

Georgije Hajdin

MEHANIKA FLUIDA

knjiga druga

UVOĐENJE
U
HIDRAULIKU

IZDAVAČ
2001

DRAFT verzija 2001.

Georgije Hajdin
MEHANIKA FLUIDA
knjiga druga
UVOĐENJE U HIDRAULIKU

Recenzenti
Čedo Maksimović
Marko Ivetić

Izdavač
Izdavač

Za izdavača
Direktor

Štampa i povez
Štamparija

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

Хајдин, Георгије

...

Tiraž 12345

ISBN 12345

DRAFT verzija 2001.

SADRŽAJ

Uvodne napomene	vii
Spisak oznaka	x
Deo sedmi: Hidrostatika ili mirovanje fluida konstantne gustine, pod uticajem težine	1
71 Osnovni pojmovi i osnovna jednačina hidrostatike	2
72 Hidrostatičke sile na čvrste granične površine	10
I Horizontalna i vertikalna komponenta hidrostatičke sile . .	10
II Hidrostatičke sile na ravne površine	16
III Ravanski zadaci	22
IV Sile pritiska gasa na zidove zatvorenog suda	24
Deo osmi: Osnove za proučavanje ustaljenih tečenja upoređujući stanja u dva poprečna preseka toka	27
81 Pretpostavke i uslovi	28
82 Dinamička jednačina ili jednačina o količini kretanja	41
83 Jednačina mehaničke energije	52
84 Kritički osvrt i dopunska objašnjavaanja na izlaganja u Poglavlju 82	71
85 Kritički osvrt i dopunska objašnjavaanja na izlaganja u Poglavlju 83	85
Deo deveti: Dugački objekti – proučavanje tečenja pod isključivim uticajem trenja, bez lokalnih poremećaja	109
91 Osnove za rešavanje praktičnih zadataka jednolikih struja	110
92 Osnove za proučavanje nejednolikih kontinualnih struja	123
I Opšta razmatranja	123
II Nejednoliko tečenje u otvorenim tokovima	128
93 Laminarne jednolike struje: ravanska (između dve paralelne ploče) i osnosimetrična (u kružnoj cevi)	148
I Jednolika laminarna ravanska struja (između dve paralelne ploče)	148

	II	Jednolika laminarna osnosimetrična struja (u kružnoj cevi)	162
	III	Primena dimenzionalne analize na laminarne jednolike struje	165
94		Određivanje rasporeda napona i uvođenje logaritamske zakonitosti za raspored brzina u turbulentnoj ravanskoj ili osnosimetričnoj struji	168
	I	Raspored napona	168
	II	Uvođenje logaritamske zakonitosti za raspored brzina . . .	174
	III	Granični uticaji na raspored brzina: glatki i hrapavi zid . .	177
	IV	Logaritamske zakonitosti rasporeda brzina u glatkom i u hrapavom provodniku	181
	V	Podela turbulentnog sloja na prizidni i udaljeni deo; posebna zakonitost rasporeda brzina za udaljeni deo	191
95		Dodatna obrazloženja za logaritamsku zakonitost rasporeda brzina	196
	I	Rasporedi brzina koji proizilaze iz pretpostavke o dužini mešanja	196
	II	Primena dimenzionalne analize na raspored brzina	203
	III	Završna razmatranja o logaritamskoj zakonitosti rasporeda brzina	206
96		Logaritamske zakonitosti za otpore trenja u cevima	210
	I	Posebni obrasci za otpore trenja u glatkoj i u hrapavoj cevi	210
	II	Primena dimenzionalne analize na otpore trenja u cevi; eksperimentalni rezultati sa jednolikom peščanom hrapavosti	215
	III	Otpori trenja u cevima u praktičnoj upotrebi	221
	IV	Uticaj otpora trenja na raspored brzina	227
97		Eksponencijalne zakonitosti za raspored brzina i za otpor trenja	231
	I	Raspored brzina	231
	II	Otpori trenja	236
98		Energetske promene u jednolikoj struji	244
	I	Energetske promene u zapremini između dva poprečna preseka struje, posmatranoj kao celina	244
	II	Raspored „rada napona” turbulencije po poprečnom preseku struje	245

	III	Izmena energije u fluktuacijama po poprečnom preseku struje	251
	IV	Raspored po poprečnom preseku struje veličina koje ukazuju na razvijenost turbulencije	258
99		Glavna pitanja pri određivanju otpora trenja u hidrotehničkoj praksi, sa posebnim osvrtom na uticaj hrapavosti	266
	I	Tri glavna pitanja pri određivanju otpora trenja u hidrotehničkoj praksi	266
	II	Pregled iskustvenih formula za određivanje otpora trenja	274
		Deo deseti: Kratki objekti – lokalne promene u strujanju	301
101		O lokalnim gubicima energije u cevima – opšta razmatranja	303
	I	Izražavanje gubitka energije u lokalnom poremećaju struje u cevi; uključivanje toga gubitka u energetske obračun struje	303
	II	Primena dimenzionalne analize na određivanje lokalnog gubitka u cevi	312
	III	Osvrt na promene pritisaka i brzina u području lokalnog poremećaja	318
	IV	Određivanje sile kojom čvrsta granica deluje na fluid u području lokalnog poremećaja struje	322
102		Lokalni gubici u cevima pri promeni preseka, pri promeni pravca tečenja, na spajanju i razdvajanju cevi i na zatvaračima	333
	I	Promena poprečnog preseka cevi	333
	II	Promena pravca strujanja u cevi – krivina, koleno	356
	III	Spajanje i razdvajanje cevi	362
	IV	Zatvarači	371
	V	Učešće lokalnih gubitaka u ukupnim gubicima u cevima – odnos lokalnih gubitaka i gubitaka usled trenja	374
103		Određivanje proticaja merenjem jedne pijezometarske razlike	380
	I	Dijafragma	380
	II	Venturijev vodomernik	394
	III	Kratak osvrt na različite mogućnosti određivanja proticaja merenjem jedne pijezometarske razlike	405
104		Prelaz iz mirnog u burno tečenje – hidraulički skok	408
	I	Opšta razmatranja	408
	II	Hidraulički skok u kanalu pravougaonog preseka	421
	III	Primena hidrauličkog skoka u praktičnim zadacima	428

105	Lokalne pojave u tečenju izazvane promenom poprečnog preseka kanala	440
	I Lokalni gubici energije u otvorenim tokovima – opšta razmatranja	440
	II Spajanje tokova pri lokalnim povećanjima, ili smanjivanjima poprečnog preseka kanala	444
	III Uspostavljanje minimuma energije pri tečenju preko širokog praga	467
	IV Suženja, pragovi i prepreke u otvorenim tokovima	473
	V Kratak osvrt na lokalne promene u krivini i na spajanju kanala	486
	VI Suženje namenjeno određivanju proticaja merenjem dubine ispred suženja	488
106	Prelivanje	496
	I Ravansko nepotopljeno prelivanje preko širokog praga, tankozidnog oštroičnog preliva i prelivne brane	496
	II Potopljeno ravansko prelivanje	514
	III Sužavanje prelivnog mlaza	518
	IV Trougaoni preliv	523
	V Primena dimenzionalne analize	527
107	Isticanje	537
	I Isticanje iz suda	537
	II Isticanje ispod ustave	547
	III Primena dimenzionalne analize	557
108	Izmena energije između fluida i čvrste pokretne granice – hidrauličke mašine	561
	Literatura	565
	Prilog 1: Vrednosti Maningovog koeficijenta hrapavosti	566
	Prilog 2: Pregled rasporeda brzina i koeficijenata trenja	568
	Prilog 3: Vrednosti veličina koje određuju fizičke karakteristike vode	570

UVODNE NAPOMENE

Ova knjiga se može shvatiti kao nastavak Prve knjige „Mehanike fluida”, koja je nazvana „OSNOVE”. Brojevi delova i poglavlja se nastavlja, pa ova knjiga počinje sa sedmim delom, odnosno Poglavljem 71. U tekstu će se često pozivati na izlaganja iz Prve knjige.

Kako je ova knjiga usmerena ka osnovnim praktičnim zadacima iz Hidraulike, ona nosi naslov „UVOĐENJE U HIDRAULIKU”. Reč „Hidraulika” je složenica od grčkih reči koje znače „voda” i „cev” i pod tim pojmom se kod nas podrazumeva „Primenjena hidromehanika”, upravo znanja koja omogućavaju rešavanje praktičnih zadataka iz tečenja vode. Na to i navodi naslov koji podseća da se pažnja posvećuje vodi u cevi (a može i u kanalu i reci), a to su i prvi zadaci kojima se Hidraulika bavila. (Napominje se da se ponegde u svetu pod pojmom „hidraulika” podrazumeva ono što mi zovemo „hidrotehnika”.)

Sve do ovoga veka „Hidraulika” se uglavnom razvijala odvojeno od „Hidromehanike”. Tehnička praksa morala je da rešava zadatke iz tečenja vode u cevima, kanalima i rekama, tu se razvijala „Hidraulika”, sređivanjem iskustvenih saznanja iz kojih su proizlazili obrasci (formule) za računanje (za određivanje potrebnih dimenzija) hidrotehničkih objekata i sistema. „Hidromehanika” se bavila pretežno onim što se moglo lepo matematički uobličiti, a to se odnosilo na tzv. „idealnu tečnost” (zanemarenje otpora, gubitaka energije), a to je bilo, na žalost, veoma malo primenjeno u tehničkoj praksi. Jasno je da se praksa nije mirila sa „nemoći” nekakve „čiste nauke” i da se oslanjala na iskustva, pa makar, i ne bila objašnjiva „čistom teorijom”, jer se moralo graditi. Tek u novije vreme došlo se do spoja između „Hidromehanike” i „Hidraulike”, jer se „Hidromehanika” pomirila sa time da se do rešenja može doći uz primenu hidromehaničkih zakonitosti u koje se unose i empirijski podaci, dok je u „Hidrauliku” prodrlo shvatanje da se iskustveni podaci ne mogu davati kao gotove činjenice, bez nastojanja za teorijskim obrazloženjem.

Ova knjiga treba da uvede čitaoca u „Hidrauliku”, tako barem njen naslov kaže; a to znači da će se razmatrati ona saznanja koja omogućavaju rešavanje jednostavnih praktičnih zadataka, a koja mogu postati i sastavni deo složenijih zadataka. U naslovu je reč „uvođenje” sa čime se želelo reći da je to duži proces saznavanja, a da to nije nekakav „Uvod” koji ukratko daje gotova pravila za rešavanje zadataka. Pošto ova knjiga sledi prethodnu knjigu, koja izlaže teorijske stavove iz „Mehanike fluida”, postavlja se pitanje povezivanja te dve knjige, podsećajući se malo pre rečenog o spoju „Hidromehanike” i „Hidraulike”. Autor je shvatio da postoje tri mogućnosti:

- Prva mogućnost je zahtev da ovu (Drugu) knjigu koristi samo onaj koji je proučio Prvu knjigu. To bi za autora bilo najlakše, ali bi to možda odbilo mnoge čitaoce, jer je bliska pomisao da se do rešavanja praktičnih zadataka može doći i sa skromnijim obimom teorije.
- Druga mogućnost je da se napiše posebna knjiga (Uvođenje u hidrauliku) bez ikakvog povezivanja na nešto prethodno, i u kojoj bi se u teorijske stavove ulazilo samo onoliko koliko je neophodno da se omogući rešavanje jednostavnih praktičnih zadataka. To bi onda možda dovelo do zabune o nepotrebnosti Prve knjige.
- Treća mogućnost je ona koja je prihvaćena – ona je nekakav kompromis između prve dve i otklanja primedbe koje su uz njih stavljene. Ova knjiga je napisana tako da se bez proučavanja Prve knjige mogu čitati neki njeni delovi, a neki delovi mogu se razumeti samo korišćenjem saznanja stečenih proučavanjem Prve knjige, na koja se izlaganja u ovoj knjizi pozivaju. Ti delovi koji se oslanjaju na Prvu knjigu su ili cela poglavlja, ili celi odeljci u nekim poglavljima, kao i dodaci i primedbe uz neke odeljke. Naslovi tih delova su uokvireni, a to su:
 - a) cela Poglavlja 84, 85, 93 do 99 i 103,
 - b) celi Odeljci II u Poglavlju 101, V (u 106) i III (u 107),
 - c) Dodaci uz Poglavlje 81, uz Odeljak II Poglavlja 102 i uz Odeljak II Poglavlja 104,
 - d) Dodatak i Primedba na kraju Poglavlja 92,
 - e) Primedbe uz Poglavlja 71, 91, 102, te uz Odeljke III (u 101), II (u 104) i II (u 105).

Mora se priznati da se do mogućnosti za rešavanje jednostavnih praktičnih zadataka može doći na osnovu jednačina koje se pišu uz

prethodno pojednostavljenje uslova (za jednostavne zadatke), bez ulaženja u složene jednačine za opšte uslove. Uostalom, u knjigama sa naslovom „Hidraulika” tako se redovno i postupa. Tako je postupljeno i ovde ako čitalac izostavi pomenute delove koji zahtevaju znanja iz Prve knjige. Naime, treba priznati da je opravdana želja da se što pre oseti praktična korist od onoga što se obično zove „teorija”, i toj želji je ovde i zadovoljeno. Ne može se odbaciti nastavni postupak koji omogućava da se što pre rade jednostavni praktični zadaci, jer taj rad ohrabruje, stiče se utisak da se ne uči uzalud. I nastavni programi su tako često usmereni.

Međutim, takvo shvatanje ne bi smelo da čitaoca potpuno odvraća od delova knjige koje bi mogao izostaviti, da odbaci želju za produbljanjem teorijskih saznanja. Veoma verovatno i neće, jer će rešavanje samih jednostavnih zadataka pokazati nedovoljnost i ograničenost prethodne teorijske spreme stečene samo poznavanjem delova knjige krupnije štampanih, pa će podsticati da se teorija dopunjava i produbljuje, a na to ga navodi i celina knjige. Ne treba smetnuti sa uma da će se javiti i kritički duh, koji će navesti na razmišljanje o svim ograničenjima, uslovljavanjima i pojednostavljenjima, koja su dovela do zakonitosti namenjenih jednostavnim zadacima, gde se dosta prima „na poverenje” i gde se prihvataju preporuke bez dubljeg obrazloženja.

Opravdana je nada da će korišćenje ove knjige, pogotovo uz korišćenje i Prve knjige, dovesti do poželjnog preklapanja teorije i prakse. To je, naime, opšta pojava, a ovde će se ispoljiti u uvođenju u rešavanje hidrauličkih zadataka. U razmatranjima u svim oblastima koja imaju za krajnji cilj rešavanje praktičnih zadataka prihvatljivo je da prva teorijska saznanja omogućće rešavanje jednostavnih praktičnih zadataka, gde neminovno dolazi do spoznaje o nedovoljnosti teorijskih znanja da bi se rešavali složeniji zadaci, a susretanje sa složenijim zadacima traži još više teorije, da bi se sa njom prešlo na još složenije zadatke. I dokle to tako treba da ide? Sve dok bude želja, potreba i mogućnosti, a i sposobnosti onoga koji se time bavi. Može se reći da ne mora produbljanje teorijskih znanja biti samo razlog za željom za rešavanje složenijih zadataka, jer posedovanje većeg teorijskog znanja znači pouzdanije rešavanje jednostavnih zadataka, unošenje sigurnosti da se nije prešla granica dokle važe pojednostavljenja uslova za rešavanje takvih zadataka.

Namera je da ova knjiga posluži i prihvatanju navedenih shvatanja.

SPISAK OZNAKA

Navode se one oznake koje se koriste u više poglavlja, a nije se smatralo za potrebno da se navode i oznake upotrebljene samo jednom prilikom, jer je neposredno protumačeno šta označavaju. Uz oznaku su stavljeni brojevi izraza (jednačina) gde se uvodi u razmatranje u Prvoj, odnosno u ovoj – Drugoj knjizi.

A	površina	(14–3)	(71–1)
B	širina slobodne površine tečnosti		(92–14)
D	prečnik cevi kružnog preseka	(64–6)	(91–23)
DY/Dt	materijalni izvod veličine Y	(21–3)	(81–11)
Def	deformacioni rad po jedinici mase		(85–14)
def	deformacioni rad u jedinici vremena	(27–7)	(85–6)
C_A	koeficijent kontrakcije (suženja)		(102–7)
C_Q	koeficijent proticaja		(103–9)
C_v	koeficijent brzine		(103–6)
C_τ	koeficijent tangencijalnog napona		(91–18)
E	ukupna energija po jedinici težine		(83–8)
e	specifična energija		(92–32)
Fr	Frudov broj	(62–3)	(92–20)
f_i	zapreminska sila, po jedinici mase	(28–1)	(81–5)
G	sila težine	(28–6)	(71–11)
g	gravitaciono ubrzanje	(28–4)	(71–1)
h	dubina vode u kanalu		(91–11)
h	polovina rastojanja između ploča		(93–1)
I	moment inercije		(72–12)
I	inercijalna sila	(33–8)	(82–4)
K	sila kojom čvrsta granica deluje na fluid		(82–1)
K_{ij}	koeficijent korelacije	(54–12)	(98–32)
K_o	bezdimenzionalni konturni uslovi	(62–11)	(101–2)
k	apsolutna hrapavost		(91–25)
ko	dimenzionalni konturni uslovi	(62–10)	(106–47)

L	dimenzija dužine	(12–1)	(91–34)
Mot	motorni rad po jedinici mase	(35–16)	(85–14)
mot	motorni rad u jedinici vremena	(27–7)	(85–6)
n	Maningov koeficijent hrapavosti		(91–32)
\vec{n}	ort spoljne normale	(14–7)	(71–11)
O	okvašeni obim		(91–3)
P	sila pritiska	(25–1)	(71–11)
p	pritisk (sferni deo napona)	(26–2)	(71–1)
Q	proticaj	(23–2)	(81–2)
R	hidraulički radijus		(91–9)
Re	Rejnoldsov broj	(62–1)	(93–57)
T	dimenzija vremena	(12–1)	(91–34)
t	vreme	(14–1)	(81–11)
u_i	brzina (u pravcu x_i)	(21–1)	(81–2)
\bar{u}_i	brzina osrednjena kroz vreme	(52–15)	(81–5)
u'_i	fluktvacija brzine	(52–15)	(81–5)
V	zapremina	(14–2)	(71–1)
v	srednja (prosečna) brzina za presek		(81–3)
We	Weberov broj	(62–4)	(106–51)
X	horizontalna koordinatna osovina		(71–2)
x_i	koordinatna osovina	(14–1)	(81–1)
Y_{dis}	funkcija disipacije	(41–14)	(85–12)
y	rastojanje od središne ravni		(93–12)
y	rastojanje od središta cevi		(93–45)
Z	vertikalna koordinatna osovina	(28–6)	(71–1)
γ	specifična težina		(71–1)
δ_k	kinematički koeficijent površinskog napona	(62–14)	(106–47)
λ	koeficijent trenja u kružnoj cevi		(91–22)
μ	dinamički koeficijent viskoznosti	(41–4)	(85–12)
ν	kinematički koeficijent viskoznosti	(62–12)	(85–29)
ξ	koeficijent lokalnog gubitka		(101–1)
Π	pijezometarska kota		(71–7)
ρ	gustina	(18–1)	(71–1)
σ_{ij}	napon	(25–1)	(84–1)
σ_{ij}^d	devijatorski deo napona	(26–1)	(85–5)
σ_{ij}^t	„napon” turbulencije	(53–13)	(84–13)
τ	napon trenja između čvrste granice i fluida		(91–3)

DRAFT verzija 2001.

deo sedmi

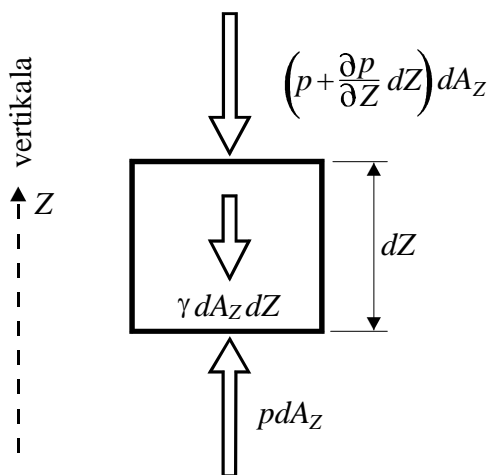
HIDROSTATIKA
ILI MIROVANJE FLUIDA
KONSTANTNE GUSTINE,
POD UTICAJEM TEŽINE

OSNOVNI POJMOVI I OSNOVNA JEDNAČINA HIDROSTATIKE

Pretpostavlja se:

- a) gustina fluida je konstantna ($\rho = \text{const}$),
- b) od zapreminskih sila deluje samo težina, koja po jedinici mase iznosi $g = \text{gravitaciono ubrzanje}$, dok se po jedinici zapremine izražava sa $\rho g = \gamma = \text{specifična težina}$ ($\gamma = \text{const}$, zbog $\rho = \text{const}$ i $g = \text{const}$),
- c) od napona deluje samo sferni deo – pritisak p , koji u jednoj tački ima istu vrednost za sve pravce, i na svaku površinu deluje u pravcu normale na nju; tangencijalni (smičući) naponi, koji su posledica trenja između pojedinih delića, ne deluju pri mirovanju fluida.

