $10^3\,C_\tau$	(153-34) $10^3\,C_F$
1	2	3	4	5	6	7
8	5,00	6,61	0,196	6,32	5,09	6,18
9	3,95	20,2	0,72	4,88	3,98	4,76
10	3,20	61,0	2,52	3,88	3,20	3,78
12	2,22	541	28,7	2,61	2,21	2,55
14	1,63	4644	303	1,88	1,63	1,83
16	1,25	39400	3045	1,41	1,25	1,37

Postupak računanja je sledeći:

Pretpostavlja se vrednost za y i sa njome su sračunate odgovarajuće vrednosti za C_τ, Re_δ i Re_x, one su upisane u kolone (2), (3) i (4) Tabele. Primećuje se da je primenjeni postupak omogućio račun bez postepenog približavanja, neposredno su primenjene jednačine (153–25), (153–24) i (153–23).

Za praktičnu primenu preporučuje se obrazac:

$$C_\tau = (2 \log Re_x - 0{,}65)^{-2{,}3} \qquad (153\text{–}26)$$

koji neposredno obezbeđuje C_τ za zadatu vrednost Re_x (logaritam u izrazu je dekadni).

Ovaj obrazac dobro aproksimira vezu između Re_x i C_τ koja proizilazi iz logaritamske zakonitosti za raspored brzina. Za istu vrednost za Re_x sračunata je, i u kolonu (6) Tabele upisana, vrednost za C_τ koju daje prethodni obrazac (153–26). Ako taj obrazac dobro aproksimira ono što se dobija iz logaritamske zavisnosti za raspored brzina, treba da vrednosti u kolonama (2) i (6) budu iste. To je približno tako, odstupanja nisu značajna za praktične potrebe. Prema tome, može se računati obrascem (153–26), čija je praktična prednost, što neposredno računa C_τ za zadati Re_x-broj.

* * *

Koeficijent C_F sile trenja, napisan sa (151-35), korišćenjem (151-29), izražava se sa:

$$C_F = \frac{\tau_{\text{sr}}}{\rho U^2/2} = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\tau}{\rho U^2/2}\,\mathrm{d}x_1 \tag{153–27}$$

Uz zamenu $2\,\tau/\rho\,U^2$ sa C_τ prethodno se svodi na:

$$C_F = \frac{1}{L}\int_0^L C_\tau\,\mathrm{d}x_1 \tag{153–28}$$

Umesto L i x_1 uvode se odgovarajući Re-brojevi, pa je:

$$C_F = \frac{1}{Re_L}\int_0^{Re_L} C_\tau\,\mathrm{d}Re_x \tag{153–29}$$

Jednačina (153–13) dozvoljava da se u (153–15) $C_I^2\,y^2$ zameni sa $2\,C_\tau$. Po obavljenoj zameni integrisanje (153–15) dovodi do:

$$\int_0^{Re_L} C_\tau\,\mathrm{d}Re_x = 2\,\frac{C_I}{C_V}\left[e^{y_L}\left(1-\frac{2}{y_L}\right)\right] \tag{153–30}$$

Integrisanje je obavljeno u granicama od $y = 2$ do $y = y_L$. Uzet je drugi navedeni granični uslov (153–18), dok bi prvi ($y = 0$ za $Re_x = 0$) dao donju granicu neizmerno velike vrednosti. Gornja granica je $Re_L = Re_x$ za $y = y_L$.

Zamenom integrala u (153–29) sa desnom stranom (153–30) dobija se da je:

$$C_F = 2\,\frac{C_I\, e^{y_L}\,(y_L - 2)}{C_V Re_L\, y_L}$$

Re_L je određen sa (153–22) – to je Re_x za $y = y_L$. Kada se to uvrsti u prethodni izraz, dobija se:

$$C_F = \frac{2\,(y_L - 2)}{C_I^2\; y_L \left(y_L^2 - 4y_L + 6\right)} \tag{153–31}$$

Koeficijent C_F može se izraziti i u odnosu na C_τ na kraju ploče, koji je, shodno (153–13), za $y = y_L$, jednak:

$$C_\tau(L) = \frac{2}{C_I^2\, y_L^2} \tag{153–32}$$

pa se deljenjem (153–31) sa (153–32) dobija:

$$\frac{C_F}{C_\tau(L)} = \frac{y_L\,(y_L - 2)}{y_L^2 - 4y_L + 6} \tag{153–33}$$

Primenom ovog obrasca sračunate su vrednosti za C_F i upisane u kolonu (5) Tabele „Rezultati računa turbulentnog sloja uz glatku ploču". Pri računu je uvršteno $y_L = y$, $C_\tau(L) = C_\tau$, gde su y i C_τ upisane u isti red Tabele. Napominje se da se C_F odnosi na dužinu ploče, čiji Re_L-broj je jednak Re_x iz kolone (4) u istom redu Tabele.

Preporučuje se obrazac kojim se C_F neposredno sračuna za zadatu vrednost Re_L-broja:

$$C_F = \frac{0{,}455}{(\log Re_L)^{2{,}58}} \tag{153–34}$$

Po ovom obrascu za pojedine vrednosti za Re_L (to su vrednosti za Re_x iz Tabele) sračunate su odgovarajuće vrednosti za C_F, i upisane su u kolonu (7) Tabele, uz napomenu da se za Re_L u (153–34) uzelo Re_x iz istog reda Tabele. Uviđa se da su razlike između vrednosti u kolonama (5) i (7) podnošljive za praktičnu upotrebu, pa se može koristiti obrazac (153–34), kao dobra aproksimacija za ono što proizilazi iz logaritamske zakonitosti za raspored brzina, koja je dovela do izraza (153–32) i (153–33). Napisani obrazac (153–34) obično se veže za Šlihtinga i Prandtla (SCHLICHTING, PRANDTL).

Pored (153–34) nudi se i obrazac:

$$\sqrt{\frac{1}{C_F}} = 4{,}13 \log \sqrt{C_F \, Re_L}$$

koji je sklopljen po uzoru na obrazac (96–16) za glatke cevi.

* * *

Za *hrapavu ploču*, umesto (153–6), uzima se odgovarajuća jednačina za hrapave zidove. Preneće se jednačina (94–29), uz zamenu u_m sa U i x_2 sa δ, pa se piše:

$$\frac{U}{\sqrt{\tau/\rho}} = C_I \ln \frac{\delta}{k} + C_{III} = C_I \ln \left(C_{VI} \, \frac{\delta}{k} \right) \qquad (153\text{–}35)$$

Ovde je obavljena zamena:

$$C_{VI} = e^{C_{III}/C_I} \qquad (153\text{–}36)$$

Iz prve napisane jednačine proizilazi:

$$\frac{\delta}{k} = \frac{1}{C_{VI}} \, e^{C_I \sqrt{\tau/\rho}/U} = \frac{1}{C_{VI}} \, e^{y} \qquad (153\text{–}37)$$

I ovde je uvedena veličina y, korišćena u prethodnim razmatranjima otpora uz glatku ploču, i uvedena izrazom (153–11).

Jednačina (153–5), kako je ranije objašnjeno, važi i za glatku i za hrapavu ploču. Iz (153–5) tamo se došlo do (153–14), gde su dužina x_1 i debljina δ zamenjene odgovarajućim Re-brojevima. Ovde će se uvesti relativne hrapavosti k/x_1 i k/δ, gde se apsolutna hrapavost k izražava u odnosu na x_1, odnosno na δ. Tačnije rečeno, pojaviće se recipročne vrednosti navedenih relativnih hrapavosti. Kada se jednačina (153–5) podeli sa $k\,U^2$ dobija se:

$$\frac{\tau}{\rho U^2} \, \mathrm{d}\left(\frac{x_1}{k}\right) = \mathrm{d}\left[\frac{\delta}{k} \left(\frac{C_I}{U} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} - 2 \, \frac{C_I^2}{U^2} \, \frac{\tau}{\rho} \right)\right] \qquad (153\text{–}38)$$

Kao i malo pre, u (153–37), i ovde se uvodi zamenjujuća promenljiva y, pa se prethodno svodi na:

$$\frac{1}{C_I^2\, y^2}\,\mathrm{d}\!\left(\frac{x_1}{k}\right)=\mathrm{d}\!\left[\frac{\delta}{k}\left(\frac{1}{y}-\frac{2}{y^2}\right)\right] \tag{153–39}$$

Koristeći (153–37), može se iz jednačine (153–39) odstraniti δ/k, pa se dobija međusobna veza između y i x_1/k, a kako y posredno izražava napon τ trenja fluida o ploču, ustvari se dobija zavisnost τ od rastojanja x_1 od početka ploče.

Navedeno odstranjivanje dovodi prethodnu jednačinu do:

$$\frac{1}{C_I^2\, y^2}\,\mathrm{d}\!\left(\frac{x_1}{k}\right)=\frac{1}{C_{VI}}\,\mathrm{d}\!\left[e^{y}\left(\frac{1}{y}-\frac{2}{y^2}\right)\right] \tag{153–40}$$

$$\mathrm{d}\!\left(\frac{x_1}{k}\right)=\frac{C_I^2}{C_{VI}}\,y^2\,e^{y}\left(\frac{1}{y}-\frac{3}{y^2}+\frac{4}{y^3}\right)\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}\!\left(\frac{x_1}{k}\right)=\frac{C_I^2}{C_{VI}}\,e^{y}\left(y-3+\frac{4}{y}\right)\mathrm{d}y \tag{153–41}$$

Integrisanje prethodnog izraza daje:

$$\frac{x_1}{k}=\frac{C_I^2}{C_{VI}}\left[\int_2^y e^{y}\,(y-3)\,\mathrm{d}y+\int_2^y\frac{4e^{y}}{y}\mathrm{d}y\right]$$

Ovo je napisano uz granični uslov $y=2$. Tako je postupljeno i pri (153–30) – i ovde bi, kao i tamo, uslov $y=0$ doveo do neizmerno velikih vrednosti za donju granicu integrala. Primećuje se da je obavljena podela na dva integrala. Prvi je integrabilan i u sledećem izrazu biće napisano rešenje, a drugi će ostati da se rešava numeričkim postupkom (sabiranjem velikog broja sabiraka, od kojih svaki pripada malenom priraštaju Δy).

Navedeno dovodi do:

$$\frac{x_1}{k}=\frac{C_I^2}{C_{VI}}\left[e^{y}\,(y-4)+2e^2+\int_2^y\frac{4e^{y}}{y}\mathrm{d}y\right] \tag{153–42}$$

Za C_I i C_{III} u jednačini (153–35) uzeće se vrednosti prihvaćene u Poglavlju 94., a upoređenjem (94–29) i (94–30) dobija se da je $C_I=2{,}5$, a $C_{III}=8{,}5$. Sa tim vrednostima (153–36) daje:

$$C_{VI}=e^{3{,}4}=29{,}96 \tag{153–43}$$

Pošto se primenjuje za C_I ista vrednost kao kod glatke ploče ($C_I = 2.5$), prepisuje se (153–25):

$$C_\tau = \frac{2}{C_I^2\, y^2} = \frac{0{,}32}{y^2} \tag{153–44}$$

Sa vrednošću za C_{VI} napisanom sa (153–43), jednačina (153–37) daje:

$$\frac{\delta}{k} = 0{,}0334\, e^{y} \tag{153–45}$$

Sa prihvaćenim vrednostima $C_I = 2{,}5$ i $C_{VI} = 29{,}96$ jednačina (153–42) se svodi na:

$$\frac{x_1}{k} = 0{,}209 \left[e^{y}\,(y-4) + \int_2^y \frac{4e^{y}}{y}\,\mathrm{d}y \right] \tag{153–46}$$

Ovde je u ugaonoj zagradi izostavljeno $2e^2$ kao zanemarljivo u odnosu na ostale članove.

Za zadato rastojanje x_1 (upravo za zadato x_1/k) prethodna jednačina može postepenim približavanjem da odredi y. Sa poznatom vrednošću za y, primenom (153–44) sračuna se C_τ (a onda je poznati napon τ). Takođe sa poznatom vrednošću za y određena je debljina sloja δ – to je određeno sa (153–45). Tako je zadatak u praktičnom smislu rešen: za zadato rastojanje x_1 od početka ploče može se sračunati napon trenja τ i debljina sloja δ.

Tabela 153–2 Rezultati računa turbulentnog sloja uz hrapavu ploču

pretpo-stavljeno	Sračunato jednačinom					
	(153-44)	(153-45)	(153-46)	(153-50)	(153-47)	(153-51)
y	$10^3\, C_\tau$	δ/k	$10^{-3}\, x_1/k$	$10^3\, C_F$	$10^3\, C_\tau$	$10^3\, C_F$
1	2	3	4	5	6	7
7	6,53	36,6	0,825	9,02	6,52	8,90
8	5,00	99,5	2,86	6,51	4,99	6,51
10	3,20	735	30,3	3,89	3,21	3,96
12	2,22	5430	292	2,59	2,23	2,65
14	1,63	40100	2610	1,86	1,64	1,89

Iz Tabele 153-2 može se steći utisak o promeni napona τ i debljine sloja δ duž ploče. Tabela je urađena pretpostavljanjem vrednosti za y za koju su primenom (153–44), (153–45) i (153–46) sračunate odgovarajuće vrednosti za C_τ, δ/k i x_1/k i ispisane u kolone (2), (3) i (4) Tabele. Uzete su vrednosti za y od 7 do 14, čemu odgovara x_1/k od otprilike 40 do 4000, a u tim granicama nalaze se praktični zadaci. Primenjeni postupak se opravdava time što je račun sproveden bez postepenog približavanja neposrednom primenom navedenih jednačina.

Za praktičnu upotrebu nudi se obrazac:

$$C_\tau = \left(2{,}87 + 1{,}58 \log \frac{x_1}{k}\right)^{-2{,}5} \tag{153–47}$$

Po ovom obrascu sračunate su vrednosti za C_τ (za vrednosti x_1/k upisane prethodno u Tabelu), i upisane su u kolonu (6) Tabele. Upoređenje vrednosti u kolonama (6) i (2) pokazuje da obrazac (153–47) dobro aproksimira ono što je u Tabeli sračunato, a proizašlo je iz logaritamske zakonitosti za raspored brzina u sloju.

U Tabeli su upisani koeficijenti C_F za silu trenja za celu ploču, sračunati prema sledećem izlaganju.

* * *

Koeficijent C_F sile trenja izraziće se na isti način kao kod glatke ploče, na osnovu (153–28) se piše:

$$C_F = \frac{k}{L} \int_0^{L/k} C_\tau \, \mathrm{d}\left(\frac{x_1}{k}\right) \tag{153–48}$$

Integrisanje (153–40), uz zamenu $C_I^2 \, y^2$ sa $2/C_\tau$, dovodi do:

$$\int_0^{L/k} C_\tau \, \mathrm{d}\left(\frac{x_1}{k}\right) = \frac{2}{C_{VI}} \, e^{y_L} \left(\frac{1}{y_L} - \frac{2}{y_L^2}\right) \tag{153–49}$$

Pri ovom integrisanju uzeta je ista donja granica ($y = 2$ za $x_1 = 0$) kao kod (153–30), dok je gornja $y = y_L$, kao odgovarajuća za L/k.

Zamenom integrala u (153–48) sa desnom stranom prethodnog izraza (153–49) dobija se:

$$C_F = \frac{2}{C_{VI}} \, \frac{k}{L} \, \frac{y_L - 2}{y_L^2} \, e^{y_L} \tag{153–50}$$

Pri računanju po ovom obrascu za y_L se uzima y naveden u istom redu u Tabeli, za L/k se uzima x_1/k u istom redu, a za C_{VI} se uzima vrednost napisana sa (153-43). Tako su sračunati koeficijenti upisani u Tabeli, u koloni (5).

Za praktičnu upotrebu preporučuje se obrazac:

$$C_F = \left(1{,}89 + 1{,}62 \log \frac{L}{k}\right)^{-2{,}5} \tag{153–51}$$

Po ovom obrascu sračunate su vrednosti za C_F i upisane su u kolonu (7) Tabele (za k/L je uzeto x_1/L iz istog reda Tabele). Iz Tabele se vidi da je prilično dobro slaganje (5) i (7).

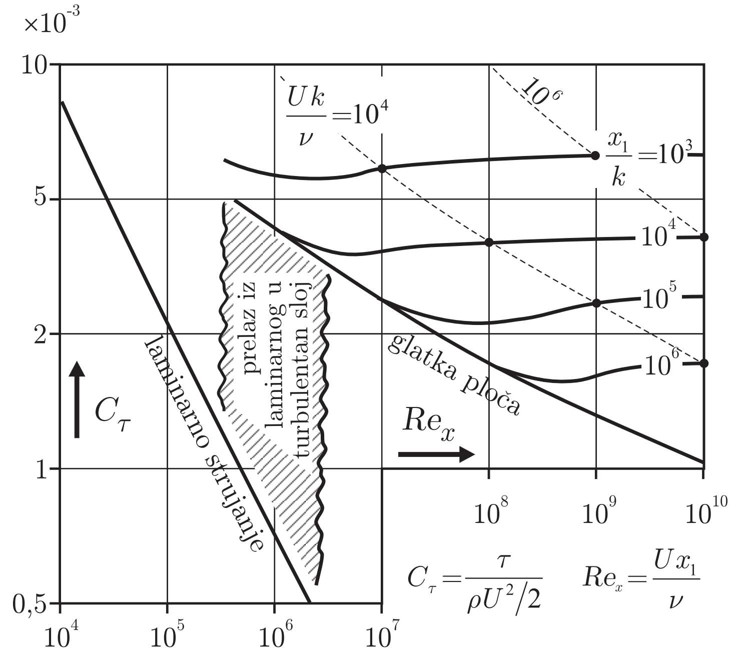
* * *

Napomena. Usvojene vrednosti konstanti ($C_I = 2{,}5$, $C_V = 9{,}025$, $C_{VI} = 29{,}96$), sa kojima su obavljena sva računanja proizašle su iz vrednosti promenjivih u ravanskom strujanju između ploča i kod cevi ($C_I = 2{,}5$, $C_{II} = 5{,}5$, $C_{III} = 8{,}5$). Tamo, kod cevi, objašnjeno je da se preporučuju i vrednosti za konstante koje se razlikuju od prihvaćenih. Doduše ne razlikuju se mnogo, pa nema značajnih razlika u rezultatima, koji se dobijaju primenom različitih vrednosti konstanti. Isto se može reći i za ploče, ako se primene konstante koje se malo razlikuju od primenjenih.

* * *

U prethodnim razmatranjima zavisnost napona trenja τ od rastojanja x_1 od početka ploče, za sloj uz glatku ploču, izražen je vezom bezdimenzionalnih veličina, funkcijom $C_\tau = C_\tau\,(Re_x)$. Grafikon te funkcije može se nacrtati na osnovu računanja primenom jednačine (153–35), ili korišćenjem Tabele 151–1 namenjene glatkoj ploči, koja se može dopuniti vrednostima za y. Može se koristiti i izraz (153–26), koji neposredno izražava $C_\tau = C_\tau(Re_x)$.

Za sloj uz hrapavu ploču zavisnost se prikazuje vezom bezdimenzionalnih veličina $C_\tau = C_\tau(x_1/k)$. Grafički prikaz te funkcije proizilazi iz računanja po (153–46), ili iz napisanog u Tabeli 153–2 namenjenoj hrapavoj ploči, ili neposrednim određivanjem C_τ u zavisnosti od x_1/k primenom izraza (153–47).



Slika 153–1 Grafički prikaz zavisnosti koeficijenta trenja (C_τ) od Re-broja i relativne hrapavosti (k/x_1).

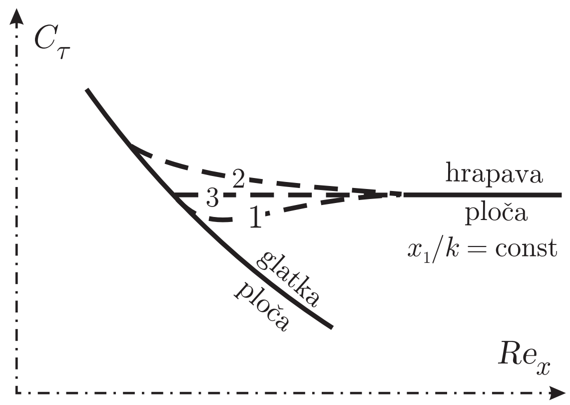
Na slici 153–1 grafički su prikazane obe zavisnosti (i za glatku i za hrapavu ploču), kao i prelaz iz jedne u drugu zavisnost, u vidu:

$$C_\tau = C_\tau\,(Re_x,\; x_1/k) \tag{153–52}$$

Na slici je dodata i linija koja prikazuje zakonitost za laminarno strujanje prema jednačini (151–34), i obeležen je i prelaz iz laminarnog u turbulentni sloj, u skladu sa objašnjenjem u Poglavlju 122.

Slika podseća na „Nikuradzeovu harfu", nacrtanu na slici 96–1, gde je za cevi prikazana zavisnost koeficijenta trenja $\lambda = 4\,C_\tau$, od Re-broja i relativne hrapavosti k/D. Obe slike (96–1 i 153–1) odnose se na jednoliku hrapavost, sa kojom su obavljeni opiti koji su doveli do prikazanih zakonitosti.

Između oblasti sa zakonitostima za glatku i hrapavu cev nalazi se prelazna oblast. Taj prelaz kod jednolike hrapavosti izgleda kao na pomenute dve slike, upisan kao (1) na slici 153–2. Kod cevi se za nejednoliku hrapavost (a takva je u većini praktičnih primera)



Slika 153–2 Prelaz iz glatke u hrapavu ploču (,,1" jednolika hrapavost, ,,2" nejednolika hrapavost i ,,3" prema predlogu za računanje).

predviđa da se prelaz obavlja prema Kolbruku, a ne prema Nikuradzeu (vidi sliku 96–2), pa bi odgovarajući prelaz za ploču bio kao (2) na slici 153–2. Kod ploča kao približnost može se preporučiti, pojednostavljenja radi, prelaz prema (3), a to znači da se za zadate vrednosti za Re_x i x_1/k sračunaju vrednosti za C_τ i za glatku, i za hrapavu ploču, pa se usvoji veća.

Napominje se da će se u narednom, 154-om Poglavlju napisati obrazac koji uključuje glatku i hrapavu ploču – to je obrazac (154–31).

Uz sliku 153–1 korisno je da se primeti da jedna određena ploča ($k = \text{const}$) ne može da prati jednu od linija $x_1/k = \text{const}$, dok jednoj cevi odgovara na slici 96–1 jedna od linija k/D, jer je relativna hrapavost jedne cevi konstantna (pošto su konstante i k, i D).

Za istu ploču, pri istoj brzini, i u istom fluidu ($\nu = \text{const}$) treba slediti liniju $Uk/\nu = \text{const}$. Radi uvida nacrtane su dve takve linije (isprekidane linije) na slici 153–1.

Ploča koja se po uspostavljanju turbulentnog sloja ponaša kao glatka (izbočine pokrivaju podsloj), tako se ponaša do kraja, jer su smerom niz struju izbočine sve više pokrivene. Ovo se zaključuje iz izraza (96-30):

$$\frac{\delta_c \sqrt{\tau/\rho}}{\nu} = \text{const}$$

Sa δ_c je označena debljina podsloja. Ta konstanta utvrđena je izrazom (96–30), ona iznosi otprilike 5, ali vrednost te konstante nije bitna za izvođenje sledećeg zaključka, bitno je samo da je konstanta. Iz napisanog izraza proizilazi da za isti fluid δ_c raste kada τ opada, a τ opada niz struju (udaljavanjem od početka ploče), jer slika 153–1 pokazuje da se za istu ploču ($Uk/\nu = \text{const}$), koeficijent C_τ smanjuje (τ opada) sa porastom Re_x (sa porastom x_1). Prema tome, ispravno je rečeno da se ploča koja se u početku turbulentnog sloja ponaša kao glatka, ponašaće se tako i do kraja sloja.

Ako se ploča na početku turbulentnog sloja ponaša kao hrapava, mogla bi se približavanjem svom kraju početi da se ponaša kao glatka, jer debljina podsloja raste, pa se može desiti da pokrije izbočine. U praktičnim slučajevima, međutim, takva mogućnost je skoro isključena. U prilog ovoj tvrdnji može da posluži posmatranje ucrtanih isprekidanih linija za $Uk/\nu = \text{const}$, uz napomenu da bi linije i za druge konstante imale slično pružanje. Linija $Uk/\nu = \text{const}$ za pojedini slučaj, ako polazi iz oblasti za hrapave cevi, neće povećanjem Re-broja (a to znači niz struju) dostignuti zakonitost za glatku cev – može možda ući u prelaznu oblast, a u tom slučaju, shodno prethodnom objašnjenju (slika 153–2), računa se po obrascu za hrapavu ploču.

* * *

U Poglavlju 152. objašnjeno je da se laminarni sloj može održati do izvesnog rastojanja x_{cr} od početka ploče, i da se iza toga (ako se stvore uslovi) obrazuje turbulentni sloj (slika 152–1). Rastojanje x_{cr} određuje kritična vrednost Re broja:

$$Re_{\text{cr}} = \frac{Ux_{\text{cr}}}{\nu} \tag{153–53}$$

Tamo, iza izraza (152–1) kojim je uveden u razmatranje Re_{cr}, navedeno je da se on kreće od 3×10^5 do 3×10^6, zavisno od intenziteta nailazeće struje, što je tamo i objašnjeno i prikazano slikom 152–2.

Račun koji obuhvata turbulentni sloj i laminarni ispred njega silu trenja F određuje:

$$\begin{aligned} F = F^{\text{turb}}&(L) - F^{\text{turb}}(x_{\text{cr}}) + F^{\text{lam}}(x_{\text{cr}}) \\ &(a) \quad - \quad (b) \quad + \quad (c) \end{aligned} \tag{153–54}$$

Ovim izrazom se iskazuje da se računa turbulentni sloj po celoj ploči dužine L – to je obeleženo sa (a), pa se oduzme (b) što pripada početnoj dužini ploče, do x_{cr}, gde je sloj laminaran, a umesto toga se doda (c) prema računu za laminarni sloj.

Prethodni izraz (153–54) dovodi se na oblik:

$$F = \frac{1}{2}\rho\, U^2 \left[C_F^{\mathrm{turb}}(L)\, A - C_F^{\mathrm{turb}}(x_{\mathrm{cr}})\, A_{\mathrm{cr}} + C_F^{\mathrm{lam}}(x_{\mathrm{cr}})\, A_{\mathrm{cr}}\right] \qquad (153\text{–}55)$$

Ovde je korišćeno da je F jednako $\rho\, C_F\, A\, U^2/2$, sa time što se unose odgovarajući koeficijenti C_F i odgovarajuće površine (A za celu ploču, A_{cr} za deo ploče do rastojanja x_{cr}).

Deljenjem prethodnog izraza (153–55) sa $\rho\, U^2 A/2$ dobija se koeficijent C_F sile trenja F za celu ploču, površine A:

$$C_F = \frac{F}{\frac{1}{2}\,\rho\, U^2 A} = C_F^{\mathrm{turb}}(L) - \frac{x_{\mathrm{cr}}}{L}\left[C_F^{\mathrm{turb}}(x_{\mathrm{cr}}) - C_F^{\mathrm{lam}}(x_{\mathrm{cr}})\right] \qquad (153\text{–}56)$$

Pri ovom deljenju zamenjeno je A_{cr}/A sa x_{cr}/L.

Ako je ploča glatka primeniće se obrazac (153–34) za turbulentni sloj, a (151–45) za laminarni, pa se računa sa:

$$C_F = \frac{0{,}455}{(\log Re_L)^{2{,}58}} - \frac{x_{\mathrm{cr}}}{L}\left[\frac{0{,}455}{(\log Re_{\mathrm{cr}})^{2{,}58}} - \frac{1{,}4}{Re_{\mathrm{cr}}^{1/2}}\right] \qquad (153\text{–}57)$$

Za hrapavu ploču u (153–56) koristiće se C_F^{turb} prema (153–52):

$$C_F^{\mathrm{turb}}(L) = \left(1{,}89 + 1{,}62\, \log\frac{L}{k}\right)^{-2.5} \qquad (153\text{–}58)$$

$$C_F^{\mathrm{turb}}(x_{\mathrm{cr}}) = \left(1{,}89 + 1{,}62\, \log\frac{x_{\mathrm{cr}}}{k}\right)^{-2{,}5} \qquad (153\text{–}59)$$

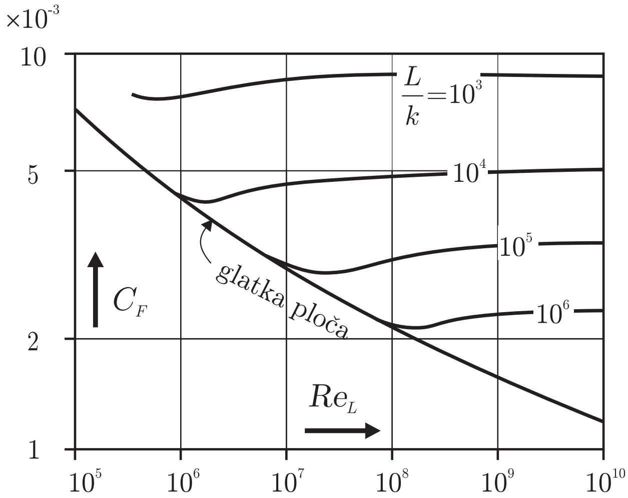
Računanje sa laminarnim slojem ispred turbulentnog donekle ublažava raniju kritiku što se u izvođenju jednačina pretpostavljalo da turbulentni sloj počinje od početka ploče. Kritika se ipak ne može otkloniti jer nije utvrđen granični uslov za početak turbulentnog sloja. Međutim, iako prihvatanje ovde iznetog postupka, sa primenom (153–55), odnosno (153–56), nije besprekorno iz navedenog razloga o neizvesnosti graničnog uslova, postupak se može prihvatiti, jer daje rezultate koji se dosta dobro slažu sa eksperimentalnim rezultatima.

*   *   *

Slika 153–3 prikazuje zavisnost za keoficijent sile trenja:

$$C_F = C_F\,(Re_L,\ L/k_1) \tag{153–60}$$

Ovde je L dužina ploče, a $Re_L = UL/\nu$.



Slika 153–3 Grafički prikaz zavisnosti koeficijenta sile trenja (C_F) od Re_L-broja i relativne hrapavosti (k/L).

Do ovoga grafikona dolazi se korišćenjem prikazanog u Tabelama (koje se mogu ispuniti sa međuvrednostima za y), ili neposrednom primenom obrazaca (153–34) i (153–51).

154
OTPORI TRENJA TURBULENTNOG GRANIČNOG SLOJA UZ RAVNU PLOČU – EKSPONENCIJALNI RASPORED BRZINA

Po ugledu na (97–1), i zamenom h sa δ, a u_m sa U, ispisuje se eksponencijalni izraz za raspored brzina u turbulentnom graničnom sloju:

$$\frac{u_1}{U} = \left(\frac{x_2}{\delta}\right)^n \tag{154–1}$$

Za *glatku ploču* primeniće se izraz dobijen na osnovu jednačine (97–3), uz zamenu u_m sa U i h sa δ:

$$\frac{U}{\sqrt{\tau/\rho}} = C_n \left(\frac{\delta\sqrt{\tau/\rho}}{\nu}\right)^n \tag{154–2}$$

Sa svrhom da se u izrazu pojavi Re_δ, prethodni izraz se preobličava u:

$$\frac{U}{\sqrt{\tau/\rho}} = C_n \left(\frac{\delta U}{\nu}\right)^n \left(\frac{\sqrt{\tau/\rho}}{U}\right)^n = C_n\, Re_\delta^n \left(\frac{\sqrt{\tau/\rho}}{U}\right)^n \tag{154–3}$$

iz čega proizilazi:

$$\frac{\tau}{\rho U^2} = C_n^{\frac{-2}{n+1}}\, Re_\delta^{\frac{-2n}{n+1}} \tag{154–4}$$

Koristiće se jednačina (151–12), koja će se diferencirati i iza toga podeliti sa ρU^2 – dobija se:

$$\frac{\tau\,\mathrm{d}x_1}{\rho U^2} = \mathrm{d}\left[\delta \int_0^1 \frac{u_1}{U}\,\mathrm{d}\left(\frac{x_2}{\delta}\right) - \delta \int_0^1 \frac{u_1^2}{U}\,\mathrm{d}\left(\frac{x_2}{\delta}\right)\right]$$

Primeniće se raspored brzina (154–1), pa su integrali u prethodnom izrazu konstante. Dolazi se do:

$$\frac{\tau}{\rho U^2} = \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x_1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{(n+1)\,(2n+1)}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x_1} \tag{154–5}$$

Jednačine (154–4) i (154–5) napisane su tako da su im leve strane jednake, pa izjednačenje desnih strana, uz zamenu $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}x_1$ sa $\mathrm{d}Re_\delta/\mathrm{d}Re_x$, daje:

$$\frac{\mathrm{d}Re_\delta\ n}{\mathrm{d}Re_x\,(n+1)\,(2n+1)} = C_n^{\frac{-2}{n+1}}\,Re_\delta^{\frac{-2n}{n+1}} \qquad (154\text{–}6)$$

Ovo je veza između Re_δ i Re_x. To je u stvari zavisnost debljine sloja δ od rastojanja x_1 od početka sloja, a napon τ je odstranjen.

Razdvajanjem promenljivih prethodna jednačina se preuređuje u:

$$\mathrm{d}Re_x = \frac{n}{(n+1)\,(2n+1)}\,C_n^{\frac{2}{n+1}}\,Re_\delta^{\frac{2n}{n+1}}\,\mathrm{d}Re_\delta \qquad (154\text{–}7)$$

I ovde se, kao i kod primene logaritamske zakonitosti rasporeda brzine, pretpostavlja da turbulentni sloj počinje od početka ploče, što znači da je $Re_\delta = 0$ za $Re_x = 0$, pa integrisanje prethodnog dovodi do međusobne zavisnosti Re_x i Re_δ:

$$Re_x = \frac{n}{(2n+1)\,(3n+1)}\,C_n^{\frac{2}{n+1}}\,Re_\delta^{\frac{3n+1}{n+1}} \qquad (154\text{–}8)$$

ili:

$$Re_\delta = \left[\frac{(2n+1)\,(3n+1)}{n}\right]^{\frac{n+1}{3n+1}} C_n^{\frac{-2}{3n+1}}\,Re_x^{\frac{n+1}{3n+1}} \qquad (154\text{–}9)$$

Deljenjem sa Re_x dobija se odnos između Rejnoldsovih brojeva, koji je ujedno i odnos između debljine sloja δ i rastojanja x_1 (od početka ploče) na kome je ta debljina:

$$\frac{\delta}{x_1} = \frac{Re_\delta}{Re_x} = \left[\frac{(2n+1)\,(3n+1)}{n}\right]^{\frac{n+1}{3n+1}} C_n^{\frac{-2}{3n+1}}\,Re_x^{\frac{-2n}{3n+1}} \qquad (154\text{–}10)$$

Množenjem jednačine (154–4) sa (154–8) dobija se:

$$\frac{\tau}{\rho U^2}Re_x = \frac{n}{(2n+1)\,(3n+1)}Re_\delta$$

iz čega se uz zamenu $\tau/\rho U^2$ sa $C_\tau/2$ dobija:

$$C_\tau = \frac{2n}{(2n+1)\,(3n+1)}\frac{Re_\delta}{Re_x} = \frac{2n}{(2n+1)\,(3n+1)}\frac{\delta}{x_1} \qquad (154\text{–}11)$$

Po ovom obrascu sračuna se C_τ, pošto je prethodno sa (154–10) određeno Re_δ/Re_x.

Za vrednosti n i C_n prihvaćene kod cevi, koje su korišćene za zavisnost (3) na slici (97–1), tj. za:

$$n = \frac{1}{7} \qquad C_n = 8{,}7$$

jednačina (154–10) daje:

$$\frac{Re_\delta}{Re_x} = \left(\frac{90}{7}\right)^{4/5} 8{,}7^{\,-7/5}\; Re_x^{-1/5}$$

a to je jednako i δ/x_1, pa je:

$$\frac{\delta}{x_1} = 0{,}373\, Re_x^{-1/5} \tag{154–12}$$

pa se onda primenom (154–11) dobija:

$$\begin{aligned} C_\tau &= \frac{14}{90} \times 0{,}373\, Re_x^{-1/5} \\ C_\tau &= 0{,}058\, Re_x^{-1/5} \end{aligned} \tag{154–13}$$

Koeficijent sile C_F dobija se primenom (151–35), u kome se τ_{sr} zamenjuje sa napisanim sa (151–29), gde se nadalje umesto τ piše, shodno (151–31), $C_\tau\, \rho\, U^2/2$. Tako se koeficijent sile piše:

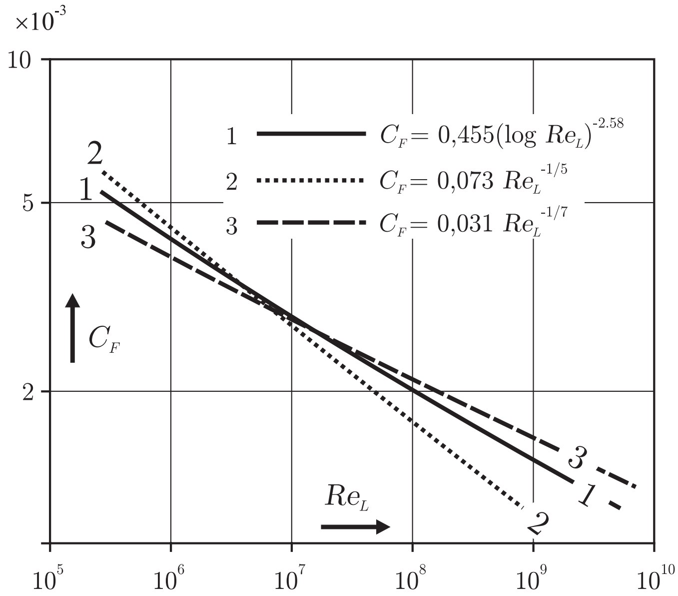
$$C_F = \frac{1}{L}\int_0^L C_\tau\, \mathrm{d}x_1 = \frac{1}{Re_L}\int_0^{Re_L} C_\tau\, \mathrm{d}(Re_x)$$

Uvrštava se za C_τ sračunato sa (154–13), pa se, na kraju, dobija:

$$\begin{aligned} C_F &= \frac{0{,}058}{Re_L}\int_0^{Re_L} Re_x^{-1/5}\, \mathrm{d}(Re_x) = 0{,}058 \times \frac{5}{4}\, Re_L^{-1/5} \\ C_F &= 0{,}0725\, Re_L^{-1/5} \end{aligned} \tag{154–14}$$

Odnos koeficijenta C_F prema koeficijentu trenja na kraju ploče $C_\tau(L)$ iznosi:

$$\frac{C_F}{C_\tau(L)} = \frac{5}{4} \tag{154–15}$$



Slika 154–1 Upoređenje koeficijenata otpora (C_F) glatke ploče za dve eksponencijalne zavisnosti, izražene sa (154–14) i (154–16) sa logaritamskom zavisnošću (153–34).

Na slici 154–1, grafikonom (1) je prikazana funkcija (153–34), a grafikonom (2) funkcija (154–14). Na istoj slici ucrtan je i grafikon (3), koji se odnosi na:

$$C_F = 0{,}0307\,Re_x^{-1/7} \tag{154–16}$$

koji proizilazi iz usvojenih vrednosti:

$$n = \frac{1}{11} \qquad C_n = 12{,}2$$

na osnovu kojih se primenom (154–10) i (154–11) dobija:

$$\frac{Re_\delta}{Re_x} = \frac{\delta}{x_1} = 0{,}217\,Re_x^{-1/7} \tag{154–17}$$

$$C_\tau = 0{,}0263\,Re_x^{-1/7} \tag{154–18}$$

i C_F kako je napisano sa (154–16). Ovde je:

$$\frac{C_F}{C_\tau(L)} = \frac{7}{6} \tag{154–19}$$

Slika 154–1 pokazuje da eksponencijalna zavisnost, prikazana sa (2), zanemarljivo odstupa od (1) koja prikazuje logaritamsku zavisnost, do izvesnih vrednosti Re_L-broja, a za veće vrednosti tog broja odstupanje je značajnije, ali tamo se logaritamskoj zavisnosti (1) bolje prilagođava eksponencijalna (3), koja za uzvrat, znatno odstupa od (1) za manje vrednosti Re_L-broja.

Iz jednačina napisanih na slici 154–1 se vidi da je koeficijent C_F srazmeran sa Re_L^{-n}, gde je n, po apsolutnoj vrednosti manji ako se želi prilagođavanje eksponencijalne zavisnosti logaritamskoj za veće Re_L brojeve. To se može zaključiti iz ovde prikazanih eksponencijalnih zakonitosti, a može se uopštiti. Svaka eksponencijalna zavisnost na slici 154–1 prikazuje se pravom linijom, čiji je nagib manji ako je n manje (pri apsolutnoj vrednosti), pa treba birati za n manju vrednost ako se želi prilagođavanje logaritamskoj zavisnosti za veće Re_L-brojeve. Načelno, isto je bilo i kod trenja u cevima. Tamo je, kako pokazuje izraz (97–14), koeficijent trenja λ bio srazmeran sa Re^{-N}, a rečeno je da N treba uzimati manjim ako se želi prilagođenje eksponencijalne zavisnosti logaritamskoj za veće Re-brojeve. To se vidi i iz slike 97–3 gde je nagib prikaza logaritamske zavisnosti sve blaži kako Re raste.

Prethodno razmatranje može se shvatiti kao objašnjenje da je logaritamska zavisnost najbolji prikaz otpora trenja, a da je eksponencijalna zavisnost dobra aproksimacija (za logaritamsku), za određenu oblast Re-brojeva. Međutim, može se shvatiti da i logaritamska zavisnost ne predstavlja potpuno tačno stvarnu zavisnost, pa se onda eksponencijalna, kao jednostavnija, može prihvatiti kao posledica eksperimentalnog iskustva. Tako je tumačeno i na kraju Poglavlja 97., za otpore trenja u cevima, a ovde se radi o načelno istoj stvari.

*　　*　　*

Eksponencijalna zakonitost rasporeda brzina u turbulentnom graničnom sloju uz *hrapavu ploču* daje brzinu U na spoljnoj strani sloja debljine δ:

$$\frac{U}{\sqrt{\tau/\rho}} = C_n \left(\frac{\delta}{k}\right)^n \tag{154–20}$$

što je napisano prenošenjem zakonitosti (97-7) za ravansko strujanje između dve hrapave ploče, uz zamenu u_m sa U, i h sa δ.

Na osnovu prethodnog izraza piše se:

$$\frac{\tau}{\rho U^2} = C_n^{-2} \left(\frac{\delta}{k}\right)^{-2n} \tag{154–21}$$

Pored ove jednačine koristi se i ovde jednačina (154–5), jer ona važi i za glatku i za hrapavu ploču, pa se izjednačavanjem desnih strana (leve su identične) dobija:

$$C_n^{-2} \left(\frac{\delta}{k}\right)^{-2n} = \frac{n}{(n+1)\,(2n+1)} \, \frac{\mathrm{d}(\delta/k)}{\mathrm{d}(x_1/k)}$$

Ovde je pri korišćenju (154–5) obavljena zamena izvoda $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}x_1$ sa $\mathrm{d}(\delta/k)\,/\mathrm{d}(x_1/k)$.

Razdvajanjem promenljivih i potom integrisajem dobija se:

$$\frac{x_1}{k} = \frac{n}{(n+1)\,(2n+1)^2} \, C_n^2 \left(\frac{\delta}{k}\right)^{2n} \frac{\delta}{k} \tag{154–22}$$

Ova jednačina određuje debljinu δ graničnog sloja u zavisnosti od rastojanja x_1 od početka ploče. Ovde je to izraženo bezdimenzionalnim veličinama δ/k i x_1/k, upravo relativnim hrapavostima, dok su kod glatke ploče odgovarajuće veličine bili Re-brojevi u jednačini (154–8). Uslov za integraciju primenjen pri pisanju prethodne jednačine bio je isti kao i kod glatke ploče, tj. $\delta = 0$ za $x_1 = 0$.

U rešavanju praktičnih zadataka obično se zahteva da se izrazi debljina sloja δ u zavisnosti od rastojanja x_1 – za to može da posluži odnos δ/x_1. Do njega se najpre dolazi množenjem prethodne jednačine (154–22) sa $(k/x_1)^{2n+1}$, što daje:

$$\left(\frac{x_1}{k}\right)^{-2n} = \frac{n}{(n+1)\,(2n+1)^2} \, C_n^2 \left(\frac{\delta}{x_1}\right)^{2n+1}$$

iz čega se dobija:

$$\frac{\delta}{x_1} = \left[\frac{n}{(n+1)\,(2n+1)^2}\right]^{-1/(2n+1)} C_n^{-2/(2n+1)} \left(\frac{x_1}{k}\right)^{-2n/(2n+1)} \tag{154–23}$$

Množenje (154–21) sa (154–22) daje:

$$\frac{\tau}{\rho U^2}\frac{x_1}{k} = \frac{n}{(n+1)\,(2n+1)^2}\,\frac{\delta}{k}$$

Zamenom $\tau/\rho U^2$ sa $C_\tau/2$ prethodno se dovodi na:

$$C_\tau = \frac{2n}{(n+1)\,(2n+1)^2}\,\frac{\delta}{x_1} \qquad (154\text{–}24)$$

Primenom ovog obrasca sračuna se C_τ, pošto je prethodno sa (154–23) određeno δ/x_1.

Prihvataju se za n i C_n vrednosti korišćene za uspostavljanje rasporeda brzina (97–9):

$$n = \frac{1}{8} \qquad\qquad C_n = 11 \qquad (154\text{–}25)$$

Sa njima obavljeni račun, prema (154–23) i (154–24), daje:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{x_1} &= \left(\frac{16}{225}\right)^{-4/5} 11^{-8/5} \left(\frac{x_1}{k}\right)^{-1/5} \qquad \text{tj.} \\ \frac{\delta}{x_1} &= 0{,}179 \left(\frac{x_1}{k}\right)^{-1/5} \end{aligned} \qquad (154\text{–}26)$$

$$\begin{aligned} C_\tau &= \frac{32}{225}\,0{,}179 \left(\frac{x_1}{k}\right)^{-1/5} \qquad \text{tj.} \\ C_\tau &= 0{,}0254 \left(\frac{x_1}{k}\right)^{-1/5} \end{aligned} \qquad (154\text{–}27)$$

Koeficijent sile trenja C_F dobija se, po ugledu na račun koji je prethodio (154–14):

$$\begin{aligned} C_F &= \frac{1}{L}\int_0^{L/k} C_\tau \,\mathrm{d}x_1 = \frac{k}{L}\int_0^{L/k} C_\tau \,\mathrm{d}\!\left(\frac{x_1}{k}\right) = \\ &= \frac{k}{L}\int_0^{L/k} 0{,}0254 \left(\frac{x_1}{k}\right)^{-1/5} \mathrm{d}\!\left(\frac{x_1}{k}\right) \end{aligned}$$

$$C_F = 0{,}0318 \left(\frac{L}{k}\right)^{-1/5} \qquad (154\text{–}28)$$

Na slici 154–2 nacrtani su grafikoni (1), (2) i (3), koji su prikazi funkcija (153–52) i poslednje napisane (154–28) i još i zavisnost:

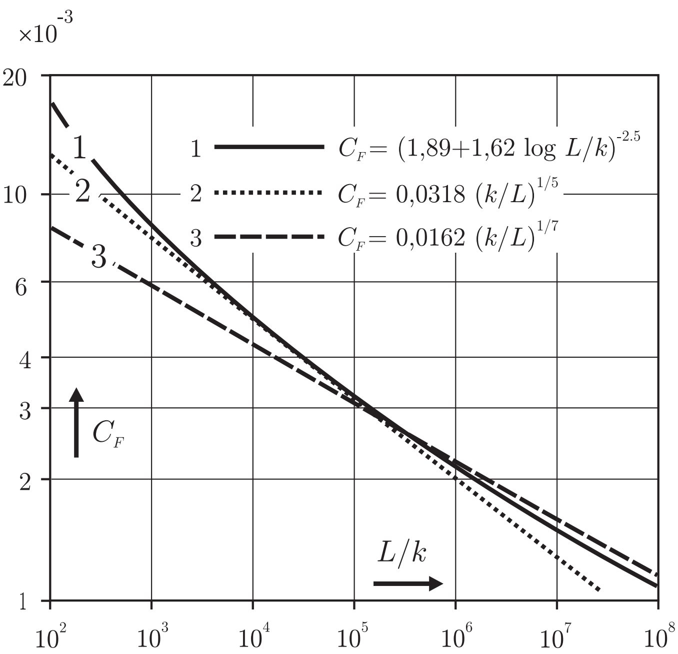
$$C_F = 0{,}0162 \left(\frac{L}{k}\right)^{-1/7} \tag{154–29}$$

Ovoj zavisnosti odgovara:

$$C_\tau = 0{,}0139 \left(\frac{x_1}{k}\right)^{-1/7} \tag{154–30}$$

a dobijena je sa $n = 1/12$ i $C_n = 14{,}2$.

Slika 154–2 može da posluži za upoređenje rezultata dobijenih korišćenjem logaritamske i dve eksponencijalne funkcije. Iz slike se vidi da se zavisnost (3), gde je C_F srazmerno sa $(k/L)^{1/7}$, bolje prilagođava logaritamskoj zavisnosti nego (2), gde je C_F srazmerno sa $(k/L)^{1/5}$,



Slika 154–2 Upoređenje koeficijenta otpora (C_F) hrapave ploče za dve eksponencijalne zavisnosti izražene sa (154–28) i (154–29), sa logaritamskom zavisnošću (153–51).

za manje hrapave ploče (za veće L/k), dok za hrapavije ploče (manje L/k) prilagođavanje je bolje sa (2). Načelno isto je bilo i kod cevi. Iza izraza (97–15) i (97–16) rečeno je da se prvi, gde je koeficijent trenja λ srazmeran sa $(k/D)^{1/4}$, bolje prilagođava logaritamskoj zavisnosti od drugoga, gde je λ srazmeran $(k/D)^{1/3}$ za manje hrapavosti, dok se za veće hrapavosti to postiže sa drugim. Uopšteno rečeno, manja vrednost eksponenta uz k/L, odnosno k/D daju bolju prilagodjenost logaritamskoj zavisnosti, ako je relativna hrapavost manja.

Može se, na kraju, i ovde dodati primedba o odnosu logaritamske i eksponencijalne zavisnosti, napisana na kraju razmatranja trenja uz glatku ploču.

* * *

Nagovešteno je u Poglavlju 153., da će se napisati eksponencijalni izraz koji će obuhvatati i glatku i hrapavu ploču, i prelaznu oblast – takav izraz je napisan za cevi sa (97–20). Na isti način kod ploča se dobija spajanjem (154–27) i (154–13), odnosno (154–28) i (154–14):

$$C_\tau = 0{,}026\left(\frac{k}{x_1} + \frac{55}{Re_x}\right)^{1/5} \tag{154–31}$$

$$C_F = 0{,}032\left(\frac{k}{L} + \frac{55}{Re_L}\right)^{1/5} \tag{154–32}$$

Ako je drugi sabirak u zagradama zanemarljiv u odnosu na prvi, dobijaju se obrasci (154–27) i (154–28) za hrapavu cev, a tada ploča ulazi u oblast hrapavih ploča. Ako je pak prvi sabirak zanemarljiv u odnosu na drugi, dobijaju se obrasci (154–13) i (154–14) za glatku cev. Na kraju, ako nijedan nije zanemarljiv u odnosu na drugi, ulazi se u prelaznu oblast gde je C_τ, odnosno C_F, zavisan od Re-broja i od hrapavosti. Grafikon funkcije (154–31) izgledao bi kao kriva (2) na slici 153–2, tj. prelaz iz glatke u hrapavu ploču je postepen.

* * *

Napominje se da primena eksponencijalne zavisnosti umesto logaritamske znači i zamenu koeficijenata $C_F^{\text{turb}}(L)$ i $C_F^{\text{turb}}(x_{\text{cr}})$ koji se uvrštavaju u jednačinu (153–56). Ne unose se logaritamske zavisnosti za koeficijente, nego se primenjuju eksponencijalne koje proizilaze iz (154–28), ili (154–29).

DODATAK

Na granični sloj uz ploču preneti su rasporedi brzina za ravansko strujanje između dve paralelne ploče, odnosno osnosimetrično strujanje u kružnoj cevi. Tako se došlo do obrazaca za trenje uz ploču, koji podsećaju na obrasce za računanje trenja, za laminarno i turbulentno tečenje u glatkoj i hrapavoj cevi.

Razmatranja u četiri prethodna poglavlja, od 151. do 154., dovela su, između ostalog, i do obrazaca za koeficijent za silu trenja ploče C_F, za praktičnu upotrebu, koji se navode u nastavku (u zagradama su dati odgovarajući brojevi slika i jednačina).

– Laminarni granični sloj

$$C_F = 8/\sqrt{30\,Re_L} \qquad (151-37)$$

– Turbulentni granični sloj

- Glatka ploča (slika 154–1)

$$C_F = 0{,}455\,(\log Re_L)^{-2{,}58} \qquad (153-34)$$
$$C_F = 0{,}0725\,Re_L^{-1/5} \qquad (154-14)$$
$$C_F = 0{,}0307\,Re_x^{-1/7} \qquad (154-16)$$

- Hrapava ploča (slika 154–2)

$$C_F = [1{,}89 + 1{,}62\,\log(L/k)]^{-2{,}5} \qquad (153-51)$$
$$C_F = 0{,}0318\,(L/k)^{-1/5} \qquad (154-28)$$
$$C_F = 0{,}0162\,(L/k)^{-1/7} \qquad (154-29)$$

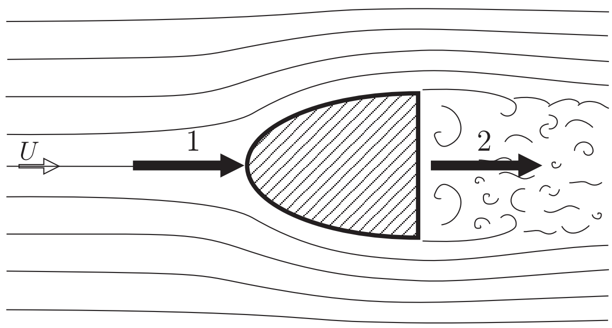
- Sabiranjem jednačina (154–14) i (154–28) dobija se jednačina koja obuhvata glatku, prelaznu i hrapavu ploču:

$$C_F = 0{,}032\,(k/L + 55/Re_L)^{1/5} \qquad (154-32)$$

155

OSNOVE ZA PROUČAVANJE OTPORA OBLIKA – PRITISCI NA TELO U ZAVISNOSTI OD BRZINE OPSTRUJAVANJA OKO TELA

U prethodnim poglavljima razmatrano je trenje između ravne usamljene ploče i fluidne struje u koju je ploča uronjena. Uslovljeno je da je ploča tanka i položena u pravcu strujanja, pa se međusobni uticaj fluida i ploče svodi na trenje. Sada će razmatrani međusobni uticaj tela i fluida, gde se on ne svodi samo na trenje, i gde deluje i sila kojom fluid napada telo zbog toga što mu se ono isprečilo i navuklo na sebe navedenu silu. Od oblika tela zavisi koliko telo ometa strujanje i koliku silu zbog toga navlači na sebe. Telo izaziva povećanje pritiska na prednji deo (na čelo) i sniženje pritiska (potpritiske) na stražnji deo (slika 155–1) i njihovo sadejstvo čini silu kojom fluid napada telo. Ova objašnjenja opravdavaju da se ta sila naziva „*otpor oblika*" ili „*otpor pritisaka*".



Slika 155–1 Čelo tela fluidna struja povećanim pritiscima pritiskuje (1), a na stražnji deo tela deluju potpritisci kojim fluid uvlači telo u sebe (2).

Pod nazivom „*otpor tela*" podrazumeva se ukupan otpor (otpor oblika + otpor trenja). U primerima gde je trenje beznačajno u odnosu na uticaj oblika kao otpor tela se shvata otpor oblika, a na takve primere pretežno se nailazi u praktičnoj primeni.

Uz pojam „otpor” nije na odmet objašnjenje da se to može shvatiti kao otpor kojim se telo odupire (suprotstavlja) fluidnoj struji, pa to izražava sila kojom telo deluje na fluid. Može se shvatiti i kao otpor fluida na prisustvo tela koje ometa strujanje, pa to izražava sila kojom fluid deluje na telo. Razume se da je u oba tumačenja sila iste vrednosti, a suprotno usmerena. Ovde se radi o onome što je u Uvodu ovoga, 15-og poglavlja, nazvano „spoljnje strujanje” (spolja od čvrste granice) ili „opstrujavanje”, odnosno „opticanje” oko čvrste granice. U praktičnijm zadacima „spoljnog strujanja” obično se određuju pritisci i sila kojom fluid deluje na telo, upravo određuje se opterećenje na telo dejstvom fluida.

Razmatraće se telo uronjeno u strujanje koje bi neporemećeno (da u njemu nema tela) bilo pravolinijsko, paralelno i ravnomerno – svuda ista brzina $u_1 = u = U = \mathrm{const}$ (za pravac „1” uzet je pravac neporemećene brzine). Telo remeti struju, ali se može pretpostaviti da je daleko od tela stanje neporemećeno. Uz to se smatra da je telo „usamljeno”, što znači da poremećaj u strujanju stvara isključivo telo koje se posmatra, jer su sve ostale čvrste granice strujanja toliko udaljene od tela da je njihov uticaj na strujanje oko tela zanemarljiv.

Naglašava se da će se razmatranja odnositi samo na potpuno uronjena tela, isključuju se plivajuća i nedovoljno uronjena tela, gde na delovanje otpora utiče blizina slobodne površine tečnosti.

U svim razmatranjima u ovom, 155-om delu, smatraće se da je gustina fluida konstantna, ili da se zanemarljivo menja, tako da se razmatranja mogu odnositi i na otpore u vazduhu ako je taj uslov (o promeni gustine) ispunjen. U Poglavlju 112. objašnjeno je da se može prihvatiti rešavanje zadataka gde brzina neće preći petinu brzine zvuka i gde je zadatak unutar visinske razlike do 10 m. To je objašnjeno uz izraze (122–14) i (122–15).

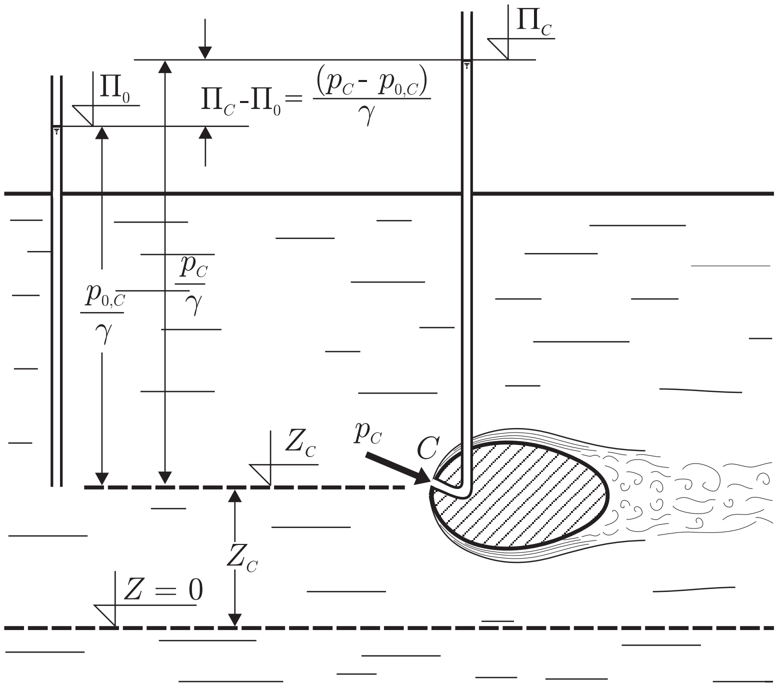
Prethodni uslovi, ukratko rečeno su: posmatraće se *otpor usamljenog tela, potpuno uronjenog u ravnomernu jednoliku pravolinijsku struju fluida, konstantne gustine.*

Umesto nepokretnog tela u fluidnoj struji može se posmatrati pokretno telo koje se jednoliko, brzinom U, pravolinijski kreće kroz fluidnu sredinu, koja bi bila mirna da je ne remeti kretanje tela. U oba slučaja sila otpora bila bi identična, ako je daleko od tela brzina $u = U = \text{const}$, uz napomenu da se brzina meri u odnosu na telo (koordinatni sistem se kreće sa telom). To je, međutim, tako samo za slučaj kretanja tela kroz mirnu fluidnu struju, ali nije tako za nepokretno telo u fluidnoj struji, zbog turbulentnih fluktuacija. Naime, daleko od tela $u \neq \text{const}$ na celoj fluidnoj sredini, samo se za osrednjeno strujanje može napisati $\overline{u} = \text{const}$. Ova razlika je već objašnjena pri razmatranju otpora ploče, na kraju Poglavlja 152.

* * *

U neporemećenoj fluidnoj struji (slika 155–2), daleko od tela, fluid se smatra idealnim pa konstantnoj brzini $u = U = \text{const}$ odgovara konstantna pijezometarska kota:

$$\Pi = \Pi_0 = \text{const} \tag{155–1}$$



Slika 155–2 Pritisak (p_C) na telo i neporemećeni pritisak ($p_{0,C}$) (daleko od tela) na istom visinskom položaju (Z_C).

što je zaključeno i za neporemećenu sredinu ispred ploče i napisano sa (151-2).

Na samom telu i u području gde se oseća uticaj tela, pijezometarska kota nije Π_0. U proizvoljnoj tački (C) neka iznosi Π_C, pa je razlika $\Pi_C - \Pi_0$ posledica uticaja otpora tela, jer bi nestala ako bi se nepokretno telo izvadilo iz fluidne struje, odnosno ako bi se telo koje se kreće u mirnoj vodi zaustavilo i strujanje se potpuno smirilo. Tačka (C) neka je na visinskom položaju Z_C, pa je pritisak u njoj $p_C = \gamma(\Pi_C - Z_C)$, dok bi u istoj tački pritisak bio $p_{0,C} = \gamma(\Pi_0 - Z_C)$, kada bi se otklonio otpor (i ovde kao i svuda γ označava specifičnu težinu). Uz prisustvo otpora pritisak p_C se uspostavlja daleko od tela u svim tačkama koje se nalaze na koti Z_C.

Iz napisanog za p_C i $p_{0,C}$ dobija se:

$$p_C - p_{0,C} = \gamma\,(\Pi_C - \Pi_0)$$

ili uopšteno, za bilo koju tačku na telu:

$$p - p_0 = \gamma\,(\Pi - \Pi_0) \tag{155–2}$$

gde je razlika $p - p_0$ posledica otpora. Nju treba integrisati po celoj graničnoj površini A tako da se dobije „otpor oblika” ili „otpor pritiska”:

$$F_i^{\text{obl}} = \int_A (p - p_0)\,(-n_i)\,\mathrm{d}A \tag{155–3}$$

Sa $-n_i$ je označen ort unutrašnje normale na površinu tela (uobičajeno je da je pozitivan smer orta normale spoljni, od tela), pa se napisano odnosi na pritiske kojima fluid deluje na telo, i na silu koja iz toga proizilazi.

Za deo površine gde je $p > p_0$ (povećan pritisak u odnosu na neporemećeni), sila će imati smer $-n_i$, tj. smer unutrašnje normale (fluid pritiska telo), dok će sa $p < p_0$ (potpritisak, sisanje), sila imati smer spoljne normale. Iz izraza (155–2) može se zaključiti da tamo gde je $p > p_0$, tamo je $\Pi > \Pi_0$, a $p < p_0$ znači $\Pi < \Pi_0$.

Naglašava se da sila napisana sa (155–3) nije ukupna sila kojom pritisci deluju na telo, jer je ukupna sila:

$$F_i = \int_A p\,(-n_i)\,\mathrm{d}A \tag{155–4}$$

što se razdvaja, pa je:

$$F_i = \int_A (p - p_0)\,(-n_i)\,\mathrm{d}A + \int_A p_0\,(-n_i)\,\mathrm{d}A \tag{155–5}$$

Prvi deo napisan je sa (155–3) i to je otpor oblika F_i^{obl}, a drugi deo je sila kojom fluid deluje na telo kada nema kretanja (kada deluju pritisci p_0), što znači da je otpor pritiska samo ono što je posledica kretanja. Sila pri mirovanju se obično naziva „sila potiska" i prikazana je slikom 71–4, a), a tamo, pri kraju Poglavlja 71., napisano je da je ta sila jednaka težini zapremine tečnosti koju je zamenilo uronjeno telo – kaže se težina telom istisnute, ili potisnute, tečnosti.

Indeks „obl" uz F_i, u izrazu (155–3), ukazuje da je to sila usled delovanja pritiska, upravo „otpor oblika". Uz nju treba dodati i silu trenja:

$$F_i^{\text{tr}} = \int_A \tau_i\,\mathrm{d}A$$

koja se dobija integrisanjem napona trenja τ_i po površini tela A, a napon je napisan kao vektor koji je usmeren onako kako napon trenja deluje na elementarnu graničnu površinu $\mathrm{d}A$.

* * *

Koristiće se „koeficijent pritiska", što je u proučavanju strujanja uobičajena bezdimenzionalna veličina za izražavanje pritiska. Uveden je izrazom (61–18), i označen sa C_p. Ovde će se bezdimenzionalno izraziti razlika $p - p_0$, jer je ona merodavna za određivanje otpora, pa će se uvesti koeficijent pritiska u obliku:

$$C_p = \frac{p - p_0}{\rho\,U^2/2} \tag{155–6}$$

$C_p > 0$ za povećan pritisak ($p > p_0$), a $C_p < 0$ za potpritisak ($p < p_0$).