Za prethodne pretpostavke napisaće se jednačina ravnoteže za vertikalne sile koje deluju na zapreminu fluida $dV = dA_Z dZ$ (slika 71–1)



Slika 71–1 Sile na elementarnu zapreminu fluida

u elementarnom paralelopipedu čiji je jedan par graničnih površina horizontalan (one iznose dA_Z):

$$p dA_Z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial Z} dZ \right) dA_Z - \gamma dV = 0$$

S obzirom da je $dA_Z dZ = dV$, prethodno se svodi na:

$$\frac{\partial p}{\partial Z} + \gamma = 0 \quad (71-1)$$

Ako bi se napisala jednačina ravnoteže za bilo koji horizontalni pravac X , ona bi dovela do:

$$\frac{\partial p}{\partial X} = 0 \quad (71-2)$$

jer u tom pravcu deluju samo međusobno jednake sile pritiska na naspramne granične površine paralelopipeda. Kako je X proizvoljni horizontalni pravac, (71-2) znači da se *pritisak ne menja u jednoj horizontalnoj ravni* tj. da *zavisi samo od visinskog položaja tačke*, pa se (71-1) može napisati i sa totalnim izvodom:

$$\frac{dp}{dZ} + \gamma = 0 \quad \text{ili} \quad \frac{dp}{\gamma} + dZ = 0 \quad (71-3)$$

iz čega se, integrisanjem, dobija

$\frac{p}{\gamma} + Z = \text{const}$ <p>osnovna jednačina hidrostatičke</p>	(71-4)
--	--------

Odstranjenjem konstante, korišćenjem uslova u tački dobija se:

$$\frac{p_0 - p}{\gamma} = Z - Z_0 \quad (71-5)$$

Jednačina (71-4) ili (71-5) može se iskazati pravilom: *Pritisak u jednoj neprekidnoj fluidnoj sredini konstantne gustine, pod dejstvom težine, zavisi samo od visinskog položaja – smanjenje pritiska je srazmerno porastu visine.*

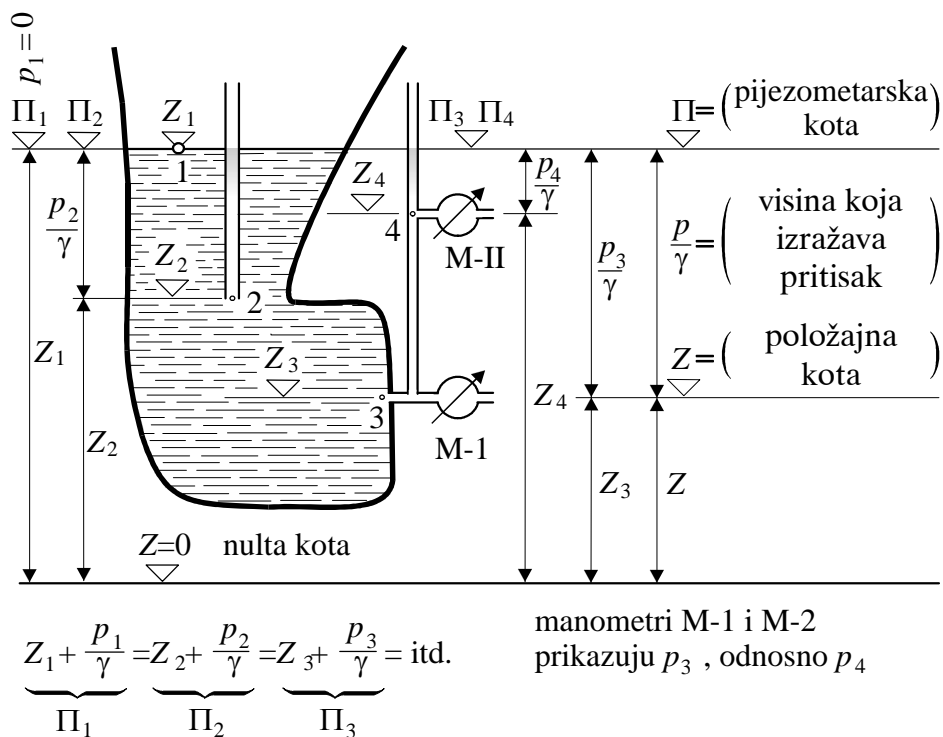
Jednačina (71–5) napisana je sa visinskim razlikama i razlikama pritisaka, pa znači da primena te jednačine (a to znači rešavanje svih hidrostatičkih zadataka) dozvoljava slobodan izbor nulte kote (nultog visinskog položaja) od koje će se računati sve kote (za nju će biti $Z = 0$), kao i slobodan izbor nultog pritiska. Ne mora se pritisak izražavati u apsolutnom iznosu (ne mora se kao nulti pritisak uzeti apsolutni pritisak jednak nuli), niti se za položajnu kotu mora uzimati apsolutna geodetska kota.

Izbor nulte kote, tj. određivanje visinskog položaja gde će se ona postaviti *potpuno je proizvoljan*. Treba samo obratiti pažnju tokom rešavanja jednog istog zadatka da se slučajno „zabunom” ne promeni nulta kota. Za pritisak se uzima:

$$\boxed{\begin{array}{c} \underbrace{p} \\ \text{[pritisak]} \end{array} = \begin{array}{c} \underbrace{p_{\text{aps}}} \\ \text{[apsolutni} \\ \text{pritisak]} \end{array} - \begin{array}{c} \underbrace{p_{\text{atm}}} \\ \text{[atmosferski} \\ \text{pritisak]} \end{array}} \quad (71-6)$$

Dakle, za pritisak p se, u praktičnim hidrostatičkim razmatranjima, uzima razlika između apsolutnog (barometarskog) pritiska i atmosferskog pritiska. Pritisak p , prema (71–6), je „manometarski pritisak” – toliko će pokazati manometar, kada na njegov merni uređaj sa jedne strane deluje pritisak koji se meri, a sa druge strane deluje atmosferski (tako se obično pritisak i meri). Sreće se i naziv „hidrostatički pritisak”, jer se njime izražava onaj pritisak koji daje tečnost. Sa praktičnog stanovišta ovakvo određivanje pritiska je veoma pogodno, jer on određuje opterećenje čvrstih granica koje omeđuju fluidnu masu (to su zidovi suda, cevi, brane i sl.), pošto sa druge strane tih zidova deluje atmosferski pritisak. Dok je apsolutni pritisak uvek pozitivan, pritisak p , prema (71–6), može da bude i negativan (tada je apsolutni pritisak manji od atmosferskog), a to znači da unutrašnji pritisak teži da uvuče unutra zidove suda (spoljne površine zidova su u slobodnoj atmosferi), a ne teži da proširi sud.

U sudu (slika 71–2) i u nizu sa sudom spojenih cevi nivo tečnosti je na istoj koti – to je *pijezometarska kota* (oznaka Π), a priključne cevi se nazivaju „pijezometarske cevi” („pijezometar” se može prevesti sa: „merač pritiska”). Da bi se prethodno ostvarilo nivo u cevima mora da



Slika 71-2 Očigledni prikaz jednačine hidrostatičke (71-8), $\Pi = \text{const}$

bude slobodan, pod atmosferskim pritiskom. Nadalje, kapilarni uticaji moraju da budu zanemarljivi, što se postiže izbegavanjem cevi sa suviše malenim unutrašnjim presekom.

Izjednačenja ispod slike 71-2 napisana su na osnovu jednačine (71-4), a ona ukazuju da se za pijeziometričku kotu može napisati:

$$\boxed{\begin{array}{c} \underbrace{\Pi}_{\text{pijeziometrička}} \\ \text{kota} \end{array}} = \underbrace{Z}_{\text{položajna}} + \underbrace{\frac{p}{\gamma}}_{\text{visina koja}} \quad (71-7)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{kota} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} \text{kota} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} \text{izražava} \\ \text{pritiskak} \end{array}}$$

I pritisak je izražen odgovarajućom visinom – to je *visina koja izražava pritisak* (p/γ) – ona je količnik između pritiska i specifične težine. Ta visina može se nazvati „pijeziometrička visina”, ali se nastojalo da se

takav naziv izbegne, odnosno da se pridev „pijezometarska” veže samo za pijezometarske kote.

Sa uvedenom pijezometarskom kotom Π , prema (71-7), *osnovna jednačina hidrostatičke* (71-4) može se napisati veoma prosto:

$\Pi = \text{const}$ <p>pijezometarska kota je konstantna za jednu neprekidnu masu fluida konstantne gustine u mirovanju pod dejstvom težine</p>	(71-8)
--	--------

Na slici 71-2 očigledna je zakonitost koju izražava prethodno napisana jednačina (71-8).

Kada je pijezometarska kota Π iznad položajne Z , pritisak je pozitivan. Kada je Π ispod Z , pritisak je negativan (apsolutni pritisak manji je od atmosferskog).

* * *

Na slici 71-3 prikazan je primer gde je tečnost iz otvorenog suda usisana u uronjenu cev, jer je apsolutni pritisak vazduha, zatvorenog u cevi, iznad tečnosti, manji od atmosferskog pritiska.

Za tečnost u sudu i cevi jedinstvena pijezometarska kota je na nivou u sudu pa osnovna jednačina hidrostatičke (71-5) daje:

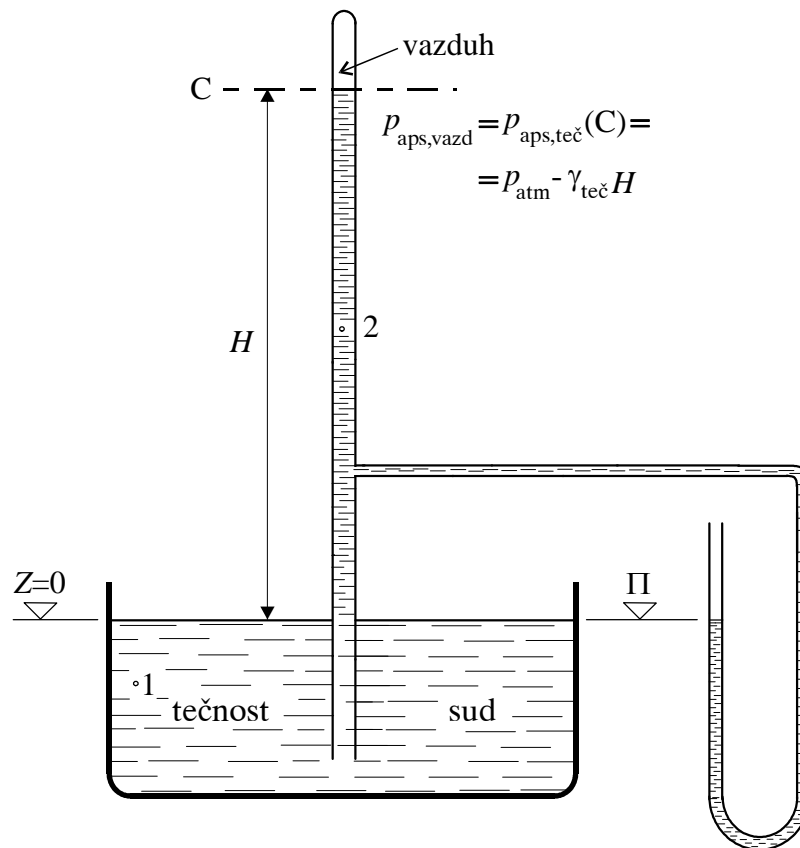
$$\frac{p_{\text{teč}}(C)}{\gamma_{\text{teč}}} + H = 0 \quad (71-9)$$

Ovo je izjednačenje pijezometarskih kota za delić u nivou (C) i za sud, uz napomenu da je za nultu kotu uzet nivo u sudu. Napominje se da je pritisak u (C) izražen kako je uslovljeno sa (71-6), pa se za apsolutni pritisak u (C), a to je ujedno i apsolutni pritisak vazduha u cevi, dobija, ako se uz to koristi i prethodna jednačina:

$$p_{\text{aps,vazd}} = p_{\text{aps,teč}}(C) = p_{\text{atm}} - p_{\text{teč}}(C) = p_{\text{atm}} - \gamma_{\text{teč}}H$$

Ako se iznad tečnosti isiše sav vazduh, apsolutni pritisak je jednak nuli, pa za taj slučaj prethodna jednačina daje:

$$p_{\text{atm}} = \gamma_{\text{teč}}H \quad (71-10)$$



Slika 71–3 Za tačku (1) pritisak je pozitivan, jer se nalazi ispod pije-
zometarske kote; za tačku (2) pritisak je negativan (apsolutni pritisak manji
od atmosferskog), jer je tačka iznad pije-
zometarske kote

Visina izdizanja H ne može biti veća od $p_{atm}/\gamma_{teč}$, jer apsolutni pritisak ne može da se spusti niže od nule. Jednačina (71–10) pokazuje da se atmosferski pritisak može izmeriti visinom tečnosti. Tako se on prvobitno i merio, a za tečnost je uzimana živa. Za normalne vrednosti atmosferskog pritiska visina živinog stuba je oko 76 cm. Vodeni stub bi, međutim, bio 10 m. Sve do nedavno atmosferski pritisak se i izražavao milimetrima živinog stuba, i kada se pritisak merio neposredno.

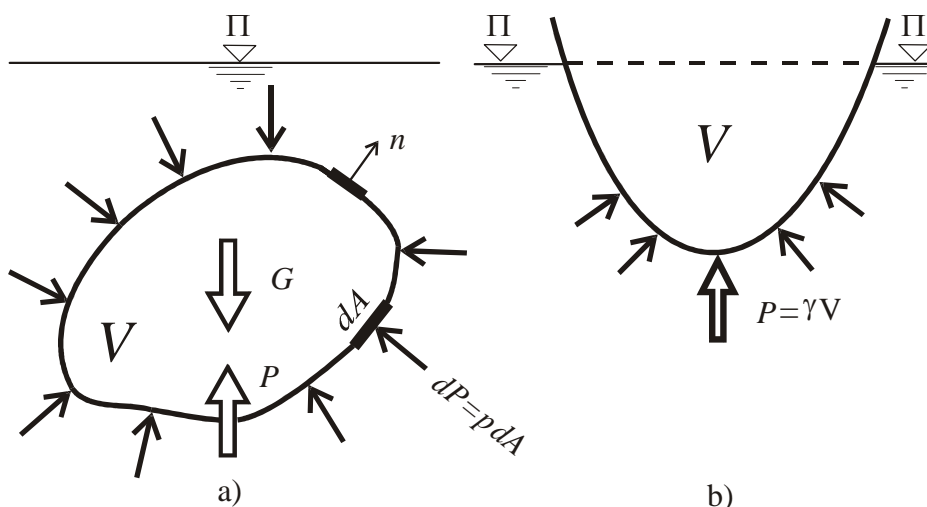
* * *

Ravnatežom sila za elementarnu zapreminu fluida $dV = dA_Z dZ$, prikazanu na sl. 71–1, došlo se do osnovne jednačine hidrostatičke (71–4),

odnosno (71-5). Može se napisati i ravnoteža sila na konačnu zapreminu fluida (sl. 71-4a):

$$\underbrace{\int_A p(-\vec{n}) dA}_{\vec{P}} + \vec{G} = 0 \quad (71-11)$$

gde je p pritisak, \vec{n} je ort spoljne normale na zatvorenu površinu A , koja ograničava zapreminu V , pa je prvi član ukupna sila \vec{P} pritiska na površinu A (pritisak deluje smerom unutrašnje normale, čiji je ort $-\vec{n}$, jer je uobičajeno da je $+\vec{n}$ ort spoljne normale), \vec{G} je težina fluida u zapremini V .



Slika 71-4 a) Težina fluida u zapremini V u ravnoteži je sa silom pritiska P na celu zatvorenu površinu A , koja ograničava zapreminu; b) Sila potiska P na plivajuće telo jednaka je težini γV istisnute tečnosti

Jednačina (71-11) kazuje da ukupna sila pritiska \vec{P} i težina \vec{G} stoje u ravnoteži, a to znači da deluju suprotnim smerom, a iste su apsolutne vrednosti. Kako u mirovanju zbir momenata svih delujućih sila mora da bude jednak nuli, obe sile deluju po istom pravcu, koji prolazi kroz težište zapremine.

Ako se zamisli da je umesto zapremine fluida neko čvrsto telo, učvršćeno na određenom položaju, onda je sila pritiska tečnosti na

njega, koja se obično naziva „potisak”, jednaka težini istisnute tečnosti (težini fluida u toj zapremini), koja bi održavala ravnotežu sa silama pritiska, koje su iste, bio u toj zapremini fluid, ili neko drugo telo – slika 71–4a.

Na sl. 71–4b, prikazano je plivajuće telo. Po istom rasuđivanju kao i malo pre, sila pritiska tečnosti je i ovde jednaka težini zapremine istisnute tečnosti.

PRIMEDBA

Jednačine ravnoteže (71–4) i (71–11) izvedene su neposredno za uslove hidrostatičke. U Poglavlju 35 iste jednačine su dobijene kao posebni slučajevi dinamičke jednačine (za najjednostavnije uslove) – to su jednačine (35–6) i (35–9).

HIDROSTATIČKE SILE NA ČVRSTE GRANIČNE POVRŠINE

I

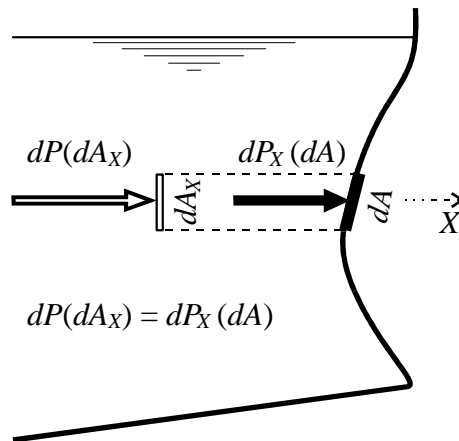
HORIZONTALNA I VERTIKALNA KOMPONENTA HIDROSTATIČKE SILE

Da bi se odredila horizontalna komponenta sile pritiska na neku površinu, kao prvo će se razmatrati ta komponenta na elementarni deo površine. Iz slike 72–1 može se zaključiti da je komponenta dP_X sile dP na elementarnu površinu dA jednaka sili dP na projekciju dA_X te površine u ravni normalno postavljenoj na X -pravac (za taj pravac se određuje komponenta sile). Do navedenog zaključka se dolazi iz ravnoteže sile koje u X -pravcu deluju na masu fluida između površina dA i dA_X i površine koju obrazuju izvodnice kojima se kontura površine dA projektuje u odgovarajuću konturu u dA_X . Na tu masu deluje (u X -pravcu) sila $dP(dA_X)$ koja se mora uravnotežiti sa silom jednakom $dP_X(dA)$, ali suprotno usmerenom od sile nacrtane na slici 72–1.

Iz slike 72–1 moglo bi se zaključiti da se radi o ravanskom problemu (u ravni X, Z). Međutim, tako je urađeno da crtež bude prost, a treba objasniti da je površina dA proizvoljnog oblika i proizvoljno orijentisana, tako da je sila dP , kada se uopšteno razmatra, određena sa tri komponente, jer je i površina određena sa tri projekcije. Ali, sve što će se reći za jednu horizontalnu komponentu važi i za drugu – upravo važi za proizvoljno orijentisanu horizontalnu komponentu.

Kod horizontalne komponente isti je pritisak p i na elementarnu površinu dA i na njenu odgovarajuću projekciju dA_X , bez obzira gde se ravan za projektovanje smestila, jer su uvek dA i odgovarajuća projekcija dA_X na istoj koti, pa su izložene istom pritisku.

Ovaj zaključak dozvoljava da se sve elementarne površine projektuju na istu vertikalnu ravan – slika 72–2 – i na njoj se dobija projekcija A_X cele površine A . Primećuje se da na sl. 72–2 u projekciju nije ušao donji deo površine, jer se horizontalne sile na levu i desnu stranu tog

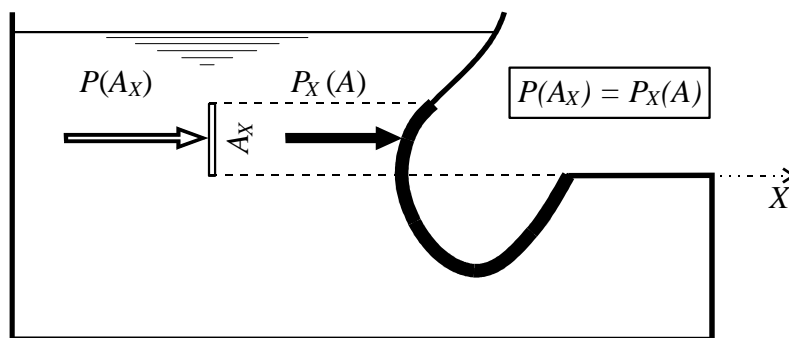


Slika 72–1 Horizontalna komponenta dP_X sile na elementarnu površinu dA jednaka je sili dP na projekciju dA_X

dela površine međusobno potiru. Drugim rečima, ne ulaze u projekciju one površine koje se međusobno preklapaju. Pošto je svaka elementarna komponenta dP_X jednaka sili na odgovarajuću projekciju dA_X onda je i komponenta P_X za celu površinu A jednaka sili na njenu projekciju A_X – vidi sliku 72–2, gde je napisano:

$$P_X(A) = P(A_X) \quad (72-1)$$

Iz prethodnog se može iskazati pravilo: *Horizontalna komponenta hidrostatičke sile na proizvoljnu površinu jednaka je sili na projekciju te površine u ravni normalnoj na pravac za koji se komponenta određuje.*



Slika 72–2 Horizontalna komponenta P_X na površinu A

Kao zadatak se stoga postavlja određivanje sile na vertikalnu ravnu površinu (što će se raspravljati kasnije, pod II), jer ona određuje i horizontalnu komponentu sile na proizvoljno zakrivljenu površinu.

* * *

Za vertikalnu komponentu elementarne sile pritiska, p ne znači i pritisak na projekciju dA_Z elementarne površine dA ako se sve projektuje na istu ravan, gde bi se dobila projekcija cele površine, jer bi ta ravan bila horizontalna pa bi pritisak na nju bio svuda isti, bez obzira na položaj pojedinih elementarnih površina. Ovo znači da se ovde (kod vertikalne komponente) ne može jednostavno uzeti sila na projekciju (kako se to moglo kod horizontalne komponente), nego treba tražiti drugi, i odgovarajući, način za određivanje vertikalne komponente hidrostatičke sile.

Postupiće se na sledeći način. Svaka od elementarnih komponenta dP_Z , može se prikazati – slika 72–3 – težinom odgovarajuće elementarne zapremine fluida:

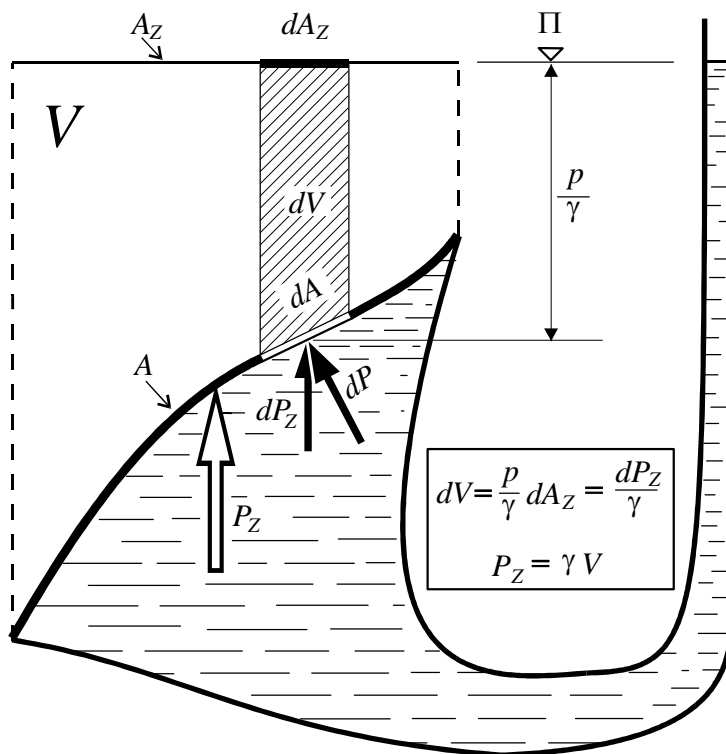
$$dP_Z = p dA_Z = \gamma \frac{p}{\gamma} dA_Z = \gamma dV \quad (72-2)$$

Treba uočiti da je za zapreminu dV merodavna visinska razlika između pijeziometarske kote i položajne kote na površini dA , koja iznosi p/γ . Integrisanjem (72–2) dobija se:

$$P_Z = \gamma V \quad (72-3)$$

kako je i napisano i na slici 72–3 gde je odgovarajuća zapremina i obeležena. Treba skrenuti pažnju da se radi o zapremini tečnosti između površine i ravni pijeziometarske kote, jer je u takvoj zapremini visina iznad pojedine elementarne površine onolika kolika je visina koja izražava pritisak na tom mestu.

Na isti način kao na slici 72–3 došlo bi se do vertikalne komponente hidrostatičke sile u bilo kom primeru. Slika 72–4 prikazuje četiri karakteristična slučaja, od kojih je prvi ponovljen sa slike 72–3. Sila P_Z prikazana je uvek zapreminom V , bolje rečeno težinom γV te zapremine. Kako postoji jednakost između sile i odgovarajuće težine i za pojedine delove površine, sve do elementarnih, može se zaključiti da sila P_Z prolazi kroz težište zapremine V .



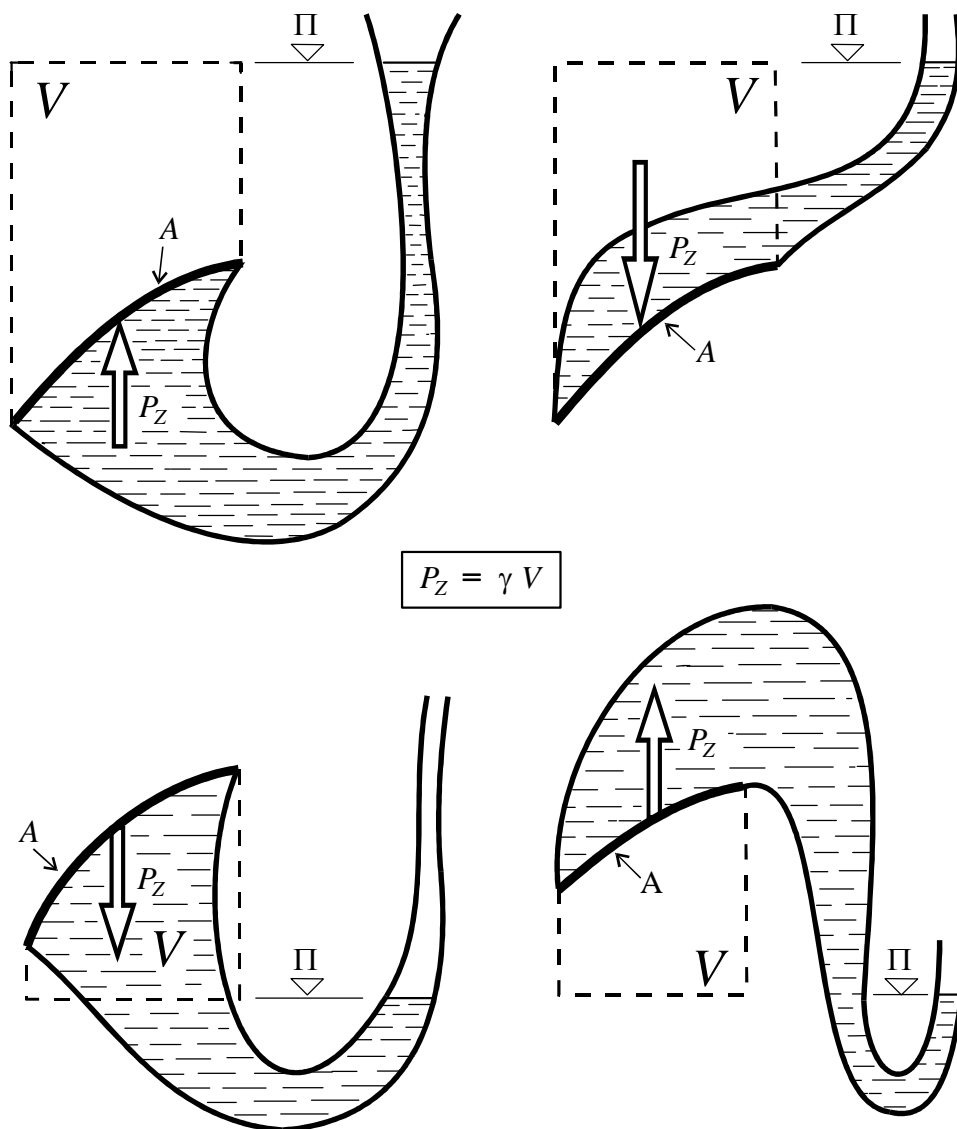
Slika 72–3 Vertikalna komponenta P_z hidrostatičke sile jednaka je težini γV koja se može smestiti u zapreminu V

Prethodna razmatranja dovode do pravila: *Vertikalna komponenta kojom fluid deluje na površinu jednaka je težini fluida koja se može smestiti u zapreminu između površine i njene projekcije u ravni pije-zometarske kote* (u ravni gde je pritisak ravan nuli). Sila prolazi kroz težište navedene zapremine. Smer sile zavisi od toga da li fluid *pritiškuje* graničnu površinu ili je *povlači*, odnosno da li vlada pritisak ili potpritisak (da li je pije-zometarska kota iznad ili ispod površine).

Nije suvišno da se naglasi da se radi o težini koja se *može smestiti* (tako je rečeno), u određenu zapreminu, što ne znači da ta zapremina mora biti i ispunjena fluidom.

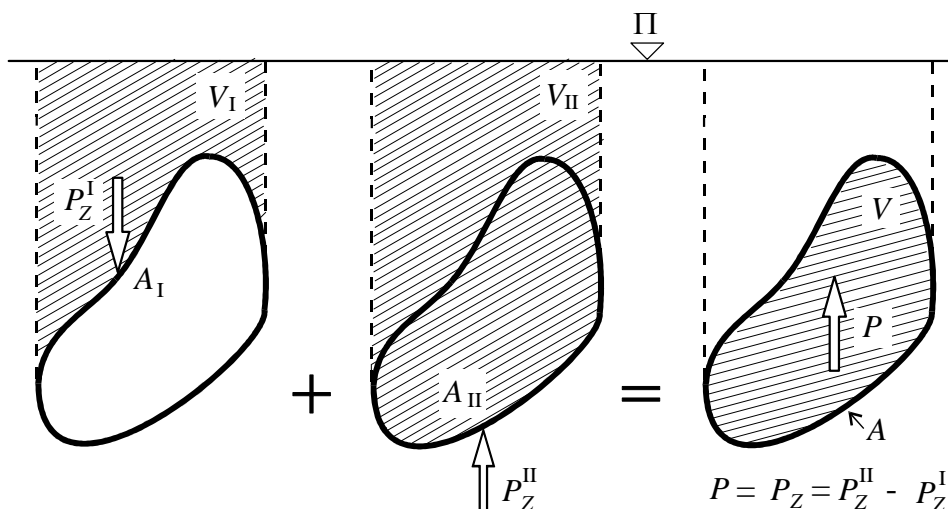
* * *

Hidrostatička sila na zatvorenu površinu, prikazana je i objašnjena ranije – slika 71–4a – može se dobiti i prema prethodno izraženom



Slika 72–4 Vertikalna komponenta hidrostatičke sile izražava se odgovarajućom težinom odgovarajuće zapremine V

pravilu za vertikalnu komponentu hidrostatičke sile. Treba samo posmatrati odvojeno sile na gornji i donji deo površine, kako je prikazano na slici 72–5.



Slika 72–5 Sila potiska P na potopljeno telo kao sadejstvo vertikalnih komponenti sila na gornju i donju površinu tela

Za celu zatvorenu površinu horizontalna komponenta je nula, pa je vertikalna komponenta ujedno i ukupna sila.

* * *

Poznavanje horizontalne komponente (jedne ili dve) prema onome što se izlaže u produžetku (u Odeljku II) i poznavanje vertikalne komponente omogućava, njihovim slaganjem u rezultantu, određivanje ukupne hidrostatičke sile.

Korisno je primetiti da za površinu koja je deo lopte ukupna sila mora da prolazi kroz središte lopte, jer sve elementarne sile (čiji je rezultanta zbir) prolaze kroz središte lopte, jer je pritisak uvek usmeren u pravcu normale na površinu.

* * *

Treba skrenuti pažnju da se sva izlaganja odnose na potpuno proizvoljne površine, iako su na slikama 72–1 do 72–5 površine prikazane linijama, pa bi se moglo pomisliti da se radi o ravanskim zadacima. Međutim, to je tako rađeno da bi crteži bili pregledniji i jasniji – a već je u početku izlaganja, uz objašnjenje slike 72–1 skrenuta pažnja na to.

Zadacima, za koje se uslovljava da su ravanski biće kasnije posvećeno posebno izlaganje, u Odeljku III.

II

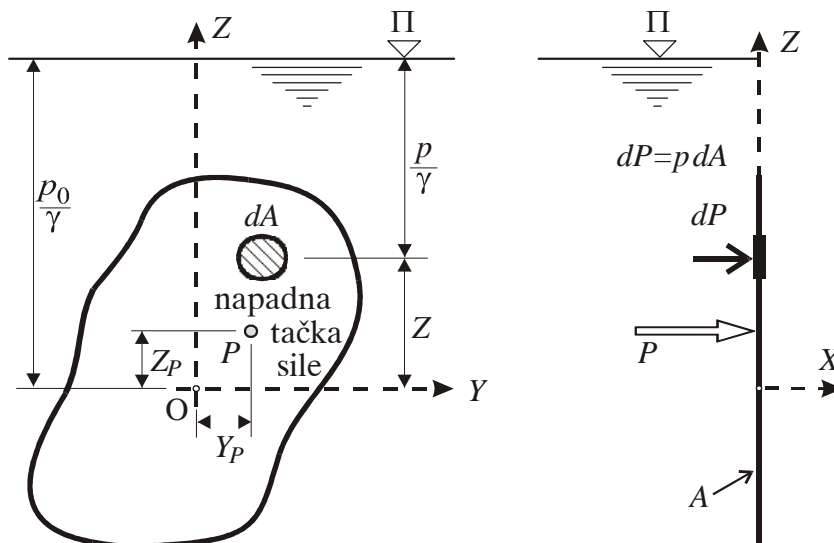
HIDROSTATIČKE SILE NA RAVNE POVRŠINE

Na *horizontalnu* ravnu površinu pritisak $p = \text{const}$, pa je sila:

$$P = pA \quad (72-4)$$

koja deluje u težištu površine.

Za *vertikalnu* površinu A , kroz čije težište prolazi vertikalna osovina Z i horizontalna Y , sila će delovati u horizontalnom X -pravcu – slika 72-6.



Slika 72-6 Uz objašnjenje sile na ravnu vertikalnu površinu

Elementarna sila dP je jednaka:

$$dP = p dA = (p_0 - \gamma Z) dA \quad (72-5)$$

pa je sila P na celu površinu A

$$P = \int_A (p_0 - \gamma Z) dA = p_0 A - \gamma \int_A Z dA$$

Kako je drugi član dobijenog rezultata statički momenat površine A , i to za težišnu osovinu (Y osovina povučena je kroz težište), on mora da bude jednak nuli pa ostaje:

$$P = p_0 A \quad (72-6)$$

Ovo se može izreći pravilom: *Hidrostatička sila na vertikalnu površinu jednaka je proizvodu iz površine i pritiska u težištu.* (Kasnije će se pokazati da ovo važi za svaku ravnu površinu, a ne samo za vertikalnu).

Napadna tačka dobiće se primenom stava da je momenat rezultante (sile P) jednak zbiru momenata komponentata (beskonačnom broju beskonačno malenih sila dP), tj. integralu. Za momente u odnosu na osovinu Y – vidi sliku 72-6 – uz korišćenje (72-5) može se napisati:

$$P Z_P = \int_P Z dP = \int_A Z(p_0 - \gamma Z) dA = p_0 \int_A Z dA - \gamma \int Z^2 dA \quad (72-7)$$

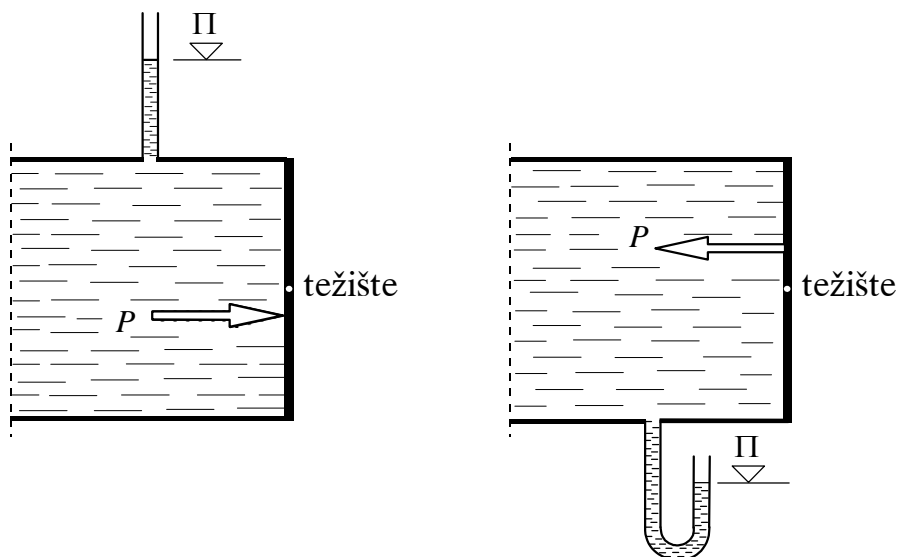
Prvi član je jednak nuli – to je opet statički težišni momenat, dok je drugi integral težišni momenat inercije površine (momenat inercije površine A u odnosu na Y -osovinu, stoga će se označiti sa I_{YY}), pa se na osnovu prethodne jednačine (72-7) može napisati:

$$Z_P = -\frac{\gamma I_{YY}}{P} = -\frac{I_{YY}}{A p_0 / \gamma} \quad (72-8)$$

Iz ove jednačine se može zaključiti da je napadna tačka sile *ispod* težišta ($Z_P < 0$) kada je pritisak u težištu (p_0) pozitivan, tj. kada je pijezometarska kota *iznad* težišta. Ovo je razumljivo i bez ikakvog izvođenja, jer bi sila P delovala u težištu površine samo onda kada bi pritisak bio isti po celoj površini (tako je samo kod horizontalnih površina). Međutim, pritisak raste sa dubinom i to rezultantu „odvlači” na dole od težišta.

Na slici 72-7 nacrtani su slučajevi sa pijezometarskom kotom iznad i ispod težišta. U drugom slučaju fluid u težištu površine ne pritiskuje, nego povlači površinu, i stoga sila P deluje iznad težišta.

Napadna tačka sile, uopšteno uzevši, određena je ne samo sa Z_P , nego još i sa Y_P – slika 72-6. Y_P se određuje primenom momentne jednačine oko Z -osovine: izjednačuje se opet momenat rezultante P i integral momenata elementarnih sila. Tako se dobija:



Slika 72–7 Položaj napadne tačke sile na vertikalnu površinu u odnosu na težište: za pritiskujuću silu (levo) i za povlačeću silu (desno)

$$Y_P = -\frac{\gamma I_{YZ}}{P} = -\frac{I_{YZ}}{A p_0/\gamma} \quad (72-9)$$

Ovde je I_{YZ} centrifugalni moment površine A u odnosu na težišne osovine Y i Z , određen integralom:

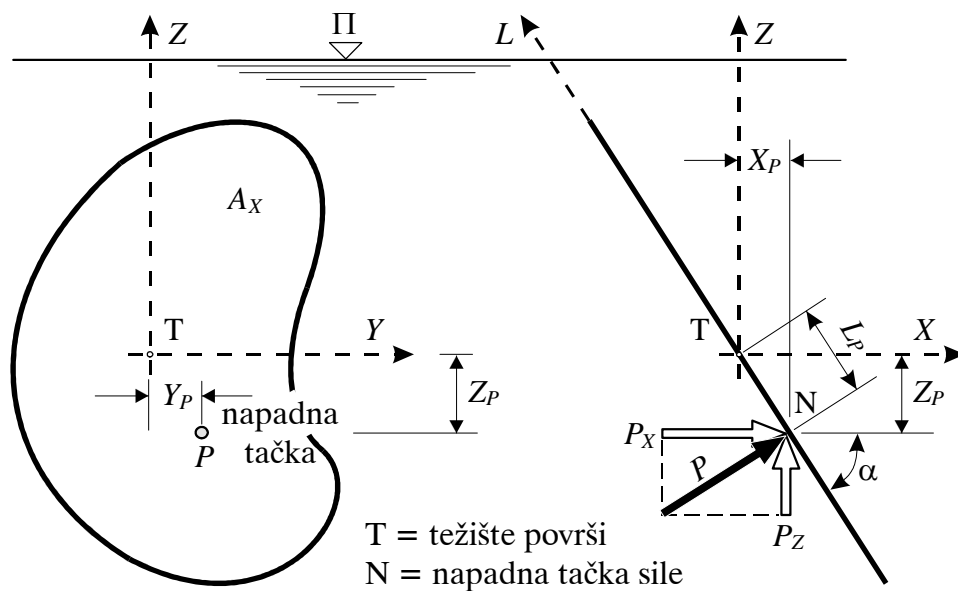
$$I_{YZ} = \int_A XZ dA \quad (72-10)$$

Za simetrične površine u odnosu na Z ili Y osovinu, centrifugalni moment je jednak nuli, pa je tada $Y_P = 0$, što znači da je napadna tačka na istoj vertikalnoj liniji na kojoj je i težište.

* * *

Posmatra se hidrostatička sila P na *kosu ravnu površinu* postavljenu da sa horizontalnom ravni zatvara ugao α – slika 72–8. Odnos sile P i njene komponente P_X je isti kao i odnos površine A , i njene projekcije A_X na ravan normalnu na pravac komponente:

$$\frac{P}{P_X} = \frac{A}{A_X} = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (72-11)$$



Slika 72-8 Uz objašnjenje sile na kosu ravnu površinu

Prema (72-1) komponenta P_X je jednaka sili na projekciju A_X tj. sili na vertikalnu površinu, a ona je, shodno (72-6), jednaka:

$$P_X = p_0 A_X \quad (72-12)$$

Ovo omogućava zamenu za P_X u (72-11), uz napomenu da je pritisak p_0 u težištu površine A jednak pritisku u težištu površine A_X (jer su oba težišta na istoj položajnoj koti). Navedenom zamenom dobija se:

$$\underbrace{P}_{\left[\begin{array}{l} \text{hidrostatička sila} \\ \text{na ravnu površinu} \end{array} \right]} = \underbrace{p_0}_{\left[\begin{array}{l} \text{pritisak} \\ \text{u težištu} \end{array} \right]} \underbrace{A}_{\left[\text{površina} \right]} \quad (72-13)$$

Ova jednačina važi za *svaku ravnu površinu*. Prvobitno je kod (72-6) napisana uz objašnjenje da je namenjena vertikalnoj površini, a sada je njena primena proširena na bilo kakvu ravnu površinu, a tako je tamo i bilo najavljeno.

Iz napisanoga se uviđa da je za ravnu površinu dovoljno odrediti ili silu na projekciju prema (72-12), ili sa (72-13) silu na površinu, a

samim tim i vertikalna komponenta P_Z je određena:

$$P_Z = P \cos \alpha \quad \text{ili} \quad P_Z = P_X \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (72-14)$$

Pravci delovanja komponenti P_Z i P_X seku se na samoj površini pa kroz tu tačku mora prolaziti i rezultanta P_Z . Tako je i prikazano na slici 72-8. Ovo znači da je:

$$\frac{Z_P}{\sin \alpha} = \frac{X_P}{\cos \alpha} = L_P \quad (72-15)$$

gde Z_P , X_P i L_P određuju položaj sila P_Z , P_X i P .