Zamenom $p - p_0$, korišćenjem (155–2), dobija se:

$$C_p = \frac{\Pi - \Pi_0}{U^2/2\,g} \tag{155–7}$$

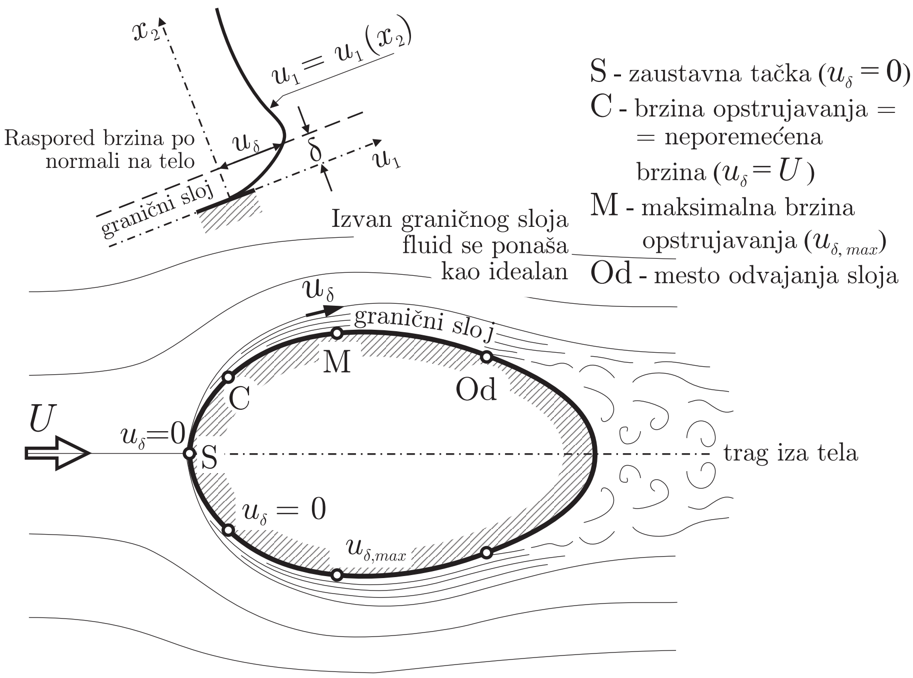
Korišćenjem koeficijenta C_p sila napisana sa (155–3) izražava se sa:

$$F_i^{\text{obl}} = \frac{\rho\,U^2}{2}\int_A C_p\,(-n_i)\,\mathrm{d}A \tag{155–8}$$

* * *

U razmatranju otpora ploče, uveden je pojam „granični sloj", uz objašnjenje da se, izuzevši taj sloj uz čvrstu granicu, fluid može smatrati idealnim. Navedeno je da je granični sloj veoma tanak, a da u njemu udaljavanjem od ploče brzina naglo raste od nule (na ploči) do brzine koja zanemarljivo odstupa od neporemećene brzine U. Pri opstrujavanju oko tela pretpostavlja se takođe granični sloj u kome brzina naglo raste, od nule do brzine na spoljnoj granici sloja, a ta brzina će se nazvati „brzina opstrujavanja". Van sloja promena brzine je znatno blaža (od promene u sloju), što se želelo prikazati gornjim crtežom na slici (155–3). Za celokupno strujanje, izuzevši granični sloj, fluid se smatra idealnim, i to važi i za spoljnju granicu sloja. Ovo omogućava da se napiše jednačina energije:

$$\Pi_\delta + \frac{u_\delta^2}{2\,g} = \Pi_0 + \frac{U^2}{2\,g} \tag{155–9}$$



Slika 155–3 Karakteristične tačke u graničnom sloju.

a Π_δ i u_δ su pijezometarska kota, odnosno brzina, na spoljnoj granici sloja, dok se Π_0 i U odnose na neporemećenu sredinu (daleko od tela) gde je $u = U = \text{const}$, pa je onda $\Pi = \Pi_0 = \text{const}$, kako je već napisano sa (155–1). Ovo znači da je leva i desna strana prethodne jednačine ista konstanta (za jedan primer).

Jednačina (155–9) izražava nepromenljivost energije (potencijalne + kinetičke) duž jedne trajektorije od neporemećene sredine do tačke na spoljnoj granici sloja, uz prihvaćen stav da se fluid izvan graničnog sloja može smatrati idealnim.

Pretpostavlja se da se pijezometarska kota Π_δ sa spoljne granice sloja, prenosi (po normali na strujanje) sve do tela. Ovo se opravdava činjenicom da je sloj veoma tanak, pa je poluprečnik zakrivljenja r strujnice u sloju velik u odnosu na debljinu sloja ($r >> \delta$), a onda je promena pijezometarske kote po normali na telo (što je i normala na strujanje) zanemarljiva. To se zaključuje prema izlaganju u Poglavlju 81., iz koga proizilazi jednačina (81–17), koja pokazuje da je za zakrivljenu struju debljine d, uz poluprečnik zakrivljenja r, razlika pijezometarskih kota $\Pi_{\text{sp}} = \Pi_{\text{un}}$ zanemarljiva ako je $d << r$. Sa Π_{sp} i Π_{un} su označene pijezometarske kote koje na spoljnoj, odnosno unutrašnjoj strani jednog preseka, pa $\Pi_{\text{sp}} - \Pi_{\text{un}}$ blisko nuli znači $\Pi = \text{const}$ za jedan presek. Debljina struje ovde je δ, pa će pijezometarska kota kroz ceo presek biti skoro ista, ako je $\delta << r$, a to je zadovoljeno.

Prethodni navod dozvoljava da se u jednačini (155–9) Π_δ zameni sa pijezometarskom kotom za delić na telu, a ta kota će se označiti jednostavno sa Π. Ova zamena omogućiće da se dođe do postupka za određivanje pritiska na telo, upravo do mogućnosti za rešavanje zadatka. Tom zamenom se dolazi do jednačine:

$$\underbrace{\Pi}_{\text{na telu}} + \underbrace{\frac{u_\delta^2}{2\,g}}_{\substack{\text{na spoljnoj}\\ \text{granici sloja}}} = \underbrace{\Pi_0 + \frac{U^2}{2\,g}}_{\substack{\text{neporemećeno}\\ \text{(daleko od tela)}}} \tag{155–10}$$

Iz ove jednačine zaključuje se da je:

$$\begin{array}{lll} \Pi > \Pi_0 & \text{za} & u_\delta < U \\ \Pi = \Pi_0 & \text{za} & u_\delta = U \\ \Pi < \Pi_0 & \text{za} & u_\delta > U \end{array} \tag{155–11}$$

Iz (155–10) sledi:

$$\mathrm{d}\Pi/\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}\Big(u_\delta^2/2g\Big)/\mathrm{d}x_1 = 0 \tag{155–12}$$

jer je desna strana u (155–10) konstanata, pa (155–12) ukazuje da kada brzina opstrujavanja u_δ raste, pijezometarska kota Π opada i obrnuto.

Zamenom $\Pi - \Pi_0$ u (155–10) sa $(p - p_0)/\gamma$, što dozvoljava (155–2) i deljenjem sa $U^2/2\,g$, dobija se:

$$\frac{p - p_0}{\rho\, U^2/2} = 1 - \frac{u_\delta^2}{U^2} \tag{155–13}$$

Leva strana je koeficijent C_p, uveden sa (155–7), pa se piše:

$$C_p = 1 - \frac{u_\delta^2}{U^2} \tag{155–14}$$

Posmatraće se strujanje oko tela prikazanog na slici (155–3). Radi pojednostavljenja objašnjenja razmatraće se ravansko ili osnosimetrično strujanje, koje je dovoljno posmatrati u jednoj ravni, u ravni crteža i još uz uslov da je strujanje simetrično u odnosu na ravan simetrije, koju na crtežu predstavlja prava koja polovi telo (ako je zadatak ravanski), odnosno ta prava je osovina simetrije (ako je zadatak osnosimetričan). Da bi se ostvarila ta simetrija, telo mora da bude simetrično u odnosu na ravan, odnosno osovinu simetrije, a one se moraju pružati u pravcu dolazne brzine.

Granični sloj počinje na čelu tela u tački koja se zove „zaustavna", označena sa „S" na slici 155–3, gde je zbog smanjenja brzine sa U na nulu (zaustavljanje) pijezometarska kota Π_S veća od Π_0 za brzinsku visinu $U^2/2\,g$:

$$\Pi_\mathrm{S} - \Pi_0 = \frac{U^2}{2\,g} \tag{155–15}$$

što proizilazi iz jednačine (155–10), za $u_\delta = 0$ i $\Pi = \Pi_\mathrm{S}$. Povećanje pritiska prema (155–2), uz navedeno $\Pi_\mathrm{S} - \Pi_0$, iznosi:

$$(p - p_0)_\mathrm{S} = \frac{1}{2}\,\rho\, U^2$$

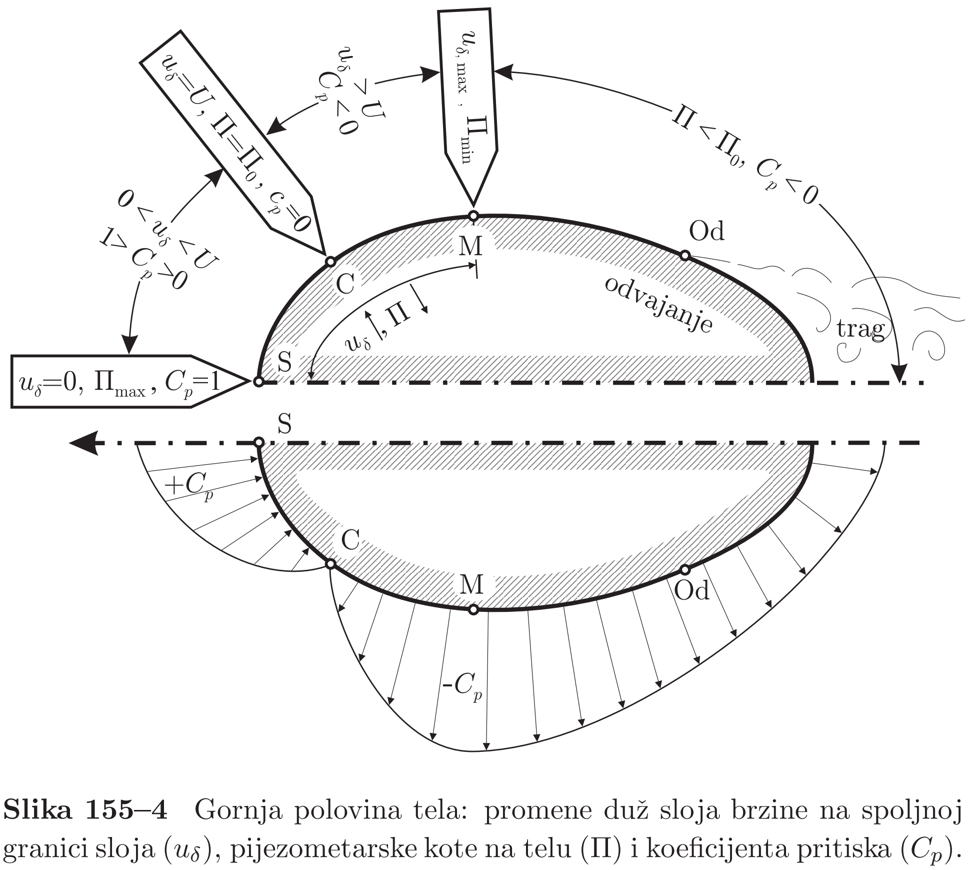
Ovo povećanje pritiska za $(p - p_0)_\mathrm{S}$, izazvano zaustavljanjem strujanja može se nazvati „zaustavni pritisak" ili „dinamički pritisak" – on je prvi put pomenut u Poglavlju 61., i napisan sa (61–10). Na otvoru Pitot-cevi struja je zaustavljena i pijezometarska kota se povećava za $u^2/2\,g$, vidi sliku (83–2), što je u skladu sa ovde napisanim sa (155–15).

Koeficijent pritiska u zaustavnoj tački iznosi:

$$C_{p,\mathrm{S}} = 1 \tag{155–16}$$

što proizilazi iz (155–14), sa $u_\delta = 0$.

Na slici 155–3 označena su karakteristična mesta duž graničnog sloja, a na slici 155–4 prikazano je pregledno kako se menja brzina opstrujavanja u_δ. To je brzina koja ulazi u jednačinu (155–10), pa su korišćenjem te jednačine, kao i jednačina (155–11), (155–12) i (155–14),



Slika 155–4 Gornja polovina tela: promene duž sloja brzine na spoljnoj granici sloja (u_δ), pijezometarske kote na telu (Π) i koeficijenta pritiska (C_p). Donja polovina tela: raspored koeficijenta (C_p) po telu određuje opterećenje na telo.

određene i prikazane na slici Π-kote u karakterističnim tačkama i promena te kote između njih, kao i koeficijenti C_p i njegove promene. Objašnjenje kako se došlo do prikazanog predmet je sledećih izlaganja.

Od zaustavne tačke smerom strujanja granični sloj postaje sve deblji, u njega ulaze sve novi i novi delići, telo sve više sprečuje strujanje, pa ga struja zaobilazi uz povećanje brzine opstrujavanja u_δ. Tako se brzina u_δ od zaustavne tačke popela sa nule do „neporemećene" brzine U u tački, označenoj sa „C" na slikama 155–3 i 155–4, tj. $u_{\delta,\mathrm{C}} = U$, pa je onda shodno (155–10) $\Pi_\mathrm{C} = \Pi_0$, i prema (155–7) $C_{p,\mathrm{C}} = 0$. I nadalje, telo sve više sprečuje strujanje, pa ga struja zaobilazi uz povećanje brzine u_δ, a onda se shodno (155–12) snižava Π-kota, brzina sve više nadmašuje neporemećenu brzinu U, a Π se spušta ispod Π_0 i C_p ima sve izraženiju negativnu vrednost. Tako je sve do tačke „M", na slikama 155–3 i 155–4, gde u_δ postiže maksimalnu vrednost, a Π minimalnu ($u_{\delta,\mathrm{M}} = u_{\delta,\max}$, $\Pi_\mathrm{M} = \Pi_{\min}$, $C_{p,\mathrm{M}} = C_{p,\min}$). Tu je poprečni presek tela najveći i stoga je i brzina opstrujavanja najveća. Od tog mesta, smerom strujanja, poprečni pesek tela se smanjuje, struja oko tela sve manje je stešnjena, pa se brzina u_δ smanjuje i to shodno (155–12) znači da se Π kota povećava.

Π izražava dejstvo združene sile pritiska i težine, koja po jedinici mase, shodno (151–3), iznosi $-g\,\mathrm{d}\Pi/\mathrm{d}x_1$, gde je x_1-osa u posmatranoj tački usmerena u pravcu strujanja (u pravcu tangente na telo). Parcijalni izvod zamenjen je totalnim, jer Π zavisi samo od x_1. Za $\mathrm{d}\Pi/\mathrm{d}x_1 > 0$ (Π kota raste smerom strujanja) združena sila težine i pritiska usmerena je suprotno strujanju i usporava sloj, sprečava njegovo prodiranje uz telo. Delići uz telo se zaustave i bivaju nagnati na povratno strujanje, čime se začinje vrtlog koji se obrazuje uz telo, pa je struja prisiljena da ga zaobiđe odvojivši se od tela. To je „mesto odvajanja" i obeleženo je sa „Od", na slikama 155–3 i 155–4. Začeti vrtlog raste, pa sve više ometa opstrujavanje oko tela, pa ga struja otkine. Dakle, vrtlog svojim rašćenjem podstiče svoje otkidanje. Po otkidanju vrtloga začinje se novi vrtlog, i on posle biva otkinut, pa se opet začinje vrtlog ... Dobija se utisak da telo ostavlja trag kroz koji putuju svi otkinuti vrtlozi i oni koji se stvaraju iza tela, jer spoljna struja svojim brzinama uvlači u vrtloge fluid koji bi mirovao zaklonjen telom. Taj trag se obično naziva „vrtložni trag".

Napominje se da do odvajanja ne dolazi u tački „M", gde je poprečni presek tela najveći i gde otpočinje delovanje združene sile pritiska i težine smerom suprotnim smeru strujanja. Tačka odvajanja „Od"je od „M" pomerena niz struju. Razlog su inercijalni uticaji, jer treba izvesna dužina da se zaustavi prodor sloja uz telo. Ti uticaji biće obuhvaćeni u razmatranju pod 2. u „Dodatku" ovom poglavlju.

Najvažnije je da se sazna kakvi su pritisci na telo iza tačke odvajanja. Oni se iza tačke „Od" ne povećavaju (Π više ne raste), jer u vrtložni trag delići unose pritiske sa mesta odvajanja, a to su sniženi pritisci, pa fluid ne pritiska stražnji deo tela, nego nastoji da uvuče u sebe, kaže se „fluid usisava telo". Tako se povećani pritisci na prednji deo tela i sniženi na stražnji deluju u istom smeru i to sadejstvo stvara otpor tela.

Ako su poznati pritisci na telo, dobijeni eksperimentalnim istraživanjima, integrisanjem pritisaka dobija se sila otpora oblika, kako je to napisano sa (155–3). Ista sila se dobija i primenom (155–8), korišćenjem koeficijenata pritisaka C_p. Sila u načelu ima 3 komponente: jedna u pravcu dolazne brzine, a druge dve normalno usmereno na nju. Za telo prikazano na slikama 155–3 i 155–4, usled simetrije sila deluje u pravcu strujanja, jer se komponenta u normalnom pravcu na jednu polovinu tela potire sa onom drugom (sa druge strane simetrale).

Ako se sila otpora tela izmeri neposredno, (to će biti ukupan otpor = otpor oblika + otpor trenja), ona će biti veća od sile dobijene integrisanjem izmerenih pritisaka, po celoj površini tela, za onoliko koliko doprinosi trenje, pa je tako otpor trenja posredno određen.

* * *

Napomena. U razmatranju otpora tela u fluidu čija težina ima zanemarljiv uticaj, i uz uslov da se gustina fluida tokom obilaska oko tela veoma malo menja (pa se može postupati kao da je konstantna), treba postupati prema sledećem:

1. Upotreba Π je neprikladna jer nema uticaja težine, pa od Π ostaje samo prvi deo (onaj deo u koji ulazi pritisak), pa se (155–1) svodi na:

   $$p_0 = \text{const}$$

   tj. pritisak u celom području gde se ne oseća uticaj tela je konstantan (ne zavisi od visinskog položaja tačke).

2. Osnovna jednačina korišćena za povezivanje pritiska i brzine opstrujavanja, napisana sa (155–10), svodi se na:

$$p + \rho \frac{u_\delta^2}{2} = p_0 + \rho \frac{U^2}{2} \tag{155–17}$$

3. Pritisak koji određuje otpor, upravo razlika $p - p_0$ ostaje kao što je svuda napisano, pa se primenjuju jednačine (155–3), (155–6), (155–13), (155–14) i (155–16).
4. U svim opisivanjima promene (porasta i spuštanja) Π kote, koja prate sliku 155–4, treba promenu Π zameniti sa promenom pritiska p.

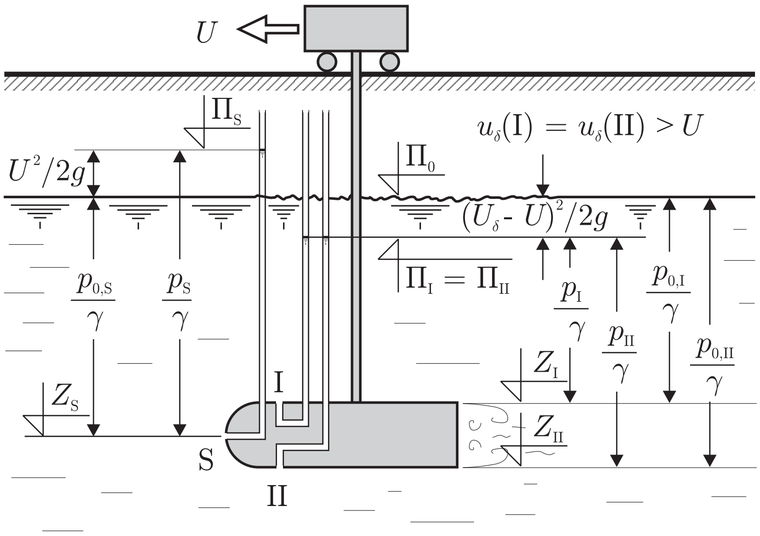
* * *

Pojava povratnog strujanja uz telo i odvajanja struje od tela zasnovano na združenom dejstvu sila težine i pritiska, a prećutno se prešlo preko toga da još deluju i inercijalni uticaji. Morala se uzeti „inercijalna sila", kako je to urađeno pri razmatranju graničnog sloja uz ploču. Umesno je pitanje: Da li uvođenje te sile može opovrgnuti pojavu odvajanja? Može se reći da ne može, jer u stvarnosti dolazi redovno do odvajanja. Ali, ipak će se dopunskom analizom potkrepiti izrečeno o odvajanju. To će biti učinjeno u „Dodatku".

Zanimljivo je da se razmotri uticaj idealnog fluida na telo – takav fluid ne stvara ni trenje, ni otpor. Brzine opstrujavanja u_δ su na samom telu, gde nameću Π-kotu na telu. Na stražnjem delu tela smanjenje brzina i povećanje Π-kota ne bi bilo prekinuto, pa bi se brzina na kraju tela spustila na nulu, a Π-kota popela na kotu u zaustavnoj tački. Tako bi na završni deo tela delovali povišeni pritisci, a ne potpritisci. Ti povišeni pritisci delovali bi suprotnim smerom strujanju, tako da bi došlo do pritiskanja tela sa prednje i sa stražnje strane. Ta dva dejstva kao rezultantu daju silu ravnu nuli, jer u idealnom fluidu otpora nema.

* * *

Slika 155–5 treba da posluži da se prikažu pritisci koji stvaraju otpor, i koji integrisani daju F_i^{obl} kako iskazuje jednačina (155–3), i ukupni pritisci koji se integrišu u (155–5).



Slika 155–5 Pritisci pri kretanju (p_S, p_I, p_{II}) i pri mirovanju tela ($p_{0,S}$, $p_{0,I}$, $p_{0,II}$).

Valjkasto telo se kreće kroz mirnu vodu u bazenu, namenjenom za eksperimentalna istraživanja. Telo je motkom obešeno na pokretna kolica koja se jednoliko, brzinom U, kreću po šinama (a to je onda i brzina kretanja tela čiji se otpor eksperimentalno određuje).

U tačkama (I) i (II) brzina opstrujavanja u_δ je ista (zbog simetrije) pa je, prema jednačini (155–10), $\Pi_I = \Pi_{II}$ (a tako je i nacrtano), a onda je, shodno (155–2):

$$(p - p_0)_I = (p - p_0)_{II}$$

tj. promena pritiska zbog otpora u tačkama (I) i (II) je ista.

Međutim, ukupni pritisci kojima fluid deluje na telo nisu isti, u tački (II) je veći, jer je:

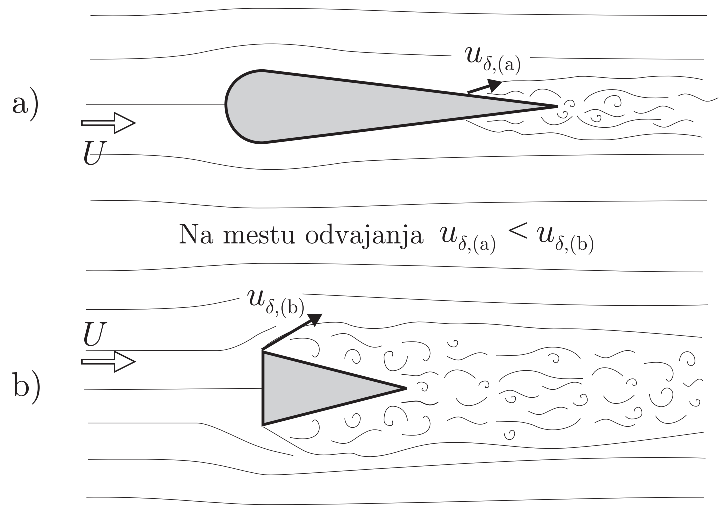
$$p_{0,II} - p_{0,I} = \gamma\,(Z_I - Z_{II})$$

Ukupna sila pritiska je zbir sile otpora koju daju pritisci pri kretanju i sile koju daju pritisci pri mirovanju (a to je sila potiska). Prema tome, fluid napada telo silom otpora, koji je u posmatranom primeru horizontalna, i silom potiska koja je vertikalna. Ako su sila težine tela i sila potiska slučajno iste (tako je napravljeno telo), onda se njihovo sadejstvo potire. Ako je sila težine veća, ona gura telo naniže, ono bi potonulo da ga ne drži štap o koji je obešeno. Ista štap ga sprečava da ne ispliva, ako je sila težine manja od sile potiska.

Na istoj slici 155–5 prikazano je da se u zaustavnoj tački (S) pijezometarska kota poveća za $U^2/2\,g$ – tako je iskazano sa (155–15).

* * *

Za telo sa slike 155–3 i 155–4, i za telo „a” na slici 155–6 , samo iz oblika tela ne može se odrediti mesto odvajanja, ono nije predodređeno, ali jeste za telo označeno sa „b” na slici 155–6. Ono svojim oštroivičnim čelom prisiljava struju da se po obimu čela odvoji od tela (to je mesto predodređeno za odvajanje), upravo struja biva odbačena od tela, sa znatno povećanom brzinom opstrujavanja (u odnosu na dolaznu brzinu), a to znači i znatne potpritiske. Prema ranijim objašnjenjima, taj sniženi pritisak se utapa u vrtložni trag, koji nastoji velikom silom da uvuče telo u fluid (dejstvo „sisanja”). Taj deo otpora treba smanjiti oblikovanjem i u narednim izlaganjima to će se i pokazati. Pored toga, prednji deo tela, neprilagođen strujanju, navlači znatne nadpritiske, pa i to znatno doprinosi otporu.



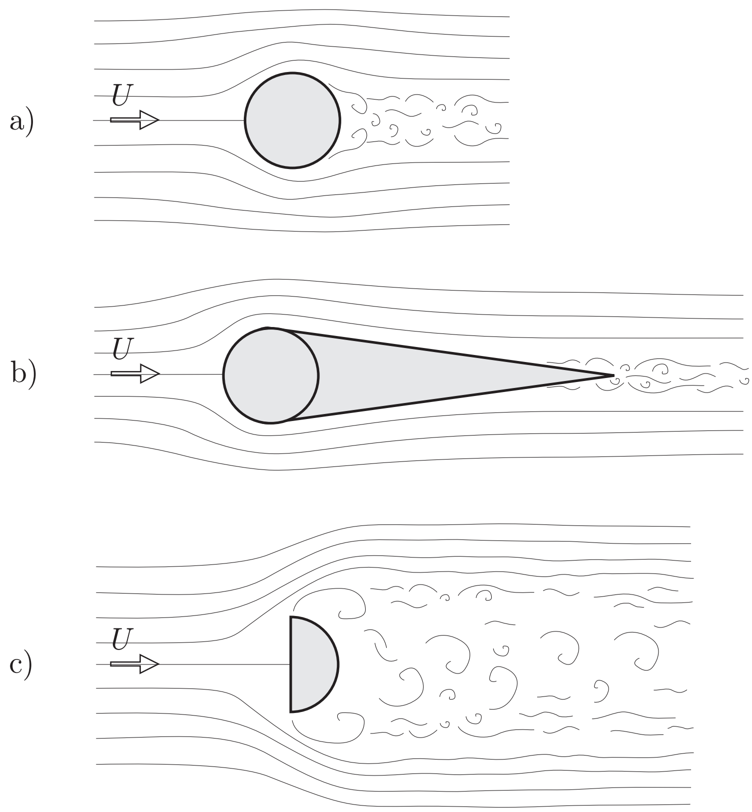
Slika 155–6 Strujoliko (a) i telo sa oštroivičnim čelom (b). Otpor tela (b) je znatno veći od otpora tela (a) – za isti poprečni presek i istu dolaznu brzinu (U).

Telo označeno sa „a”, na istoj slici 155–6, stvara znatno manji otpor (od onoga pod „b”), ono je prilagođeno strujanju (da bi se dobio što je moguće manji otpor), i može se nazvati „strujoliko”. Telo „b”, na istoj slici, nije prilagođeno strujanju, i zbog svoga nezaobljenog čela može se nazvati „zatupasto”. Zaobljeno čelo manje se odupire struji (od oštroivičnog) pa su manji nadpritisci na telo, i onda je manji deo otpora usled njih. Sloj je priljubljen uz telo, nema odbacivanja struje sa čela, nema velikog povećanja brzine opstrujavanja koje bi uzrokovalo izrazite potpritiske. Sloj treba da bude priljubljen uz telo što duže, mesto odvajanja struje treba da bude što bliže završetku tela, jer će se tako smanjiti otpor, što se objašnjava sledećim rasuđivanjem. Iza mesta maksimalnog poprečnog preseka brzina opstrujavanja se smanjuje, jer se širina za zaobilaženje struje povećava. Smanjenje brzine podiže pijezometarsku kotu, što znači da se potpritisci koji čine otpor smanjuju (smanjuje se $p_0 - p$). Kao približnost može se prikazati da se i nadalje zadržava potpritisak sa mesta odvajanja (tako je svojevremeno objašnjeno), pa pomeranje odvajanja unapred znači smanjenje dejstva potpritisaka (smanjenje sisanja, odnosno otpora). Pomeranje odvajanja ka završetku tela moguće je ako je telo izduženo, ako se postepeno (blago) smanjuje poprečni presek tela. Zahtev za ovu postepenost objašnjava sledeće rasuđivanje:

Sila koja koči deliće, i nagoni ih na povratno strujanje, što dovodi do odvajanja, treba da bude što je moguće manja, da bi uticaji za odvajanje bili što manji. Ta sila je, kako je ranije, povodom objašnjenja pojave odvajanja, objašnjeno, združena sila pritiska i težine. Navedeno je da ona po jedinici mase iznosi $-g\,\mathrm{d}\Pi/\mathrm{d}x_1$ (gde x_1 ima smer strujanja), a to je, shodno (155–12), jednako $g\,u_\delta\,(-\mathrm{d}u_\delta/\mathrm{d}x_1)$, pa će se poželjno smanjenje sile postići ako brzina opstrujavanja u_δ bude manja, i ako $\mathrm{d}u_\delta/\mathrm{d}x_1$ po apsolutnoj vrednosti bude što manje, a to znači da brzina opada što je moguće blaže. Ovo drugo je moguće ako se prostor za strujanje postepeno širi, a to je nadalje moguće ako se preprečavanje postepeno smanjuje, upravo ako se poprečni presek postepeno smanjuje. Dakle, deo tela iza maksimalnog poprečnog preseka treba izduživati, kao što je malo pre i nagovešteno.

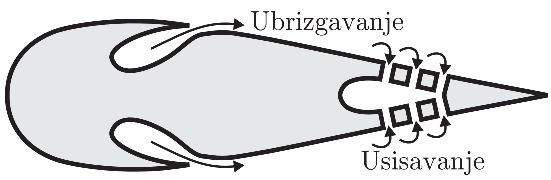
Preporuke za oblikovanje tela da ono bude „strujoliko” (da navlači što je moguće manji otpor) svode se na zaobljavanje čela i izdužavanje tela iza mesta maksimalnog poprečnog preseka. Razume se da sa izdužavanjem ne treba preterivati, da se ne bi znatno povećao otpor trenja.

Slika 155–7 ukazuje da se otpor lopte znatno smanjuje ako se doda konični završetak upravljen u pravcu strujanja, a da je otpor polulopte veći od otpora lopte, ako je polulopta postavljena da joj oštroivična kružna površina čini čelo tela. Objašnjenje za navedeno je u prethodnim izlaganjima. Naime, lopta (a) može se shvatiti kao dodavanje zaobljenog čela na poluloptu (c), a konični dodatak (b) je izdužavanje tela sa svrhom smanjenja otpora. Otpor polulopte je veći od otpora lopte, jer polulopta nezaobljenim čelom navlači veće pritiske, a odbacivanjem strujanja sa čela i povećanom brzinom opstrujavanje stvara izrazitije potpritiske i na većoj površini.



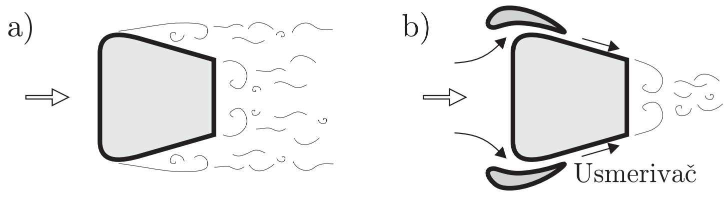
Slika 155–7 Dodavanjem na loptu (a) koničnog dodatka (b) otpor se smanjuje nekoliko puta, dok je otpor polulopte (c) veći od otpora lopte.

Slika 155–8 odnosi se na mogućnosti smanjivanja otpora dodatnim strujanjem. Može se u granični sloj uz prednji deo tela ubrizgavati mlaz fluida velike brzine, čime se unosi energija koja će da doprinese da granični sloj prodire duže uz telo, pa je mesto odvajanja bliže završetku tela. Usisavanje graničnog sloja pri završetku tela sprečava odvajanje sloja, drži ga uz telo. Iz malopređašnjih tumačenja lako je zaključiti da ubrizgavanje i usisavanje – oba u sadejstvu ili samo jedno – smanjuju otpor, približujući odvajanje struje završetku tela. Mora se primetiti da se takvo smanjivanje otpora mora nadoknaditi, jer za ubrizgavanje, odnosno usisavanje, treba obezbediti energiju.



Slika 155–8 Ubrizgavanje mlaza sa velikom brzinom doprinosi da sloj prodire duže priljubljen uz telo (da se pomeri mesto odvajanja). Usisavanje sloja ne dozvoljava odvajanje.

Slika 155–9 odnosi se na smanjenje otpora dodavanjem dva manja tela (usmerivača) uz telo čiji se otpor želi smanjiti. Brzina u procepu između usmerivača i tela je znatno povećana (u odnosu na dolaznu brzinu) pa je povećana i brzina u sloju i on priljubljen uz telo može da prodre dalje, pa je mesto odvajanja pomereno (u odnosu na strujanje bez usmerivača), pa je otpor tela smanjen, ali se kao dodatak otporu može smatrati otpor usmerivača.

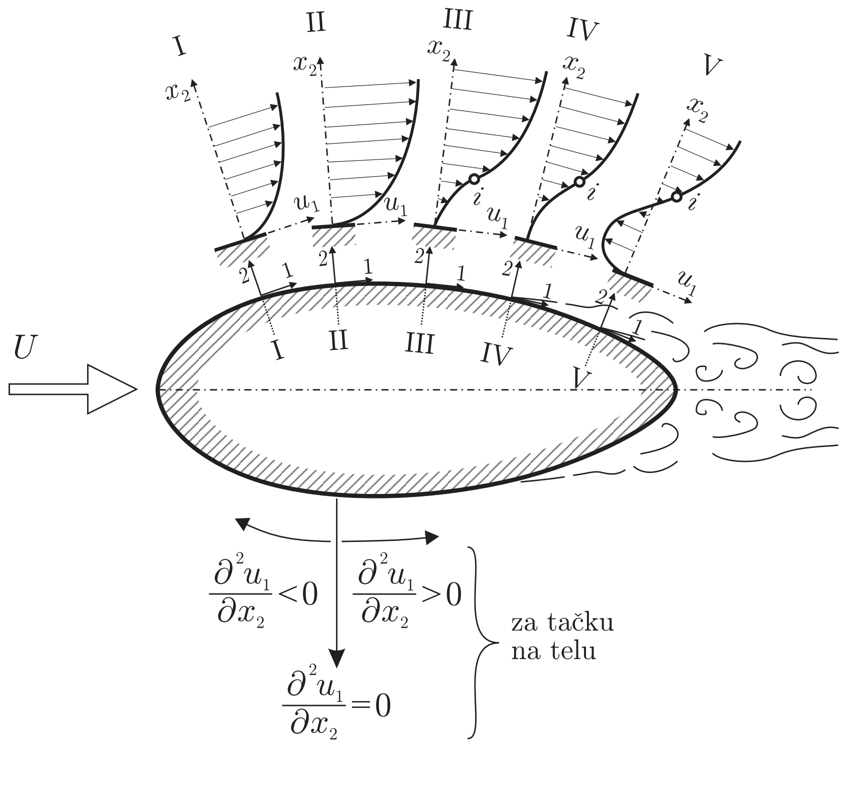


Slika 155–9 a) Struja odbačena sa čela tela. b) Procep između ugrađenog usmerivača i tela usmerava sloj uz telo, pa nema odvajanja sa čela. Odvajanje nastaje na kraju bočnih strana.