Da je prethodni navod tačan dokazuje se primenom jednačine za momente sila P_Z i P_X u odnosu na težišnu osu Y , a ti momenti moraju se međusobno uravnotežiti tj. mora da bude:

$$P_Z Z_P = P_X X_P \quad (72-16)$$

Ako je (72-15) zaista tačno, prethodni izraz se može napisati sa:

$$P_Z L_P \sin \alpha = P_X L_P \cos \alpha \quad (72-17)$$

Iz ovoga se dobija:

$$\frac{P_Z}{P_X} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (72-18)$$

a to je zaista ispravno – već je napisano sa (72-14).

Z_P je određeno sa (72-8) za projekciju A_X , za koju će se momenat inercije označiti sa $I_{YY}(A_X)$:

$$Z_P = \frac{I_{YY}(A_X)}{A_X p_0 / \gamma} \quad (72-19)$$

Poznavanjem Z_P poznato je odmah i L_P – prema (72-15), ali se L_P može naći i neposredno preko same površine A i njenog momenta inercije, ako se izjednači zbir momenata svih elementarnih sila dP i rezultante P :

$$L_P = \frac{I_{YY}(A)}{A p_0 / \gamma} \quad (72-20)$$

Pomeranje napadne tačke sile u pravcu Y , tj. Y_P , naći će se za projekciju A_X , prema (72-9), a isti rezultat će se dobiti i za površinu A

sa I_{YL} (centrifugalni momenat za osovine Y i L , ova druga leži na samoj površini):

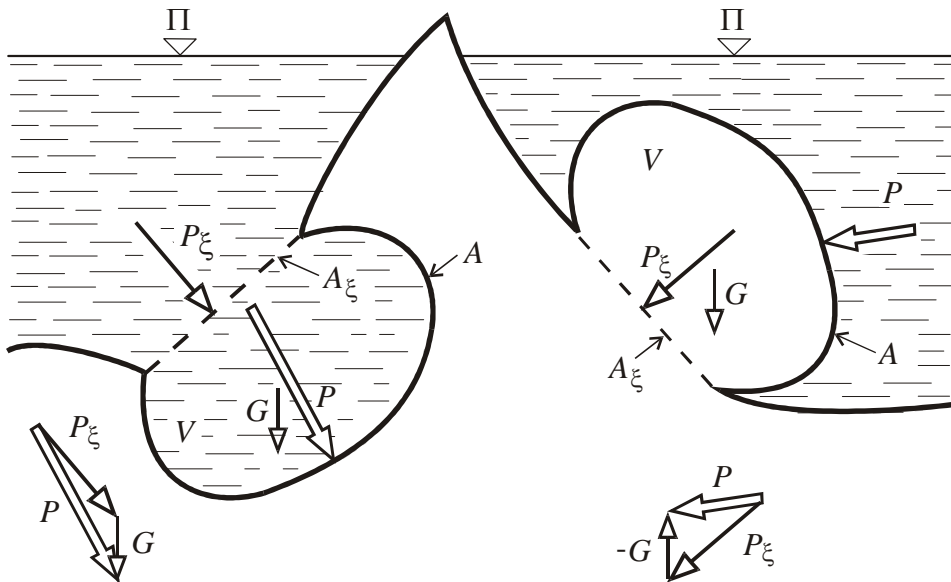
$$Y_P = \frac{I_{YZ}(A_X)}{A_X p_0 / \gamma} = \frac{I_{YL}(A)}{A p_0 / \gamma} \quad (72-21)$$

Korisno je opet skrenuti pažnju da su svi pomenuti momenti težišni, jer osovine Z, Y i L prolaze kroz težište površine A .

* * *

Određivanje sile na ravnu površinu može da se pojavi kao sastavni deo zadatka određivanja sile na zakrivljenu površinu A ako ona i ravna površina A_ξ (normalna na pravac ξ) čine zatvorenu površinu koja omeđuje zapreminu fluida V , čija je težina $G = \gamma V$ – slika 72–9, levi crtež. Rešavanje zadatka može znatno da olakša sledeće rasuđivanje: Posmatrana masa u zapremini V preko površine A prima silu P_ξ od preostale fluidne mase, pa tu silu, uz dodavanje sopstvene težine fluida G , predaje površini A , tj. na nju deluje silom P :

$$\vec{P} = \vec{P}_\xi + \vec{G} \quad (72-22)$$

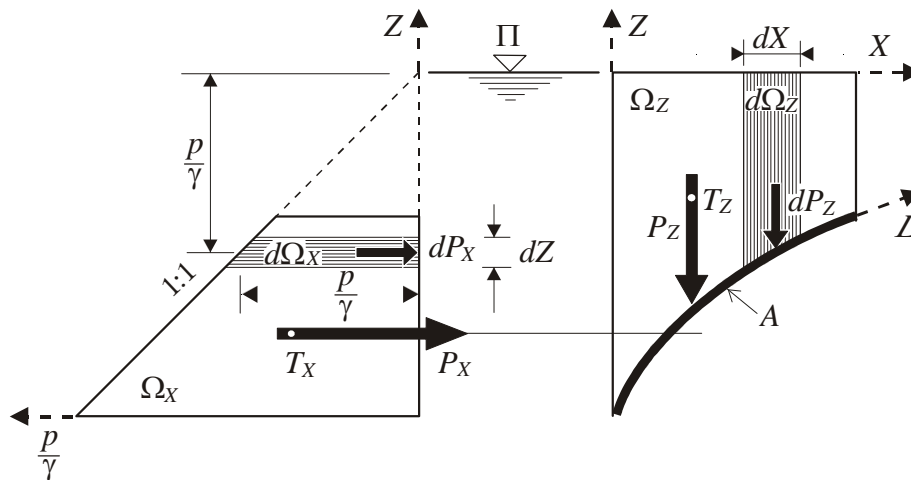


Slika 72–9 Sili P_ξ na ravnu površinu A_ξ dodaje se (levo), odnosno oduzima (desno) težina G fluida, pa se dobija sila P na zakrivljenu površinu A

Načelno na isti način se može rešiti zadatak gde zakrivljena površina A , na koju se traži sila, i ravna površina A_ξ zatvaraju zapreminu koja je van fluidne mase (nedostaje). Ovde se nedostajuća težina oduzima, tj. ovde je $\vec{P} = \vec{P}_\xi - \vec{G}$ – vidi desni crtež na slici 72–9.

III RAVANSKI ZADACI

Ravanski zadatak proučava se samo u jednoj ravni, a u svim ravnima paralelnim sa njom stanje je potpuno isto. U zadacima statike fluida pod dejstvom težine ravan proučavanja je vertikalna – to je ravan crteža na slici 72–10. Tu je površina A na koju se traži sila prikazana linijom (ta linija je presek površine A sa ravni u kojoj se proučavanje obavlja). U vertikalnoj ravni normalnoj na ravan proučavanja projekcija površine A (na koju se traži sila) je pravougaonik. Površina se pruža dužinom L u pravcu normalnom na crtež.



$$dP_X = p dA_X = p L dZ = \gamma L \frac{p}{\gamma} dZ = \gamma L dZ \quad P_X = \gamma L Z$$

$$dP_Z = p dA_Z = p L dX = \gamma L \frac{p}{\gamma} dX = \gamma L dX \quad P_Z = \gamma L X$$

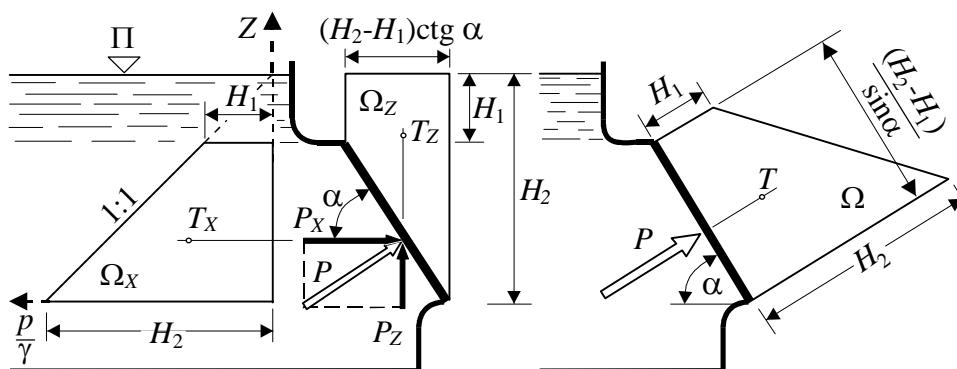
Slika 72–10 Za ravanski zadatak sile i raspored opterećenja srazmerni su sa odgovarajućim površinama na crtežu (T_X, T_Z = težišta površina - X , - Z)

Razlika između prikazivanja ravanskog zadatka i prikaza uz ranija razlaganja je u tom što se kod ravanskog zadatka površina potpuno prikazuje jednom linijom, a nadalje će se koristiti i mogućnost tačnog rasporeda hidrostatičkog opterećenja, pa i položaja sila, dok je ranije (kako je objašnjeno svojevremeno) prikaz površina, opterećenja i sila bio simboličan.

Na slici 72–10 napisane su elementarne komponente dP_X i dP_Z , a potom i njihovi integrali, tj. P_X i P_Z . Sile su predstavljene odgovarajućim površinama ($-x$, $-z$), a srazmernost uključuje i celokupan raspored opterećenja. Prema tome sile P_X i P_Z prolaze kroz težišta površina $-x$ i $-z$ (vidi sliku 72–10). Nije na odmet upozoriti da se ovde ne radi o težištu površine na koju se sila traži, nego o težištu površina koje prikazuju opterećenje.

Korisno je uputstvo za rešavanje praktičnih zadataka, gde je površina A na koju se traži sila pritiska deo omotača kružnog cilindra, upravo gde tu površinu predstavlja kružni luk. Za taj slučaj pravac delovanja sile P mora da prolazi kroz centar kruga.

Ako se radi o ravanskom zadatku na kosu površinu – slika 72–11 – kod njega se može nacrtati opterećenje po komponentama ili odmah rezultujuće.



Slika 72–11 Ravanski zadatak na kosu površinu; rešen je sa komponentama (levo) i neposredno sa rezultantom (desno)

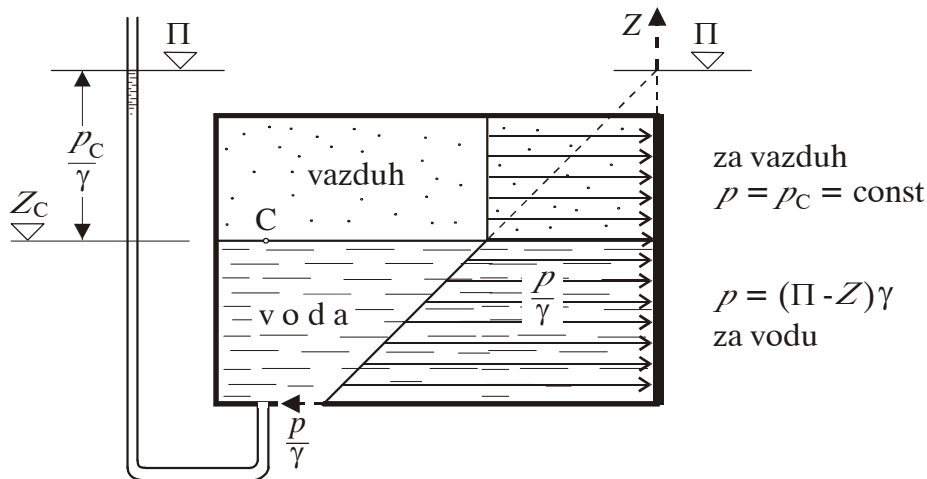
IV
SILE PRITISKA GASA
NA ZIDOVE ZATVORENOG SUDA

Razmatraju se sile kojima gas deluje na površine suda u kome je zatvoren. Može da bude ceo sud ispunjen gasom, ili se gas pod pritiskom nalazi iznad tečnosti. Specifična težina gasa je veoma malena (u odnosu na specifičnu težinu tečnosti), pa je uticaj sile težine gasa na promenu pritiska zanemarljiv (ako je sloj gasa ograničene visine). Tada se može uzeti za celu zapreminu gasa koji miruje u zatvorenom sudu:

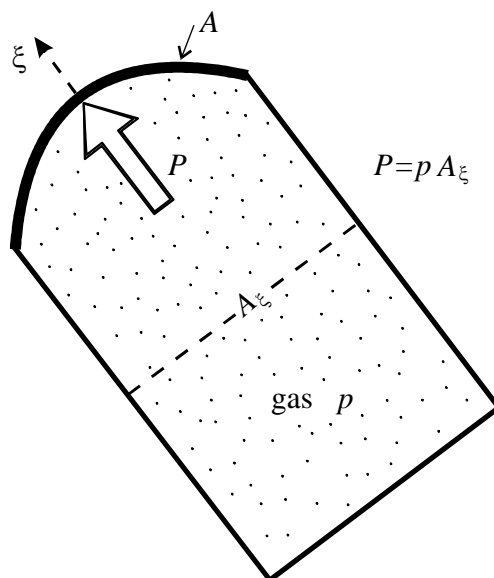
$$p = \text{const} \quad (72-23)$$

Kao primer data je slika 72-12.

Prihvatanje stava o konstantnom pritisku u celoj zapremini gasa u zatvorenom sudu dovodi do pravila: *Komponenta za bilo koji pravac sile kojom gas deluje na površinu suda u kome je zatvoren jednaka je sili na projekciju površine, normalnu na pravac za koji se komponenta određuje, prolazi kroz težište te projekcije* (sl. 72-13). Ovo pravilo se objašnjava zanemarenjem težine, pa važi uvek da je komponenta sile jednaka sili na projekciju (što je ranije, kod teških fluida, važilo samo za horizontalnu komponentu), a prolazak sile kroz težište projekcije nameće svuda isti pritisak.



Slika 72-12 Pritisak na bočni zid suda ispunjenog delimično vodom; iznad nje je vazduh pod pritiskom



Slika 72–13 Sila P pritiska gasa na površinu A je jednaka sili na projekciju A_ξ normalnu na pravac ξ , bez obzira da li je pravac horizontalan, vertikaln ili kos

Zanemarenje težine uslovalo je konstantan pritisak, a ovaj znači i konstantnu gustinu (jer postoji zavisnost između pritiska i gustine), pa tako stišljivost nije došla do izražaja – pri rešavanju jednog određenog zadatka, za jedno određeno stanje mirovanja gasa zatvorenog u sudu. To je trebalo naglasiti, radi otklanjanja svake zabune, jer ista masa gasa i u istom sudu može ispoljiti stišljivost, i posle nekog procesa doći pod drugi pritisak, a on nameće drugu gustinu – ovo se može postići, na primer, dosipanjem, ili isticanjem tečnosti (gas je iznad tečnosti). Može se postići i grejanjem, odnosno hlađenjem. Ako se u tok procesa ne ulazi, nego se razmatra novo ravnotežno stanje (posle završetka procesa) opet je za novo stanje pritisak konstantan (neka druga konstanta).

* * *

Ako se razmatra sloj gasa velike visine, uticaj težine se ne može zanemariti. Na primer, za određivanje atmosferskog pritiska u zavisnosti od visine, težina se mora uzeti u obzir, jer ga ona i stvara. Pritisak se menja sa visinom, a sa njime i gustina, tu stišljivost dolazi do izražaja, pa ne važe zakonitosti izvedene u ovom poglavlju.

DRAFT verzija 2001.

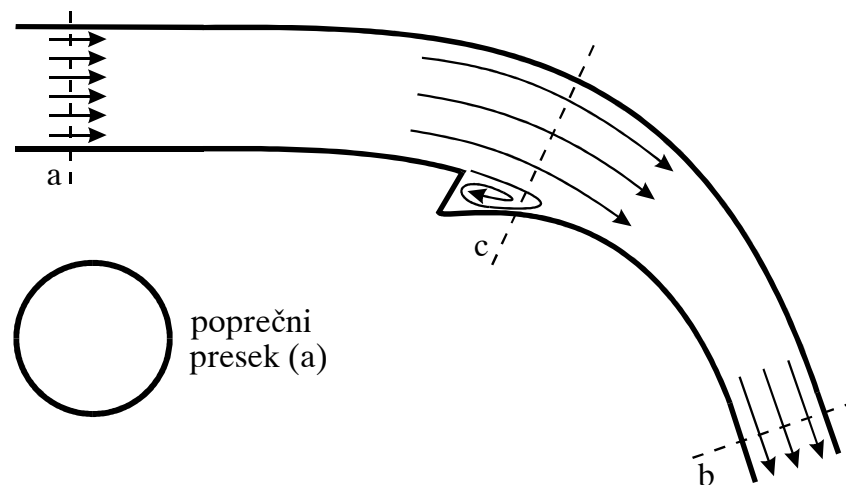
deo osmi

**OSNOVE ZA PROUČAVANJE
USTALJENIH TEČENJA
UPOREĐUJUĆI STANJA U DVA
POPREČNA PRESEKA TOKA**

DRAFT verzija 2001.

PRETPOSTAVKE I USLOVI

I. Proučavaće se zadaci gde celokupno razmatrano strujanje prolazi kroz određenu površinu, koja se može postaviti normalno na pravac strujanja. To je *struja* (ili tok) koja prolazi kroz svoj *poprečni presek*. Postavlja se uslov da je strujanje kroz poprečni presek, odabran za razmatranje, *pravolinijsko* i *paralelno*, što i omogućava postavljanje poprečnog preseka normalno na pravac strujanja. Ako se u struji može postaviti dva, ili više, poprečnih preseka, barem približno prema navedenom uslovu, stvara se mogućnost proučavanja na osnovu *upoređenja stanja u dva poprečna preseka*, uz pogodnost što se u pojedinom preseku stanje lako odredi, jer je strujanje veoma jednostavno. Treba dodati da uslov za poprečni presek struje ne mora biti ispunjen duž cele struje – dovoljno je da se pronađe dovoljan broj takvih preseka, što će omogućavati upoređivanje stanja u njima. Na slici 81–1 to je pokazano,



Slika 81–1 Struja kroz poprečne preseke (a) i (b) prolazi uz ispunjavanje uslova pravolinijskog paralelnog strujanja, dok taj uslov nije ispunjen u (c), gde je strujanje krivolinijsko, a uz donji zid povratno

gde se uočavaju dva poprečna preseka struje – (a) i (b) – sa ispunjenim uslovom o pravolinijskom paralelnom strujanju, dok to ne ispunjava presek (c) između njih. Pravolinijsko i paralelno strujanje dopušta da se uvedu veličine koje se odnose na presek, a ne na pojedine tačke preseka (kako se to postiže razjasniće se kasnije – pod III i IV) čime se proučavanja znatno olakšavaju.

Kao struje razmatraju se praktični zadaci strujanja u cevima, kanalima, rekama (i sličnim provodnicima), gde se lako pronalaze poprečni preseki sa paralelnim i pravolinijskim strujanjem, upravo barem sa približno takvim stanjem. Dobar deo praktičnih hidrauličkih zadataka svodi se na upoređivanja stanja u poprečnim presecima.

II. Proučavaće se samo struje *nestišljivog fluida* (gustina $\rho = \text{const}$) i *uz delovanje težine*, kao jedine zapreminske sile. To su uslovi uzeti u Hidrostatici, i tamo, na početku Poglavlja 71, objašnjeni. Treći tamošnji uslov, naveden pod (c), o nedelovanju tangencijalnih napona, ne može se sada prihvatiti kao ostvarljiv i pri kretanju, dok je opravdan pri mirovanju fluida. Naime, kod kretanja fluida neminovno je delovanje napona trenja između delića fluida. Međutim, može se razmatrati uz izostavljanja tangencijalnih napona, upravo uz izostavljanje celog devijatorskog dela napona, pa će se dobiti rešenje za „*idealni fluid*”. Ta rešenja se naknadno popravljaju, da bi odgovarala stvarnom stanju stvari – takav postupak je odomaćen u hidrauličkim razmatranjima, gde se procenjuje zbirni uticaj (za celu masu između dva poprečna preseka struje) onoga što unosi devijatorski deo napona (on unosi trenje unutar fluida i između fluida i čvrste granice).

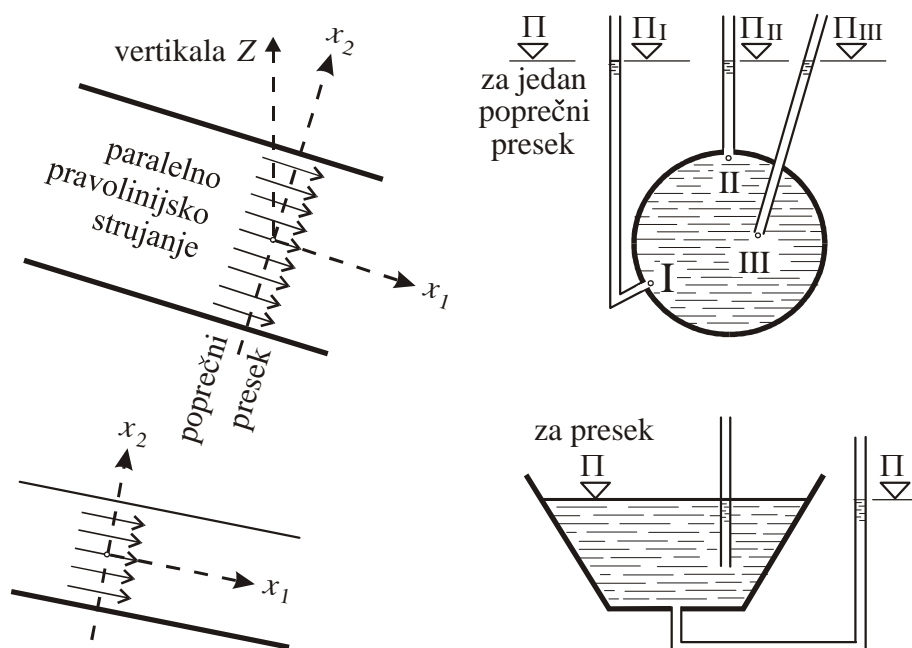
„Idealni” fluid ponegde se naziva „savršen”. Umesto naziva „idealni” pogodniji bi bio naziv „idealizovan”, jer fluid nije zapravo idealni, nego se tako zamišlja, on se idealizuje, prikazuje se savršenijim nego što jeste.