DODATAK

1. Pojava povratnog strujanja uz telo i odvajanje od tela struje koja ga zaobilazi smatrano je kao neminovno zbivanje i na tome su izvedeni i praktični zaključci. Rečeno je da će se dati dopunsko obrazloženje koje će to potkrepiti. To se sada i čini.

   Za svaku tačku na telu koristiće se koordinatni sistem, gde je osa x_1 usmerena u pravcu strujanja, upravo u pravcu tangente na telo, a osa x_2 normalno na telo – tako je prikazano i na presecima (I) do (V) na slici 155–10. Zadatak se postavlja kao ravanski. Primeniće se Navije–Stoksova jednačina (41–11), za pravac x_1 i za tačku na telu ($x_2 = 0$) gde je leva strana pomenute jednačine jednaka nuli. Zbir prva dva član su sila težine i pritiska, po jedinici mase, koje



Slika 155–10 Raspored brzina u graničnom sloju.

se mogu združiti, kako je i napisano sa (151–3), pa za pravac (1) združena sila iznosi $-g\,\partial\Pi/\partial x_1$. Treći, i poslednji, član iznosi:

$$\nu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right) \tag{155–18}$$

U ovom izrazu μ/ρ je zamenjeno sa kinematičkim koeficijentom viskoznosti ν, a može se izostaviti i prvi sabirak u zagradi kao zanemarljiv u odnosu na drugi, jer se brzina u_1 naglo menja udaljavanjem od zida (u pravcu x_2), dok se jedva primetno menja u pravcu strujanja x_1.

Sve prethodno navedeno dovodi do toga da se primena jednačine (41–11) svede na:

$$g\,\frac{\partial\Pi}{\partial x_1}=\nu\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \tag{155–19}$$

Ova jednačina pokazuje da je $\partial^2 u_1/\partial x_2^2>0$ tamo gde je $\partial\Pi/\partial x_1>0$, a to je shodno ranijim objašnjenjima, na stražnjem delu tela, iza maksimalnog poprečnog preseka. Tako je, na primer u preseku (III) na slici 155–10. Jasno je da se navedeni izvod $\partial^2 u_1/\partial x_2^2$ odnosi na tačku na telu (jer se na nju odnosi i izvedena jednačina), i on je uz telo, kako je zaključeno, pozitivan. Uz spoljnu granicu sloja on je, međutim, negativan, jer se približavanjem toj granici brzina sve blaže povećava, tj. $\partial^2 u_1/\partial x_2^2$ opada sa porastom x_2, pa je:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}<0 \tag{155–20}$$

Ovo kazuje da $\partial^2 u_1/\partial x_2^2$ iz pozitivnih vrednosti uz telo pređe u negativne. Prema tome $\partial^2 u_1/\partial x_2^2$ negde ima vrednost nula i tu je prevojna (infleksiona) tačka na krivoj koja prikazuje $u_1=u_1(x_2)$. Ta tačka je obeležena sa „i” na crtežu za presek (III) na slici 155–10, na koga su se odnosila prethodna razmatranja.

U preseku (II) na mestu maksimalnog poprečnog preseka tela, gde je Π_{min} tj. $\partial\Pi/\partial x_1=0$, pa je shodno (155–19), $\partial^2 u_1/\partial x_2^2=0$, pa je onda prevojna tačka na telu (podseća se da se jednačina odnosi na tačku na telu).

U preseku (I), koji se nalazi ispred (II), ostvaruje se $\partial\Pi/\partial x_1 < 0$, pa je prema (155–19) $\partial^2 u_1/\partial x_2^2 < 0$ (za $x_2 = 0$), a taj izvod ima negativnu vrednost i na spoljnoj granici sloja – i ovde se može primeniti rasuđivanje koje je dovelo do (155–20). Stoga u preseku (I) kriva koja predstavlja $u_1 = u_1(x_2)$ nema prevojnu tačku.

Nastavak izlaganja zahteva da se koristi izraz (41–7) koji određuje tangencijalni napon σ_{21} za nestišljiv fluid (gde je $\partial u_k/\partial x_k = 0$) sa:

$$\sigma_{21} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

Napominje se da se ovaj izraz ne odnosi samo na tačku na telu (na koju su se odnosili svi izrazi pre ovoga), nego na ceo sloj. Drugi sabirak u izrazu je zanemarljiv u odnosu na prvi, iz istog razloga kao kod (155–18). Naime, promene u pravcu x_1 veoma su malene u odnosu na promene u pravcu x_2 (u pravcu normale promene su izrazite), pa se kao približno može napisati:

$$\sigma_{21} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \tag{155–21}$$

a za napon na telu (za $x_2 = 0$):

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)_0 \tag{155–22}$$

gde indeks „0" ukazuje da se radi o izvodu $\partial u_1/\partial x_2$ za $x_2 = 0$. Napominje se da je oznakom τ uvek obeležen napon trenja između fluida i čvrste granice.

Izvod $\partial u_1/\partial x_2$ određen je u tački na telu ($x_2 = 0$) tangensom ugla koji zaklapa tangenta na krivu $u_1 = u_1(x_2)$ sa normalom na telo. Iz slike 155–10 se vidi da taj ugao (pa i njegov tangens) opada udaljavanjem od tačke (II) smerom strujanja. To znači da napon smerom strujanja opada, i u tački (IV) on postaje jednak nuli, upravo tangenta je upravljena normalno na telo, a za $\partial u_1/\partial x_2 = 0$ dobija se, shodno (155–22), $\tau = 0$. Dakle, nema trenja, pa postoji mogućnost da se sloj odvoji („odlepi") od tela. Između odvojenog strujanja i tela nastaje povratno strujanje – u preseku (V) to je i prikazano.

Možda prethodna izlaganja nisu u toj meri ubedljiva da se pouzdano tvrdi da dolazi do odvajanja, ali ukazuju barem da je to moguće. A zaista je ne samo moguće nego se u svim primerima i ostvaruje, što opravdava prethodna izlaganja.

Najveće smicanje nastaje tamo gde σ_{21} ima maksimalnu vrednost, a to je gde je $\partial\sigma_{21}/\partial x_2 = 0$, a to je prema (155–21) tamo gde je $\partial^2 u_1/\partial x_2^2 = 0$, tamo gde je prevojna tačka, a ona je iza preseka (II), negde u sloju. Najveće smicanje znači i najveću mogućnost da prizidni deo ne može da zadrži udaljeni, koji se odvaja. I ovo tumačenje ide u prilog tvrdnji da dolazi do odvajanja.

2. Objašnjenje za opisano odvajanje graničnog sloja može da bude i sledeće:

   Primeniće se dinamička jednačina u obliku izjednačenja sila (gde ulazi i „inercijalna sila") koje deluju u pravcu strujanja (uzeće se da je i u tom pravcu položena osa x_1) na elementarni deo graničnog sloja (dužina $\mathrm{d}x_1$, debljina δ) a za jediničnu širinu. Ta jednačina glasi:

$$\begin{aligned} \tau\,\mathrm{d}x_1 &= \rho\, d\int_0^\delta u_1\,(u_\delta - u_1)\,\mathrm{d}x_2 + \rho\,\delta\, g(-\mathrm{d}\Pi) \qquad (155\text{–}23)\\ (Tr) &= \qquad\qquad (In) \qquad\qquad + \quad (GP) \end{aligned}$$

   Ova jednačina razlikuje se od jednačine (155–11) namenjene sloju uz ploču, (takođe za jediničnu širinu), po tome što se ovde sila trenja (Tr) uravnotežava sa zbirom „inercijalne sile" (In) i združene sile težine i pritiska (GP), dok je tamo ova poslednja otpala (usled $\Pi = \mathrm{const}$). Pored toga umesto tamo upisane neporemećene brzine U (koja je konstanta) ovde ulazi brzina u_δ na spoljnoj granici sloja, koji se menja.

   Obrazloženje za izražavanje sile (GP) u prethodnoj jednačini je sledeće:

   Izrazom (151–3) združena sila brzine i pritiska, po jedinici mase, jednaka je $-g\,\partial\Pi/\partial x_j$. Jednačina (155–23) je napisana za delovanje sila u pravcu x_1, pa treba uzeti parcijalni izvod po x_1, a on se može zameniti totalnim pa je sila, po jedinici mase, $-g\,\mathrm{d}\Pi/\mathrm{d}x_1$. Zamena sa totalnim izvodom pravda se okolnošću da se Π-kota ne menja po poprečnom preseku, menja se samo u pravcu strujanja (u x_1 pravcu). Uz jednačinu (155–23) napisano je da važi za jediničnu širinu, a za nju masa je izražena sa $\rho\,\delta\,\mathrm{d}x_1$ (to je masa zapremine $\delta\,\mathrm{d}x_1$). Množenjem te mase sa silom po jedinici mase (sa $-g\,\mathrm{d}\Pi/\mathrm{d}x_1$) dobija se $-\rho\,\delta\,g\,\mathrm{d}\Pi$, a toliko je kao (GP) i upisano u (155–23).

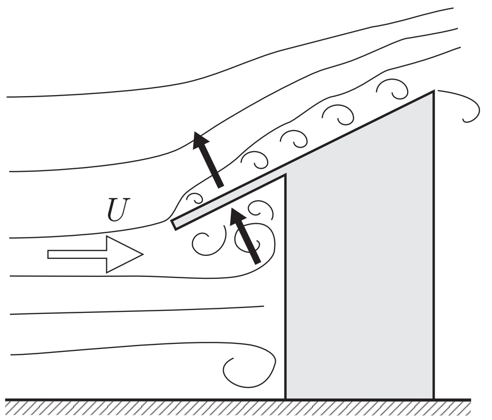
U sloju uz ploču, gde je $GP = 0$, sila (In) deluje smerom strujanja (što je pozitivan smer za x_1), pa je $In > 0$, a onda je i $Tr > 0$, jer je pri izvođenju jednačine za ploču trenje bilo pozitivno kada deluje očekivanim smerom, smerom suprotnim strujanju. U sloju uz ploču povećava se masa usled ulaska delića i to nameće silu $In > 0$, iako je brzina ulazećih delića $U = \mathrm{const.}$ U sloju uz telo takođe se povećava masa, ali na prednjem delu tela (do maksimalnog poprečnog preseka tj. do mesta maksimalne brzine opstrujavanja u_δ^{max}) ulaze u sloj delići sa sve većom brzinom u_δ, pa se poveća i masa i brzina, a onda je, van svake sumnje, $In > 0$. Na tom delu sloja, kako je ranije utvrđeno ostvaruje se $\mathrm{d}\Pi/\mathrm{d}x_1 < 0$, pa je $\mathrm{d}\Pi < 0$, što u jednačini (155–2) dovodi do $(GP) > 0$, tj. združena sila težine i pritiska deluju smerom strujanja.

Pošto se zaključilo da su oba člana na desnoj strani (155–22) pozitivna, onda je i $Tr > 0$, a to, shodno objašnjenom dogovoru, znači da trenje deluje smerom suprotnim od smera strujanja.

Na stražnjem delu tela, od mesta gde je Π_{min} raste Π, tj. $\mathrm{d}\Pi/\mathrm{d}x_1 > 0$, pa je $GP < 0$, tj. združena sila težine i pritiska deluje smerom suprotnim od smera strujanja. Ona koči deliće u sloju i doprinosi njihovom zaustavljanju, pa čak utiče i na njihovo kretanje unatrag. Ta sila smanjuje silu trenja, jer deluje u istom smeru, a smanjivanjem trenja fluid sve slabije prijanja uz telo, pa se sloj može „odlepiti" ako se trenje smanji na nulu. Pri ovome površnom zaključivanju „zaboravljena" je sila (In), koja može da nadvlada opisano delovanje sile (GP), ako je po apsolutnoj vrednosti veća od (GP). Tada ne bi važila pretpostavka o mogućem smanjivanju trenja do nule i stvaranju uslova za povratno strujanje. To je, međutim, malo verovatno. Naime, i ovde se smerom strujanja masa u sloju povećava (jer ulaze delići), ali sa sve manjom brzinom u_δ što doprinosi smanjenju sile (In), pa je neizvesno da li će sila (In) nadvladati silu (GP). Ako se pretpostavi da to sila (In) neće moći da uradi, dolazi do smanjenja napona τ do nule i time fluid više ne prijanja uz telo i struja se odvaja. Da je to tako, dokaz je u tome da se to zaista dešava.

NAPOMENE

1. Uz sliku 155–4 objašnjeno je da sila otpora, zbog simetrije strujanja, deluje u pravcu dolazne brzine. Celokupna izlaganja u ovom poglavlju odnosila su se na takve uslove. Ako ne postoji simetrija u strujanju, sila otpora ne deluje u pravcu dolazne brzine. Primer za to je opterećenje nadstrešnice (slika 155–11), gde je sila vetra usmerena tako da ima težnju da otkine i podigne nadstrešnicu i ponese je u susret vetru.



Slika 155–11 Opterećenje vetrom nadstrešnice je sadejstvo povećanih pritisaka sa donje strane (iz zaustavnog područja) i sniženih pritisaka sa gornje strane (iz odvojenog vrtložnog traga).

2. U izlaganjima u ovom poglavlju nisu razmatrani uticaji turbulencije, pa su razmatrane kroz vreme osrednjene veličine, a zanemarena su fluktuaciona odstupanja.

156
PRIMERI OTPORA TELA
I
UVOD

Sila F se bezdimenzionalno izražava, u sistemu gde su osnovne veličine: gustina ρ, karakteristična dužina L i brzina U, sa $F/\rho L^2 U^2$. Tako se izražava i sila otpora, ali su za nju prikladnije veličine: poprečni presek A, koji u dimenzionalnim izrazima zamenjuje L^2, i zaustavni pritisak $\rho U^2/2$, koji zamenjuje ρU^2, pa se sila izražava koeficijentom sile:

$$C_F = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \tag{156–1}$$

Ovaj koeficijent predstavlja odnos sile otpora prema sili, koja bi se dobila množenjem zaustavnog pritiska $\rho U^2/2$ i poprečnog preseka tela A.

Koeficijent C_F je prvi put naveden izrazom (61–7), a zaustavni pritisak se uvodi sa (61–10). U objašnjenju primene dimenzionalne analize navedeno je da se funkcija (62–10) sa dimenzionalnim veličinama zamenjuje sa funkcijom (62–11) u koju ulaze bezdimenzionalne veličine, dobijene uzimajući za osnovne veličine ρ, L i U.

Tako će se po ugledu na (62–11) za silu F pisati veza bezdimenzionalnih veličina:

$$C_F = C_F\,(Re, Ca, Fr, We, Ko) \tag{156–2}$$

Ovde su upisani Rejnoldsov, Košijev, Frudov i Veberov broj kao predstavnici uticaja viskoznosti, stišljivosti, gravitacije i površinskog napona, a uvedeni su sa (62–1) do (62–4). Poslednje upisano sa Ko su svi granični uslovi, izraženi bezdimenzionalno.

Razmatraće se telo potpuno uronjeno u strujanje, pa otpadaju uticaji koje nameće slobodna površina tečnosti, a to su Fr i We. Ako se razmatra nestišljiv fluid, otpada i Ca, pa se (156–2) svodi na:

$$C_F = C_F\,(Re, Ko) \tag{156–3}$$

Za simetrično strujanje sila otpora leži u osovini simetrije i deluje po njoj (što znači u pravcu dolazne brzine). Ako strujanje nije simetrično, moraju se odrediti dve ili tri kompomponente otpora. Simetrično strujanje je razmatrano kroz celo prethodno, 155-to poglavlje, i slike od (155–3) do (155–9) se odnose na takvo strujanje. U napomenama na kraju poglavlja, na slici (155–12), dat je primer strujanja koje nije simetrično.

Za sva geometrijski slična tela, njihov geometrijski opis u bezdimenzionalnim veličinama je isti (Ko = idem), pa je:

$$C_F = C_F\,(Re) \tag{156–4}$$

Podrazumeva se da je telo usamljeno, da nikakvih graničnih uslova sem samog tela – nema.

Ako je turbulencija razvijena pa se ušlo u područije neuticanja Re-broja, koeficijent otpora je:

$$C_F = \text{const} \tag{156–5}$$

Izraz (156–1), sa $C_F =$ const, kazuje da je tada sila otpora za određeno telo srazmerna sa brzinom ($F \sim v^2$), ostvaruje se *kvadratna zakonitost otpora.*

U razmatranju otpora tela koristi se i koeficijent pritiska C_p, napisan sa (155–6), i kojim se bezdimenzionalno izražava $p - p_0$ tj. onaj deo pritiska koji uzrokuje otpor. Za pojedinu tačku („i"), na jednom određenom telu, gde se granični uslovi ne menjaju (ne menja se Ko), koeficijent $C_{p,\,i}$ se svodi na:

$$C_{p,\,i} = C_{p,\,i}\,(Re) \tag{156–6}$$

što je napisano po ugledu na (156–4), jer se pretpostavlja da se za date uslove (potpuno uronjeno telo u fluidu čija se gustina može da smatra konstantnom), zanemaruju uticaji Fr, We i Ca, a za jedno određeno telo izostavlja se i Ko. To se pretpostavlja pri prelazu iz (156–2), preko (156–3) na (156–4). Ako je turbulencija toliko razvijena, da se može izostaviti i Re-broj, prethodni izraz se svodi na:

$$C_{p,\,i} = \text{const} \tag{156–7}$$

što znači da C_p za određenu tačku „i" ima konstantnu vrednost (nezavisnu od brzine), a za $C_p = \text{const}$, izraz (155–6) pokazuje da je $p - p_0$ srazmerno sa U^2, ostvaruje se kvadratna zakonitost.

* * *

Otpor tela je uglavnom *otpor pritisaka* ili *otpor oblika*, a podrazumevaće se i da je trenje, zbog kratkoće objekta, beznačajno, pa se kao *otpor tela* može shvatiti *otpor pritisaka*. Od ovoga treba izuzeti izdužena tela oblikovanjem prilagođena strujanju (da otpor oblika bude što manji), pa je udeo otpora trenja u ukupnom otporu značajan.

Koeficijent otpora C_F za područje neuticanja Re-broja (koje je i zanimljivo sa praktičnog stanovišta), za odredjeno telo se svodi na $C_F = \text{const}$. Numeričke podatke o C_F napisane na nizu narednih slika traba shvatiti tako da se odnose na područje neuticanja Re-broja.

* * *

Napomena. Za telo opkoljeno laminarnim strujanjem uticaj viskoznosti je premoćan, dok su inercijalni uticaji zanemarljivi u odnosu na uticaje viskoznosti, pa se može izostaviti gustina. Sila otpora F je onda zavisna od koeficijenta viskoznosti μ, dužine L i brzine U. Vezu te četiri veličine dimenzionalna analiza svodi na jednu bezdimenzionalnu veličinu koja zavisi od graničnih uslova, napisanih u bezdimenzionalnom obliku. Navedeno se iskazuje sa:

$$f\left(\frac{F}{\mu\, L\, U},\, Ko\right) = 0$$

Za osnovne veličine uzete su μ, L i U.

Za iste granične uslove ($Ko = \text{idem}$) tj. za sva geometrijski slična tela (a drugih graničnih uslova, sem samog tela nema) prethodno se svodi na:

$$\frac{F}{\mu\, L\, U} = \text{const} \tag{156–8}$$

Ovaj izraz iskazuje da je za jedno određeno telo sila otpora srazmerna sa brzinom nailazeće struje ($F \sim U$). Ostvaruje se, dakle, *linearna zakonitost otpora*, dok se za telo u struji razvijene turbulencije ostvaruje kvadratna zakonitost, kako je to napisano sa (156–5), što znači $F \sim U^2$.

Standardno (uobičajeno) bezdimenzionalno izražavanje sile koeficijentom C_F, uvedenim u uvodnim izlaganjima, sa (61–7) i ponovljenim ovde, sa (156–1), za silu prema (156–8), piše se sa:

$$C_F = \frac{F}{\rho\, A\, U^2/2} = \frac{2\,\mathrm{const}\,\mu\, L\, U}{\rho\, L^2\, A} = \frac{2\,\mathrm{const}\, L^2}{A}\frac{\mu}{\rho\, L\, U}$$

Pošto je L^2/A konstanta za sva geometrijski slična tela, za njih je konstanta i $2\,\mathrm{const}\, L^2/A$, koja će se obeležiti sa Const, pa je:

$$C_F = \frac{\mathrm{Const}}{Re} \tag{156–9}$$

II
OTPORI PLOČE, LOPTE, CILINDRA I PRIZMATIČNIH TELA

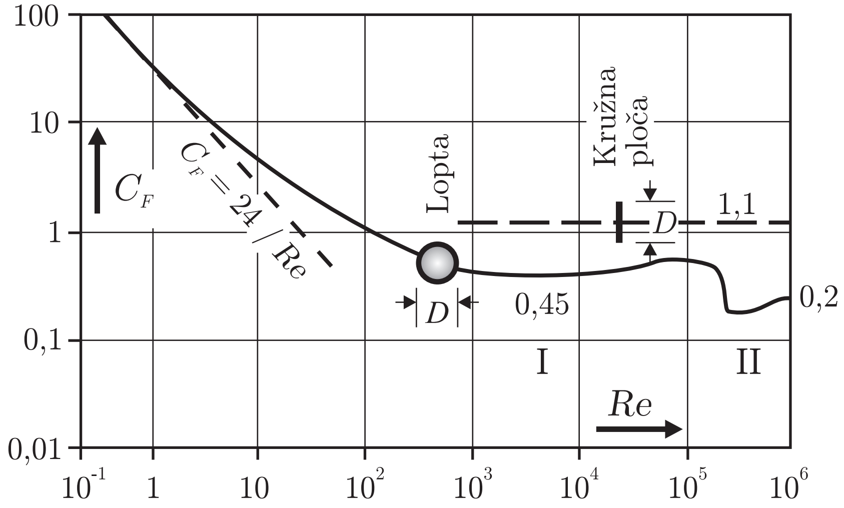
Osnosimetrično strujanje dovoljno je proučiti samo u jednoj ravni, a ono zahteva osnosimetrično telo čija osovina stoji u pravcu dolazeće brzine.

Za prvi primer osnosimetričnog strujanja uzima se strujanje kome se suprotstavlja kružna ploča (slika 156–1). Ta ploča geometrijski je potpuno određena samo jednom veličinom – prečnikom D, ili površinom $A = \pi D^2/4$, koja je poprečni presek tela, i koja je, kao osnovna veličina ušla u C_F. Uslovi će se dalje pojednostaviti, i neka nailazi jednolika ravnomerna struja, koju odredjuje samo jedna veličina – brzina U – a i ona je ušla u C_F. Gustina ρ se smatra konstantnom, a u Uvodu je već nagalšeno da će se razmatranja odnositi na zadatak gde se konstantnost gustine moze prihvatiti. Prema tome, nikakvih dopunskih graničnih uslova nema, pa se u (156–3) može izostaviti Ko, pa ostaje napisano sa (156–4) tj.

$$C_F = C_F\,(Re)$$

Rejnoldsov broj će se izraziti sa:

$$Re = \frac{D\, U}{\nu}$$



$$C_F = \frac{F}{\rho A \dfrac{U^2}{2}} \qquad A = \pi \frac{D^2}{4} \qquad Re = \frac{DU}{\nu}$$

Slika 156–1 Koeficijent otpora (C_F) za kružnu ploču i loptu.

gde je ν kinematički koeficijent viskoznosti.

Treba naglasiti da je uslovljeno da je ploča oštroivična, tako da oštra ivica „odseče” struju i odbaci je od ploče, pa debljina ploče ne utiče na otpor.

Oštroivičnost i tankoća, kao uslov su, iz istog razloga i sa istim objašnjenjem, zahtevane i kod dijafragme (slika 103–2) i kod preliva (slike 106–5 i 106–14).

Uslovljava se da ploča bude postavljena normalno na pravac dolazne brzine.

Napominje se da je otpor kružne ploče uzet kao primer primene dimenzionalne analize, prilikom njenog uvođenja (Poglavlje 61.). Prikazan je slikom 61–1, a izvođenje je od funkcije (61–1) došlo do izraza (61–7), koji je identičan sa ovde napisanim (156–1).

Na slici 156–1 grafički je prikazana zavisnost (156–4) za kružnu ploču (pored nje nacrtana je zavisnost i za loptu).

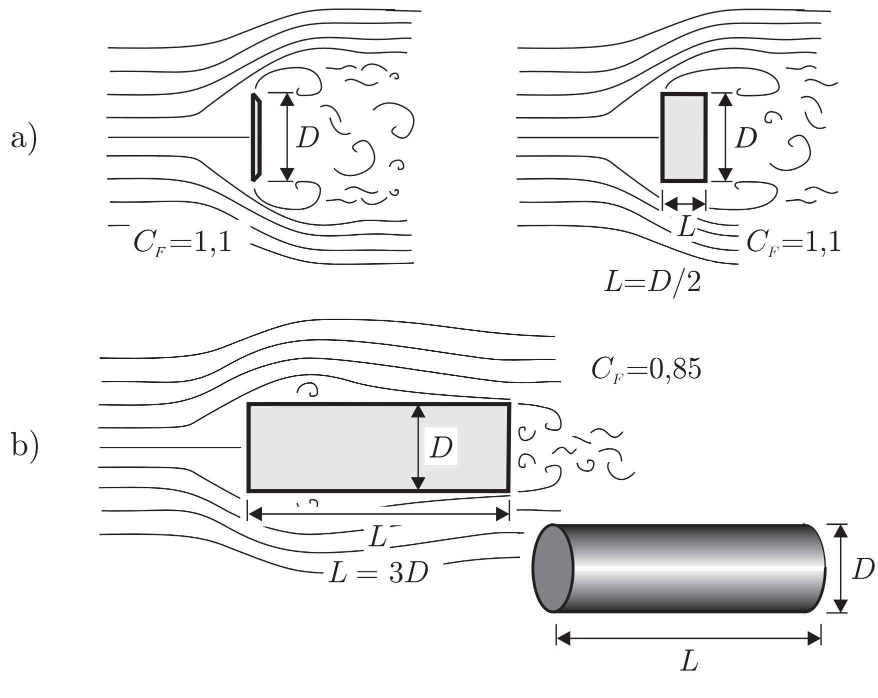
Za kružnu ploču zavisnost (156–5) se svodi na:

$$C_F = \text{const} \simeq 1{,}1 \qquad (156\text{–}10)$$

za područje neuticanja Re-broja, tj. za strujanje sa dovoljno razvijenom turbulencijom, toliko razvijenom da su uticaji viskoznosti zanemarljivi za određivanje koeficijenta C_F. Izostavljanje Re-broja bio je redovan postupak kod niza praktičnih zadataka (trenje uz hrapave zidove, lokalne pojave u cevima i kanalima i još u brojnim primerima), ako se izuzmu maleni proticaji. I kod kružne ploče Re se može izostaviti, tj. može se primeniti (156–10), za $Re > 10^3$.

Cilindar sa osovinom postavljenom u pravcu dolazne brzine ima skoro isti otpor kao i kružna ploča ako dužina cilindra (merena u pravcu strujanja) ne prelazi polovinu prečnika ($L < D/2$). Za taj uslov cilindar se može shvatiti kao deblja ploča, pa je otpor skoro isti kao kod tanke ploče ($C_F = 1{,}1$).

U oba slučaja u gornjem redu slike 156–2 pritisci na čelo su isti, a struja se odbacuje sa obima čela sa istom brzinom opstrujavanja (za



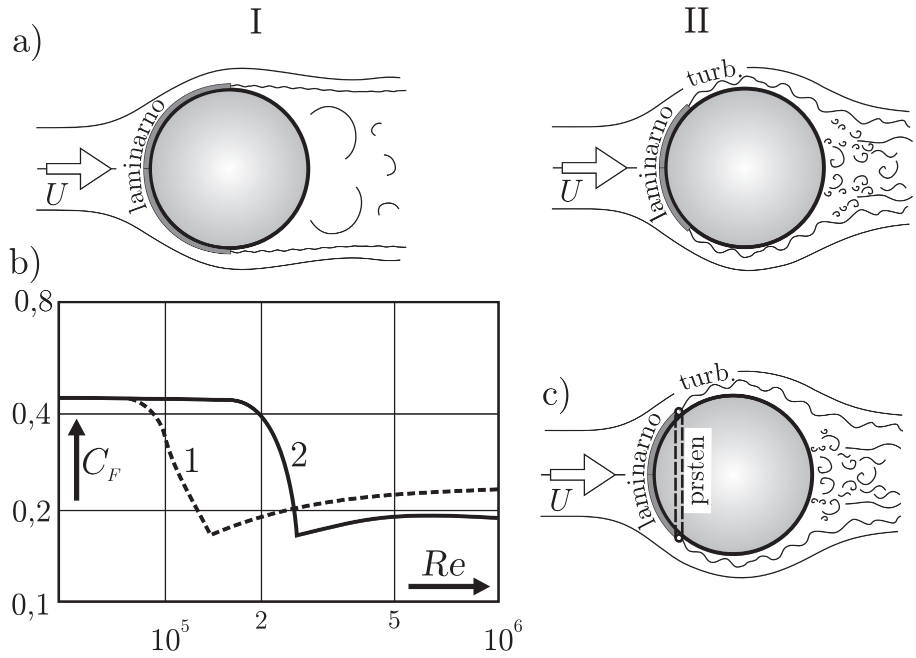
Slika 156–2 Otpor cilindra sa osovinom u pravcu dolazeće brzine za manje dužine (L) je približno isti kao otpor kružne tanke ploče (a), dok duži cilindar (b) stvara manji otpor.

istu dolaznu brzinu). Bitno je da je, usled kratkoće cilindra, struja odvojena od tela celom njegovom dužinom, pa potpritiske na stražnji deo tela nameće brzina opstrujavanja vrtložnog traga, a ona je u oba slučaja skoro ista. Ako je cilindar duži (slika 156–2, b), struja odbačena sa čela tela, zahvaljujući dovoljnoj dužini tela, ima mogućnosti da se priljubi uz njega pre njegovog kraja, pa se struja odvaja po obimu stražnje površine tela, sa brzinom opstrujavanja znatno manjom od one u (a). Stoga su potpritisci u (b) manje izraženi nego u (a), pa je manje usisavanje, pa je manji i otpor. Produžavanje cilindra (za $L > 3D$) povećaće otpor, ali ne zbog otpora oblika, nego zbog povećanja otpora trenja.

* * *

Za otpor lopte u izrazu (156–1) za C_F presek je $A = \pi D^2/4$, gde je D prečnik lopte koji se takođe pojavljuje u Re-broju. Grafikon $C_F = C_F(Re)$, na slici 156–1, pokazuje da se u oblasti (I), za Re otprilike između 10^3 i 10^5, C_F kreće od 0,4 do 0,45, a iza toga naglo padne na oko 0,2 (oblast II).

Objašnjenje za pad koeficijenta C_F može se pronaći u crtežu (a), na slici 156–3, gde se uočava da strujanja (I) i (II) nisu slična. U (II) granični sloj duže je priljubljen uz telo, odvajanje je pomereno na stražnji deo tela, a onda je shodno ranijim objašnjenjima, otpor manji. Naime, brzina opstrujavanja na mestu odvajanja je manja, pa su potpritisci na stražnji deo tela slabije izraženi, stoga je usisavanje u (II) manje nego u (I) i odatle manji otpor, upravo manja vrednost koeficijenta C_F. Nameće se pitanje: Zašto dolazi do pomeranja odvajanja? Odgovor se može naći u sledećem obrazloženju. Od zaustavne tačke na čelu tela granični sloj je laminaran, da bi, ako se stvore uslovi, prešao u turbulentni (tako je u sloju uz ravnu ploču – slika 152–1). Ako se takvi uslovi ne stvore laminarni sloj se zadržava do odvajanja, i on se odvaja u blizini ispred maksimalnog poprečnog preseka – to je prikazano sa (I) na slici 156–3, a). Ako su se pak stvorili uslovi da se laminaran sloj na izvesnom rastojanju od svog početka (od zaustavne tačke) preobrazi u turbulentni, koji se odvaja na stražnjem delu tela – što je prikazano sa (II). Sada se postavlja pitanje: zašto je turbulentni sloj sposoban da prodre dalje i pomeri odvajanje ka stražnjem delu lopte, a za to nije sposoban laminarni? U turbulentnom sloju delići se mešaju, pa oni brži, iz blizine spoljne granice sloja, prodiru ka telu, donoseći kinetičku



Slika 156–3 Odvajanje struje od lopte. a) Laminarni sloj se odvaja od tela (I). Povećanjem Re-broja laminarni sloj se skraćuje, prelazi u turbulentini, on je duže priljubljen uz telo, odvajanje se pomera (II). b) Prelaz iz (I) u (II) nalazi se između linija (1) i (2). c) Žičani prsten nataknut na loptu podstiče na prelaz u turbulentan sloj, pa se odvajanje pomera.

energiju. Time se podupire napredovanje prizidnih delića, otežava se njihovo zaustavljanje i kretanje u povratno strujanje. Tako sloj duže prijanja uz telo, a odvajanje se pomera.

Prelaz iz (I) u (II) nije potpuno određen, na crtežu „b" na slici 156–3. Nacrtane su dve linije: (1) i (2). One se mogu shvatiti kao granice, a gde će se unutar njih naći pojedini primer zavisi od uticaja koji pobuđuju turbulenciju. Do prelaza iz laminarnog u turbulentni sloj, i do strujanja (II), sa crteža „a" na slici 156–3, dolazi uz hrapaviju loptu pri manjoj dolaznoj brzini od one za koju se ostvaruje taj prelaz za glađu loptu istog prečnika (obe su u fluidu iste viskoznosti), jer je veća hrapavost sposobna da pobudi turbulenciju, a manja nije (za istu brzinu). Ovo znači da će prelaz iz strujanja (I) u (II) nastati pri manjem Re-broju ako je lopta hrapavija, za nju će grafikon $C_F = C_F(Re)$ biti bliži liniji (1), na crtežu („b") slike 156–3, pa je koeficijent C_F, za izvestan raspon Re-brojeva manji za hrapavu loptu, zbog čega je i manji otpor hrapavije od otpora glađe lopte (za istu brzinu i isti prečnik lopte). To je na prvi pogled neverovatno, ali se ostvaruje, pa se može reći da je to paradoks.

Primećuje se da se uticaj hrapavosti ne ispoljava na povećanju trenja (ono je beznačajno u odnosu na otpor oblika), nego u pomeranju mesta odvajanja. Tako je bilo i kod strujanja u krivini cevi, što je navedeno u „Primedbi" na kraju Odeljka II, Poglavlja 102.

Drugi razlog za približavanje liniji (1), na crtežu „b" slike 156–3, je u intenzitetu turbulencije u dolazećoj struji: što je on veći, laminarni sloj je kraći – tako je bilo i kod ploče (vidi sliku 152–2, gde se vidi kako se može izraziti intenzitet turbulencije). Kraći laminarni sloj znači veću mogućnost da se pojavi turbulentni, koji će prodreti duže.

Prsten nataknut na loptu (slika 156–3, „c") podstiče turbulenciju (baš kao i jača hrapavost i intenzivnija turbulencija u dolaznom strujanju) i stoga turbulentni sloj prodire dalje (ako se stavi prsten) i pomera odvajanje, pa je otpor manji (iako je stavljen prsten).

* * *

Za laminarnu dolaznu struju postoji teorijsko rešenje za otpor lopte, koje se obično navodi kao Stoksovo (STOKES). Ono izražava otpor sa:

$$F = 3\,\pi\,\mu\,D\,U \tag{156–11}$$

Prema prethodnom izrazu sila otpora F, za određenu loptu u određenom fluidu, srazmerna je sa brzinom U. Ostvaruju se, dakle, linearna zavisnost otpora, kakva je kod svih tela opkoljenih laminarnim strujanjem. Prethodni izraz poseban je slučaj opšteg izraza (156–8) za telo u laminarnoj struji, tamošnja konstanta ovde je za loptu određena sa:

$$\text{Const} = 3\,\pi \tag{156–12}$$

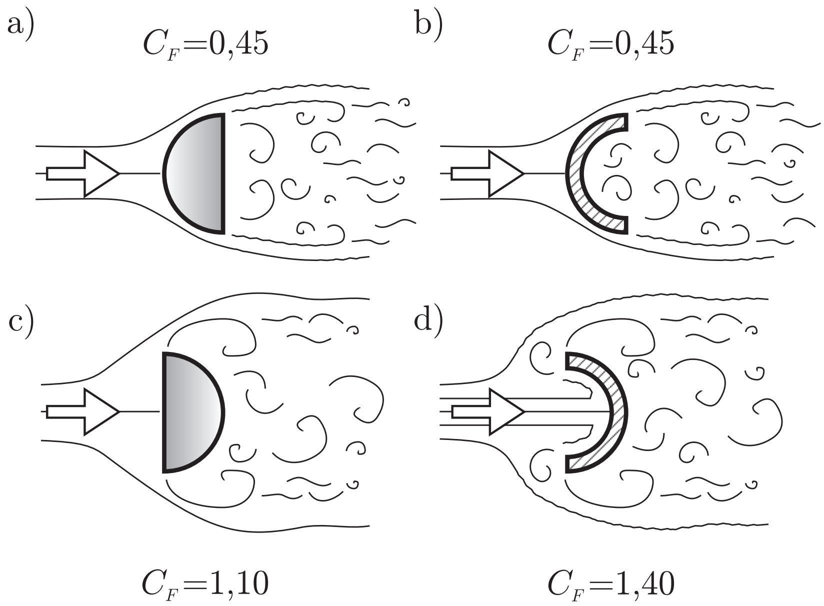
Za silu napisanu sa (156–11) koeficijent sile C_F određen je sa:

$$C_F = \frac{F}{\rho\,A\,L^2/2} = \frac{3\,\pi\,\mu\,D\,U}{\rho\,\pi\,D^2\,U^2/8} = \frac{24\,\mu}{\rho\,D\,U} = \frac{24}{Re} \tag{156–13}$$

To je prikazano na slici 156–1. Napominje se da je napisano sa C_F, u skladu sa (156–9), a ovde je tamošnja konstanta za loptu određena sa const = 24.

*   *   *

Na slici 156–4 prikazana su 4 osnosimetrična tela: dve polulopte i dve poluloptaste ljuske. Njihovi koeficijenti otpora C_F mogu se proceniti na osnovu navedenog za otpore lopte i kružne ploče.



Slika 156–4 Koeficijent otpora (C_F) za polulopte i poluloptaste ljuske.

Za primere „a" i „b" odvajanje struje od tela je na kraju poluloptaste površine, po obimu stražnje kružne površine, pa se može uzeti da je otpor isti kao za strujanje (I), sa slike 156–3, gde je odvajanje blizu plovine lopte, pa se ceni da je C_F približno $0,45$.

Za primer „c", sa slike 156–4, može se reći da je otpor isti kao i kod kružne ploče ($C_F = 1{,}1$), objašnjenje je isto koje je pratilo navode da su otpori isti za oba slučaja prikazana pod „a" na slici 156–2. Za primer „d" otpor je veći, jer je struja prisiljena da zaobilazi telo sa većom brzinom opstrujavanja, nego u „c", pa su izraziti potpritisci na stražnju poluloptastu površinu – ceni se da je C_F oko 1,4.

*   *   *

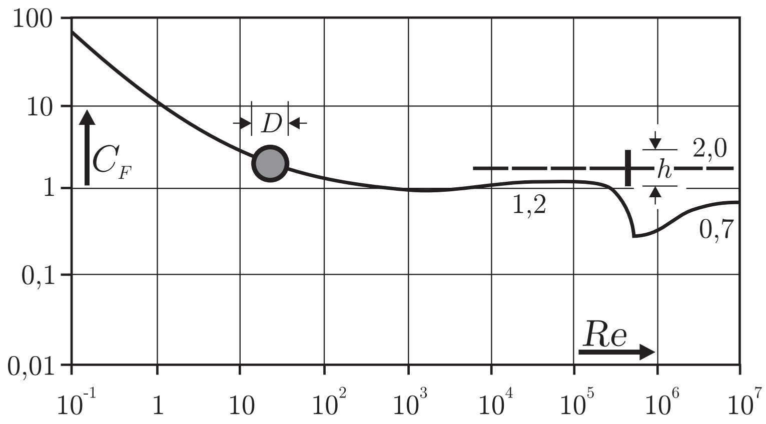
Ravansko strujanje dovoljno je proučiti samo u jednoj ravni, jer u svim ravnima paralelnim sa ravni proučavanja strujanje potpuno istovetno. Telo čiji se otpor razmatra u ravanskom strujanju, teorijski uzevši, ima beskonačnu dužinu pružanja u pravcu normalnom na ravan proučavanja. Praktično uzevši, to može da bude telo velike dužine, pa se u pretežnom delu, izuzev blizine krajeva tela, uspostavlja ravansko strujanje. Pri eksperimentalnim istraživanjima telo se upire u bokove opitnog tunela, pa se izuzimaju krajnji delovi uz bokove.

Posmatraće se otpori u simetričnom strujaju, gde ravan simetrije deli telo na dve simetrično položene polovine tela.

Razmatra se otpor tanke oštroivične ploče širine h postavljene normalno na pravac dolazeće brzine, i kružnog cilindra prečnika D, sa osovinom normalnom na pravac strujanja. Koeficijenti otpora C_F za ta tela prikazani su slikom 156–5. Izrazi za njih napisani su ispod crteža. Pri pisanju tih izraza primenjen je osnovni obrazac (156–1), uz zamenu poprečnog preseka A sa $L\,h$, odnosno $L\,D$, a sile F sa $f\,L$, gde je F sila na dužini L, koja se meri u pravcu normalnom na pravac proučavanja (na ravan crteža). Kako je dužina L proizvoljna, prikazano je određivanje sile f po jedinici dužine. Na slici 156–5 nacrtani su grafikoni funkcije $C_F = C_F(Re)$ za ploču, i za cilindar, čija je osovina položena u pravcu normalnom na crtež. Za ploču važi $Re = (U\,h)/\nu$, a za cilindar $Re = UD/\nu$.

Uvidom u grafikone na slikama 156–1 i 156–5 zapaža se da oni iz druge slike liče na one iz prve. Koeficijenti C_F za kružnu ploču prečnika D (slika 156–1) i za pravougaonu ploču širine h imaju približno konstantne vrednosti C_F za $Re > 10^3$, koje su otprilike 1,1, odnosno 2. Vrednosti za loptu (slika 156–1), odnosno cilindar (slika 156–5) ne menjaju se mnogo za Re između 10^3 i 10^5, i oni se kreću između 0,4 i 0,45 (za loptu), odnosno između 1 i 1,2 (za cilindar). Pošto Re pređe 10^5 u oba slučaja C_F naglo opadne na 0,2 (za loptu), odnosno 0,7 (za cilindar).

Upoređenje navedenih koeficijenata C_F, za primere u osnosimetričnom i ravanskom strujanju, nameće zaključak da su u drugom slučaju, za isti presek u ravni proučavanja, koeficijenti otpora veći. Naime, u ravanskom strujanju struja je prisiljena da zaobilazi telo samo u jednoj ravni, dok je u osnosimetričnom zaobilaženje tela sa svih strana, pa je strujanje manje preprečeno.



Kružna ploča: $$C_F = \frac{f}{\frac{1}{2}\,\rho\, h\, U^2} \qquad Re = \frac{U\,h}{\nu} \qquad (156\text{–}14)$$

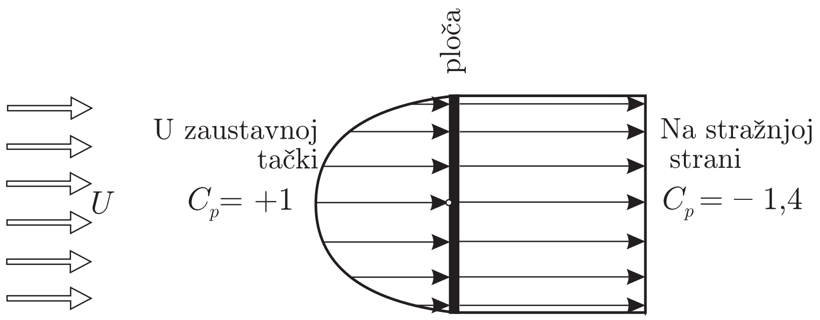
Cilindar: $$C_F = \frac{f}{\frac{1}{2}\,\rho\, D\, U^2} \qquad Re = \frac{U\,D}{\nu} \qquad (156\text{–}15)$$

f je sila po jedinici dužine, merena normalno na ravan crteža

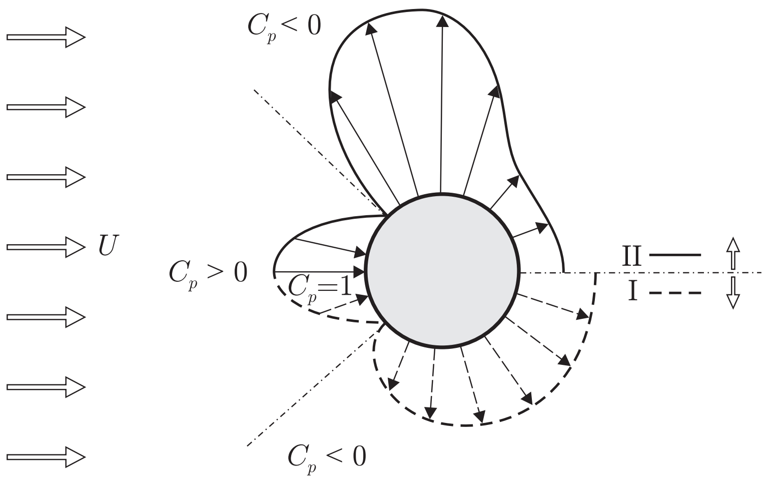
Slika 156–5 Koeficijent otpora (C_F) ploče konstantne širine (h) i kružnog cilindra prečnika (D), sa osovinom normalnom na pravac strujanja, strujanje je ravansko.

Razlog za nagli pad vrednosti koeficijenta za cilindar je isti kao za loptu, on je u pomeranju odvajanja sloja od tela. Jer i kod cilindra se obrazuju strujanja (I) i (II), pa se crtež „a”, na slici 156–3, može shvatiti kao da je nacrtan i za cilindar. Za cilindar bi se mogao napraviti crtež sličan „b” na istoj slici, samo sa drugim vrednostima za C_F. I sva obrazloženja data uz ove crteže data pri razmatranju lopte, važe i za cilindar. Na kraju, crtež „c” na istoj slici (156–3) mogao bi se odnositi na cilindar, samo bi prsten bio zamenjen sa pravolinijski položene dve žice.

Na slikama 156–6 i 156–7 prikazani su rasporedi koeficijenata pritiska C_p za ploču i cilindar, u ravanskom strujanju. Za ploču crtež se odnosi za $Re > 10^3$, a za cilindar su prikazana strujanja (I) i (II), koja



Slika 156–6 Raspored koeficijenata pritiska (C_p) na ploči (ravanski zadatak).

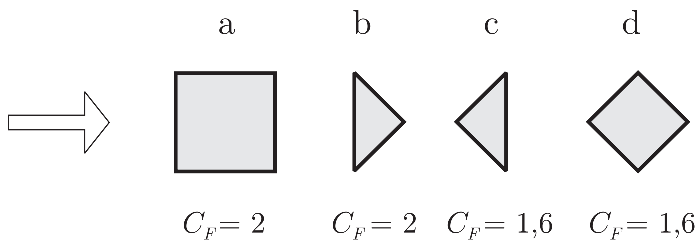


Slika 156–7 Raspored koeficijenata pritiska (C_p) po površini cilindra (ravanski zadatak). Isprekidana linija se odnosi na strujanje I, a puna linija na strujanje II (tako su strujanja označena na slici 156–3).

se mogu prikazati crtežom „a” na slici 156–3, iako se on odnosi na loptu, ali se može odnositi i na presek cilindra.

Koeficijent C_p pritiska je bezdimenzionalna zamena za pritisak $p - p_0$ koji stvara otpor – tako je to određeno sa (155–6). Integrisanjem C_p po površini dobiće se, kako to iskazuje (155–8) sila otpora, a onda i koeficijent sile C_F. Za posmatrane pritiske dobija se $C_F = 2{,}0$ za ploču, odnosno 1,2 i 0,7 za strujanja (I) i (II) oko cilindra, upravo onako koliko je prikazano na slici 156–5.

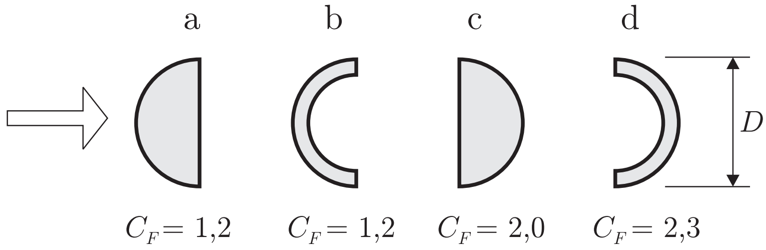
Slika 156–8 odnosi se na tela koja se u ravanskom strujanju predstavljaju kvadratom, odnosno trouglom. Za tela označena sa „a" i „b" otpor je približno isti kao kod ploče, jer su pritisci na prednju površinu i mesto odvajanja (odbijanje od ivice te prednje površine) isti, a odbijena struja je odvojena od tela, pa je isti i uticaj vrtložnog traga na potpritiske sa stražnje strane. Stoga je približna vrednost C_F kao kod ploče (=2). Za tela „c" i „d" otpor je nešto manji, jer su prednje površine nešto manje izložene napadu dolazeće struje.



Slika 156–8 Koeficijenti otpora (C_F) za prizmatična tela (u ravanskom strujanju).

* * *

Koeficijenti otpora C_F polucilindra i polucilindrične ljuske procenjeni su na vrednosti upisane na slici 156–9. Procena je obavljena na osnovu otpora ploče i cilindra sa slike 156–5, tako je to bilo postupljeno i kod polulopte i poluloptaste ljuske (slika 156–4) samo su tamo korišćena saznanja iz otpora kružne ploče i lopte. Ako se uporede koeficijenti sa



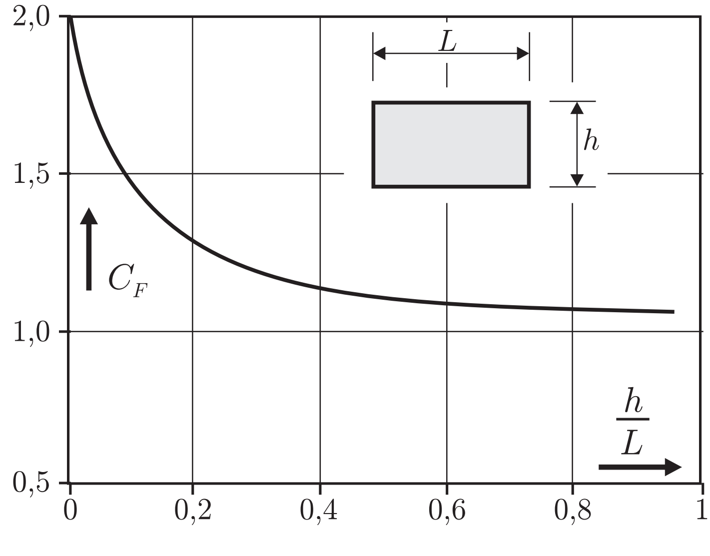
Slika 156–9 Koeficijenti otpora (C_F) za polucilindre i polucilindrične ljuske, u ravanskom strujanju.

slika 156–4 i 156–9 vidi se da su ovi drugi za isti poprečni presek veći, što je u skladu sa ranijim zaključkom da su otpori u ravanskom strujanju veći od odgovarajućih u osnosimetričnom.

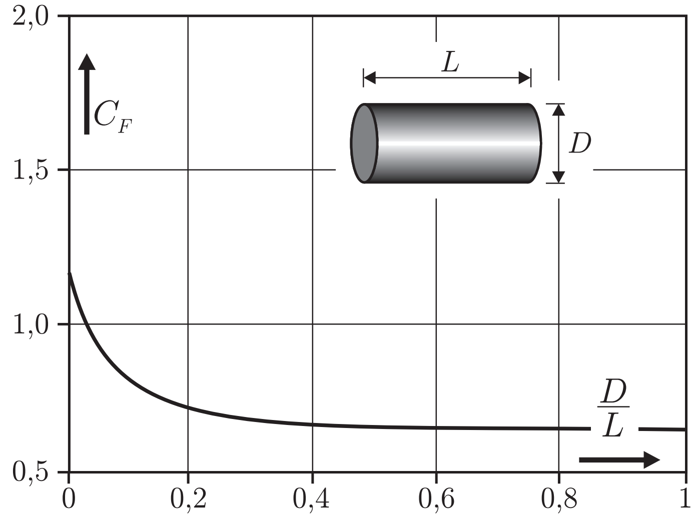
* * *

Iz prethodnih izlaganja može se izvesti i zaključak da će telo istog preseka, ali konačne dužine pružanja u pravcu normalnom na dolazeću brzinu, imati manji otpor od tela u ravanskom strujanju, jer je kod drugih sprečeno zaobilaženje tela sa strane, uz bokove. U prilog ovom navodu date su slike 156–10 i 156–11: prva se odnosi na ploču, a druga na cilindar. U oba slučaja se uočava smanjenje otpora (smanjenje koeficijenta C_F) ako se ploča (odnosno cilindar) skraćuje, tj. ako se povećava odnos h/L, odnosno D/L.

Iz slike 156–10 može se pročitati da je $C_F = 1{,}1$ za $L = h$, a to je kvadratna ploča, on je isti kao kod kružne ploče, za koju je izrazom (156–10) navedeno $C_F = 1{,}1$. Za kocku sa čeonom površinom normalnom na pravac strujanja (slika 156–12, „a") otpor je približno isti kao za kvadratnu ploču (kao što je bilo i za kružnu ploču i kratki cilindar – slika 156–2, „a". Za kocku na koju struja nailazi u pravcu dijagonale

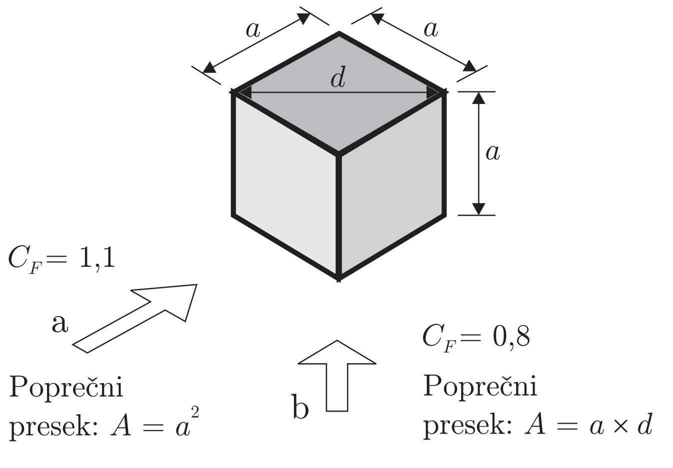


Slika 156–10 Koeficijent otpora pravougaone ploče (C_F) u zavisnosti od odnosa (širina/dužina). Strujanje je normalno na ploču.



$$C_F = \frac{F}{\rho U^2 D \frac{L}{2}}$$

Slika 156–11 Koeficijent otpora (C_F) za cilindar sa osovinom normalnom na pravac strujanja, a u zavisnosti od odnosa (prečnik/dužina). Ravanski zadatak.

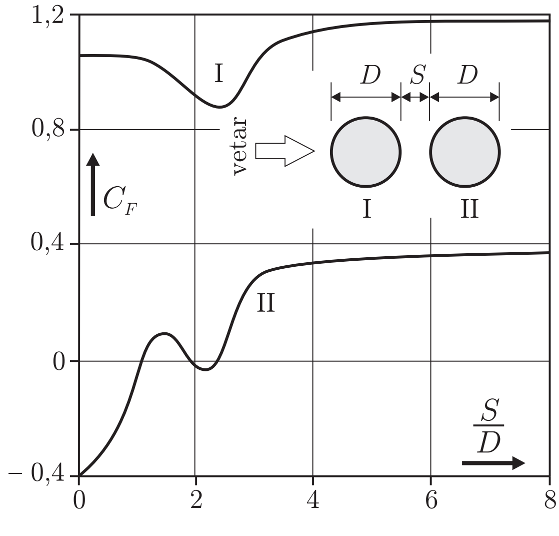


Slika 156–12 Koeficijent otpora (C_F) za kocku. Nailazeće strujanje: a) normalno na čeonu površinu i b) u pravcu dijagonale.

(slika 156–12, „b”) koeficijent C_F je manji nego za „a” na istoj slici, ali je poprečni presek veći, iako je u oba slučaja ista kocka.

* * *

Za sve do sada posmatrane primere pretpostavljalo se da su tela usamljena, da nikakvih drugih čvrstih granica, koja nameću granične uslove, sem samoga tela, nema. Daje se jedan primer (slika 156–13) da se prikaže kako drugi granični uslovi utiču na otpor. Primer se odnosi na dva cilindra istog prečnika, u ravanskom strujanju, a sa osovinama, normalnim na pravac strujanja, postavljeni jedan iza drugoga. Kod prednjeg, kada rastojanje S između njih pređe petostruki prečnik ($S > 5D$), otpor je približno isti kao da nema drugoga cilindra ($C_F = 1{,}2$). Za manja rastojanja drugi cilindar utiče, jer sprečava razvijanje vrtložnog traga. Drugi cilindar je u zaklonu prvoga, koji ga štiti, pa ima znatno manji otpor. Čak i za veće rastojanje između cilindara (čak za $S = 8D$), C_F drugog cilindra ne prelazi 0,4. Trebalo bi ga znatno udaljiti da se ne oseća uticaj prvog cilindra. Zanimljivo je da za malena rastojanja između cilindara drugi je i sa čela izložen potpritiscima, izazvanim prvim, pa strujanje nastoji da ga pokrene unatrag, u susret strujanju.



Slika 156–13 Koeficijenti pojedinačnih sila za cilindre (I) i (II).

III
UPOREĐENJE OTPORA USAMLJENIH TELA I PREPREKA U CEVI

Lokalna promena u cevi uzrokuje silu kojom fluid napada cev u području te promene, upravo napada prepreku koja mu se isprečila. Ta sila se može shvatiti kao sila otpora, pa se može tako izraziti.

Na slici 101–1 vidi se da je unošenje prepreke u cev povećalo pijezometarsku kotu uzvodno od prepreke za $\Delta\Pi = E_{\mathrm{izg,\,lok}}$, u odnosu na stanje bez prepreke, kada je gubitak energije bio samo usled trenja. Povećanje $\Delta\Pi$ znači i povećanje pritiska Δp, koji sa uzvodnog graničnog preseka deluje na deo struje u kome je prepreka, a uz isti nizvodni granični uslov. Povećanje Δp iznosi $\gamma\,\Delta\Pi = \gamma\,E_{\mathrm{izg,\,lok}}$, pa povećanje sile koja, zbog prepreke, deluje na navedeni način iznosi $\gamma\,E_{\mathrm{izg,\,lok}}\,A$, gde je A unutrašnji presek cevi, i to povećanje se pripisuje delovanju prepreke, to je otpor prepreke, koji je prema tome:

$$F = \gamma\,A\,E_{\mathrm{izg,\,lok}} \tag{156–16}$$

Ako je strujanje osnosimetrično (osnosimetrična prepreka u cevi kružnog preseka) sila otpora deluje po osovini cevi. Napominje se da će se razmatrati samo osnosimetrična strujanja.

Veza između F i $E_{\mathrm{izg,\,lok}}$ mogla bi se, na prvi pogled, shvatiti da sila F obavlja rad kojim se podmiruje izgubljena energija. Međutim, sila fluida deluje na čvrstu granicu, koja je nepokretna, i ne obavlja rad, dok se izgubljena energija troši na unutrašnje trenje unutar fluida. To je objašnjeno još u uvodnim razmatranjima u Poglavlju 81., pod VII.

Navedena veza lako se može posredno objasniti: veći otpor stvara intenzivnija vrtloženja koja oduzimaju više energije osnovnom, glavnom strujanju, što je gubitak za njega.

U proučavanju lokalnih gubitaka, počevši od izraza (101–1), izgubljena energija je izražavana sa $E_{\mathrm{izg,\,lok}} = \xi\,v^2/\,2\,g$, gde je ξ koeficijent lokalnog gubitka, a v brzina. Sa takvim izražavanjem $E_{\mathrm{izg,\,lok}}$ izraz (156–16) se svodi na:

$$F = \gamma\,A\,\xi\,v^2/\,2\,g = A\,\xi\,\rho\,v^2/\,2 \tag{156–17}$$

Sila otpora može se izraziti korišćenjem (156–1) sa:

$$F = C_F\,A_c\,\rho\,v^2/\,2 \tag{156–18}$$

Za karakterističan presek uzet je presek prepreke A_c, pa je slobodni presek za strujanje $A_0 = A - A_c$, gde je A presek ispred prepreke – to je unutrašnji presek cevi.

Izjednačavanjem desnih strana prethodne dve jednačine dobija se:

$$\xi\, A = C_F\, A_c \tag{156–19}$$

što pokazuje da su za jedan primer (određeni preseci A_c i A) ξ i C_F međusobno povezani: određenjem jednoga poznat je i drugi. Ovo je posve razumljivo, jer su E_{izg} i F takođe međusobno povezani.

Sa (101–4) napisano je da je $\xi = \xi\,(Re, Ko)$, gde je Re Rejnoldsov broj, a Ko skup bezdimenzionalnih veličina koje geometrijski opisuju lokalnu promenu (prepreku). Za sve međusobno slične prepreke, gde su granični uslovi dati u bezdimenzionalnim veličinama isti (Ko = idem), ξ zavisi samo od Re, pa onda i C_F zavisi samo od Re, što je napisano na osnovu (156–19), jer je za međusobno slične prepreke A_c/A isto. Dakle, može se napisati:

$$C_F = C_F(Re) \tag{156–20}$$

Za razvijenu turbulenciju (područje neuticanja Re-broja) $\xi = \text{const}$, pa je onda, shodno (156–19) i:

$$C_F = \text{const} \tag{156–21}$$

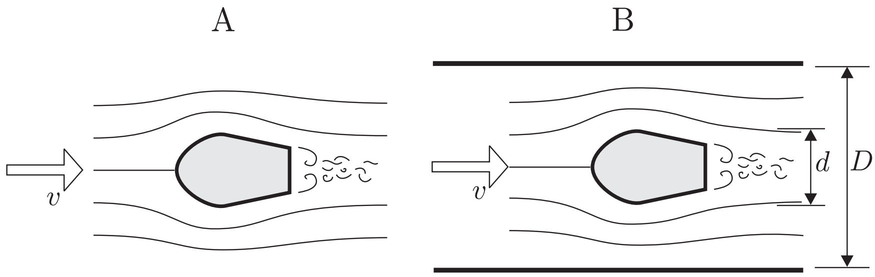
za sva geometrijski slična tela.

Napominje se da su ranije napisani izrazi (156–4) i (156–5) identični sa ovde napisanim (156–20) i (156–21), uz napomenu da se prvi odnose na otpor usamljenog tela u neograničenoj sredini, a drugi na prepreke u cevi.

Za razvijenu turbulenciju, gde je $\xi = \text{const}$, uspostavlja se „kvadratna zakonitost" za izgubljenu energiju, jer je ona za jednu određenu lokalnu promenu srazmerna sa kvadratom brzine. I za silu otpora prepreke u cevi, shodno (156–17), uspostavlja se onda kvadratna zavisnost, a takva zakonitost određuje (156–5) i za usamljeno telo.

Ako turbulencija nije dovoljno razvijena, pa viskoznost utiče na osrednjene vrednosti hidrodinamičkih veličina, ne ostvaruje se kvadratna zakonitost, u obrascima za C_F i ξ pojavljuje se Re-broj. Za telo u laminarnoj struji ostvaruje se linearna zakonitost otpora, što je dovelo do $C_F = \text{const}/Re$, kako je napisano sa (156–9) . U laminarnom strujanju preko prepreke u cevi ostvaruje se takođe linearna zakonitost otpora (izgubljena energija je srazmerna sa brzinom), što je dovelo do obrasca iste strukture kao u navedenom za C_F, to je (101–10) koji kaže da je $\xi = \mathrm{const}/Re$.

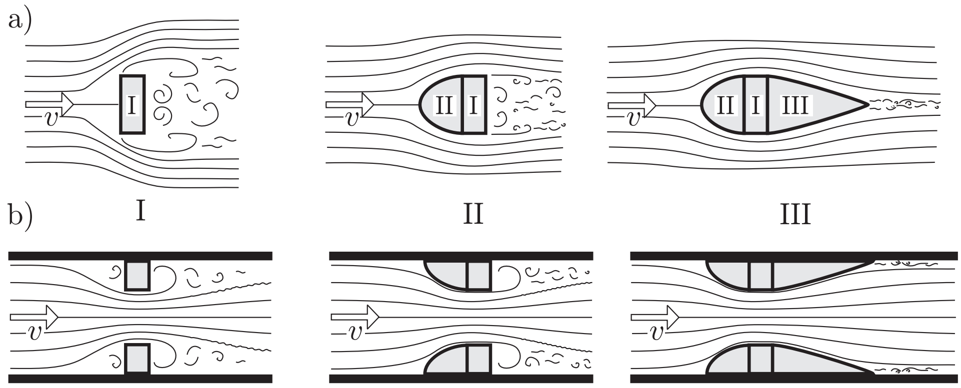
Slika 156–14 prikazuje, sa („A”), usamljeno telo u neograničenoj fluidnoj sredini, dok je u („B”) isto telo u struji kroz cev kružnog preseka, prečnika D. U oba slučaja strujanje je osnosimetrično. Ta dva slučaja mogu se uporediti, mada nailazeća ravnomerno raspoređena brzina U na usamljeno telo i srednja brzina (za presek) v, u cevi u kojoj se nalazi isto telo, ne stvaraju potpuno isto strujanje ispred tela, i kada su vrednosti tih brzina jednake. Upoređenje je moguće, jer ta razlika ipak nije tolika da se ne može obaviti procena koja se svodi na to da je otpor za isto telo i iste brzine (U i v) veći za telo u cevi, jer ono jače sprečava strujanje. Veći je koeficijent C_F u (156–18) od C_F u (156–1) . Što je struja u cevi sa telom jače stešnjena (što je veći odnos A_c/A, odnosno d/D na slici), veći je otpor.



Slika 156–14 Telo usamljeno u neograničenoj fluidnoj struji (A) i isto telo u cevi kružnog preseka (B). Mogu se uporediti otpori za ta dva slučaja.

Kao i kod usamljenog tela, i kod tela u cevi pritisci na čelu se povećavaju (u odnosu na one ispred tela), a na stražnjem delu se smanjuju.