III. Posledica pretpostavljenog paralelnog strujanja je *hidrostaticki zakon rasporeda pritiska po poprečnom preseku struje*, tj. za sve deliće istog poprečnog preseka *pijezometarska kota je ista*, ona se odnosi na ceo presek. Podseća se da je *pijezometarska kota* uvedena izrazom (71–7). Ako se sa x_1 označi pravac strujanja (normalno na poprečni presek), a sa x_2 bilo koji pravac u ravni poprečnog preseka (sl. 81–2), prethodno

se piše:

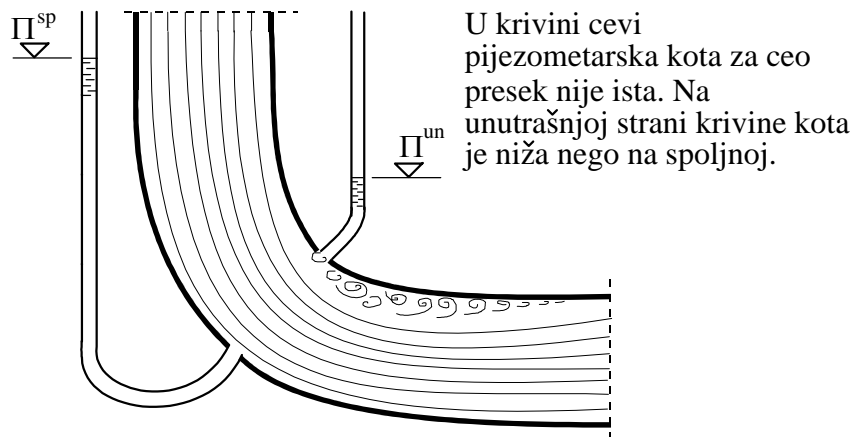
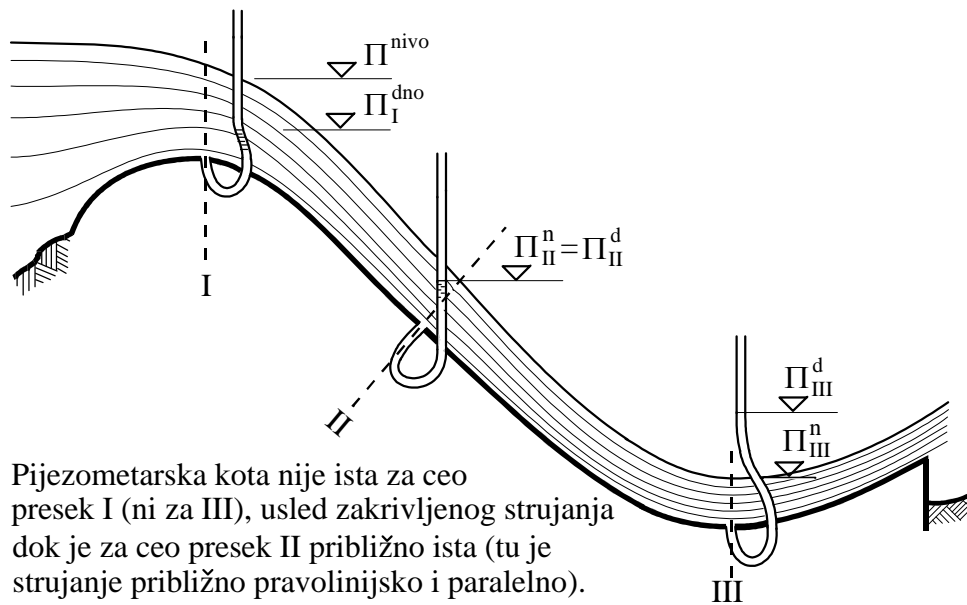
$$\frac{\partial(Z + p/\gamma)}{\partial x_2} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = 0 \quad (81-1)$$

Prihvatanje hidrostatičkog rasporeda pritiska opravdava se time što su brzine normalno usmerene na poprečni presek, pa u ravni toga preseka nema komponente brzine, pa nema ni ubrzanja, pa se sile uravnotežuju kao u hidrostatici.



Slika 81-2 Pijezometarska kota za ceo jedan poprečni presek struje je ista; gornji crtež odnosi se na struju pod pritiskom (cev), a donji na struju sa slobodnom površinom (kanal)

Korisno je naglasiti da se (81-1) ne ostvaruje, iako su brzine normalno usmerene na presek, ako je strujanje krivolinijsko – primeri na slici 81-3. Tada se pijezometarska kota povećava ka spoljašnjoj strani krivine, jer postoji ubrzanje u pravcu normalnom na strujanje (jer brzina menja pravac) iako u tom pravcu u posmatranoj tački nema komponente brzine. Unošenje ovoga ubrzanja remeti hidrostatičku raspodelu pritiska.



Slika 81–3 Promene piezometarske kote po preseku gde je strujanje zakrivljeno

IV. Brzina u je po celom poprečnom preseku struje normalno usmerena na presek pa se može napisati:

$$Q = \int_A u dA = vA$$

proticaj kroz poprečni presek struje

(81-2)

$$v = \frac{1}{A} \int_A u dA$$

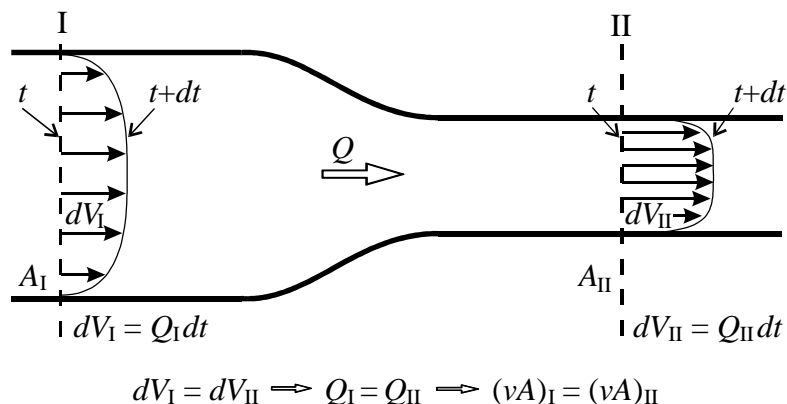
srednja (prosečna) brzina za presek

(81-3)

Srednja brzina v (data je posebna oznaka da se ne bi nadalje stalno pisalo u_{sr}) određuje proticaj Q (Q = protekla zapremina kroz presek u jedinici vremena), a vezana je za poprečni presek i upoređuju se srednje brzine duž struje, od preseka do preseka.

V. Raspravljaće se samo *ustaljena* strujanja – kako je naglašeno stavljanjem u sam naslov ovoga (Osmog) dela knjige. Ovo znači da se *lokalne vrednosti* (vrednosti u mestu) *ne menjaju tokom vremena*. Ustaljeno stanje u struji znači da utvrđeno stanje u presecima, i upoređenje stanja za preseke, važi za sve vremenske trenutke, a to znatno olakšava proučavanje. Na primer, srednja brzina i piježometarska kota, ili bilo koja veličina, za određeni presek ne menjaju se kroz vreme.

VI. Načela o *nepromenljivosti mase i neprekidnosti* (kontinuitetu) fluida primenjena na struju dovode do zaključka da proticaji kroz dva poprečna preseka moraju biti jednaki. Masa fluida koja u određenom trenutku zauzima zapreminu između poprečnih preseka (I) i (II) struje – slika 81-4 – ostaje nepromenjena i uvek će potpuno ispunjavati prostor koji zauzima („ne prekida se”). Stoga su jednake zapremine dV_I i dV_{II} , koju posmatrana masa za vreme dt napusti, odnosno osvoji (fluid je konstantne gustine, pa jednakost masa znači i jednakost zapremina, a ustaljenost ne dopušta promenu zapremine između preseka). Kako je $dV_I = Q_I dt$, a $dV_{II} = Q_{II} dt$, jednakost zapremine dV_I i dV_{II} znači jednakost proticaja pa se dobija:



Slika 81-4 Nepromenljivost mase i neprekidnost fluida znače jednakost za vreme dt napuštene zapremine dV_I i istovremeno osvojene zapremine dV_{II} ; iz toga proizilazi jednakost proticaja u oba preseka

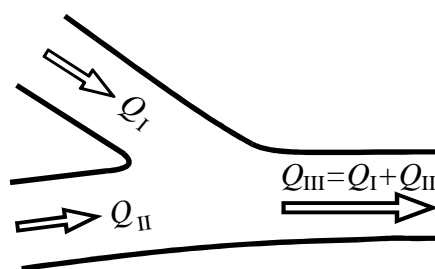
$$\begin{aligned}
 Q_I &= Q_{II} \\
 (vA)_I &= (vA)_{II}
 \end{aligned}$$

jednačina nepromenljivosti mase ili
jednačina neprekidnosti (kontinuiteta)

(81-4)

Jednačina se može primeniti na bilo koja dva preseka struje.

Za račvanje (razdvajanje ili spajanje) struja, jednačina neprekidnosti se iskazuje izjednačenjem zbira razdvojenih proticaja i zajedničkog proticaja. Dat je primer za spajanje – slika 81-5.



Slika 81-5 Nepromenljivost mase i neprekidnost fluida uslovljavaju izjednačenje proticaja: zbir proticaja u obe sastavnice jednak je proticaju posle spajanja

VII. Između dva poprečna preseka struje, struja je ograničena *omotačem*. Za uslovljeno ustaljeno strujanje ni on se ne menja kroz vreme. Ako je omotač *čvrsta nepokretna granična površina*, onda između njega i struje nema izmene energije (nema rada, jer se on ne kreće). Tako je kod tečenja pod pritiskom – u cevima, na primer. Neuzimanje mehaničke energije od strane omotača ne znači da se mehanička energija ne gubi – ona se unutar cele struje trenjem između delića preobraća u drugu vrstu energije, u toplotu. Kod kanala omotač je delimično čvrsta granična površina (dno i bokovi), a delimično je slobodna površina tečnosti. Sile trenja između vazduha i tečnosti po njenoj slobodnoj površini su zanemarljive u odnosu na sile trenja između čvrste granice i fluida. Zanemaruje se i izmena energije po slobodnoj površini, jer je beznačajna u odnosu na gubitke mehaničke energije unutar struje. Takva uproštavanja su opravdana, a znatno olakšavaju proučavanja struja sa slobodnom površinom.

Posebnu vrstu zadataka čine oni zadaci gde se pokretnim čvrstim omotačem obavlja prenos energije između fluida i omotača. Na taj način, radom omotača predaje se energija struji između dva poprečna preseka, ili se energija oduzima – tako se dovedena energija koristi za pokretanje fluida (pumpe, ventilatori), ili se energija fluida koristi za kretanje čvrste granice (turbine, vetrenjače).

DODATAK

U nastavku će se prethodni uslovi tumačiti sa stanovišta opštih zakonitosti izlaganih u Prvoj knjizi.

Uslov o paralelnom i pravolinijskom strujanju kroz poprečni presek struje, naveden pod (I), ako je strujanje turbulentno, odnosi se na osrednjene brzine, što znači da u ravni poprečnog preseka mogu da leže samo fluktuirajuće brzine.

Uslovi, opisani pod (II) o konstantnosti gustine i o delovanju težine kao jedine zapreminske sile ne ostvaruju se samo u izuzetnim zadacima kretanja tečnosti (koje onda treba posebno proučavati).

Uslov (III) o paralelnom i pravolinijskom stanju, normalno upravljenom na poprečni presek, prema ranijim navodima, ima za posledicu istu pijezometarsku kotu za sve deliće u istom preseku. To je otprilike tako, a nije potpuno tačno kod turbulentnog strujanja, iako je osrednjeno

strujanje pravolinijsko i paralelno. To se vidi iz sledećeg razmatranja. Za pravac 2 uzeće se pravac normalan na strujanje, tj. osa 2 leži u ravni poprečnog preseka struje. U jednačini (53–12), napisanoj za pravac 2 (tj. $j = 2$), ulaze:

$$\overline{u_2} = 0, \quad \overline{f_2} = -g\partial Z/\partial x_2, \quad \frac{\partial}{\partial x_1}(\overline{u'_i u'_2}) = 0$$

Drugi navod izražava zapreminsku silu (težinu), prema (28–6). Treći navod je napisan na osnovu uslova pravolinijskog i paralelnog strujanja, gde se u blizini poprečnog preseka ne menjaju turbulentne karakteristike toka, jer se presek ne menja (ili se menja zanemarljivo). Ovde je pravac 1 pravac strujanja. Korišćenjem napisana tri navoda u jednačini (53–12) dobija se:

$$0 = -\rho g \frac{\partial Z}{\partial x_2} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2}(-\rho \overline{u'_2 u'_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(-\rho \overline{u'_3 u'_2})$$

Uvrštavanjem osrednjene piježometarske kote $\overline{\Pi}$, koja je jednaka $Z + \overline{p}/\rho g$, prethodna jednačina se svodi na:

$$g \frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2}(\overline{u'_2 u'_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\overline{u'_3 u'_2}) = 0 \quad (81-5)$$

Uz pretpostavku da je strujanje i ravansko – u ravni (1, 2), prethodno postaje:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\overline{\Pi} + \frac{\overline{u'_2 u'_2}}{g} \right) = 0 \quad (81-6)$$

Prethodne jednačine ukazuju da fluktuacije brzina remete istovetnost piježometarske kote po poprečnom preseku, ali se može odmah nagovestiti da je to zanemarljivo (a o tome će, uz odgovarajuće dokaze, biti reči u narednim poglavljima), pa se može kao prihvatljiva aproksimacija uzeti da je osrednjena piježometarska kota ista za ceo presek.

Druga veličina vezana za poprečni presek je srednja brzina v , uvedena u (IV) i određena sa (81–3). Na nju, pa onda ni na proticaj Q , dat sa (81–2), kao ni na jednačinu (81–4), ne utiču fluktuirajuće brzine, jer se osrednjavanjem međusobno potire uticaj momentalnih kolebanja.

To je razloženo jednačinom (52–13), gde je tamošnje u_{sr} sada zamenjeno sa v . Prema tome, kod turbulentnog strujanja brzina v za presek je srednja brzina od kroz vreme već osrednjenih lokalnih brzina (za pojedine tačke):

$$v = \frac{1}{A} \int_A \bar{u} dA \quad (81-7)$$

Treba dodati da uvođenje srednje brzine zahteva i uvid u neravnomernost brzine po preseku, koji se može izraziti sa:

$$\beta = \frac{\int_A u^2 dA}{v^2 A} \quad (81-8)$$

$$\alpha = \frac{\int_A u^3 dA}{v^3 A} \quad (81-9)$$

Brojitelji u prethodnim izrazima su „statistički momenti” drugoga, odnosno trećega reda. Koeficijenti β i α imaju primenu tamo gde se pojavljuje kvadrat ili kub brzine. Kako se ovi koeficijenti odnose na presek, oni se više razlikuju od jedinice ako je neravnomernost brzine po preseku veća. Ako nisu mnogo različiti od jedinice, mogu se upotrebljavati $v^2 A$, odnosno $v^3 A$, umesto integrisanja kvadrata, odnosno kuba brzine, po preseku, što znatno pojednostavljuje proučavanje.

Kod turbulentnog strujanja u prethodnim izrazima treba uzimati osrednjene brzine u pojedinim tačkama, pa će β i α izražavati neravnomernost osrednjenih brzina:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{\int_A \bar{u}^2 dA}{v^2 A} \\ \alpha &= \frac{\int_A \bar{u}^3 dA}{v^3 A} \end{aligned} \right\} \quad (81-10)$$

Ako se vodi računa o fluktuacijama brzina u izrazima sa kvadratima i kubovima brzina, posle osrednjavanja ostaju i izvesni članovi sa fluktuacijama, što se vidi iz pravila o osrednjavanju (52–3) i (52–5). Međutim, ti uticaji fluktuacija obično bi manje menjali rezultat, nego što može da iznosi neminovna greška u proceni uticaja osrednjenih veličina.

Uslov ustaljenosti, napisan pod (V), treba kod turbulentnih strujanja shvatiti kao ustaljenost osrednjenih vrednosti što je ranije razjašnjeno i jednačinom (52–11) izraženo.

* * *

Nadalje se dodaje razmatranje o piježometarskoj koti u poprečnom preseku zakrivljene struje, jer će to dovesti do korisnih praktičnih zaključaka.

U tački zakrivljene strujnice osa 1 se postavlja u pravcu brzine, pa je $u_2 = u_3 = 0$, osa 2 se postavlja tako da elementarni deo strujnice dx_1 leži u ravni (1, 2) u kojoj je crtež na slici 81–6. U pravcu 2 nema brzine, ali ima ubrzanja (jer brzina menja pravac), dok u pravcu 3 nema ni brzine ni ubrzanja. Ovo znači da je osa 2 postavljena u pravcu normale (unutrašnje), a osa 3 u pravcu binormale na posmatranu strujnicu u posmatranoj tački. Može se napisati:

$$u_1 = u, \quad u_2 = u_3 = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \neq 0$$

pa se iz opšteg izraza za ubrzanje (21–4) dobijaju ubrzanja za posmatrani slučaj

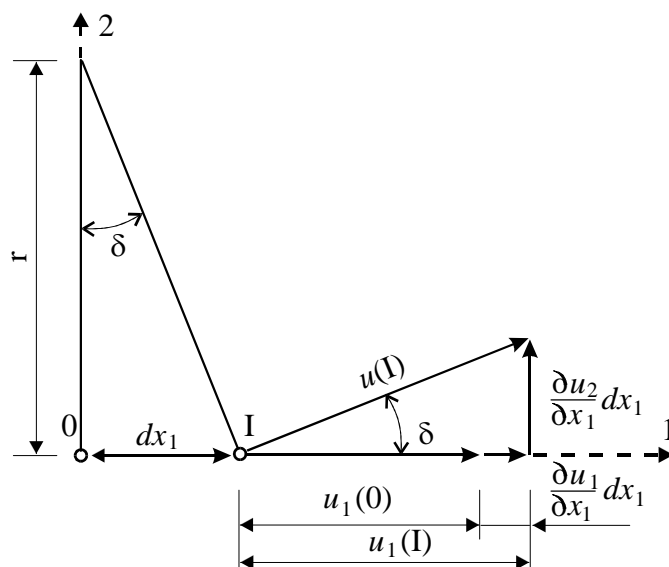
$$\left. \begin{aligned} \frac{Du_1}{Dt} &= \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_1^2}{2} \right) \\ \frac{Du_2}{Dt} &= \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \frac{Du_3}{Dt} &= \frac{\partial u_3}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (81-11)$$

Prva jednačina već je ranije napisana sa (35–10), gde se takođe napisalo ubrzanje za pravac strujanja.

Za ustaljeno strujanje, a takvo se nadalje uslovljava, otpadaju prvi članovi (lokalna ubrzanja) u prethodnim izrazima.

Ubrzanje u pravcu normale može se izraziti u pogodnom obliku ako se iskoristi slika 81–6, gde se iz sličnosti trouglova može napisati:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1}{u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1} = \frac{dx_1}{r}$$



Slika 81-6 Delić je iz položaja (0) stigao u (I) pri čemu se brzina promenila, sa $u(0) = u_1(0)$ na $u(I)$

gde je $r =$ poluprečnik zakrivljenja. Dodatni član uz u_1 je zanemarljiv (u odnosu na u_1) pa se iz prethodnog piše:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{u_1}{r} \quad (81-12)$$

što uvršteno u drugu jednačinu u (81-11), a za ustaljeno strujanje, daje:

$$\text{ubrzanje u pravcu normale} = u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{u^2}{r} \quad (81-13)$$

jer je $u_1 = u$. Ovaj izraz poznat je iz Mehanike materijalne tačke kao „centrifugalno ubrzanje”.

Za pravac binormale nema ubrzanja za ustaljeno strujanje, što je uočljivo iz treće jednačine u (81-11).

Primeniće se jednačina (35-5). Ona za $j = 2$ (pravac normale), na osnovu (81-13) i za ustaljeno strujanje, daje:

$$\frac{u^2}{r} = -g \frac{\partial}{\partial x_2} \left(Z + \frac{p}{\gamma} \right) = -g \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \quad (81-14)$$

a za pravac binormale dobija se

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_3} = 0 \quad (81-15)$$

jer u pravcu 3 nema ubrzanja, kako je malo pre zaključeno.

Primenjena jednačina važi za idealan fluid, ali će dovesti do upotrebljivih zaključaka, jer je uticaj devijatorskog dela napona zanemarljiv u odnosu na napisano. Ako pak nije tako, onda je uticaj krivine neznatan.

Jednačina (81-14) deljenjem sa g daje:

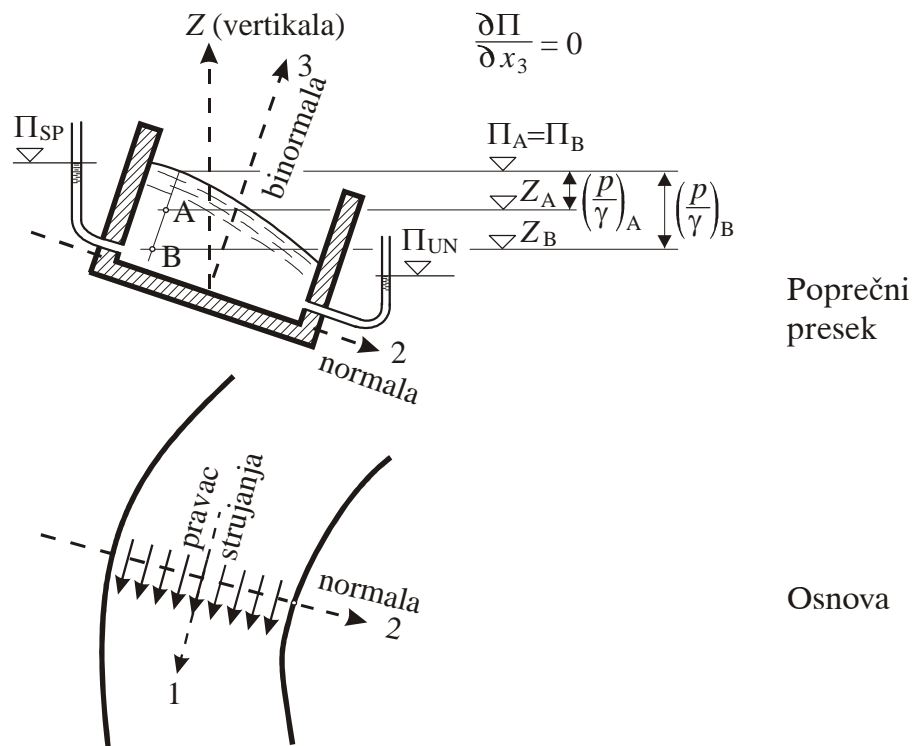
$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = -\frac{u^2}{gr} \quad (81-16)$$

što znači da piježometarska kota opada ka unutrašnjoj strani krivine (osovina 2 – vidi sl. 81-6 – usmerena je ka centru krivine). Tako je već najavljeno i prikazano slikom 81-3. Ono što izražavaju jednačine (81-15) i (81-16) uočljivo je na slici 81-7 gde se prikazuje strujanje u kanalu, u krivini. Duž prave paralelne sa osom 3 (sa binormalom) raspored pritiska je hidrostatički, dok to ne važi za pravac 2 (za pravac normale). Piježometarska kota je ujedno i kota nivoa za slobodnu površinu, pa se promena piježometarske kote u pravcu normale mora ispoljiti time što linija nivoa vode u poprečnom preseku nije horizontalna.

Na kraju, može se primetiti da izraze za piježometarsku kotu (81-15) i (81-16) treba prihvatiti kao osrednjenu piježometarsku kotu, koja je ustaljena, jer se ustaljenost tako i shvata ako je strujanje turbulentno.

Izraz (81-16) može se iskoristiti za procenu razlike između maksimalne i minimalne piježometarske kote u istom preseku (prva je na spoljnoj, a druga na unutrašnjoj strani krivine). Ako se kao aproksimacija prihvati da je brzina u po celom preseku približno ista (jednaka srednjoj brzini v) i ako se za poluprečnik zakrivljenja uzme konstantna prosečna vrednost r , integraljenjem (81-16) po x_2 , uz širinu preseka jednaku d (mereno po x_2 od spoljne do unutrašnje strane preseka), dobija se:

$$\Pi_{\text{SP}} - \Pi_{\text{UN}} = \frac{v^2 d}{gr} \quad (81-17)$$



Slika 81-7 Pijezometarska kota nije ista za ceo presek u krivini; ne menja se samo za deliće smeštene duž binormale (paralelne sa osom 3)

To se može primeniti na donji crtež na sl. 81-3, a onda d označava prečnik cevi, a r poluprečnik zakrivljenja osovine cevi. Na slici 81-7 za veličinu d treba shvatiti širinu kanala.

DINAMIČKA JEDNAČINA ILI JEDNAČINA O KOLIČINI KRETANJA

Na masu koja u određenom vremenskom trenutku zauzima prostor V između poprečnih preseka struje (I) i (II) – slika 82–1 – primeniće se stav:

$$\boxed{\left[\begin{array}{l} \text{priraštaj količine kretanja} \\ \text{posmatrane mase} \\ \text{u jedinici vremena} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{rezultanta sile koje} \\ \text{na tu masu deluju} \end{array} \right]} \quad (82-1)$$

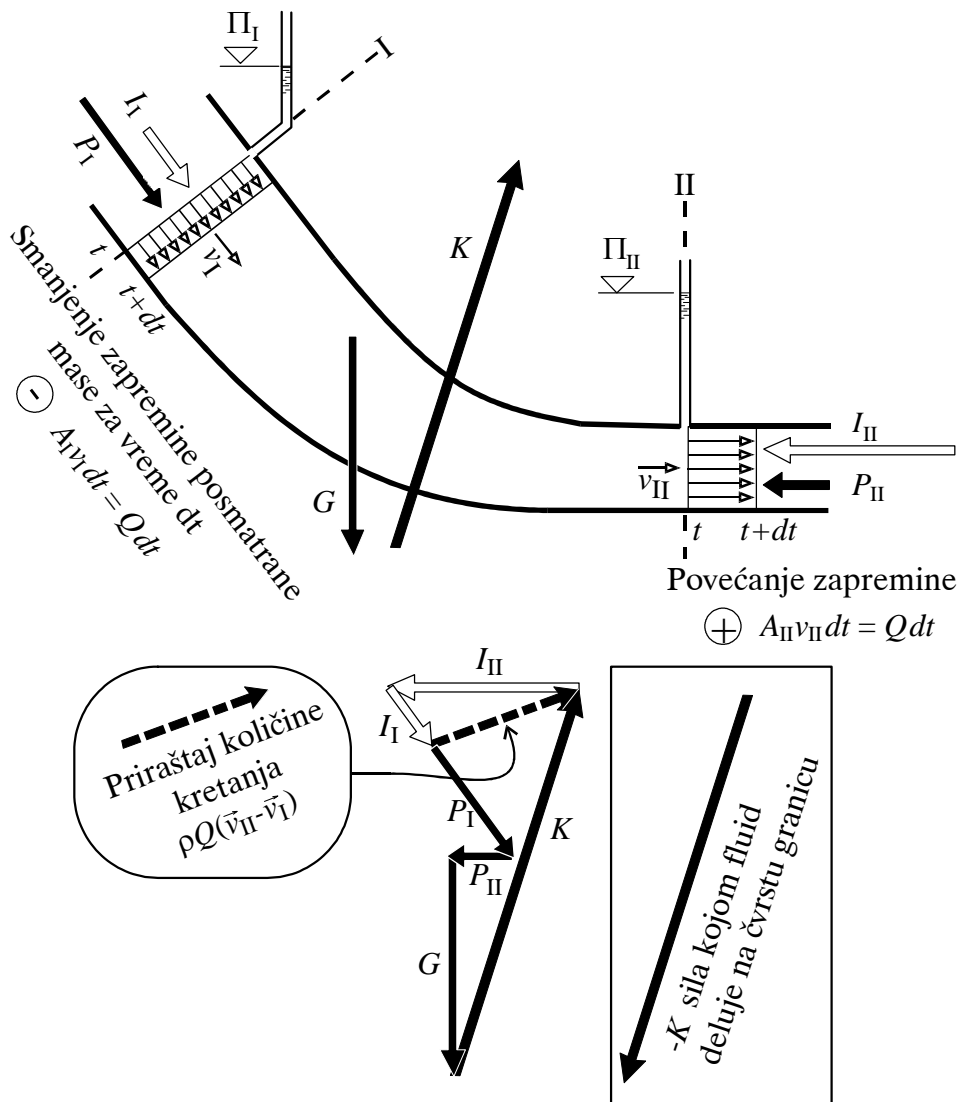
Sile koje na naznačenu masu deluju su:

1. zapreminska sila = težina = $G = \gamma V$ (γ = specifična težina),
2. površinska sila kojom čvrsta granica deluje na fluid = K ,
3. površinske sile na poprečne preseke struje: P_I i P_{II} .

Površinske sile moraju se uzeti po celoj zatvorenoj graničnoj površini koju zatvara zapremina V – to je i obuhvaćeno silama pod 2 i 3.

Sile P_I i P_{II} , deluju u poprečnim presecima struje, kroz koje se uslovljava pravolinijsko i paralelno strujanje (što ima za posledicu hidrostatički raspored pritisaka po preseku (razjašnjeno u Poglavlju 81, pod I i III), pa se sile P_I i P_{II} određuju po načelima hidrostatičke.

Posmatrana masa, koja u trenutku t zauzima prostor između preseka I i II struje, uz pretpostavku ravnomerno raspoređene brzine po celom preseku (srednja brzina v_I , odnosno v_{II}), za vreme dt pomerila se kako pokazuje slika 82–1. Zapremina koju je ta masa napustila uz presek I za vreme dt , mora da bude jednaka zapremini koju ista masa kroz isto vreme osvaja uz presek II, jer je masa nepromenljiva, a gustina konstantna. Shodno razjašnjenom uz sliku 81–4, navedena zapremina iznosi Qdt , pa nju ispunjava masa ρQdt (masa = gustina \times zapremina).



Slika 82–1 Sile koje deluju na masu fluida između preseka I i II; u sredini donjeg dela slike zatvoreni poligon predstavlja postignutu ravnotežu sila

Količina kretanja je proizvod iz mase i brzine, pa treba uočiti da se elementarni deo $\rho Q dt$ od posmatrane mase (koja u trenutku t_I zauzima prostor između preseka I i II), sa brzinom v_I , oduzima, dok se dodaje isti toliki elementarni deo mase, ali sa brzinom v_{II} . Odatle priraštaj

količine kretanja posmatrane mase za vreme dt iznosi:

$$\begin{array}{c}
 \text{ smanjeno } (-) \qquad \qquad \text{ povećano } (+) \\
 - \overbrace{\rho Q dt \vec{v}_I} + \overbrace{\rho Q dt \vec{v}_{II}} = \rho Q dt (\vec{v}_{II} - \vec{v}_I) \\
 \underbrace{\left[\begin{array}{c} \text{masa} \\ \text{brzina} \end{array} \right]}_{\left[\text{količina kretanja} \right]}
 \end{array}$$

pa se deljenjem sa dt dobija

$$\left[\begin{array}{c} \text{priraštaj količine kretanja mase} \\ \text{između preseka I i II,} \\ \text{u jedinici vremena} \end{array} \right] = \rho Q (\vec{v}_{II} - \vec{v}_I) \quad (82-2)$$

Uz prethodno treba naglasiti da izvođenje važi za pretpostavljenu ustaljenost struje – navedeno u Poglavlju 81, pod V, pa se promene količine kretanja unutar mase ne izražavaju u zbirnom iznosu (za celu posmatranu masu), jer jedno mesto napusti delić sa određenom brzinom i njega zameni drugi sa istom masom i istom brzinom (brzina se na mestu ne menja, jer je strujanje ustaljeno), pa iako svaki delić ponaosob može da menja količinu kretanja, ona se zbirno (za celu posmatranu masu) ne menja, izuzimajući samo elementarne zapremine uz granične preseke, gde nema zamene delića iz sastava posmatrane mase, a te promene izražava (82-2).

Prema početnom stavu (82-1), izraz (82-2) mora da bude jednak rezultanti svih delujućih sila:

$$\underbrace{\rho Q (\vec{v}_{II} - \vec{v}_I)}_{\left[\begin{array}{c} \text{priraštaj} \\ \text{količine} \\ \text{kretanja,} \\ \text{u jedinici} \\ \text{vremena} \end{array} \right]} = \underbrace{\vec{G}}_{\left[\begin{array}{c} \text{zapre-} \\ \text{minska} \\ \text{sila =} \\ \text{težina} \end{array} \right]} + \underbrace{\vec{K}}_{\text{po omotaču}} + \underbrace{\vec{P}_I + \vec{P}_{II}}_{\text{po poprečnim presecima}} \quad (82-3)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\left[\text{površinske sile} \right]}$
 dinamička jednačina
 za zapreminu između preseka I i II struje

Priraštaju količine kretanja, u jedinici vremena, izraženom sa (82-2) promeniće se znak, i to će se prihvatiti formalno kao sila – tzv. „fiktivna inercijalna sila”, pa se početni stav može shvatiti kao uslov „ravnoteže sila” (primenjuju se pravila statike), gde pored stvarno delujućih sila dolazi i:

$$\underbrace{\vec{I}}_{\left[\begin{array}{l} \text{inercijalna} \\ \text{„sila”} \end{array} \right]} = \underbrace{-\rho Q(v_{\text{II}}\vec{v}_1 - v_1\vec{v}_{\text{II}})}_{\left[\begin{array}{l} \text{smanjenje} \\ \text{količine kretanja} \\ \text{u jedinici vremena} \end{array} \right]} \quad (82-4)$$

Ova sila se može rastaviti na komponente, po preseccima, tj.:

$$\begin{aligned} \vec{I}_I &= \rho Q \vec{v}_I \\ \vec{I}_{II} &= \rho Q (-v_{II}) \end{aligned} \quad (82-5)$$

Na slici 82-1 prikazane su, za jedan primer, sve delujuće sile, uključivši i odgovarajuće komponente inercijalne „sile”. *Zbir svih sila čini nulu*, jer stoje „u ravnoteži”, što je na slici prikazano zatvorenim poligonom sila, a što se na osnovu jednačina (82-3), (82-4), (82-5) izražava sa:

$$\vec{I}_I + \vec{I}_{II} + \vec{G} + \vec{K} + \vec{P}_I + \vec{P}_{II} = 0 \quad (82-6)$$

Sve sile ne mogu biti unapred poznate. Jedna od njih se traži na osnovu svih ostalih koje su poznate. Obično se traži sila \vec{K} kojom čvrsta granica deluje na fluid (sve sile u prethodnoj jednačini, pa i sila \vec{K} , su sile koje deluju na posmatranu masu fluida). Tako je poznata i sila $-\vec{K}$, upravo sila koju prima čvrsta granica (opterećenje). Za određivanje ove sile moraju se poznavati pijezometarske kote u preseccima I i II, čime su poznate sile \vec{P}_I i \vec{P}_{II} , i uz to mora biti zadat proticaj, pa se znaju i sile \vec{I}_I i \vec{I}_{II} . Sila težine poznata je čim je određena masa na koju sile deluju. Druga vrsta zadatka je sa poznatom silom \vec{K} i poznatim proticajem, kao i poznatom jednom od sila pritiska (\vec{P}_I ili \vec{P}_{II}) pa se traži druga. Određivanje nepoznate sile i njene napadne tačke obavlja se na uobičajeni način statike: izjednačavanjem sila, odnosno uravnoteženjem momenata.

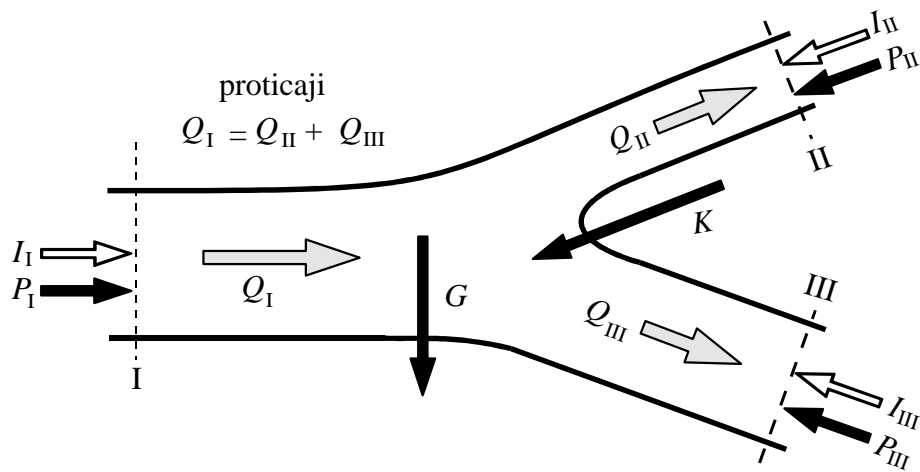
Sa praktičnog stanovišta, kao uputstvo za rešavanje zadataka, može se dati sledeće:

1. Sila pritiska na granični poprečni presek određuje se po *hidrostatičkim načelima* izloženim u Poglavlju 72. Treba se podsetiti da je ona jednaka *površini pomnoženoj sa pritiskom u njenom težištu*, da deluje unutra (ka posmatranoj masi) ako je pijezometarska kota iznad težišta, a suprotnim smerom ako je ova kota ispod težišta. Napadna tačka nije u težištu preseka (izuzevši presek u horizontalnoj ravni), ali u nizu zadataka rastojanje između težišta preseka i napadne tačke sile pritiska je beznačajno po praktične posledice, mada treba proveriti da li je zaista tako.
2. Komponenta inercijalne „sile” za bilo koji presek deluje uvek *ka masi (unutra)* i u težištu preseka (jer se zanemaruje neravnomernost brzine po preseku). Unutrašnji smer delovanja je posledica dodavanja (u jedinici vremena) količine kretanja $\rho Q\vec{v}$ tamo gde posmatrana masa dobija novu zapreminu, a oduzimanja tamo gde se zapremina napušta. Odgovarajuće komponente inercijalne „sile” su suprotno usmerene, pa stoga komponenta ima smer brzine na preseku gde masa napušta zapreminu, a suprotan smer tamo gde je osvaja – u oba slučaja to je smer unutra, ka masi.

* * *

Na isti način može se posmatrati masa u čiju graničnu površinu ulaze i više od dva poprečna preseka struje. Merodavno je samo da je fluid presečen (radi izdvajanja mase koja se posmatra) po površinama koje imaju osobine poprečnog preseka (pravolinijsko i paralelno strujanje normalno na presek), jer to omogućava pisanje sile pritiska i inercijalnih „sila” kako je izloženo – svaki presek će imati po jednu silu pritiska i po jednu inercijalnu – na slici 82-2 je dat primer gde su tri granična preseka struje.

Omotač struje ne mora biti čvrsta granica, već može da bude i granica između tečnosti i vazduha. Kod otvorenih tokova, jedan deo omotača je čvrsta granica (dno i bokovi provodnika tečnosti – na primer kanala), a drugi je slobodna površina tečnosti gde je omotač struje granična površina između vode i vazduha. Kod takvih zadataka računa se da sila \vec{K} deluje samo između tečnosti i čvrste granice, a u odnosu na tu silu, sila trenja između tečnosti i vazduha je zanemarljiva. Ovo se može objasniti lakom pokretljivošću vazduha, neuporedivo lakšom



Slika 82–2 Sile na zapreminu između preseka (I), (II) i (III) – za primer račvanja struje

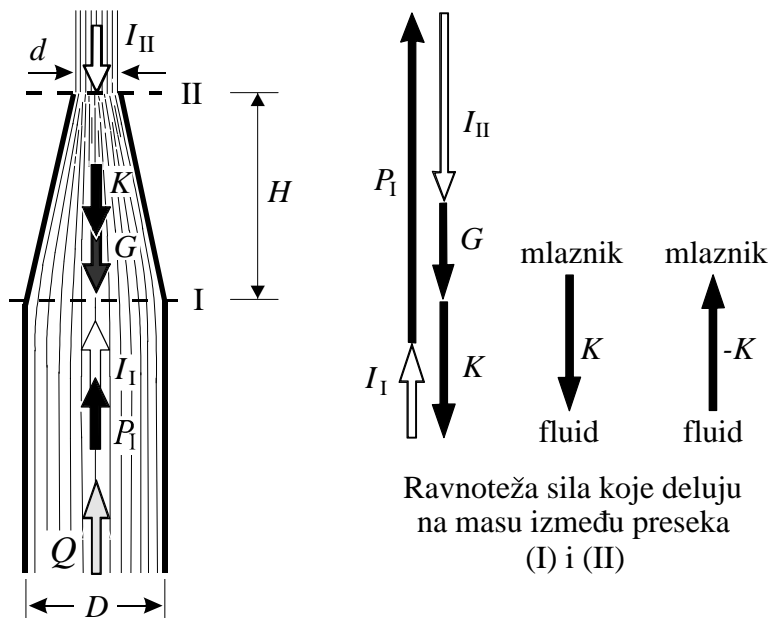
nego kod vode, jer je gustina vazduha skoro 1000 puta manja od gustine vode, pa sila koja je za vodu zanemarljiva može da pokreće tanak sloj vazduha uz površinu vode.

* * *

U nastavku biće izložena tri primera primene jednačine.

PRIMERI

Prvi primer. Na slici 82–3 prikazan je prvi primer uz prethodna razmatranja. Traži se sila kojom struja napada mlaznik (omotač zarubljene kupe) uz poznate vrednosti za proticaj Q , gustinu ρ , prečnik D cevi i prečnik d otvora mlaznika, i pritisak p_I u preseku (I). Ovaj pritisak je isti za sve deliće na preseku (I) jer je presek u horizontalnoj ravni. Uz ovaj zadatak treba primetiti da pritisak p_I ne može biti nezavisan od proticaja, a ta veza će se utvrditi u narednom poglavlju (83) kada će se izlaganja osvrnuti ponovo na ovaj primer. Prema tome, postavljeni zadatak je neodređen, nerešiv, bez dopunskih saznanja veze između pritiska p_I i proticaja Q , pa napisano rešenje pretpostavlja poznavanje te veze, za sada nepoznate, uz obećanje da će se ta veza kasnije dati. Da ne bi ostali u razočaranju za mogućnosti primene jednačine (82–6),



Slika 82–3 Uz prvi primer – sila na mlaznik (omotač između preseka I i II)

daće se malo kasnije dva primera gde se ne traže nikakva dopunska saznanja za primenu te jednačine.