Slikom 156–15 namerava se da se pokaže kako se oblikovanjem tela smanjuje otpor, i da se to načelno na isti način postiže i kod usamljenog tela i kod prepreke u cevi. Slika se odnosi na osnosimetrična strujanja. U gornjem redu, sa (I) je prikazana kružna deblja ploča (ili cilindar malene dužine pružanja), njemu se u (II) dodaje zaobljeno čelo i na kraju, pod (III), dodaje se i konični izduženi završetak. Od (I) do (II) otpor se smanjuje: $C_F = 1{,}1$ za (I), prema prikazanom na slici 156–2, „a”,



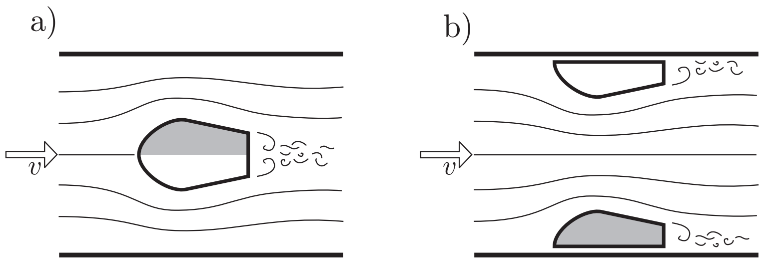
Slika 156–15 Smanjivanje otpora oblikovanjem od (I) do (III) za: a) usamljeno telo i b) prepreku u cevi.

$C_F = 0{,}45$ za (II), (prema slici 156–4, „a”), dok za (III) ne prelazi čak ni 0,1. Ovo je razumljivo iz prethodnih izlaganja u ovom i prethodnom poglavlju (155.), a posebno se treba potsetiti izlaganja koja su pratila slike 155–6 i 155–7. Prema tim izlaganjima zaobljavanjem čela dodavanjem (II) na (I) smanjuju se pritisci na čelo i sprečeno je odvajanje struje od tela (nema odbacivanja sa čela), pa su znatno smanjene brzine opstrujavanja oko vrtložnog traga, a onda su manje izraženi potpritisci na stražnji deo tela, manje je „sisanje” tela u vrtložni trag, što znači manji otpor. Dodavanjem (III) odvajanje struje od tela pomera se ka kraju tela, još su manje brzine opstrujavanja pri odvajanju, pa su još manje izraženi potpritisci.

Za telo u sredini cevi, otpor se smanjuje oblikovanjem isto kao i za usamljeno telo. Za prepreku uz zid cevi primenjuje se oblikovanje od (I) do (III), prikazano u donjem delu slike 156–15, urađeno po ugledu na gornji red, na slici. Uz ovo treba primetiti da smanjenje otpora znači i smanjenje izgubljene energije. Pri razmatranju lokalnih gubitaka u cevi na slici 102–12 prikazani su slučajevi (I), (II) i (III) sa ovdašnje slike, samo su tamo nosili oznake „b”, „c” i „e”, i napisano je da se redosledom (b, c, e) smanjuje izgubljena energija (razume se za iste preseke cevi i suženja, i isti proticaj). Taj redosled važi onda i za silu otpora prepreke, ona se smanjuje od (I) prema (III), a tim redosledom se smanjuje i otpor za usamljeno telo.

Prikazano na slici 156–14 odnosi se na osnosimetrično strujanje, a tako je i za prikazano na slici 102–12 (u kružnoj cevi je osnosimetrična prepreka). Međutim, ista razmišljanja mogu se primeniti i na cev pravougaonog poprečnog preseka gde se uz bočne zidove nalaze izbočine koje čine prepreku.

Otpor tela smeštenog u sredinu cevi pravougaonog poprečnog preseka (crtež „a" na slici 156–16) može se uporediti sa otporom istog takvog tela kada je usamljeno u neograničenoj fluidnoj sredini. Upoređuje se na isti način kako je to učinjeno za telo u kružnoj cevi, objašnjenjem uz sliku 156–14. Isto telo (sa crteža „a" na slici 156–16) prepolovljeno je i međusobno jednake polovine spojene su sa bočnim zidovima i tako stvaraju suženje na crtežu „b", na istoj slici 156–16. Otpori prepreke u oba slučaja sa te slike su približno isti. Razume se, za iste preseke cevi i prepreke i istu brzinu (isto A, A_c i v). Ovo proizilazi iz jednačine (102–17), koja kazuje da je za izgubljenu energiju merodavan samo odnos preseka u suženju i preseka cevi (A_0/A), a od toga zavise koeficijenti φ i C_A u istoj jednačini. Ista, ili tačnije, barem približno ista, izgubljena energija znači i približno isti otpor. Prethodno rasuđivanje povezalo je otpor usamljenog tela i prepreke sastavljene od njegovih polovina.



Slika 156–16 Otpor tela u sredini cevi pravougaonog preseka a) može se uporediti sa otporom suženja koga čine polovine istog tela smeštene uz bokove kanala b).

Na slici 102–10 prikazano je suženje u cevi (komad cevi manjega prečnika umetnut je u cev većega) koje je toliko kratko da se struja odbijena od zida cevi na početku suženja ne proširi do kraja suženja da ispuni ceo presek sužene cevi, dok je na slici 102–9 suženje toliko dugačko da se struja pre kraja sužene cevi proširi na ceo njen presek.

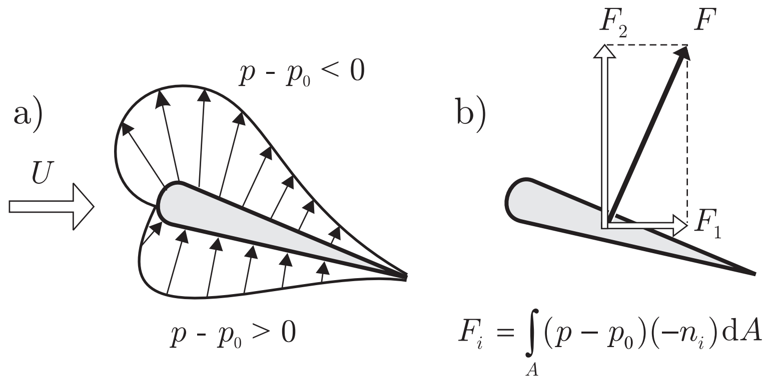
Objašnjeno je da je izgubljena energija (a onda i otpor) veći za kratko suženje. To se može zaključiti i iz objašnjenja ispod slike 102–12, gde je, između ostaloga, napisano da je izgubljena energija u „b” veća nego u „d”. Načelno je isto i sa usamljenim telom: za kraći cilindar (crtež „a” na slici 156–2) otpor je veći nego za duži (crtež „b” na istoj slici). Objašnjenja su data u pratećim izlaganjima uz tu sliku, gde je navedeno da je razlog u tome što je duži cilindar toliko dug da se odbačena struja sa čela, pre kraja cilindra priljubi uz njega.

Za naglo proširenje cevi (slika 83–5) pretpostavlja se da na kružni prsten, koji spaja užu i širu cev, deluju pritisci koji su bili u užoj cevi – može se reće sa mesta odvajanje struje, a to se pretpostavlja i kod otpora tela, pa i kod završetka dužeg cilindra (slika 156–2, „b”).

IV
OTPOR AEROPROFILA

U ovom, 156-om Poglavlju, do sada su se izlaganja odnosila na otpore tela gde sila otpora deluje u pravcu strujanja, jer su tela simetrična u odnosu na osovinu simetrije (u osnosimetričnom strujanju), ili u odnosu na ravan simetrije (u ravanskim zadacima), i uz to su tela položena tako da je navedena osovina, odnosno ravan, paralelna sa pravcem strujanja (sa pravcem dolazeće brzine). Sila otpora deluje po osovini simetrije, odnosno u ravni simetrije. Samo na kraju Poglavlja 155., u „Napomenama”, pod II, skrenuta je pažnja na primer gde sila otpora ne deluje u pravcu strujanja (slika 155–12).

Na slici 156–17 prikazano je ravansko strujanje oko tela simetričnog u odnosu na svoju središnju simetralnu ravan, ali to nije i simetralna ravan za strujanje, jer je telo postavljeno koso u odnosu na pravac strujanja (nagnuto je). Stoga sila otpora ne deluje u pravcu strujanja, ona se može razložiti u komponente F_1 i F_2. Prva deluje u pravcu strujanja, a druga u pravcu normalnom na pravac strujanja, što je i prikazano na drugom crtežu slike 156–17. Na prvom crtežu iste slike prikazan je raspored pritisaka. Sa donje strane pritisci su povećani u odnosu na one koji bi bili u stanju mirovanja ($p > p_0$, pa je koeficijent pritiska, dat sa (155–6), pozitivan tj. $C_p > 0$), pošto se telo tako isprečilo da se sa donje strane strujanje usporava, pa se pritisci povećavaju. Zbog



Slika 156–17 Otpor tela u nesimetričnoj struji: a) raspored pritisaka po telu i b) sila pritisaka i njene komponente.

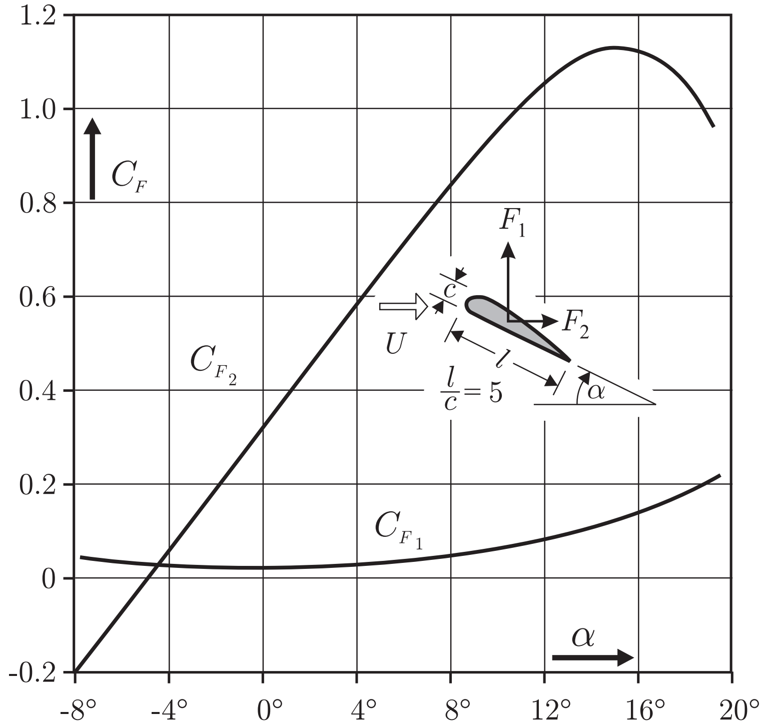
usporavanja sa donje strane, mora se proticanje sa gornje povećati, pa se brzine povećavaju, a pritisci smanjuju ($p < p_0$, $C_p < 0$).

Slika 156–18 odnosi se na strujoliko nesimetrično telo (nema podužne simetrale) – to je jedan od primera onoga što se naziva „aeroprofil”, upravo to je primer preseka krila letelice (aviona). Grafikoni su prikazi koeficijenata C_{F_1} i C_{F_2} za komponente F_1 i F_2 sile otpora F, u zavisnosti od ugla α, koji predstavlja nagib krila (vidi sliku). Sile F_1 i F_2 i ovde deluju u pravcu strujanja, odnosno u pravcu normalnom na taj pravac.

Komponenta F_1 u pravcu strujanja je otpor koji mora da savlada vučna snaga letelice, to je sila koju mora da savlada motor, i stoga se često kao „otpor” shvata samo ta komponeneta, dok se komponenta F_2 obično naziva „uzgon” ili „sila dizanja” ili „nošenja”, jer ona nosi krilo suprotstavljajući se njegovoj težini (pravac „1” je horizontalan, a „2” vertikalan). Jasno je da treba nastojati da odnos „uzgona” prema otporu (F_2/F_1) bude što je moguće veći (da se uz istu vučnu silu nosi veća težina, ili da za istu težinu treba manja vučna sila).

Koeficijenti C_{F_1} i C_{F_2} su određeni sa:

$$C_{F_1} = \frac{F_1}{\frac{1}{2}\rho\, L\, l\, U^2} \tag{156–22}$$



Slika 156–18 Koeficijenti otpora (C_{F_1}) i (C_{F_2}) u zavisnosti od nagiba (α).

$$C_{F_2} = \frac{F_2}{\dfrac{1}{2}\,\rho\,L\,l\,U^2} \tag{156–23}$$

To je uobičajeni način bezdimenzionalnog izražavanja sile, napisan u uvodnim izlaganjima ovoga poglavlja, sa (156–1) . Treba primetiti da je za karakterističan presek A uzeto $L\,l$, gde je L proizvoljna dužina merena normalno na ravan proučavanja (zadatak se rešava kao ravanski), a l je širina krila (vidi sliku 156–18). Dužina l uzeta je za karakterističnu, iako baš najbolje ne određuje poprečni presek tela u ravni normalnoj na strujanje, ali je to uzimanje opravdano, jer se l ne menja promenom nagiba (ona je mera krila). Uostalom, nije ni bitno šta će se uzeti kao karakteristična dužina (odnosno karakteristični presek), bitno je da se zna šta je uzeto pri obrazovanju bezdimenzionalnih veličina. Pošto se zadatak razmatra kao ravanski, određuje se sila po jedinici dužine $f = F/L$ (gde je L proizvoljna dužina normalno usmerena na ravan proučavanja, na ravan crteža). Tako je postupljeno u Odeljku II, na slici 156–5, pri ispisivanju izraza (156–14) i (156–15), pa se po ugledu na njih ovde koeficijenti izražavaju sa:

$$C_{F_1} = \frac{f_1}{\frac{1}{2}\rho\, l\, U^2} \tag{156–24}$$

$$C_{F_2} = \frac{f_2}{\frac{1}{2}\rho\, l\, U^2} \tag{156–25}$$

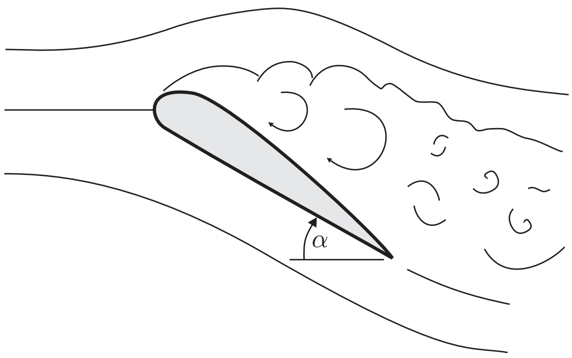
Objašnjeno je da je poželjno da odnos sila F_1/F_2 bude što veći, da bi noseća težina za istu vučnu silu bila što veća, a to onda važi i za odnos f_1/f_2 i C_{F_1}/C_{F_2}.

Uz sliku 156–18 treba primetiti da nacrtani grafikoni važe za sve geometrijski slične profile (Ko = idem). Za njih sa uspostavljaju jednoznačne veze $C_{F_1} = C_{F_1}(\alpha)$ i $C_{F_2} = C_{F_2}(\alpha)$. Podrazumeva se uz to da je dolazeće strujanje određeno jednim podatkom, brzinom U, koja je ušla u bezdimenzionalne veličine C_{F_1} i C_{F_2}. I ovde, kao i kod svih do sada prikazanih primera u ovom poglavlju, smatra se da je telo usamljeno, da granične uslove daje samo telo. Uz sve to prikazane zavisnosti važe u području neuticanja Re-broja. Ovaj broj utiče na koeficijent otpora za manje brzine (manje vrednosti toga broja), ali to područje nije zanimljivo za praktična razmatranja.

Pogledom na sliku 156–18 kao prvi utisak se stiče da je koeficijent C_{F_2} znatno veći od C_{F_1} (uzgon znatno veći od otpora u pravcu strujanja), što je poželjno, jer se, kako je već objašnjeno, nastojanja usmeravaju da odnos F_2/F_1 bude što je moguće veći. Za α između $-2°$ i $+8°$ taj odnos se kreće otprilike od 15 do 20. U navedenom rasponu (za α), C_{F_1} ne prelazi 0,05 (minimalna vrednost oko 0,02), što je prihvatljivo, i može se postići i prilično veliki uzgon (C_{F_2} oko 0,8). Za druge tipove aeroprofila dobijaju se nešto drugačiji rezultati, ali dovode do načelno istog zaključka.

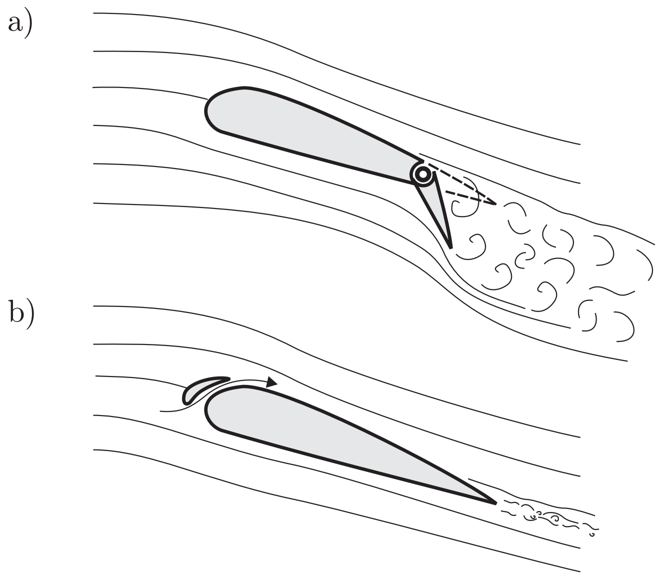
Povećavanjem nagiba (ugla α), C_{F_1} raste, i to sve izrazitije što je ugao α veći (sve je veći nagib linije C_{F_1} približavanjem desnom kraju crteža), jer se profil sve više isprečava strujanju.

Uzgon raste povećanjem ugla α i dostiže maksimalnu vrednost (skoro 1,2) za α oko $15°$. Tada dolazi do odvajanja („odlepljivanja”) strujanja od gornje površine profila, obrazuje se vrtlog (slika 156–19), dok



Slika 156–19 Odlepljivanje struje od tela nastaje kada nagib pređe kritičnu vrednost.

za manje nagibe toga nema. Za odvajanje struje kaže se da se telo „otkačilo", da više nije „nošeno". Uzgon postaje znatno manji, jer vrtlog stvara povratne brzine uz krilo, što dovodi do usporavanja sa te strane i onda do povećanja pritiska (što smanjuje uzgon).



Slika 156–20 Povećanje uzgona: a) oboreno zakrilce povećava pritisak odozdo i b) istureno pretkrilce otvara procep kroz koga na gornju stranu pristiže struja koja povećava brzinu uz tu stranu, pa tu se smanjuje pritisak.

Slika 156–20 treba da posluži da se prikaže kako se može povećati uzgon, čime se potpomaže uzdizanju letelice, ili se usporava njeno sletanje.

Ako se spusti završetak krila („zakrilce") – crtež „a" – povećavaju se pritisci odozdo. „Pretkrilce" ispred krila – crtež „b" – stvara procep između sebe i krila, kroz koga mlaz velikom brzinom struji odozdo (gde su pritisci veći) na gore (gde su manji), i time se povećava brzinu uz gornju površinu krila, i onda se smanjuju pritisci. U oba slučaja povećava se otpor u pravcu strujanja, pa se „zakrilce" spušta samo dok traje potreba za povećanjem uzgona (pri poletanju ili sletanju), a u redovnom letu „pretkrilce" je priljubljeno uz krilo, i odvaja se samo kad se želi povećati uzgon.

* * *

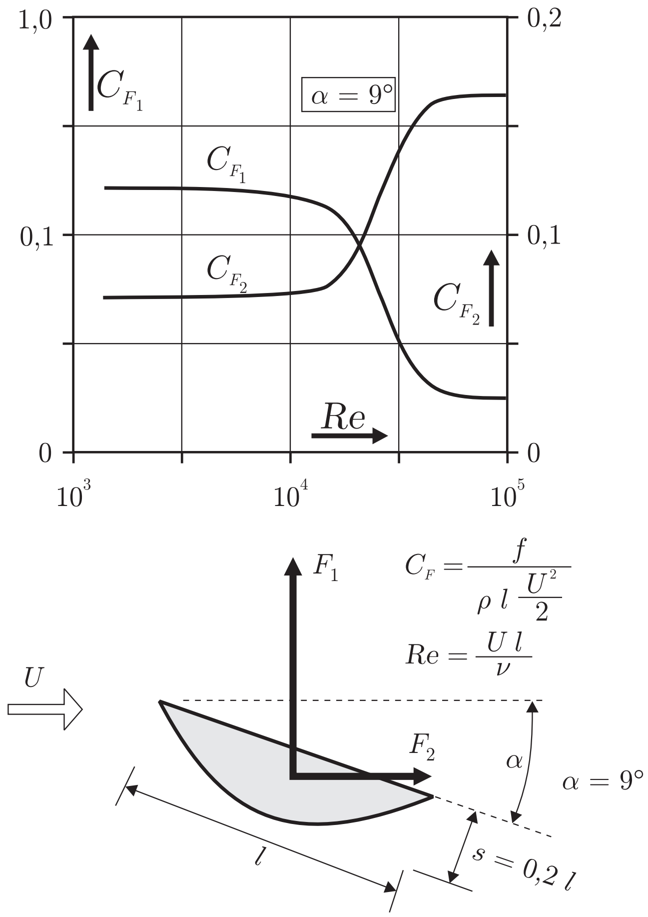
Napominje se da se određivanje sile na krilo u ravanskom strujanju ne može neposredno primeniti na stvarni praktični primer, jer je krilo ograničene dužine L (merene normalno na ravan u kojoj je nacrtan podužni presek). Stoga treba uneti i uticaj odnosa l/L (širine prema dužini krila). Takođe u otpor mora ulaziti i otpor koji daje trup aviona (a ne samo krila). Međutim, što se tiče uzgona, može se primetiti da se pretežni njegov deo stvara na krilima.

Primećuje se da se mora voditi računa o uticaju vetra, jer se tada sila značajno razlikuje od utvrđene za let kroz mirnu sredinu. Takođe se skreće pažnja na uticaj turbulentnih fluktuacija na silu otpora.

* * *

Napominje se da se za manje vrednosti Re-broja ispoljava zavisnost koeficijenta otpora od toga broja, ali to obično ne spada u područje zanimljivo za praktična rešavanja, što je već navedeno. Međutim, bez obzira na to, daće se jedan primer gde se pokazuje zavisnost C_F od Re-broja (slika 156–21). To je otpor profila u obliku kružnog segmenta, određenog sa $S = 0{,}2\,l$, pa se odnosi na sve segmente sa takvim odnosom debljine prema širini. Prikazani otpor se odnosi na jednu određenu vrednost nagiba $\alpha = 9^\circ = \text{const}$, pa grafikon prikazuje $C_F = C_F(Re)$.

Na slici 156–21 primećuje se nagao pad koeficijenta C_{F_1} pri porastu Re-broja. To je otpor u pravcu strujanja, pa se prethodno smanjenje koeficijenta može objasniti istom pojavom kod lopte, a uočljivo je na



Slika 156–21 Uticaj Re-broja na koeficijente otpora.

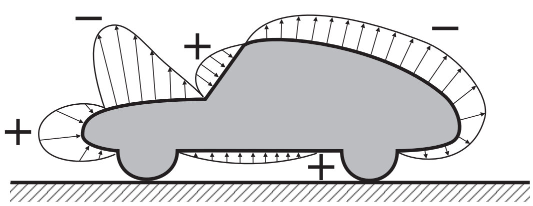
crtežu „b", na slici 156–3. Rečeno je da se ista pojava ostvaruje i kod cilindra u ravanskom strujanju, pa onda nije neočekivana i kod dela cilindra koji se sada posmatra. Naime, i ovde, kad Re-broj dostigne neku vrednost, mesto odvajanja se pomera ka završetku tela i time se otpor smanjuje, jer su potpritisci na stražnji deo tela manje izraženi.

Ostaje još da se objasni zašto naglo poraste koeficijent C_{F_2} (naglo poraste uzgon). To se može objasniti dužim zadržavanjem sloja uz telo, pa su zbog toga pritisci odozdo veći.

V
OTPOR VAZDUHA KRETANJU DRUMSKIH I ŠINSKIH VOZILA

Razmatranja u ovom odeljku (V) treba da omoguće približnu procenu otpora pri kretanju drumskih i šinskih vozila kroz vazdušnu sredinu.

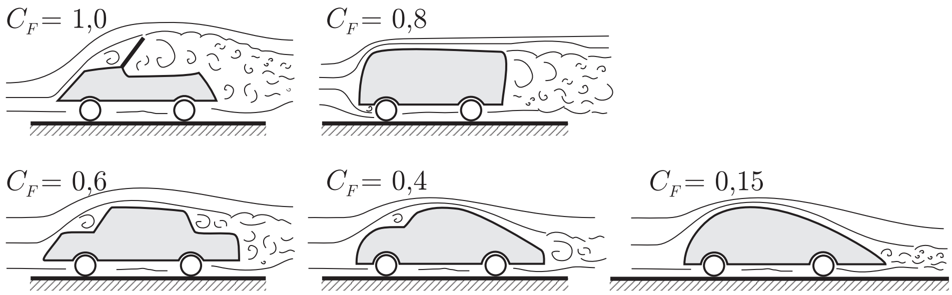
O rasporedu pritisaka na jedan primer automobila može se steći utisak iz slike 156–22. Na čelu su povećani pritisci usled zaustavljanja struje, a drugo zaustavljanje je na prednjem staklu, dok su preostale površine, zbog povećanih brzina opstrujavanja i obrazovanja vrtložnog traga, izložene potpritiscima. Oblikovanje radi smanjivanja otpora, da bi se telo približilo onome koje se zove „strujoliko", usmereno je u zaobljavanje čeone površine, u izbegavanje oštrih ivica koje odbacuju struju, kao i u izbegavanje isturenih delova koji štrče. Odvajanje struje treba da se približi stražnjem kraju tela, uz što je moguće uži vrtložni trag. Za ovo oblikovanje kaže se da je „aerodinamičko oblikovanje". Sve navedeno shvatljivo je, i u skladu je sa prethodnim razmatranjima o otporu tela.



Slika 156–22 Prikaz rasporeda pritisaka za podužnu simetralnu ravan na jednom primeru automobila.

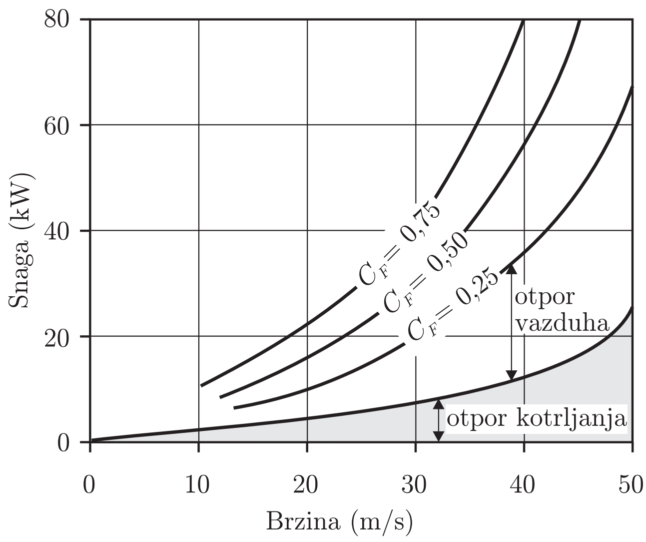
Na slici 156–23 šematski je prikazano 5 tipova automobila, uz crteže napisane su približne vrednosti koeficijenta otpora C_F. Za prvi se može reći da nameće utisak da nema nastojanja da se oblikovanjem smanji otpor. Drugi ima zaobljeno čelo, čime se smanjio otpor, treći je donekle prilagođen strujanju, a četvrti još više, dok je peti „aerodinamičkog oblika". Tako se od prvog do petog otpor smanjuje od $C_F = 1$ do $C_F = 0{,}15$, dakle skoro 7 puta.

Narednom slikom (slika 156–24) namerava se, na jednom primeru, pokazati da je učešće otpora vazduha u ukupnom otporu vozila značajno, iz čega se zaključuje da je oblikovanje opravdano. Prikazana je



Slika 156–23 Približne vrednosti koeficijenata otpora (C_F) vazduha za nekoliko tipova automobila.

snaga kojom se savladava otpor, uz napomenu da snaga daje uvid u otpor, jer je snaga proizvod iz sile (otpora) i brzine. Uz otpor vazduha ulazi i otpor na dodiru vozila i čvrste površine po kojoj se vozilo kreće. Taj otpor se može nazvati „otpor kotrljanja". Treba primetiti da prikazano nije ukupna snaga koju proizvodi motor, jer se jedan deo ukupne snage utroši na unutrašnje otpore, u motoru i prenosu, a nije prikazan na slici 156–24.



Slika 156–24 Ukupni otpor automobila (otpori vazduha i kotrljanja) za različite koeficijente otpora vazduha (C_F) (Poprečni presek automobila $A = 2,5\ \mathrm{m}^2$).

*   *   *

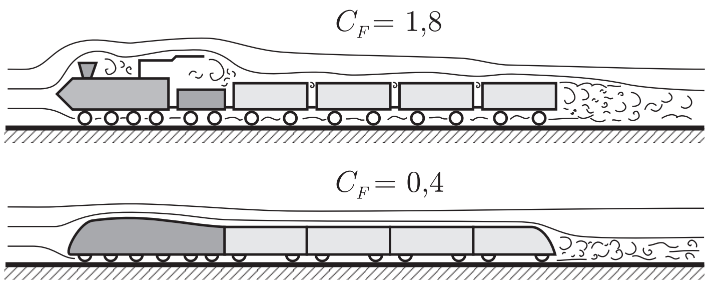
Uz prethodno razmatranje treba staviti sledeće primedbe:

1. Izneti podaci o koeficijentima otpora C_F odnose se na područje neuticanja viskoznosti na otpor, upravo na neuticanje Re-broja na koeficijent C_F. To se ne ostvaruje za malene brzine kada turbulencija nije dovoljno razvijena da se to ostvari, a takve brzine su nezanimljive u praktičnim razmatranjima. Na isti način se rasuđivalo kod razmatranja skoro svih otpora oblika.
2. O otporu trenja nije se vodilo računa smatrajući da je beznačajan u odnosu na uticaj oblika. Ovo znači da se podrazumeva da spoljna površina vozila neće biti, usled nepažljive izrade, preterano hrapava. Izbegavaće se ispupčenja i istureni detalji na površini. Ako je vozilo dugačko o otporu trenja se vodi računa, jer se dužinom povećava otpor trenja.
3. Koeficijenti otpora odnose se na otpor koji potiče od osrednjenih vrednosti pritisaka, bez uticaja turbulentnih fluktuacija. Usled njih trenutna maksimalna vrednost sile je veća od osrednjene, pa se o tome mora voditi računa, što je objašnjeno pod 2), u „Napomenama”, na kraju Poglavlja 155.
4. Navedeni koeficijenti otpora imaju smisla u pravolinijskom jednolikom kretanju vozila u mirnoj sredini, pa se može shvatiti da je, izuzevši blizinu vozila, relativna brzina vazduha u odnosu na vozilo konstantna i ravnomerno raspoređena po celom strujnom prostoru, i jednaka brzini vozila, a suprotno usmerena. Za vozilo koje se kreće u krivini otpori vazduha nisu kao u pravolinijskom kretanju.
5. Podaci o koeficijentu otpora odnose se na usamljeno vozilo. Na otpor, međutim, utiče vozilo ispred posmatranoga, kao i vozilo koje se kreće suprotnim smerom, ako ovo drugo nije udaljeno. Otpor je znatno veći u tunelu i useku (ako nije širok), a pogotovo je povećan ako se u tunelu suprotnim smerom kreće i drugo vozilo.
6. Razmatralo se kretanje vozila u mirnoj vazdušnoj sredini (remeti je jedno kretanje vozila). Duvanje vetra znači da i daleko od vozila sredina nije mirna, a vetar ne mora da duva u pravcu u kome se

vozilo kreće, pa se javlja i bočna komponenta sile vetra na vozilo, koja može da prevrne vozilo, ili da ga oduva sa puta. Za vozilo na mostu bočna komponenta utiče na bočno opterećenje mosta, ako je vozilo izloženo vetru (kroz rešetke mostovske konstrukcije,ili iznad ograde mosta)

* * *

U otporu kretanju šinskih vozila otpor vazduha ima značajan udeo, stoga se oblikovanjem vozila nastoji da se on smanji. Slika 156–25 treba da posluži da se to pokaže. Prvi crtež se odnosi na voz koji vuče stara neoblikovana parna lokomotiva, iz vremena kada se nije težilo oblikovanju, jer su brzine bile malene, dok se drugi crtež odnosi na savremeno oblikovani voz. U prvom slučaju otpor vazduha je veliki zbog isturenih delova lokomotive, i svaki dodatni vagon stvara znatan otpor, jer struja ulazi u prostor između vagona, zapinje o ivice vagona i stvara se vrtloženje, iza voza je izraženi vrtložni trag. U drugom slučaju nema isturenih delova, ceo voz se ponaša kao jedinstveno oblikovano telo, može se slikovito reći da izgleda da je ceo voz „pod zajedničkim ogrtačem". Čelo voza je zaobljeno, a završetak je oblikovan tako da se smanji vrtložni trag. U oba slučaja voz se sastoji od 4 vagona. Za prvi slučaj otpor parne lokomotive je otprilike polovina otpora celoga voza, koeficijenti otpora su otprilike $C_F = 2$ za ceo voz, a $C_F = 1$ za lokomotivu. Za drugi slučaj oblikovanje smanjuje otpor vazduha nekoliko puta (u odnosu na prvi slučaj), pa je koeficijent otpora celoga voza oko $C_F = 0{,}4$. U prvom slučaju dužina voza, odnosno broj vagona,



Slika 156–25 Otpor vazduha voza sa 4 vagona smanjuje se nekoliko puta ako se voz oblikuje.

utiče na otpor, jer se povećava broj vrtloženja između vagona, kao i trenje (u koga se mogu uključiti i izbočine i udubljenja na spoljnoj površini vagona), u drugom slučaju uticaj dužine voza uglavnom se ispoljava kroz povećano trenje.

VI
OPTEREĆENJE ZGRADA VETROM

Sila vetra na zgradu računa se za pojedine delove (pojedine površine). Svaki ima površinu A_p, na koju deluje prosečni pritisak p, koji se izražava koeficijentom C_p, pa je sila:

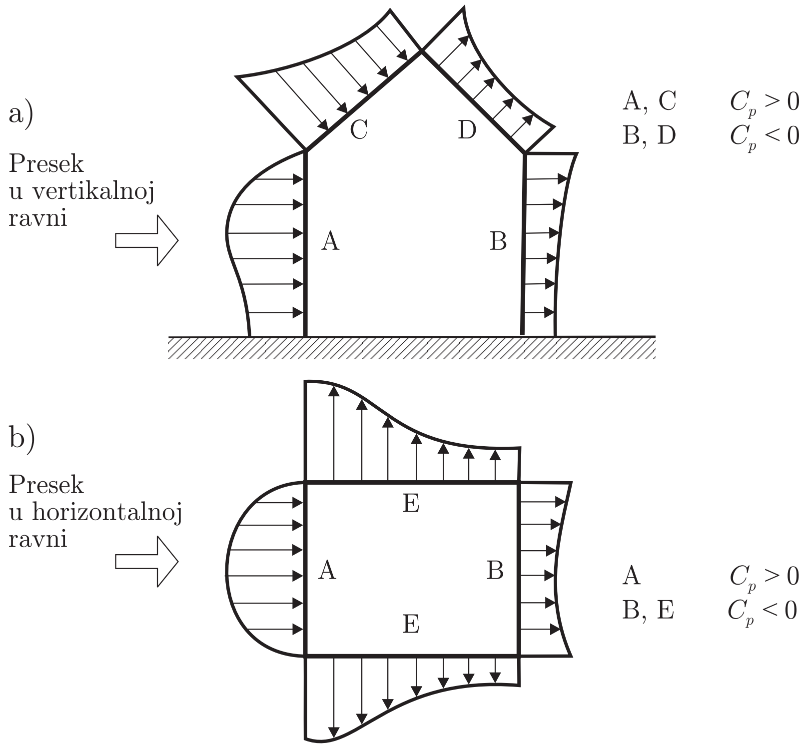
$$F = A_p \, C_p \, \rho \, u^2/2 \tag{156–26}$$

i ona je za zadatu brzinu određena poznavanjem koeficijenta C_p.

Brzina u zavisi od mesta gde se građevina nalazi, od njene visine, i od onoga što se naziva ,,hrapavost terena" (i što unosi uticaj trenja vazdušne struje o teren). Uzima se očekivana brzina retke verovatnoće pojave (na primer, jedanput u 50 godina). U rešavanju praktičnih zadataka primenjuju se obično preporuke, ili propisi, koji određuju brzinu u zavisnosti od navedenoga.

Koeficijent pritiska C_p, za pojedinu površinu zavisi od oblika pojedine površine, od odnosa sa susednim površinama na istoj zgradi, pa čak i od susedne zgrade, kao i od pravca vetra u odnosu na položaj zgrade. Ti uslovi su veoma složeni i preporuke, ili propisi, pokušavaju da to opišu što je moguće jednostavnije, ali pri tome ne treba preterati, da se ne bi dobile isuviše velike razlike između rezultata računa po propisima i onoga što se stvarno događa.

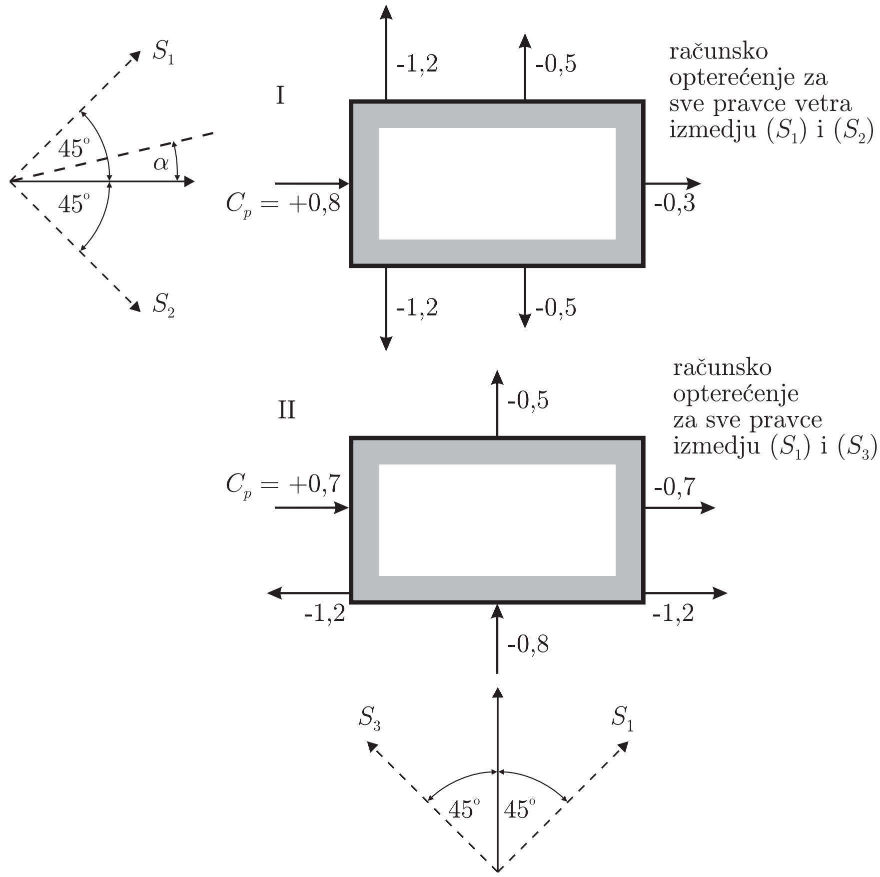
Slika 156–26 prikazuje kako otprilike izgleda opterećenje zgrade, u jednom vertikalnom i jednom horizontalnom preseku. Prednji zid (označen sa ,,A") suprostavljanjem vetru navlači pritiske veće od pritisaka u neporemećenoj sredini, ispred objekta, pa je $C_p > 0$. Na početku bočnih zidova (,,E") struja se odvaja od zgrade i uz zid je vrtložna oblast u kojoj vladaju potpritisci (pritisci manji od neporemećenog), pa fluid sa bočnih zidova uvlači telo. Iza tela je vrtložni trag u kome takođe vladaju potpritisci, pa je njima izložena i stražnja strana (,,B). Stoga je $C_p < 0$ za strane (,,E") i (,,B"). Sve navedeno je lako shvatljivo, jer je u skladu sa prethodnim razmatranjima o otporu tela.



Slika 156–26 Prikaz pritisaka na zgradu u vertikalnom (a) i horizontalnom (b) preseku.

Prednja („vetrinska") strana krova („C") izložena je pritiscima, a stražnja („zavetrinska") („D") potpritiscima, jer je odvajanje struje na vrhu krova – na slemenu. Ako krov nije dovoljno strm, do odvajanja će doći na početku krova i ceo će biti izložen potpritiscima (vidi sliku 156–28 b).

Slika 156–27 je prikaz vrednosti koeficijenata C_p za pojedine zidove zgrade. Vetar može da duva u svim pravcima i C_p zavisi od ugla između pravca vetra i normale na prednju površinu – to je ugao α na slici. Ima propisa, odnosno preporuka, gde se daju vrednosti C_p u zavisnosti od ugla α (upravo za nekoliko vrednosti toga ugla). Sa praktične strane može se uprostiti da se koeficijent C_p za ugao $\alpha = 0$ (vetar u pravcu normale na površinu) primeni na sve uglove $\alpha < 45°$. Tako se određuju koeficijenti samo za $\alpha = 0$ i $\alpha = 90°$ – na njih se



Slika 156–27 Koeficijenti pritiska (C_p) na spoljne površine zgrade.

odnose crteži I i II na slici. Treba još dodati da se za vetar suprotno usmeren od prikazanog na slici samo promene uloge prednje i stražnje strane.

Na prednjoj je strani (označenoj sa ,,A" na slici 156–26) koeficijent $C_p > 0$, jer vetar pritiskuje tu stranu, a maksimalna vrednost pritiska je u zaustavnoj tački i tu je $C_p = +1$, kako je napisano sa (155–16). Za prosečnu vrednost za celu stranu može se kao približno uzeti $C_p = +0{,}8$.

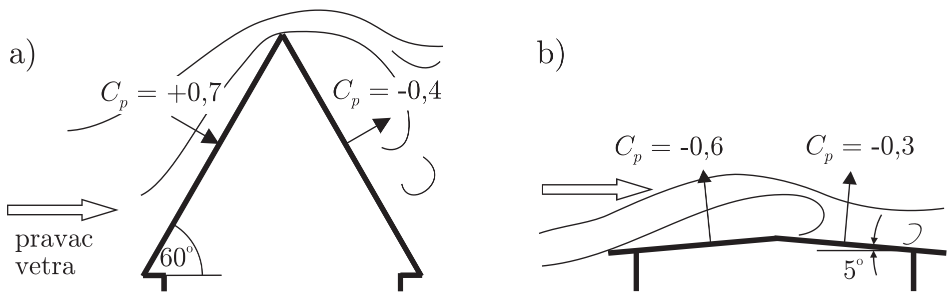
Na početku bočne strane (,,E" na slici 156–26) struja se odvaja od zida, da bi se niz struju postepeno približavala zidu, uz smanjivanje brzine zaobilaženja, pa se pritisak na zgradu povećava, jer se unose otprilike pritisci iz brzine zaobilaženja odbačene struje, a ona opada niz struju. Povećanje pritiska znači da se potpritisci (po apsolutnoj vrednosti) smanjuju. Na početku bočne strane počinje odvajanje struje od tela i tu je brzina zaobilaženja najveća, pa vlada minimalni pritisak, upravo najizrazitiji potpritisak – može se prihvatiti da je tu $C_p = -1$ do – 1,2. Objašnjeno povećavanje pritiska niz struju dovešće do većeg pritiska na kraju te strane (pa i većeg prosečnog pritiska za celu stranu), ako je ta strana duža, upravo ako je odnos l/b veći (l je dužina bočne strane merenja u pravcu strujanja, b je širina zgrade, merena normalno na taj pravac). Vrednost koeficijenta C_p prosečno za bočnu stranu ceni se između – 0,8 i – 0,5 (približava se drugoj vrednosti kada je l/b veći). Može se dodati da i odnos h/b (h je visina zgrade) utiče na C_p, i C_p je veći ako je h/b veći (za isto b/l), jer viša zgrada uzrokuje veće zaobilaženje struje. Međutim, uticaj h/b je manji nego uticaj l/b.

Stražnja strana („B" na slici 156–26) je pod dejstvom potpritisaka iz vrtložnog traga. Nije teško prihvatljivo da potpritisci na stražnjoj strani zavise od potpritisaka na bočnim stranama. Tako većoj vrednosti za C_p, za bočnu stranu, odgovara veća vrednost za stražnju stranu. Vrednosti C_p od – 0,8 i – 0,5 za bočnu stranu, odgovaraju vrednosti C_p za stražnju stranu od – 0,5 i – 0,3.

Na osnovu prethodnih izlaganja na slici 156–27 upisani su približni i prosečni koeficijenti pritiska, na osnovu niza propisa. Pod (I) je zgrada i pravac vetra paralelan sa dužom stranom zgrade, a pod (II) sa kraćom, tako se uočava razlika u pritiscima koje primaju bočne odnosno stražnje strane.

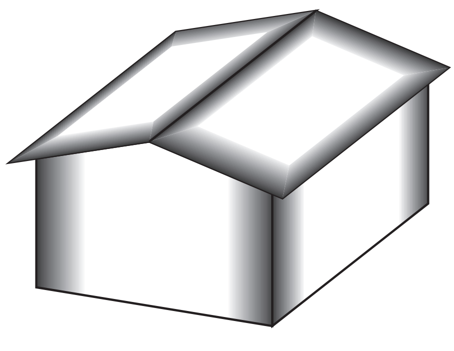
Slika 156–28 se odnosi na dvovodni krov, a za razmatranja, primera radi, su uzeti krovovi sa nagibom $\beta = 60°$ i $\beta = 5°$. Za strmiji nagib, $\beta = 60°$, vetar pritiskuje prednju stranu, izloženu vetru (vetrinska) – tu je pritisak povećan u odnosu na pritisak u dolazećoj struji, pa je $C_p > 0$, dok na stražnju stranu (zavetrinska) deluju potpritisci, $C_p < 0$, jer je odvajanje struje od krova na njegovom vrhu (slemenu). Za blaži nagib, $\beta = 5°$, ceo krov je u potpritisku, jer je odvajanje na početku vetrinske strane, od ivice na koju vetar nailazi. Za pravac vetra paralelan sa slemenom (normalan na crtež) na ceo krov, i za sve nagibe, deluju potpritisci, jer se struja odvaja od ivice krova na koju vetar nailazi.

Koeficijent pritiska C_p pre svega zavisi od nagiba krova, pa od odnosa širine prema dužini krova i odnosa ovih veličina prema visini zgrade. Na slici su upisane vrednosti koeficijenata C_p oko kojih se



Slika 156–28 Koeficijenti pritiska za dva nagiba dvovodnog krova, u ravanskom strujanju: a) odvajanje struje je na vrhu krova, pa je prednja strana pritisnuta, a stražnja je u potpritisku b) ceo krov je u potpritisku, jer se struja odvaja pri nailasku na krov.
Za pravac vetra normalan na crtež, ceo krov je izložen potpritisku, (C_p) je u oba slučaja između – 0,8 i – 0,6.

kreće ono što se različitim propisima preporučuje. Za prikazane nagibe krova te vrednosti su prosečne za odnosne površine, a treba naglasiti da treba izuzeti pojaseve uz ivice krova, gde su potpritisci izraziti, jer su brzine zaobilaženja najveće, pa su prtisci najniži. Slika 156–29 ima za svrhu da istakne te pojaseve (oni su osenčeni na slici) gde se računa sa potpritiscima, sa C_p manje od – 1, pa čak ponegde i sa C_p do – 2. Posebno je veliko opterećenje dela krova, koji je isturen, što je prikazano na slici 155–11. Slika 156–29 iskorišćena je da se istaknu i pojasevi uz



Slika 156–29 Osenčeni delovi krova i zidova zgrade izloženi su izrazitim pritiscima ($C_p < -1$).

uglove zgrade gde su potpritisci izraziti.

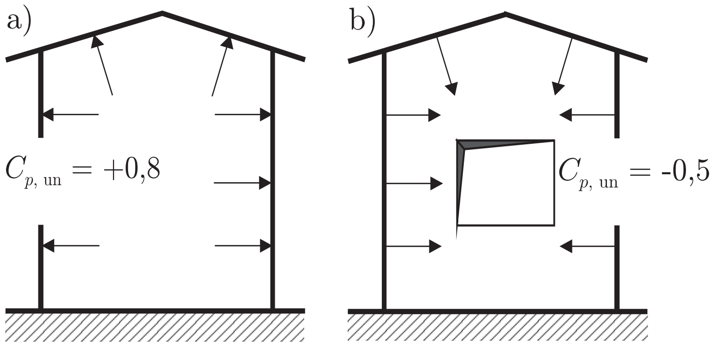
Svi koeficijenti pritiska C_p, navedeni za zidove zgrade i krovove, određivali bi opterećenje samo uz uslov da je sa unutrašnje strane pritisak iz objektom neporemećene fluidne sredine ispred objekta. Naime, C_p meri samo povećanje, odnosno smanjenje pritiska u odnosu na neporemećeni. Stoga pored opterećenja spoljnim pritiskom, koga unosi C_p, treba računati i sa unutrašnjim koga izražava $C_{p,\,\mathrm{un}}$. Prema tome:

$$p = (C_p - C_{p,\,\mathrm{un}})\,\rho\, u^2/2 \qquad (156\text{–}27)$$

Vrednosti za $C_{p,\,\mathrm{un}}$ nalaze se u granicama:

$$+0{,}8 > C_{p,\,\mathrm{un}} > -0{,}5 \qquad (156\text{–}28)$$

zavisno od toga gde se nalaze otvori u zidovima. Granične slučajeve prikazuje slika 156–30. U prvom slučaju „a” otvori su samo na prednjoj vetrinskoj strani, pa se kroz otvore ,,uvuče” spoljni pritisak sa te strane, a to je pritisak kome približno odgovara $C_p = +0{,}8$. Upravo, unutar zgrade vlada povećani pritisak (u odnosu na neporemećeni). U drugom slučaju „b” unutar zgrade je sniženi pritisak, otprilike isti kao uz stražnji zid, ili uz bočne zidove.



Slika 156–30 Koeficijenti ($C_{p,\,\mathrm{un}}$) unutrašnjeg pritiska za dva granična slučaja: a) otvor na vetrinskoj strani i b) otvor na zavetrinskoj i bočnoj strani.

VII
OTPOR BRODA

U prethodnim razmatranjima koeficijent otpora nije zavisio od *Ca*, *Fr* i *We*–broja, jer se fluid smatrao nestišljivim, a bila su isključena strujanja sa slobodnom površinom tečnosti – to je i objašnjeno u Uvodu ovoga poglavlja: opšti izraz za koeficijent otpora (156–2) zamenjen je sa (156–3).

Za tela na slobodnoj površini tečnosti (plivajuća tela) u izrazu za C_F ne izostavljaju se *Fr* i *We*, pa se umesto (156–3) piše:

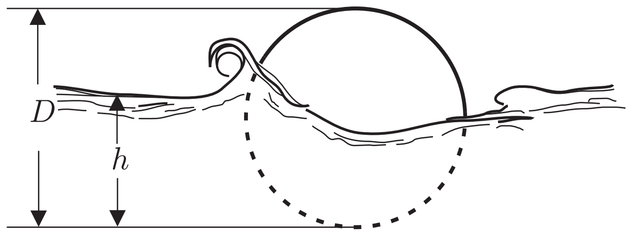
$$C_F = C_F\,(Re, Fr, We, Ko) \qquad (156–29)$$

O uticanju, odnosno neuticanju *Fr*-broja raspravjeno je uz izraz (62–18), gde je rečeno da *Fr*-broj ne utiče u primerima gde je bitno združeno dejstvo pritisaka i težine, bez obzira koliko doprinose pritisci, a koliko težina. Ako nije tako, ako je dejstvo težine merodavno za obrazovanje slobodne površine tečnosti, koja je granica strujanja, oslobođena pritiska, uticajan je *Fr*-broj. Oko plivajućeg tela površina vode nije horizontalna uprkos dejstvu težine koja nastoji da ,,sruši" talase, ali je u tome sprečavaju uticaji otpora. To je merodavno dejstvo uticaja težine i inercijalnih sila za koje važi Frudov zakon sličnosti.

Nehorizontalnost površine vode oko plivajućeg tela može se objasniti podsećanjem na uvodno izlaganje u Poglavlju 155., uz sliku 155–1, gde se navodi da odupiranje fluidnoj struji potpuno uronjenog tela proizvodi na prednjem delu tela povišene pritiske (u odnosu na neporemećene ispred tela), a snižene na stražnjem delu. Isto se dešava i kod plivajućeg tela, uz napomenu da se ovde promena pritiska ispoljava promenom nivoa vode, njegovim izdizanjem, odnosno spuštanjem.

Za primer uzeće se lopta prečnika D, uronjena za dubinu h (pri mirovanju lopte u mirnoj vodi) – slika 156–31. Lopta se kreće konstantnom brzinom U po tečnosti, koja bi mirovala da je kretanje lopte ne uznemirava. Uz pretpostavku da je lopta usamljena, upravo da nema drugih graničnih uslova, sem same lopte, granični uslovi *Ko*, za takve okolnosti, napisani bezdimenzionalno, svode se na h/D. Ako se uz to zanemari uticaj površinskog napona, što je i opravdano u većini praktičnih primera, izraz (156–29) se svodi na:

$$C_F = C_F\,(Re, Fr, h/D) \qquad (156–30)$$



Slika 156–31 Otpor lopte (ili plivajućeg tela, uopšte) pri kretanju po površini tečnosti ispoljava se povišenjem nivoa ispred i snižavanjem iza tela.

gde su:

$$Re = \frac{U\,D}{\nu} \quad \text{ili} \quad \frac{U\,h}{\nu}$$
$$Fr = \frac{U^2}{g\,D} \quad \text{ili} \quad \frac{U^2}{g\,h}$$

* * *

U razmatranju otpora broda nazaobilazno je Frudovo ime, on je otpočeo sa eksperimentalnim određivanjem otpora broda na modelima, uz primenu zakona sličnosti nazvanom kasnije njegovim imenom. Frudov zakon sličnosti i *Fr*-broj prodrli su u celokupna hidraulička istraživanja, nisu se ograničili samo na otpor broda.

Otpor broda obično se određuje prema Frudovom uputstvu, iskazanom jednačinom (64–2), gde se otpor deli na trenje i preostali (rezidualni) otpor. Prvi deo (trenje) se računa, jer se ne može odrediti modelom (objašnjenje je dato u Odeljku VI Poglavlja 121.). Drugi deo (rezidualni otpor) može se odrediti modelom, jer se pretpostavlja da za njega važi Frudov zakon sličnosti, koji obezbeđuje sličnost za uticaje težine i inercijalne sile.

Razmatranje otpora broda ne treba shvatiti samo kao uvrštavanje primera gde na otpor utiče *Fr*-broj, nego i kao primer gde je uticaj trenja na otpor tela značajan.

Treba primetiti da se, prema uvodnim izlaganjima Poglavlja 155., otpor tela podelio na otpor oblika i otpor trenja. Rezidualni otpor je ustvari navedeni prvi deo, a naziv „rezidualni” za njega je uobičajeni pri razmatranju otpora broda.

Na otpor broda primeniće se opšti izraz za otpor plivajućeg tela, napisan sa (156–29) u kome će se kao i kod (156–30), izostaviti, iz istih razloga, We-broj.

Može se izostaviti i Ko, ako se određuje otpor samo jednog oblika broda (tačnije rečeno, određuje se otpor za sve međusobno slične brodove istog oblika) i ako je taj brod usamljen, tako da nikakvih drugih graničnih uticaja, sem samog broda, nema. Ovo praktično znači da brod plovi po mirnoj tečnosti, dovoljno udaljen od obale i drugih plivajućih tela, i na dovoljnoj dubini, da sve nabrojano ne utiče na otpor broda. U takvim uslovima Ko čini niz bezdimenzionalnih odnosa koji opisuju oblik broda, u geometrijskom smislu, a te su veličine istovetne (Ko = idem) kao svih međusobno sličnih brodova, pa Ko nije promenljivo u (156–29) i stoga otpada.

Izostavljanjem We i Ko izraz (156–29) se svodi na:

$$C_F = C_F\,(Re, Fr) \tag{156–31}$$

Dužina broda L i njegova brzina U uzimaju se za karakteristične veličine pri obrazovanju Re i Fr, pa je:

$$Re = \frac{U\,L}{\nu} \tag{156–32}$$

$$Fr = \frac{U^2}{g\,L} \tag{156–33}$$

gde je ν kinematički koeficijent viskoznosti, a g gravitaciono ubrzanje.

Opisani Frudov postupak ukupni otpor broda F računa kao zbir otpora trenja $F_{\rm tr}$ i rezidualnog $F_{\rm rez}$ kao:

$$F = F_{\rm tr} + F_{\rm rez} \tag{156–34}$$

pa se i koeficijent ukupnog otpora piše kao odgovarajući zbir:

$$C_F = C_{\rm tr} + C_{\rm rez} \tag{156–35}$$

gde su:

$$C_F = \frac{F}{\rho\,U^2\,A_0/2} \tag{156–36}$$

$$C_{\rm tr} = \frac{F_{\rm tr}}{\rho\,U^2\,A_0/2} \tag{156–37}$$

$$C_{\rm rez} = \frac{F_{\rm rez}}{\rho\,U^2\,A_0/2} \tag{156–38}$$

U ovim izrazima U označava brzinu broda, a A_0 uronjenu površinu. Prirodno je da se za trenje za karakterističnu površinu uzima A_0, jer je to površina po kojoj se obavlja trenje. Ovde je A_0 uzeto kao karakteristična površina i za rezidualni otpor, mada bi za njega prirodno bilo da se uzme poprečni presek, kao kod otpora oblika potpuno uronjenog tela. Međutim, uzimanje A_0 stvara mogućnost da se ostvaruje sabiranje dato sa (156–35). Pored toga, kod dobro oblikovanog broda (oblikovan tako da rezidualni otpori budu što je moguće manji) trenje ne samo da nije beznačajno nego je u dobrom delu primera čak veće od rezidualnog otpora. Stoga se rezidualni otpor može obračunati kao ,,dodatno trenje".

Primećuje se da površina A_0 za jedan broj nije konstantna, jer zavisi od toga koliko je brod uronjen, upravo od bruto težine broda, koja se izravnava sa težinom brodom istisnute zapremine vode. Merodavan je otpor pri maksimalnom uronjenju, jer je tada otpor najveći.

Rezidualni otpor ne zavisi od *Re*, ako je turbulencija razvijena (a brzina merodavna za određivanje otpora toliko je velika da se to ostvari), pa C_{rez} zavisi samo od *Fr*. Iz objašnjenja sledi:

$$C_{\text{rez}} = C_{\text{rez}}(Fr) \tag{156–39}$$

Rezidualni otpor plivajućeg tela i otpor oblika potpuno uronjenog tela se razlikuju. Uz plivajuće telo obrazuju se talasi koji stvaraju dobar deo otpora, pa se govori o ,,otporu talasa", dok drugi deo rezidualnog otpora potiče od odvajanja graničnog sloja i obrazovanja vrtložne oblasti. Ovo drugo se dešava i kod potpuno uronjenog tela, gde, međutim, nema otpora talasa. Čelo potpuno uronjenog tela se oblikuje zaobljavanjem, a prednji deo broda (pramac) je izdužen i zaoštren, tako da seče talase.

Navedeno je da se otpor trenja računa, i obično se računa kao trenje uz ravnu ploču, pa koeficijent sile otpora C_F u obrascima za ploču (gde otpor čini samo trenje) treba prihvatiti kao C_{tr} za brod. Treba primeniti neki od obrazaca za glatke ploče, ako se pretpostavi da će se površina broda ponašati kao glatka, pa time C_{tr} zavisi od *Re*. U praktičnim primerima za dužinu broda od $L = 1$ m (na modelu) do $L = 100$ m, i za brzinu v od 1 do 10 m/s, uz kinematički koeficijent viskoznosti, sa zaokruženom vrednošću $\nu = 10^{-6}\,\text{m}^2\text{s}^{-1}$, $Re = UL/\nu$ se nalazi između $Re = 10^6$ i 10^9, pa obrazac (153–34) daje vrednost koeficijenta C_{tr} između 0,0045 i 0,0015. Za površine broda koje će se ponašati kao hrapave primeniće se neki od obrazaca za hrapave ploče, gde koeficijent sile zavisi od relativne hrapavosti k/L. Za apsolutnu hrapavost $k = 1\,\mathrm{mm}$ i dužinu broda $L = 100$ m, k/L je 10^{-5}, pa obrazac (153–51) daje za silu trenja koeficijent C_F, odnosno C_{tr} za brod, približno 0,003. Za veću hrapavost i kraći brod C_{tr} će biće veći.

Mora se primetiti da računanje trenja uz brodsku površinu sa obrascima za ravnu ploču nije tačno, ali greška koja iz toga proizilazi podnošljiva je za račune u praksi.

Koeficijent C_{rez} rezidualnog otpora potiče od eksperimentanog istraživanja na smanjenom modelu, ili na brodu geometrijski sličnom brodu za koji se određuje otpor. Meri se ukupni otpor i od njega se oduzima sračunato trenje, a ono što preostane je preostali ili rezidualni otpor, za koji važi Frudov zakon sličnosti, pa ce funkcija $C_{\mathrm{rez}} = C_{\mathrm{rez}}(Fr)$ prenosi sa modela na objekat. Na C_{rez} se dodaje sračunati C_{tr} za objekat i dobija se koeficijent ukupnog otpora za objekat C_F. Ovaj postupak iskazuje jednačina (64–2).

Koeficijenta rezidualnog otpora C_{rez} zavisi od *Fr*-broja, što je *Fr* veći veći je i C_{rez}. Rezidualni otpor je posledica otpora talasa, veća brzina stvara veću zatalasanost površine vode oko broda, pa plovidba postaje neudobna, može se čak reći i nebezbedna. To nameće ograničenje brzini, a to znači i *Fr*-broja, a onda i C_{rez}, koji neće kod oblikovanog broda preći 0,0025.

Iz prethodnih izlaganja može se zaključiti da će se kod brodova oblikovanih sa svrhom da se postigne što je moguće manji rezidualni otpor može postići da rezidualni otpor bude manji od trenja. Za objekat koji nije oblikovan (ima zatupasto čelo, odvaja se široki vrtložni trag iza objekta – na primer: splav, ponton i slično) trenje ima maleni udeo u ukupnom otporu, preovladava rezidualni deo, zavisan od *Fr*-broja (koeficijent otpora je veći ako je *Fr* veći). Tu je za karakterističnu površinu koja ulazi u koeficijent otpora pogodnije uzeti poprečni presek, što se uzima redovno kod otpora tela, gde preovlađuje otpor oblika. Može se za C_F uzeti $D^{2/3}$ umesto površine A, gde je D je deplasman (brodom istisnuta zapremina vode – istisnina). Eksponent 2/3 uzet je radi dimenzionalne usklađenosti.

157
UTICAJ FLUKTUACIJA U STRUJANJU NA OTPORE TELA, NA POBUĐIVANJE NA VIBRACIJE I NA POJAVU KAVITACIJE

I
UTICAJ TURBULENCIJE NA OTPORE TELA

Uticaj turbulencije na otpor tela u fluidnoj struji ispoljava se fluktuacijama pritiska po površini tela, pa otpor, odnosno opterećenje tela fluidnom strujom, treba razmatrati dodavajući na kroz vreme osrednjenu vrednost pritiska i dodatni trenutni pritisak fluktuacija. Upravo treba računati sa maksimalnom trenutnom vrednošću pritiska tokom fluktuacija. Fluktuacije pritiska bile su tema Poglavlja 113., a tamo je razmatrana i maksimalna vrednost fluktuacionog pritiska p'_{max} koja se preporučuju za računanje opterećenja. Iz toga je proizašao izraz (113–4) koji kaže da se za p'_{max} uzima vrednost koja se dobija množenjem standardne devijacije $\left(\overline{p'^2}\right)^{1/2}$ sa faktorom M, koji se ceni između 3 i 4.

Pritisak na telo zavisi od brzine kojom fluid nailazi na telo, pa je maksimalni pritisak povezan sa maksimalnom trenutnom vrednošću brzine u_{max}, koja se izražava sa dodavanjem na osrednjenu brzinu $\overline{u}$ maksimalne trenutne vrednosti fluktuacionog dodatka u'_{max}. Dakle, treba računati sa:

$$u_{\text{max}} = \overline{u} + u'_{\text{max}} \tag{157–1}$$

Na procenu u'_{max} primeniće se postupak koji je primenjen za procenu p'_{max} i koji je doveo do (113–4), pa se prihvata:

$$u'_{\text{max}} = M\left(\overline{u'^2}\right)^{1/2} \tag{157–2}$$

Prema ovome u'_{max} je srazmeran sa standardnom devijacijom brzine, a faktor M se ceni na 3 do 4, koliko je napisano iza (113–4).

Za procenu uticaja turbulencije može korisno da posluži odnos $u'_{\max}/\overline{u}$ (on meri fluktuacioni maksimalni dodatak brzine u odnosu na osrednjenu). Za njega se, koristeći prethodni izraz, piše:

$$\frac{u'_{\max}}{\overline{u}} = \frac{M\,\left(\overline{u'^2}\right)^{1/2}}{\overline{u}} = M\,I_{\text{turb}} \tag{157–3}$$

Ovde je uveden intenzitet turbulencije:

$$I_{\text{turb}} = \frac{\left(\overline{u'^2}\right)^{1/2}}{\overline{u}} \tag{157–4}$$

koji je jedan od osnovnih pojmova pri proučavanju turbulencije, uveden izrazom (54–6), kao pokazatelj razvijenosti (intenziteta) turbulencije, jer je standardna devijacija pokazatelj intenziteta fluktuacionog odstupanja, a u prethodnom izrazu ona se meri u odnosu na osrednjenu brzinu.

Svojevremeno je objašnjeno da se kao posledica otpora računa $p-p_0$ (p je delujući pritisak, a p_0 neporemećen otporom). Bezdimenzionalna veličina za $p-p_0$ je C_p, prema izrazu (155–6). U komentaru izraza (156–7) rečeno je, da je u jednoj određenoj tački na telu, C_p konstanta (ne menja se sa brzinom), pa je $p-p_0$ srazmerno sa kvadratom brzine, sa u^2 – ostvaruje se kvadratna zakonitost. Za to mora da bude turbulencija razvijena (da je slučaj u području neuticanja Re-broja). Taj uslov je u praktičnim primerima ispunjen, jer su brzine za koje je otpor zanimljiv obično dovoljno velike da bi navedeni uslov bio ispunjen.

Za uticaj turbulencije prikladan pokazatelj je odnos između opterećenja kada se vodi računa o uticaju turbulencije i kada se ne vodi, pa se računa samo sa osrednjenim vrednostima:

$$\frac{(p-p_0)_{\max}}{\overline{p-p_0}} = \frac{u^2_{\max}}{\overline{u}^2} = \left(\frac{\overline{u}+u'_{\max}}{\overline{u}}\right)^2 = \left(1+\frac{u'_{\max}}{\overline{u}}\right)^2 \tag{157–5}$$

Brojitelji u prethodnom izrazu odnose se na maksimalne trenutne vrednosti, a imenitelji na osrednjene. Sem toga, korišćena je već pomenuta kvadratna zakonitost između razlike pritisaka i brzine.