Rečeno je da je pritisak p_I isti za ceo presek (I), pa je onda sila pritiska:

$$P_I = p_I A_I = p_I \frac{D^2 \pi}{4}$$

Sila pritiska u preseku (II) je jednaka nuli, tj.:

$$P_{II} = 0$$

jer je pritisak p_{II} isti u celom preseku (presek je takođe horizontalan), a on mora biti jednak nuli na obimu preseka, gde je mlaz oslobođen pritiska. Naime, pjezometarska kota za ceo presek je ista, a onda je pritisak isti, pošto je ista položajna kota za sve tačke u preseku. Komponente inercijalne „sile” u prescima su:

$$I_I = \rho Q v_I \quad I_{II} = \rho Q v_{II}$$

gde su v_I i v_{II} brzine:

$$v_I = \frac{Q}{\frac{1}{4}\pi D^2} \quad v_{II} = \frac{Q}{\frac{1}{4}\pi d^2}$$

Težina tečnosti u zarubljenoj kupi, između preseka (I) i (II) iznosi:

$$G = \gamma \frac{D^2 \pi H}{4} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{d}{D} + \frac{d^2}{D^2} \right)$$

γ = specifična težina.

Prema tome, izostavljanjem sile P_{II} , „ravnoteža sila” (u koje su uključene inercijalne) za posmatranu masu – između (I) i (II) daje:

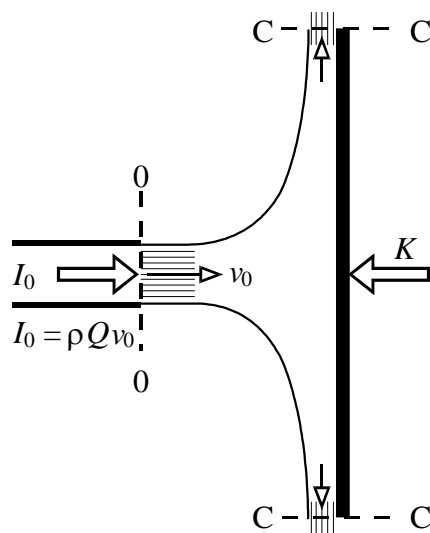
$$-I_I - P_I + G + I_{II} + K = 0$$

što je i prikazano na sl. 82–3. $-K$ je sila kojom čvrsta granica (omotač) deluje na fluid.

Jednačina ravnoteže omogućava određivanje sile K ako su ostale poznate, a to pretpostavlja i poznavanje pritiska u preseku (I), što sadašnja saznanja ne omogućavaju – na to pitanje biće odgovoreno u primeru narednog poglavlja.

Drugi primer. Ovde se razmatra – sl. 82–4 – udar horizontalnog mlaza tečnosti u kružnu ploču postavljenu normalno na mlaz. Dolazna brzina mlaza, u preseku (0), je v_0 , a proticaj Q . Posle udara mlaz napušta ploču brzinama paralelnim sa pločom. Traži se sila kojom mlaz udara u ploču (odnosno sila kojom se ploča odupire mlazu).

Uravnotežiće se sile, u pravcu dolaznog mlaza (to je normala na ploču), koje deluju na masu tečnosti između preseka (0) dolaznog mlaza i preseka (C) kroz koji mlaz napušta ploču. Presek (C) je cilindrična površina koja prati obim ploče (obim kruga). Bitna je pretpostavka da struja napušta ploču brzinama paralelnim sa pločom, jer to znatno pojednostavljuje zadatak, pošto u ravnotežu sila za posmatrani pravac (normalan na ploču) ne ulaze onda komponente inercijalne 'sile' na presecima napuštanja ploče. U sile u posmatranom pravcu, pošto je on horizontalan, ne ulazi ni težina posmatrane mase tečnosti. Ne ulazi ni trenje između ploče i tečnosti. Trenje između mlaza i vazduha se zanemaruje. Smatra se da u preseku (0) ne deluje sila pritiska, jer



Slika 82–4 Uz drugi primer – sila (K) kojom se ploča odupire udaru mlaza

pritiska po obimu mlaza nema (mlaz je slobodan), a u mlazu nevelikoga preseka mogu se onda očekivati zanemarljivi pritisci. U ravnotežu sila u posmatranom horizontalnom pravcu ulaze, shodno prethodnim obrazloženjima, samo komponenta inercijalne „sile” u preseku i sila K kojom ploča deluje na fluid:

$$K = I_0 = \rho Q v_0$$

Ovo je horizontalno upravljena sila, normalna na ploču, i deluje u pravcu osovine dolazaceg mlaza. Nema komponente u drugom pravcu kojom mlaz deluje na ploču (ili ploča na mlaz) – ovo je tačno jer sila trenja deluje u vertikalnom pravcu.

* * *

Posmatranjem dela struje između njenih preseka, kao celine, i primenom jednačine u ovom poglavlju, moguće je, kao što prethodni primeri pokazuju, dobiti ukupnu silu na čvrstu granicu (u posmatranim primerima silu na mlaznik, odnosno ploču), ali ne i raspored pritisaka, odnosno napone po granici. Za taj raspored bi se moralo ulaziti u raspored brzine i napona po celoj zapremini, što izložena jednačina ne

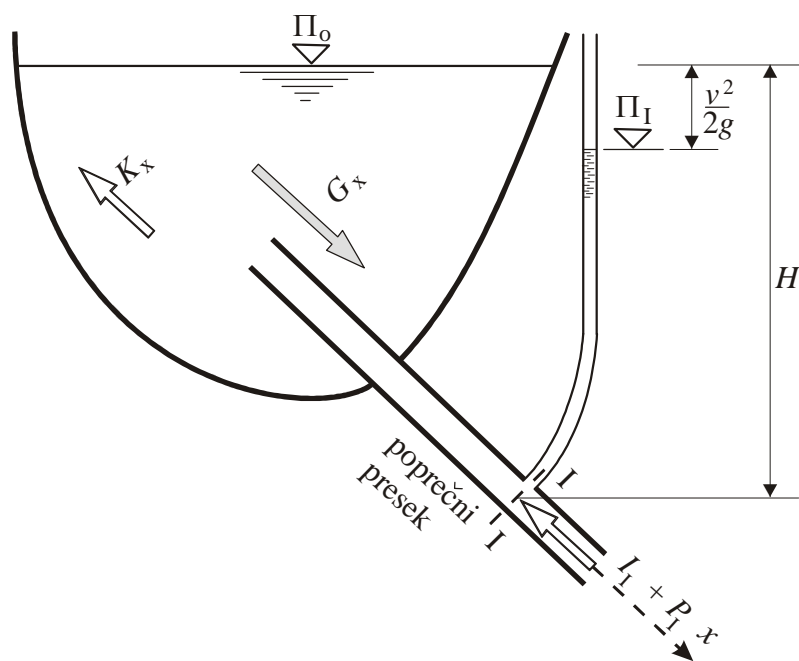
omogućava. Uz ovo treba dodati da rešenje navedene sile traži poznavanje svih ostalih sila koje ulaze u jednačinu, uključivši i inercijalne.

Druga vrsta zadataka pretpostavlja poznavanje svih sila izuzev sile pritiska u jednom preseku, a ona se onda određuje. Rešavanje ovakvih zadataka zahteva poznavanje sile K , upravo raspored napona po granichnoj površini, što je samo u izuzetnim slučajevima poznato. Jedan od takvih zadataka je sledeći primer.

Treći primer. Traži se sila pritiska P_I u preseku (I) cevi – slika 82–5 – pri proticaju Q (brzina $v = Q/A$, gde je A presek struje u cevi). Gustina fluida je ρ . Posmatra se masa smeštena u sudu i cevi do preseka (I) i postavlja ravnoteža sila u pravcu osovine cevi (označena kao x -pravac):

$$G_x - K_x - I_I - P_I = 0 \quad (a)$$

G_x = komponenta težine fluida u x -pravcu, $I_I = \rho Qv = \rho Av^2$. K_x je komponenta sile kojom u x -pravcu čvrsta granica deluje na fluid. Ako



Slika 82–5 Uz treći primer – određivanje sile P_I pritiska u preseku I pri brzini v

se zanemare tangencijalni naponi (trenje) po unutrašnjoj površini cevi i po spoljnoj za deo cevi koji je uguran u sud, sila K_x je sila kojom zidovi suda deluju na fluid, u x -pravcu.

Rešenje zadatka omogućava (i to treba naglasiti) okolnost što je cev ugurana u sud, pa je njen ulaz dovoljno daleko od zidova suda da se uz zidove ne oseti strujanje, uz njih je stanje kao da fluid miruje. Za cev zatvorenu po preseku (I), a za stanje mirovanja ostvaruje se:

$$G_x - K_x = \gamma AH \quad (b)$$

Desna strana jednačine je sila pritiska na površinu A (presek cevi) čije je težište za visinu H niže od nivoa u sudu.

Rečeno je da se sila K_x neće menjati ni kada fluid poteče, a neće ni težina, pa je $G_x - K_x$ isto u jednačinama (a) i (b), a to znači da se u (a) može $G_x - K_x$ zameniti sa γAH , pa se dobija:

$$P_I = \gamma AH - \rho Av^2$$

Pritisak p_I u preseku se dobija deljenjem sile P_I sa A , a pijezometarska kota je viša od težišta preseka za p_I/γ :

$$\frac{p_I}{\gamma} = H - \frac{v^2}{g}$$

što znači da je pijezometarska kota Π_I za presek (I) niža od nivoa u rezervoaru za v^2/g .

Zadatak se ne bi mogao rešiti da cev nije ugurana u rezervoar, jer onda pritisci na bočni zid rezervoara uz ulaz cevi ne bi bili isti pri mirovanju i tečenju (a nema mogućnosti da se postupcima koji se sada izlažu odredi kako bi se promenili).

U zadatku se mogla zadati pijezometarska kota Π_I i onda bi se mogla odrediti brzina v , odnosno proticaj $Q = vA$ (razume se za poznati nivo u sudu).

JEDNAČINA MEHANIČKE ENERGIJE

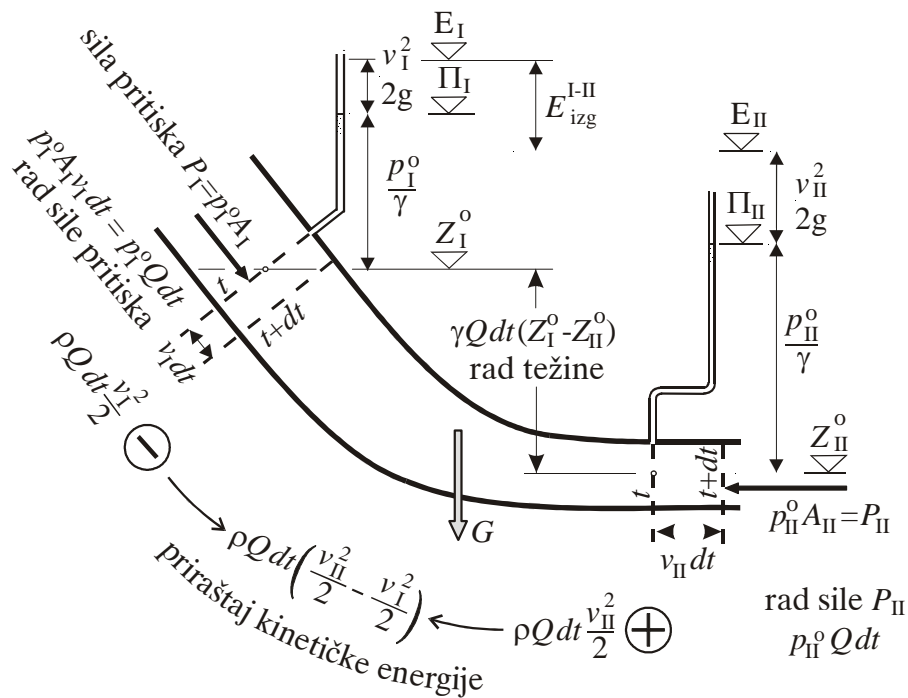
Opet će se uzeti u razmatranje masa između dva poprečna preseka struje koja za vreme dt napusti uz presek (I) elementarnu zapreminu Qdt , da bi istu toliku zapreminu istovremeno osvojila uz presek (II), što je već prikazano na slikama 81-4 i 82-1, a sada opet, sa drugim namenom, na slici 83-1. Sada će se na istu masu primeniti stav:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{priraštaj} \\ \text{kinetičke energije} \\ \text{posmatrane mase} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{rad sila na toj masi, umanjen} \\ \text{za energiju koja iz mehaničke} \\ \text{pređe u neku drugu vrstu energije} \end{array}} \quad (83-1)$$

Istim rasuđivanjem kojim se u Poglavlju 82 odredio priraštaj količine kretanja posmatrane mase (dobilo se $\rho Qdt(\vec{v}_{II} - \vec{v}_I)$) ovde će se dobiti za priraštaj kinetičke energije $\rho Qdt(v_{II}^2 - v_I^2)/2$, jer je *kinetička energija skalarna veličina i proizvod mase i polovine kvadrata brzine*, a količina kretanja je vektorska veličina i proizvod mase i brzine, pa je odgovarajuća zamena $v^2/2$ za \vec{v} , što je i urađeno. Pregledno napisano to izgleda ovako:

$$\begin{array}{l} \text{smanjeno (-)} \quad \quad \quad \text{povećano (+)} \\ - \underbrace{\rho Qdt \frac{v_I^2}{2}}_{\substack{\text{[masa]} \\ \text{[kinetička} \\ \text{energija]}}} + \underbrace{\rho Qdt \frac{v_{II}^2}{2}}_{\substack{\text{[masa]} \\ \text{[kinetička} \\ \text{energija]}}} = \underbrace{\rho Qdt \left(\frac{v_{II}^2}{2} - \frac{v_I^2}{2} \right)}_{\substack{\text{priraštaj} \\ \text{kinetičke energije} \\ \text{posmatrane mase} \\ \text{za vreme } dt}} \end{array} \quad (83-2)$$

I ova jednačina, kao i dinamička jednačina (82-3), važi samo za ustaljeno strujanje, čime se promene energije svode samo na promenu uz granične preseke.



Slika 83–1 Uz izvođenje jednačine energije

Na posmatranu masu deluju sile: težina G , površinske sile P_I i P_{II} (po presecima struje) i K (po omotaču), kako je u prethodnom izlaganju i prikazano – slika 82–1.

Rezultat rada sile težine na celu posmatranu masu može se izraziti radom koji je jednak radu premeštanja zapremine $Q dt$ (težine $\gamma Q dt$, sa $\gamma = \rho g$ je označena specifična težina), sa Z_I^0 na Z_{II}^0 . Navedene kote odnose se na težišta preseka. Može se napisati:

$$\left[\begin{array}{l} \text{rad sile težine na} \\ \text{posmatranu masu} \\ \text{za vreme } dt \end{array} \right] = \gamma Q dt (Z_I^0 - Z_{II}^0) \quad (83-3)$$

Uz prethodno korisno će doći sledeće razjašnjenje: ne premešta se za vreme dt ista zapremina sa položaja Z_I^0 na Z_{II}^0 . Iako se rad obavlja na svim delićima i svi se pomeraju (izuzetak jedino čine horizontalna pomeranja gde rada težine nema), rezultat toga rada za masu kao celinu obračunski se svodi na oduzimanje elementarne težine $\gamma Q dt$ uz

preseka (I) (na koti Z_I^0), a dodavanje iste tolike težine na koti Z_{II}^0 .

Površinske sile P_I i P_{II} , kako je u Poglavlju 82 objašnjeno, određuju se po načelima hidrostatičke (pritisk u težištu pomnožen površinom). Za vreme dt pomeranje preseka iznosi $v_I dt$, odnosno $v_{II} dt$ (to je brzina pomnožena sa vremenom, a pretpostavlja se po celom preseku ista brzina, jednaka srednjoj brzini). Sa navedenim pomeranjima treba množiti odgovarajuće sile pritiska, pa će se dobiti rad, pri čemu treba voditi računa da su sile i pomeranja u istom smeru kod preseka (I), a suprotnog smera kod preseka (II). Sve navedeno dovodi do izraza za rad sila P_I i P_{II} kroz vreme dt :

$$\overbrace{\underbrace{[sila P_I]}_{\underbrace{p_I^0}_{\text{pritisk u težištu}} \underbrace{A_I}_{\text{površina preseka}}}} \overbrace{\underbrace{[pomeranje]}_{\underbrace{v_I}_{\text{brzina}} \underbrace{dt}_{\text{vreme}}}} - p_{II}^0 A_{II} v_{II} dt = (p_I^0 - p_{II}^0) Q dt \quad (83-4)$$

U prethodnom je iskorišćena jednačina nepromenljivosti mase (81-4) tj:

$$Q = v_I A_I = v_{II} A_{II}$$

Od sila na posmatranu masu preostala je još sila K , ali njome spoljna čvrsta granica ne može da obavlja rad, jer je ta granica nepokretna, što je već objašnjeno u Poglavlju 81, pod VII. Ako je jedan deo granične površine struje slobodna površina vode, zanemarljiva je izmena energije između vode i vazduha – ovo je takođe već rečeno u navedenom odeljku. Naime, u odnosu na gubitak energije unutar struje (o tome će biti reči u nastavku), zanemarljiva je energija kojom voda pokreće tanak sloj vazduha, čija je gustina skoro 1000 puta manja od gustine vode. Dakle, rad sile K na posmatranu masu jednak je nuli, odnosno zanemarljiv, tako da je sa (83-3) i (83-4) obuhvaćen rad svih sila.

Iako elementarne površinske sile (usled stvorenog naponskog stanja) deluju po celoj posmatranoj masi, njihova rezultanta se svodi na sile po graničnoj površini posmatrane mase, tj. po poprečnim presecima i omotaču, a to je obuhvaćeno. Sa ovim bi se razmatranje rada sila i završilo, i on bi se izjednačavao sa priraštajem kinetičke energije, kada bi celokupan rad površinskih sila ostao u okviru mehaničke energije, ali tako nije. Izvestan deo rada površinskih sila ne ostaje u okviru

mehaničke energije, nego njime mehanička energija nepovratno prelazi u drugu vrstu energije – u toplotnu, i taj rad je za mehaničku energiju izgubljen. Stoga se on oduzima od bilansa mehaničke energije i izražava se sa $E_{izg}G$, gde je G težina koja se posmatra, pa je E_{izg}^{I-II} = iznos (za posmatrani deo struje, od preseka I do II) energije, koja se po jedinici težine, gubi za mehaničku energiju, kroz rad površinskih sila. To je rad napona trenja između delića fluida.

Izrazi (83–2) do (83–4) odnose se na energiju, odnosno rad izvršen za vreme dt , pa za isto vreme treba obračunati i izgubljenu energiju. Težina koja kroz vreme dt prolazi iznosi γQdt , pa (83–2) do (83–4) treba dodati:

$$E_{izg}\gamma Qdt \quad (83-5)$$

Sada se može napisati jednačina za izrečeno sa (83–1), koristeći izraze (83–2), (83–3), (83–4) i (83–5), pošto se prethodno podele sa γQdt . Dobija se:

$$\underbrace{\frac{v_{II}^2}{2g} - \frac{v_I^2}{2g}}_{\substack{\text{priraštaj} \\ \text{kinetičke} \\ \text{energije}}} = \underbrace{(Z_I^0 - Z_{II}^0) + \left(\frac{p_I^0}{\gamma} - \frac{p_{II}^0}{\gamma}\right) - E_{izg}^{I-II}}_{\substack{\text{rad sila umanjen za prelaz iz} \\ \text{mehaničke u drugu vrstu energije}}} \quad (83-6)$$

po jedinici težine

Umesto $Z^0 + p^0/\gamma$ (gde su veličine vezane za težište preseka) pogodnije je uzeti Π – to je pijezometarska kota koja se odnosi na ceo presek. Korišćenjem toga jednačina (83–6) se preinačuje u:

$$\boxed{\frac{v_{II}^2}{2g} - \frac{v_I^2}{2g} = \Pi_I - \Pi_{II} - E_{izg}^{I-II}} \quad (83-7)$$

Rad se može shvatiti kao smanjenje potencijalne energije, a ona je mogućnost za obavljanje rada, jer ostvareni rad znači iskorišćenje te mogućnosti za onoliko koliko on obavi. Ako se jedinica težine nalazi na koti Z , ona ima mogućnost da obavi rad Z (ima potencijalnu energiju) i taj rad će obaviti (iskoristiće se mogućnost) ako se ta jedinica težine spusti na $Z = 0$. Rad po jedinici težine, shodno jednačini (83–6) iznosi

$Z_I^0 - Z_{II}^0$ i za toliko je smanjena potencijalna energija. Isto se pojavljuje i kod rada sila pritiska: on je $(p^0/\gamma)_I - (p^0/\gamma)_{II}$, što znači da se p/γ može prihvatiti kao potencijalna energija, opet po jedinici težine, ali zbog delovanja pritiska. Za sada, na osnovu prethodnog, treba Π , kao zbir $Z + p/\gamma$, shvatiti kao združenu potencijalnu energiju usled težine i pritiska. Treba napomenuti da je ta potencijalna energija izražena u odnosu na nultu kotu i nulti pritisak, jer je mogućnost za obavljanje rada spuštanja do $Z = 0$, i smanjenja pritiska do $p = 0$.