Kao pokazatelj uticaja turbulencije može da posluži navedeni odnos (i za njega se uvodi oznaka φ_{turb}):

$$\varphi_{\text{turb}} = \left(1+\frac{u'_{\max}}{\overline{u}}\right)^2 \tag{157–6}$$

što se korišćenjem (157–3) svodi na:

$$\varphi_{\mathrm{turb}} = (1 + M\, I_{\mathrm{turb}})^2 \tag{157–7}$$

Opterećenje treba računati sa maksimalnim trenutnim pritiscima tj. sa:

$$(p - p_0)_{\max} = \varphi_{\mathrm{turb}}\, (\overline{p - p_0}) \tag{157–8}$$

Ovo je dobijeno korišćenjem (157–5) i (157–6).

Osrednjena razlika $(\overline{p - p_0})$ odnosi se na osrednjenu brzinu, pa se korišćenjem (155–6) dobija :

$$(p - p_0)_{\max} = \varphi_{\mathrm{turb}}\, C_p\, \rho\, \overline{u}^2/2 \tag{157–9}$$

Iz prethodnog izraza se vidi da treba računati sa osrednjenom brzinom $\overline{u}$ i to pomnožiti sa faktorom φ_{turb}, i dobija se maksimalni trenutni pritisak sa kojim treba računati opterećenje.

Glavna svrha razmatranog uticaja turbulencije je ocena njenog uticaja na opterećenje, a to je ocena vrednosti koeficijenta φ_{turb}, napisanog sa (157–6), koji se, shodno (157–7), svodi na procenu intenziteta turbulencije I_{turb}, datog sa (157–4) i faktora M.

Pri ispitivanju otpora tela u opitnom tunelu može se podesiti da je u središnjem delu tunela, gde se stavlja telo, raspored brzine skoro ravnomeran, jer se uticaj trenja o zidove (koji unose neravnomernost brzina) oseća izrazito samo u tankom graničnom sloju uz zid. U središnjem delu turbulencija se ne razvija, jer nema razloga za mešanje delića pošto je brzina skoro ravnomerno raspoređena, ona se ne menja po poprečnom preseku struje.

Uticaj turbulencije je značajan ako na telo nailazi struja sa neravnomernim rasporedom brzina. Kao primer navodi se građevina izložena vetru, gde je trenje o tlo uzrok neravnomernosti, jer je brzina uz tlo jednaka nuli, i raste udaljavanjem od tla. Intenzitet turbulencije zavisi od „hrapavosti" tla – na primer tlo iz koga štrče građevine, ili visoko drveće više uznemirava struju i više razvija turbulenciju od tla bez ikakvih izbočina i neravnina. I kod istog tla intenzitet turbulencije se menja, udaljavanjem od tla se smanjuje, jer uticaj tla slabi.

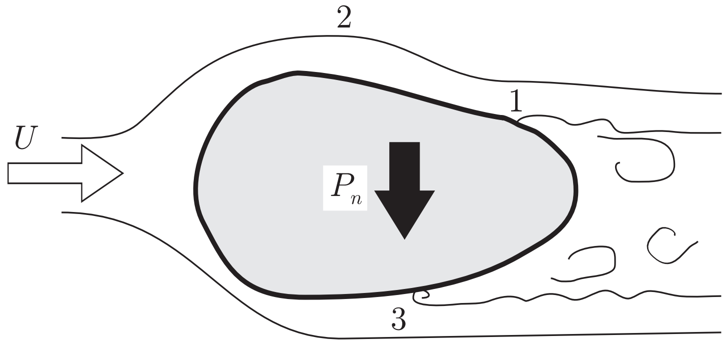
Navodi se da se intenzitet turbulencije I_{turb} u struji vetra kreće od otprilike 0,1 do 0,2. Uzeće se uz to da je faktor M između 3 i 4 – toliko je navedeno i za (157–2). U tim granicama i sa navedenim granicama za

I_{turb}, odnos maksimalnog, fluktuacinog dodatka u odnosu na osrednjenu brzinu, $u'_{\text{max}}/\overline{u}$, prema (157–3), kreće se od 0,3 do 0,8. Za taj odnos (157–6) daje φ_{turb} između 1,7 i 3,2, a toliko puta je veće opterećenje ako se uzme u obzir uticaj turbulencije. Iz ove procene neminovan je zaključak da su turbulentni udari vetra jaki i da značajno povećavaju opterećenje.

Napomena. U prethodnom razmatranju podrazumevalo se da je telo, uslovno rečeno, kruto, što znači da ono svojom deformacijom ne menja strujnu sliku fluida oko sebe. Telo koje se, nasuprot krutom, može nazvati vitko, ne podnosi ,,mirno" dejstvo vetra, ono ,,odgovara", svojim deformacijama (savijanjem, ugibanjem) i menja granične uslove, a to menja strujnu sliku, pa menja silu otpora. Dolazi do interakcije, fluid – telo, vetar deformiše telo, pa time menja strujnu sliku i zadatak nije više zadatak same ,,Mehanike fluida", nego složen zadatak u koji ulaze i oblasti ,,Teorije elastičnsti" i ,,Dinamike konstrukcija".

II
POBUĐIVANJE NA VIBRACIJE KAO POSLEDICA FLUKTUACIJA PRITISAKA NA TELO

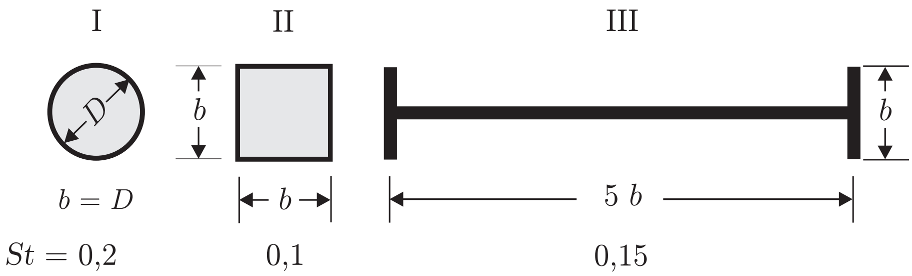
U Poglavlju 155., uz slike 155–3 i 155–4, objašnjeno je da se iza mesta maksimalnog poprečnog preseka brzina smerom strujanja smanjuje, a onda se pritisak povećava, čime se koči opstrujavanje, pa se prizidni delići nagone na povratno strujanje – začinje se vrtlog. On raste i ometa strujanje, pa je struja prisiljena da ga otkine i dolazi do odvajanja struje od tela. Pri rašćenju vrtlog se pomera unazad, pomerajući sa sobom i tačku odvajanja. Pošto je vrtlog otkinut, granični sloj dobija mogućnost da prodire unapred, i time pomera i tačku odvajanja sve do mesta gde će se začeti novi vrtlog, a to je mesto gde je začet i prethodni. I ovaj novi raste da bi se sa njim desilo kao sa prethodnim. To je periodična pojava. Treba se prisetiti ranijeg objašnjenja, takođe u Poglavlju 155., da se u vrtložni trag prenosi otprilike pritisak sa mesta odvajanja, i što je mesto odvajanja više pomereno unatrag pritisak na telo iz vrtložnog traga je niži (jer je brzina na mestu odvajanja veća), odnosno sila uvlačenja (usisavanja) tela je veća.



Slika 157–1 Asimetrični položaj tačaka odvajanja – (1) i (3) – dovodi do poprečne sile (P_n), jer istovremeni pritisci sa jedne strane nisu jednaki onima sa druge.

Prethodno izlaganje poslužiće u razmatranju primera sa slike 157–1. Strujanje je ravansko. Na jednoj strani tela (gornjoj, na slici) vrtlog se začinje u tački ,,1" i rastući se pomera do tačke ,,2", gde će biti otkinut. Pomeranje vrtloga znači i pomeranje tačke odvajanja, pa, shodno objašnjenom, sila koja uvlači (usisava) telo sa te strane se povećava, jer je odvajanje pri sve većoj brzini i sve sniženijim pritiskom. Po otkidanju vrtloga, u ,,2", granični sloj prodire unapred, sve do ,,1", gde se začinje novi vrtlog, sa kojim će se desiti isto kao sa prethodnim. Pri tome se i tačka odvajanja pomera od ,,2" do ,,1", pa je odvajanje pri sve manjoj brzini i onda se sila uvlačenja smanjuje. Opisano dopušta da se zaključi da se sila uvlačenja na tu stranu povećava, pa se smanjuje, pa se opet povećava ...

Sa druge strane tela (donje, na slici) dešava se isto, ali vremenski pomereno, jer strujanje u jednom trenutku nije simetrično, u odnosu na podužnu osovinu tela. Na slici 157–1 položaj odvajanja ,,1" i ,,3" odnosi se na isti trenutak, u kome je sila uvlačenja tela sa gornje strane manja od one sa donje, jer su iza ,,3" pritisci iz vrtložnog traga niži od pritisaka na gornju stranu, gde do odvajanja još nije došlo. Posle izvesnog vremena, stanje će biti obrnuto, ono što je bilo na gornjoj strani biće na donjoj, pa će sila sa gornje strane biti manja. Prema tome, rezultujuća poprečna sila na telo (razlika između sile sa jedne i sa druge strane) naizmenično menja smer, i ta pojava je periodična.



Slika 157–2 Struhalovi brojevi (St) za tri preseka tela u ravanskom strujanju.

Treba primetiti da je naizmenično i periodično menjanje smera poprečne sile obrazloženo pomeranjem tačke odvajanja i otkidanja vrtloga. Ako je telo oštroivično (kao telo ,,II", na slici 157–2), mesto odvajanja se ne pomera, jer oblik tela nameće da to bude ivica čela tela, koja odbacuje struju od tela, i tu počinje vrtložna oblast. Vrtlozi se otkidaju od tela uz periodičnu promenu brzine otkidanja (pa onda i pritiska), ali ne istovremeno sa obe strane, pa poprečna sila kroz vreme periodično menja smer.

Periodičnost se utvrđuje na način naveden na samom kraju Poglavlja 113. za rezultujuću silu na stub sa slike 113–5, takođe obostrano izložen pritisku, baš kao i telo ovde prikazano na slici 157–1. Naime, ako postoji periodičnost, ona mora da se ispolji sa dominatnom učestanošću n_c u spektru gustine učestanosti. Dominatnoj učestanosti n_c odgovara perioda $\tau_\mathrm{c} = n_\mathrm{c}^{-1}$. (Ovo je načelno prikazano na slici 54–5.) Ako se sopstvena učestalost (frekvencija) tela podudara sa učestalosti n_c telo je pobuđeno na vibracije.

Periodičnost se i uočava posmatranjem otkidanja vrtloga sa tela u otvorenom toku (na primer, mostovski stub).

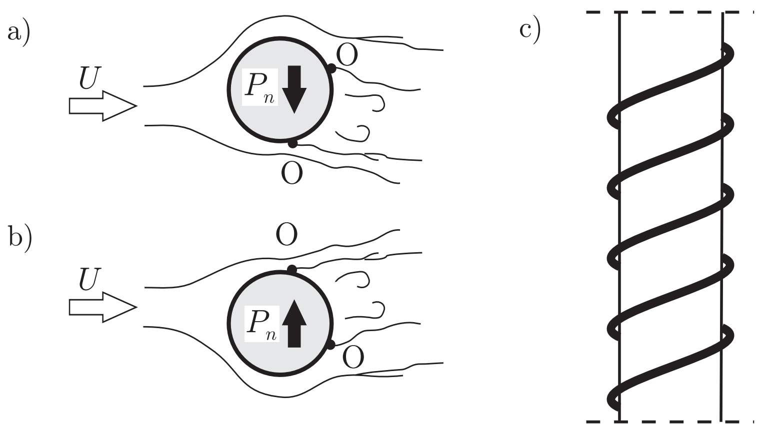
Dominantna učestanost n_c zavisi od nailazeće brzine U i karakteristične dužine b, merene po poprečnom preseku tela, pa se veza tri navedene dimenzionalne veličine svodi na jednu bezdimenzionalnu:

$$\frac{n_\mathrm{c}\, b}{U} = St \tag{157–10}$$

Ova bezdimenzionalna veličina St poznata je pod imenom Struhalov broj (*STROUHAL*). On je konstanta za sva tela istog geometrijskog bezdimenzionalnog opisa (Ko = idem). Na slici 157–2 data su tri primera. Napominje se da konstantnost St-broja za određeno telo važi ako nema drugih veličina, sem b i U, koje utiču na učestalost. To znači da je zanemarljivo uticanje viskoznosti, odnosno Re-broja.

Ravansko strujanje oko cilindra (slika 157–3) u dva vremenska trenutka (na koje se odnose crteži „a" i „b") nije istovetno i razlikuje se trenutni položaji tačaka odvajanja (koje su označene sa „O"). Pošto su promene periodične, iza stanja prikazanog sa „a" doći će „b" pa opet „a" itd. Shodno datim objašnjenjima, poprečna sila P_n je usmerena ka onoj strani gde je tačka odvajanja bliže čelu tela (jer su sa te strane pritici niži). Iz toga su proizašli smerovi sile prikazani na slici. Istovremeno stanje duž celog cilindra je istovetno i to stvara silu na cilindar koja naizmenično menja smer (osciluje) i pobuđuje ga na vibracije. Da se to spreči namota se oko cilindra „loza" (crtež „c") koja poremeti strujanje tako da duž cilindra istovremeni pritisci nisu isti, pa nema pravilnosti koja bi proizvodila silu na cilindar, koja osciluje periodično menjajući smer.

Telo III, na slici 157–2, može takođe da bude pobuđeno na vibracije poprečnom silom, koja je i ovde posledica neujednačenosti istovremenih



Slika 157–3 Strujanja oko cilindra: a) i b) se odnose na dva trenutka ravanskog strujanja oko cilindra. Poprečna sila (P_n) menja smer usled pomeranja tačaka odvajanja (,,O"). c) Pobuđivanje oscilacija sprečava ,,loza" oko stuba, koja remeti uspostavljanje istovremenih pritisaka duž stuba, koji bi dovodili do oscilacija sile na stub.

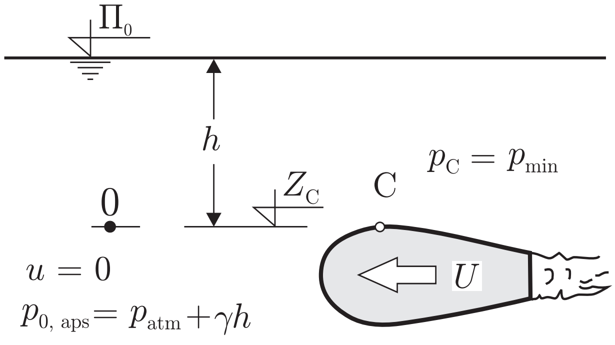
pritisaka sa obe strane rebra. Za smanjivanje razlika u pritiscima (čime se poprečna sila smanjuje) mogu da posluže otvori u rebru kroz koje će fluid strujati sa jedne strane rebra gde je pritisak veći na drugu stranu gde je manji i tako smanjivati tu razliku pritisaka, pa onda i poprečnu silu.

III
O POJAVI KAVITACIJE NA POVRŠINI TELA KOJE SE KREĆE KROZ FLUIDNU SREDINU

Kavitacija je bila tema Poglavlja 112. Tamo je objašnjeno da se ona javlja kada se apsolutni pritisak unutar strujanja spusti na pritisak isparavanja p_{ev}. Tada voda isparava i stvaraju se mehurići vodene pare koji ometaju strujanje, a čije kasnije sabijanje ima razorno dejstvo na zidove provodnika.

Za telo u tečnosti mogućnosti za pojavu kavitacije su najveće tamo gde je pritisak najniži – za osnosimetrično telo, uzeto za primer (slika 157–4), to je u tački obeleženoj sa „C", gde je brzina opstrujavanja najveća, a pritisak onda najniži.

Pretpostavlja se da se telo kreće konstantnom brzinom U kroz fluidnu sredinu, koja je poremećena samo otporom tela, i izuzevši područje oko tela, ona se može smatrati mirnom sredinom sa konstantnom pijezometarskom kotom Π_0.



Slika 157–4 Telo se brzinom (U) kreće kroz mirnu vodu. Najugroženije mesto za pojavu kavitacije je tačka ,,C" gde je pritisak minimalan.

Primenom jednačine (155–6) za koeficijent pritiska C_p u tački „C" se piše:

$$C_{p,\,\mathrm{C}} = \frac{p_{\mathrm{C}} - p_0}{\rho\, U^2/2} \tag{157–11}$$

gde je p_{C} pritisak u tački „C", a p_0 pritisak ispred tela u neporemećenoj sredini, a na istoj koti na kojoj se nalazi tačka „C" (na koti obeleženoj na slici sa Z_{C}).

Tačka „C" izabrana je tako da je u njoj minimalan pritisak, pa je:

$$C_{p,\,\mathrm{C}} = C_{p,\,\mathrm{min}} \tag{157–12}$$

Napominje se da je u jednačini (156–7) napisano (i objašnjeno) da je koeficijent pritiska C_p za jednu određenu tačku konstanta (nezavisna od brzine), a tako je, naravno, i za tačku „C". Ovo važi ako je turbulencija razvijena, ako je uticaj Re-broja zanemarljiv, a pri pojavi kavitacije brzine su dovoljno velike da je to ispunjeno.

Nadalje, uzeće se da je u tački „C" apsolutni pritisak jednak pritisku isparavanja p_{ev}:

$$p_{\mathrm{C,\,aps}} = p_{\mathrm{ev}} \tag{157–13}$$

jer je to granica kojom se dostiže mogućnost pojave kavitacije.

Pošto je za p_{C} uzet apsolutni pritisak, mora se uzeti i:

$$p_{0,\,\mathrm{aps}} = p_{\mathrm{atm}} + p_0 = p_{\mathrm{atm}} + \gamma\,(\Pi_0 - Z_{\mathrm{C}}) \tag{157–14}$$

gde je p_0 pritisak kako se on uobičajeno računa, Π_0 je pijezometarska kota u neporemećenoj sredini, Z_{C} je kota na kojoj je tačka „C", a γ specifična težina vode (za prikazano na slici 157–4, $\Pi_0 - Z_{\mathrm{C}} = h$).

Napisaće se u jednačini (157–11) za razliku pritisaka $p_{\mathrm{C,\,aps}} - p_{0,\,\mathrm{aps}}$ uz $p_{\mathrm{C,\,aps}} = p_{\mathrm{ev}}$, kako je uslovljeno sa (157–13). Koristiće se i (157–12). Staviće se $U = U_{\mathrm{cr}}$, gde se indeksom „cr" ukazuje da je to kritična, ili granična brzina, koja dovodi do p_{ev} u tački „C", što znači da brzina U ne sme da pređe tu vrednost, ako se isključuje mogućnost pojave kavitacije. Primenom svega navedenoga, jednačina (157–11) se svodi na:

$$\frac{p_{0,\,\mathrm{aps}} - p_{\mathrm{ev}}}{\rho\, U_{\mathrm{cr}}^2/2} = -C_{p,\,\mathrm{min}} \tag{157–15}$$

Za jedno telo tačkom „C" je potpuno određeno $C_{p,\,\mathrm{min}}$, pa je za zadati pritisak ispred tela $p_{0,\,\mathrm{aps}}$ određena i granična brzina za pojavu kavitacije U_{cr}.

Prethodno izloženome može se staviti ozbiljna zamerka. Nije uzet u obzir uticaj turbulencije, pa su sve upisane veličine osrednjene. Pritisak ispred tela p_0 ne fluktuiše, jer je voda mirna, ali fluktuiše pritisak p_C u tački na telu, a vođenje računa o uticaju fluktuacija nameće zahtev da trenutni minimalni pritisak, tokom fluktuacija, bude pritisak isparavanja p_ev. Jednačina (157–15) se odnosi na osrednjeni pritisak, a on, shodno navedenom treba da bude viši od p_ev, za onoliko koliko iznosi najveće spuštanje pritiska tokom fluktuacija. Treba u (157–15) umesto p_ev staviti $p_\mathrm{ev} - p_{\mathrm{min}'}$, gde je $-p_{\mathrm{min}'}$ fluktuacioni dodatak za najveće spuštanje. Dodavanjem $p_{\mathrm{min}'}$ pritisak se povećao, a to se i zahteva, jer je $p_{\mathrm{min}'} < 0$. (Naime fluktuacioni dodatak $p_{\mathrm{min}'}$ je negativan za trenutni pritisak niži od osrednjenoga.)

Navedeno nameće da se brojitelj u (157–15) zameni sa:

$$p_{0,\,\mathrm{aps}} - (p_\mathrm{ev} - p_{\mathrm{min}'}) = (p_{0,\,\mathrm{aps}} - p_\mathrm{ev})\left(1 + \frac{p_{\mathrm{min}'}}{p_{0,\,\mathrm{aps}} - p_\mathrm{ev}}\right) = \\ = (p_{0,\,\mathrm{aps}} - p_\mathrm{ev})\,\varphi_\mathrm{turb} \qquad (157\text{–}16)$$

Ovde je uveden faktor uticaja turbulencije:

$$\varphi_\mathrm{turb} = 1 + \frac{p_{\mathrm{min}'}}{p_{0,\,\mathrm{aps}} - p_\mathrm{ev}} \qquad (157\text{–}17)$$

Faktor uticaja turbulencije, napisan u Odeljku I, sa (157–6), prilagođen tamošnjem zadatku, ima istu svrhu kao ovdašnji, da posluži kao pokazatelj uticaja turbulencije. U oba slučaja u njega ulazi odnos ekstremne vrednosti karakteristične fluktuacione veličine (tamo – brzine, a ovde – pritiska) prema osrednjenoj. Napominje se da je tamo, u (157–6), $\varphi_\mathrm{turb} > 1$, a ovde je $\varphi_\mathrm{turb} < 1$, jer je $p_{\mathrm{min}'} < 0$.

Zamenom brojitelja, u (157–15) sa (157–16), dolazi se do:

$$\frac{p_{0,\,\mathrm{aps}} - p_\mathrm{ev}}{\rho\, U_\mathrm{cr}^2/2}\,\varphi_\mathrm{turb} = -\,C_{p,\,\mathrm{min}} \qquad (157\text{–}18)$$

Uvodi se koeficijent kavitacije:

$$C_\mathrm{ca} = \frac{p_{0,\,\mathrm{aps}} - p_\mathrm{ev}}{\rho\, U_\mathrm{cr}^2/2} \qquad (157\text{–}19)$$

koji je veoma pogodan za praktičnu upotrebu, jer povezuje zadate veličine p_0 i p_{ev} sa kritičnom brzinom U_{cr}. Upoređenjem (157–18) i (157–19) vidi se da je:

$$C_{ca} = -\frac{C_{p,\,\min}}{\varphi_{turb}} \tag{157–20}$$

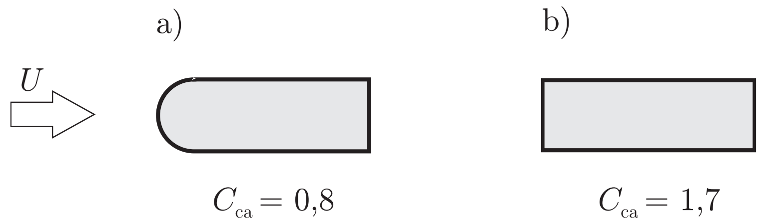
Obično se eksperimentalnim putem odredi C_{ca} neposredno iz izmerene brzine U_{cr} i razlike pritisaka $p_0 - p_{ev}$, bez ulaženja u to koliko tome doprinosi $C_{p,\,\min}$, a koliko φ_{turb}. Prema načelima sličnosti vrednost za φ_{turb} važi za sva geometrijski slična tela.

Koeficijent kavitacije često se naziva „Kavitacioni broj”, jer brojevima se obično nazivaju standardne bezdimenzionalne veličine – na primer: Rejnoldsov broj, Frudov broj ...

Iz (157–19) sledi:

$$U_{cr} = \sqrt{2\,\frac{p_{0,\,aps} - p_{ev}}{\rho\, C_{ca}}} \tag{157–21}$$

U Poglavlju 112., izrazom (112–20), napisan je koeficijent kavitacije, prilagođen tamošnjem zadatku. Poznavanje njegove vrednosti rešava zadatak, jer račun njime dovodi do rešenja u kome neće doći do kavitacije.



Slika 157–5 Koeficijent kavitacije (C_{ca}) za cilindrično osnosimetrično telo: a) sa poluloptastim čelom i b) sa ravnim oštroivičnim čelom.

Za primer „a” sa slike 157–5 (osnosimetrično cilindrično telo, sa osovinom u pravcu strujanja i čelom zaobljenim u obliku polulopte) navodi se da je približno $C_{ca} = 0{,}8$, dok je za telo „b” (isto telo, ali sa oštroivičnim čelom, bez zaobljenja) C_{ca} mnogo veće i približno iznosi 1,7. Ovo ukazuje da oblikovanje tela doprinosi ne samo smanjenju otpora nego i smanjenju mogućnosti pojave kavitacije. Za navedeni primer kritična brzina je $\sqrt{1{,}7/0{,}8} = 1{,}45$ puta veća za zaobljeno čelo u odnosu na oštroivično.

Za uronjeno telo, sa dubinom uranjanja h (vidi sliku 157–4), $p_{0,\,\mathrm{aps}}$ je jednako $p_{\mathrm{atm}} + \gamma\, h$, pa se (157–21) dovodi na:

$$U_{\mathrm{cr}} = \sqrt{\frac{2g}{C_{\mathrm{ca}}}\left(h + \frac{p_{\mathrm{atm}} - p_{\mathrm{ev}}}{\gamma}\right)} \tag{157–22}$$

Da bi se stekao uvid u brzine U_{cr} za prikazani primer uzeće se da je $h = 5$ m, da je p_{atm}/γ otprilike 10 m, a može se zanemariti p_{ev} u odnosu na p_{atm}. Sa takvim podacima, i za $C_{\mathrm{ca}} = 0{,}8$, odnosno 1,7, dobija se da je U_{cr} približno 19 m/s, odnosno 13 m/s.

158
O EKSPERIMENTALNIM ISTRAŽIVANJIMA OTPORA TELA

U istraživanju otpora tela mogu se dobrim delom koristiti izlaganja iz Dvanaestog dela, pa će se ovde dati samo kratak osvrt na osobenosti vezane za otpor tela. Za otpore tela potopuno uronjenog u fluid, čija se gustina može smatrati konstantnom, važi zavisnost napisana sa (156–3). Prema njoj, otpor tela, izražen bezdimenzionalno sa koeficijentom C_F, zavisi od graničnih uslova napisanih bezdimenzionalnim veličinama (što ulazi u Ko) i od Re-broja. Dakle, zahteva se sličnost za granične uslove i Rejnoldsova sličnost, da bi se rezultati sa modela mogli prenositi na sa njim slične objekte.

Za usamljeno telo u ravnomernoj fluidnoj struji (takve okolnosti se se odnose na primere izložene u Poglavlju 156.) usamljenost se postiže stavljanjem tela u središnji deo eksperimentalnog tunela znatno većeg preseka od preseka tela. Usled trenja o zidove, stvara se neravnomernost (jer je uz zid brzina jednaka nuli), ali se izrazito oseća samo u tankom graničnom sloju uz zid, a do središnjeg dela tunela taj uticaj dopire zanemarljivo.

Ako telo nije usamljeno, sem samog tela, na njegov otpor utiču i druge granične površine, uključujući i susedna tela. Ako na telo ne nailazi ravnomerna struja, nastoji se da se modeliše raspored brzina koji zahteva postizanje sličnosti sa rasporedom brzina na objektu.

U granične uslove ulaze ne samo oblik graničnih površina nego i njihova hrapavost. Postizanje sličnosti za oblik ostvaruje se bez ikakvih teškoća, dok je sličnost za hrapavost u većini praktičnih primera nemoguće postići – to je objašnjeno u Odeljku VI Poglavlja 121., i može se preneti i na modelisanje otpora tela.

I na modelu i na objektu deluje hrapavost, a nepostizanje sličnosti pokazuje se u razlici između onoga što daje stvarna hrapavost na modelu i onoga koja bi dala hrapavost prema zahtevima sličnosti. U dobrom delu prikazanih primera ta razlika utiče zanemarljivo u odnosu na uticaj oblika. Ako je uticaj trenja značajan pribegava se računanju trenja za model i za objekat, pa se rezultati toga računa unose u prenošenje rezultata sa modela na objekat – najbolji primer za to je otpor broda (Poglavlje 156., Odeljak VII).

Navedeno je da se zahteva postizanje Rejnoldsove sličnosti, pa se treba podsetiti da je u početku Odeljka III, Poglavlja 121., obašnjeno da je u praktičnim primerima teško ostvariti postizanje te sličnosti. Ali tamo je, za utehu, dodato da viskoznost ne utiče na osrednjene vrednosti hidromehaničkih veličina (a one su za praktične potrebe najzanimljivije), ako je turbulencija razvijena (upravo, ako je toliko razvijena da se to postigne). Neuticanje viskoznosti znači da nije nužno postizanje Rejnoldsove sličnosti. To znači izostavljanje Re-broja u (156–3), pa je $C_F = C_F(Ko)$, a za tela istog oblika, gde je $Ko =$ idem, to se svodi na $C_F =$ const, kako je i napisano sa (156–5). Tu se ostvaruje kvadratna zakonitost otpora – gde je on srazmeran kvadratu brzine.

Konstantnost koeficijenta C_F znači njegovu nezavisnost od brzine, pa eksperimentalno utvrđena vrednost C_F za jednu brzinu važi za sve brzine. Razume se da ovo važi uslovno, ako se ušlo u područje neuticanja Re-broja, upravo ako se prešla vrednost toga broja iznad koje se to ostvaruje. U istraživanjima će se primetiti kada se to ostvaruje, kada se C_F neće menjati sa povećanjem brzine.

Treba primetiti da konstantnost C_F važi za sve međusobno slične objekte, ako se u svima ušlo u područje neuticanja Re-broja (ako je turbulencija toliko razvijena da se to ostvari). Iz ovoga sledi upozorenje da se sa malenog modela, gde su brzine malene, gde je Re-broj nedovoljno veliki da se to ostvari, ne mogu prenositi rezultati na veći objekat, gde je Re-broj veći. Praktično uputstvo ukazuje da treba izbegavati isuviše malene modele.

Izrazom (156–7), koji se odnosi na područje neuticanja Re-broja, za koeficijenat pritiska napisano je $C_{p,\,i} =$ const, i ova vrednost važi, nezavisno od brzine, za tačku „i" i to ne samo na modelu nego i na svim sličnim objektima, za odgovarajuću tačku (po načelu sličnosti).

Razmera za silu F_* određena je razmerama za gustinu, dužinu i brzinu (ρ_*, L_*, U_*). U izrazu (156–1) obe strane su bezdimenzionalne veličine i razmera za njih je jedinica, pa je:

$$\left(\frac{F}{\rho\, A\, U^2}\right)_* = 1 \qquad (158\text{–}1)$$

iz čega, posle zamene A_* sa L_*^2, sledi:

$$F_* = \rho_*\, L_*\, U_*^2 \qquad (158\text{–}2)$$

Ovo pokazuje da se može dobiti razmera za sile proizvoljnim izborom razmera za gustinu, dužinu i brzinu. Dobijena jednačina važi za područje neuticanja *Re*-broja, a da bi se ušlo u to područje ne mogu biti navedene razmere potpuno proizvoljne, jer njihov izbor ne sme dovesti na modelu do malenih brzina i dužina, odnosno do malenih vrednosti *Re*-broja, pa bi se ušlo u područje uticanja toga broja.

Ako se želi postizanje Rejnoldsove sličnosti, mora biti ispunjen uslov (121–1), a objašnjeno je da je njegovo zadovoljenje u praktičnim uslovima obično nemoguće.

Za otpore plivajućih tela mora biti zadovoljena Frudova sličnost, koja zahteva ispunjavanje napisanog sa (64–1), i ponovljeno sa (121–6), a to je da je $U_*^2 = L_*$. Ovo je za praktičnu primenu povoljno, jer što je model manji brzine su manje. Ako se napisani uslov uvrsti u (158–2) dobija se:

$$F_* = \rho_*\, L_*^3 \qquad (158\text{–}3)$$

a to znači razmeru koja zahteva i sličnost za težinu.

LITERATURA

Агроскин И., Димитриев Г., Пиколов, Ф., *Гидравлика*, Ленинград, 1964.

Chow V. T., *Open-Channel Hydraulics*, New York, 1959.

Comolet R., *Mécanique expérimentale des fluides*, Paris, 1963.

Чертоусов М., *Гидравлика*, Москва, 1962.

De Marchi G., *Idraulica*, Milano, 1942.

Hajdin G., *Mehanika fluida – knjiga prva – Osnove*, Beograd, 2002.

Hajdin G., *Mehanika fluida – knjiga druga – Uvođenje u hidrauliku*, Beograd, 2002.

Henderson F. M., *Open Channel Flow*, New York, 1966.

Hinze J., *Turbulence*, New York–London, 1959.

Jovanović, M., *Regulacija reka – Rečna hidraulika i morfologija,* Beograd, 2008.

Ландау Л., Лифшиц Е., *Механика сплошных сред*, Москва, 1954.

Латышенков А., Лобачев В., *Гидравлика*, Москва, 1956.

Лоицянский Л., *Механика жидкости и газа*, Москва, 1970.

Prager W., *An Introduction to Mechanics of Continua*, New York, 1961.

Prandtl L., *Führer durch Strömungslehre*, Braunschweig, 1948.

Rouse H., *Advanced Mechanics of Fluids*, New York, 1959.

Rouse H., *Hydraulics, Mechanics of Fluids – Engineering Education*, New York, 1971.

Rouse H., Ince S., *Hystory of Hydraulics*, Iowa City, 1957.

Schlag A., *Hydraulique générale*, Paris, 1957.

Schlichting H., *Grenzschicht–Theorie*, Karlsruhe, 1951.

Streeter V., *Fluid Mechanics*, New York–London, 1957.