Uvođenje pojma potencijalne energije u iznetom smislu dozvoljava iskazivanje zbira $\Pi + v^2/2g$ na sledeći način:

$$\underbrace{E}_{\text{ukupna energija}} = \underbrace{\Pi}_{\text{potencijalna energija}} + \underbrace{\frac{v^2}{2g}}_{\text{kinetička energija}} \quad (83-8)$$

po jedinici težine

Jednačina (83-7) se sada tumači na sledeći način:

$$\underbrace{\left(\underbrace{\left(\Pi + \frac{v^2}{2g} \right)_I}_{E_I} - \underbrace{\left(\Pi + \frac{v^2}{2g} \right)_{II}}_{E_{II}} \right)}_{\text{smanjenje mehaničke energije}} = \underbrace{E_{\text{izg}}^{I-II}}_{\text{prešlo iz mehaničke u drugu vrstu energije}} \quad (83-9)$$

po jedinici težine

Ako se zamisli fluid kod koga nema otuđenja mehaničke energije („idealni fluid“), za njega će prethodna jednačina izražavati nepromenljivost mehaničke energije struje:

$$\left(\Pi + \frac{v^2}{2g} \right)_I = \left(\Pi + \frac{v^2}{2g} \right)_{II}, \quad \text{tj.} \quad E_I = E_{II} \quad (83-10)$$

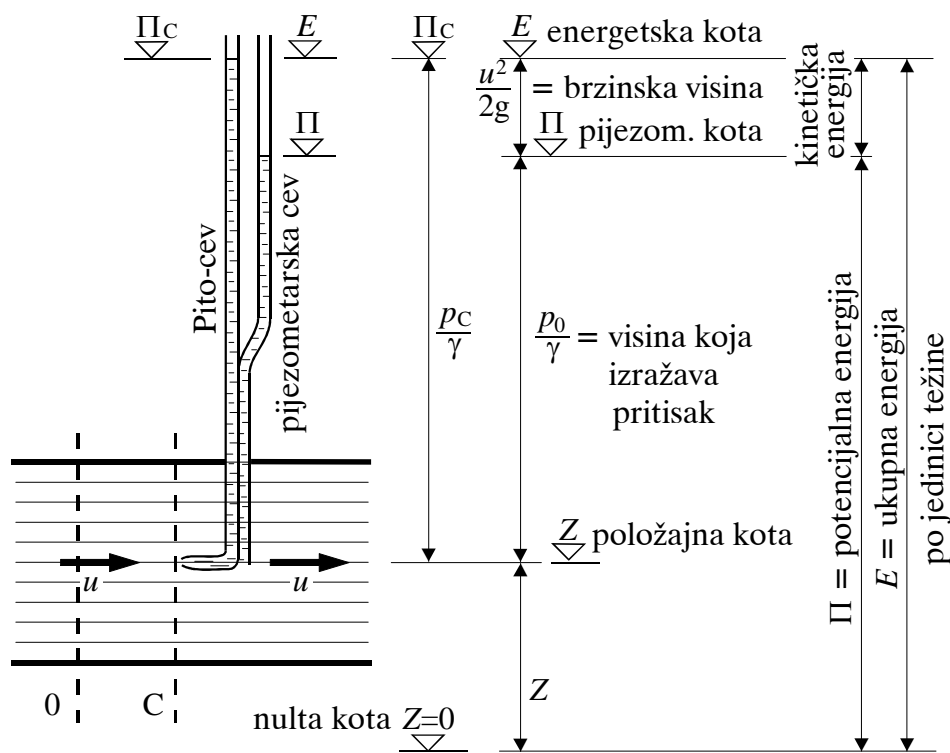
što važi za bilo koja dva preseka pa se duž struje ostvaruje nepromenljivost ukupne energije

$$\Pi + \frac{v^2}{2g} = E = \text{const} \quad (83-11)$$

U (83-8) uvedena ukupna energija po jedinici težine, označena sa E , ima dimenziju dužine. U produžetku će se pokazati da se i ona može prikazati visinom, upravo kotom, kao što je to moguće za potencijalnu energiju, jer nju prikazuje piježometarska kota Π .

* * *

Slika 83-2 prikazuje savijenu cevčicu uronjenu u struju tako da se jedan njen krak postavi u pravac brzine pa je brzina upravljena normalno na otvor na početku toga kraka. Ta cev se naziva *Pito-cev* (PITOT). Cev će se ispuniti vodom do određene visine: u drugom takođe otvorenom kraku uspostaviće se nivo Π_C . To je u stvari piježometarska kota za celokupnu masu koja miruje u uronjenoj cevčici, pa i za njen otvor označen sa (C). Uz tu cevčicu pridodata je i jedna cevčica čiji je uronjeni otvor postavljen u ravan paralelnu sa pravcem brzine, tako da struja pored otvora prolazi neporemećena. U toj cevčici će se,



Slika 83-2 Pregledni prikaz merodavnih kota, visina i energija

pošto nije pod uticajem brzine, obrazovati neporemećena piježometarska kota Π koja vlada u toj tački, i to će biti „piježometarska cev”.

Posmatra se deo struje ispred otvora Pito-cevi, od preseka (0), gde je stanje neporemećeno, do preseka (C) na samom otvoru. U preseku (0) su neporemećene vrednosti brzine u i piježometarske kote Π , dok je u preseku (C) brzina $u_C = 0$ (zaustavljeno je strujanje), a piježometarska kota je Π_C . Jednačina energije, uz zanemarenje gubitaka (jer su zaista nezatni na kraćoj dužini struje), daće povećanje potencijalne energije, usled smanjenja kinetičke. (83–10) daje, kada se primeni na preseke (0) i (C) pod opisanim okolnostima:

$$\underbrace{\Pi + \frac{u^2}{2g}}_{\text{[neporemećeno]}} = \underbrace{\Pi_C}_{\text{[zaustavno]}} \quad (83-12)$$

U drugoj cevčici (piježometarskoj) nivo će biti Π , jer je pod uticajem neporemećene struje – od (C) do njenog otvora brzina se ne menja, pa onda ni piježometarska kota.

(83–12) ukazuje da je nivo u Pito-cevi za $u^2/2g$ viši od nivoa u piježometarskoj cevi, pa je tako i nacrtano na slici 83–2, gde su sve energije svedene na ekvivalentnu potencijalnu energiju usled težine, i sve su izražene po jedinici težine, tako se sve svelo na visine (ili visinske razlike) i sve je postalo očigledno (sve se kote mogu i ostvariti odgovarajućim nivoima tečnosti). Na slici se uočavaju kote: položajna, piježometarska i energetska, te njihove razlike: visina koja izražava pritisak i brzinska visina. Nadvišenje nivoa u Pito-cevi u odnosu na nivo u piježometarskoj za $u^2/2g$ ukazuje da se merenjem te razlike određuje brzina – to je jedan od načina za merenje brzine.

Na mestu zaustavljanja pritisak je p_C , a neporemećeni pritisak na istoj koti je p , pa je povećanje pritiska usled zaustavljanja $p_C - p$ i naziva se „zaustavni pritisak” p_u (indeks „ u ” ukazuje da ga određuje brzina koja je zaustavljena). Iz jednačine (83–12) i sl. 83–2 uviđa se da je:

$$\frac{u^2}{2g} = \Pi_C - \Pi = \frac{p_C - p}{\gamma} = \frac{p_u}{\gamma}$$

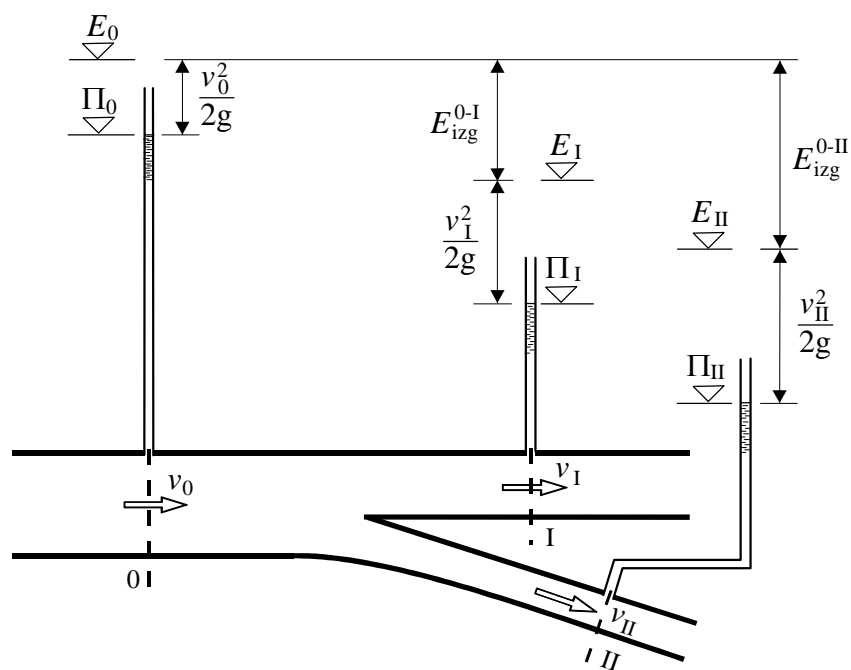
pa je

$$\text{zaustavni pritisak} = p_u = \gamma \frac{u^2}{2g} = \rho \frac{u^2}{2} \quad (83-13)$$

Pijezometarska kota je ista za ceo presek i pijezometar priključen za bilo koju tačku preseka daće istu kotu (u stvarnim uslovima moguća su samo zanemarljiva odstupanja ako je strujanje kroz presek približno pravolinijsko i paralelno), dok će Pito-cev dati različite kote, jer brzine nisu svuda iste. Za energetske kote kod preseka se uzima kota viša od pijezometarske za brzinsku visinu $v^2/2g$ prosečne brzine v za presek.

* * *

Za struju koja se račva (deli se na dve ili više struja), ili za spajanje više struja u jednu, primenjuje se jednačina energije između izabranih poprečnih preseka ispred i iza spajanja (oni moraju da zadovolje potrebne uslove: paralelno i pravolinijsko strujanje). Jednačina se piše isto kao i za jedinstvenu struju i odnosi se na jedinicu težine dela struje koja spaja dva poprečna preseka, koje veže pojedina jednačina. Umesto pisanja jednačina za jedan primer račvanja data je slika 83–3, gde se iz odgovarajućih kota uočava kako da se ispiše jednačina koja bi povezivala preseke (0) i (I), kao i ona koja bi povezivala preseke (0) i (II).



Slika 83–3 Energetske promene pri račvanju struje

Izgubljene energije se daju za određene oblike račvanja, a u zavisnosti od razdeobe proticaja na krake. Na sličan način bi se postupilo i za spajanje struja.

Na slikama 83–1 do 83–3 piježometarska kota svuda je nacrtana iznad struje. To, međutim, nije pravilo, jer ova kota može da bude ispod struje – tada je struja pod apsolutnim pritiskom manjim od atmosferskog, tj. pritisak p koji se računa prema dogovoru datom sa (71–6), tada je negativan, pa je, shodno (71–7), $\Pi < Z$. Uz ova podsećanja na uvedeno u Poglavlju 71, korisno je podsetiti se i objašnjenja koje sledi iz sl. 71–3 – tamo se ukazalo da spuštanje piježometarske kote Π ispod položajne kote Z može biti samo do granice kojom se apsolutni pritisak spusti na nulu, tj. ne može preći visinu stuba tečnosti koji odgovara atmosferskom pritisku. To se mora ostvariti i za najvišu tačku preseka struje, ali uz ovo treba dodati i sledeće upozorenje.

Prilikom proučavanja struja osnovni zahtev za presek koji se uzima u razmatranje je paralelno i pravolinijsko strujanje, normalno na presek (iz čega proizilazi i zajednička piježometarska kota za jedan ceo presek). Upoređuje se stanje u dva preseka, uz procenu zbirnog iznosa energetske razlike E_{izg} između ta dva preseka, a pri tome se ne razmatra raspored pritisaka po celoj zapremini između preseka, a tu može da bude mesta gde su piježometarske kote snižene, jer su brzine povećane (zbog lokalne prepreke), ili su te kote snižene zbog zakrivljenja (vidi sl. 81–3). Jasno je da ova mesta, upravo pritisci u njima, mogu da budu sniženi do apsolutnog pritiska bliskog nuli, i to je ograničenje za ostvarenje strujanja. Prilikom razmatranja stanja između dva preseka mora se barem znati da je strujanje ostvarljivo, da se potrebno snižavanje pritiska može ostvariti, odnosno da će sigurno preostati izvesna pozitivna vrednost za apsolutni pritisak. Naime, čim se apsolutni pritisak približi nuli dolazi do ključanja vode (do stvaranja mehura vodene pare) jer je poznato da voda pri jako sniženom pritisku ključa i pri uobičajenim temperaturama – to je pojava zvana „kavitacija”, koju treba izbeći.

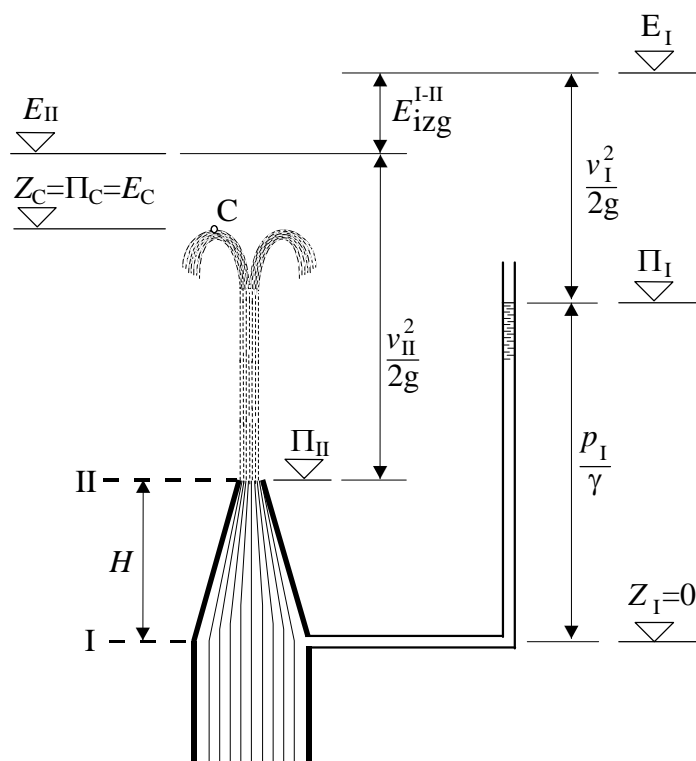
PRIMERI

Prvi primer. U primeru u prethodnom poglavlju, prikazanom na slici 82–3, pretpostavljeno je poznavanje i proticaja Q i pritiska p_1 , a napomenuto je da oni moraju biti u međusobnoj vezi i da će se kasnija izlaganja ponovo skrenuti na taj primer. To se sada čini. Daje se i nova

slika (83–4) za taj primer. Jednačina energije (83–9) za preseke pred mlaznikom (I) i po izlazu (II), uz nultu kotu u preseku (I), daje:

$$\frac{p_I}{\gamma} + \frac{v_I^2}{2g} = H + \frac{v_{II}^2}{2g} + E_{izg}^{I-II}$$

Oba preseka su u horizontalnim ravnima. $\Pi_I = p_I/\gamma$, jer je $Z_I = 0$, a $p_{II} = 0$ (slobodan mlaz), pa je $\Pi_{II} = H$.



Slika 83–4 Uz primer primene jednačine energije na struju kroz mlaznik

Poznavanjem proticaja poznate su brzine, pa proticaj nameće i p_I , ako se raspolaze i procenom za E_{izg} – na primer iskustvo kazuje da je ona otprilike 5% od $v_{II}^2/2g$. Ili, dozvoljava se da se zadatak rešava uz pretpostavljanje idealnog fluida (jer posledice toga nemaju veći praktični značaj). Tek pošto se zadatak reši primenom jednačine energije (upravo koristeći (83–9)) može se preći na određivanje sile K (kojom čvrsta granica deluje na fluid) kako je to pokazano u prethodnom poglavlju (82) –

slika 82–3. Ako bi se pak poznavala sila K , onda bi se znala izgubljena energija (takav primer će biti dat malo kasnije – upravo izlaganja će se vratiti na raniji primer sa slike 82–5). Treba naglasiti da se zadatak ne može rešiti ako je nepoznato i jedno i drugo (K i E_{izg}).

Uz sliku 83–4 treba primetiti da se na njoj htelo pokazati i da je visinski domet mlaza skoro na koti E_{II} (uz idealizaciju fluida mlaz bi dospeo do te kote, a u stvarnim uslovima, usled gubitaka u slobodnom mlazu, do dostizanja maksimalne kote, ona je nešto niža od E_{II}). Za delić „C” koji se nalazi na maksimalnoj visini (Z_C), gde nema brzine ($u_C = 0$) (odatle će padati na dole), a uz to je slobodan ($p_C = 0$), napisano je: $Z_C = \Pi_C = E_C$.

Drugi primer. Izlaganja se sada vraćaju na Treći primer iz prethodnog poglavlja – slika 82–5. Tamo je poznat raspored napona po celoj graničnoj površini (pretpostavljeno je hidrostatičko stanje po zidovima suda i kada kroz cev struji fluid). Svaki delić koji dođe u presek (I) (gde je pijezometarska kota Π_I – vidi sliku 82–5, a brzinska visina $v_I^2/2g$) mora krenuti negde iz suda gde su brzine zanemarljive, pa su energetska i pijezometarska kota na nivou tečnosti u sudu (Π_0). Stoga jednačina energije (83–9) glasi:

$$\Pi_0 = \Pi_I + \frac{v_I^2}{2g} + E_{izg}^{0-I}$$

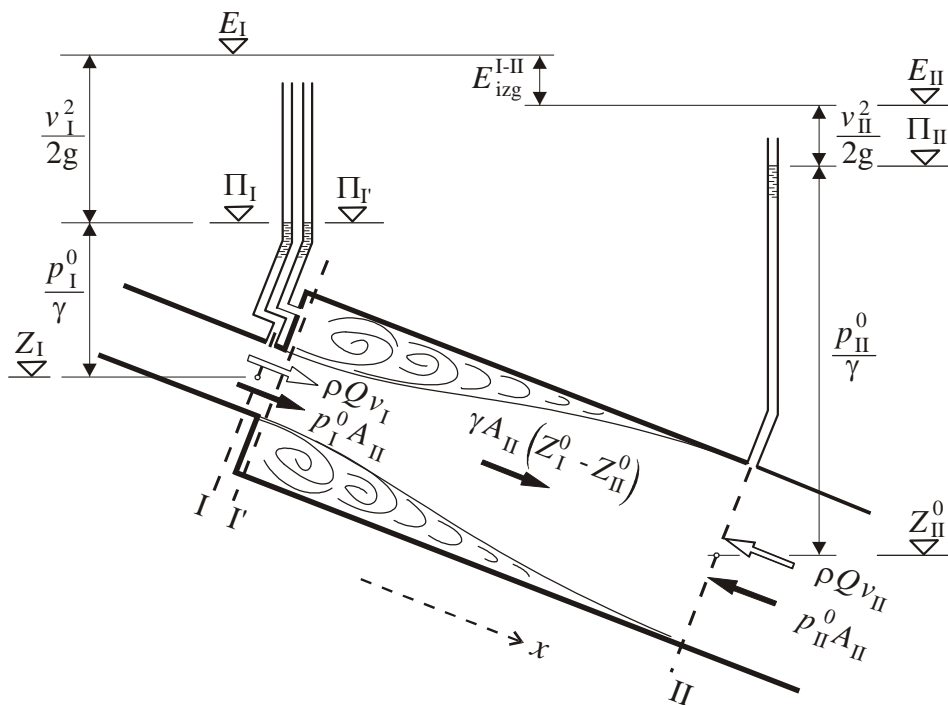
U ranijem razmatranju ovoga primera (Treći primer u prethodnom Poglavlju 82) zaključeno je da je:

$$\Pi_0 - \Pi_I = \frac{v_I^2}{g}$$

pa je time određena izgubljena energija

$$E_{izg}^{0-I} = \frac{v_I^2}{2g}$$

Treći primer. Sl. 83–5 odnosi se na naglo proširenje cevi. I ovde se može primeniti isti postupak kao u prethodnom zadatku. Dinamička jednačina daje rešenje, jer se zadatak može svesti na sve poznate



Slika 83–5 Uz objašnjenje izgubljene energije pri naglom proširenju cevi

sile sem jedne, a rezultati iz toga rešenja nametnu se onda jednačini energije, koja obračuna izgublenu energiju.

Mlaz pri prelasku iz manjeg preseka cevi u veći ne može da se proširi naglo, oblik mlaza ne može da ispuni ceo raspoloživi presek cevi odmah po proširenju, nego se mlaz širi postepeno, a prostor između mlaza i zida cevi ispunjava takozvana „vrtložna oblast”. Tu bi zaklonjeni fluid mirovao da ga prodirajući mlaz ne pokreće, a to pokretanje izaziva suprostavljanje – tako dolazi do međusobnog dejstva povlačenja, odnosno odupiranja, što uvlači deliće u vrtlog.

Posmatrajući u preseku (I') (neposredno po proširenju) za mlaz (izostavljajući vrtložnu oblast oko njega) se može reći da je strujanje u njemu približno paralelno i pravolinijsko, pa je onda ista pijeziometarska kota za ceo presek mlaza, a to je ista kota kao u preseku (I) (neposredno pre proširenja), jer su iste prosečne brzine u preseku (I) i u mlazu u preseku (I'). Može se pretpostaviti da se hidrostatička zakonitost rasporeda pritiska kroz mlaz može proširiti i na deo preseka (I') van

mlaza, jer je to presek uz sam zid (uz kružni prsten, koji spaja omotače cevi ispred i iza proširenja), gde tečnost, praktično uzevši, miruje, i po hidrostatičkim zakonima, opkoljava izlaz mlaza iz uže cevi. Moguća sumnja u potpuno ostvarenje ove pretpostavke postaje bespredmetna, barem sa praktičnog stanovišta, ako se pretpostavka ostvaruje, a to se uviđa upoređenjem rezultata računa sa eksperimentalnim rezultatima. Može se reći da se to približno i ostvaruje.

Prihvatanjem pretpostavke o jedinstvenoj piježometarskoj koti Π_I za ceo presek (I') (mlaz i vrtložna oblast) i izjednačenje iste sa Π_{II} (shodno prethodnom obrazloženju), izravnavanje sila koje u pravcu strujanja (x) deluju između preseka (I') i (II) dovodi do jednačine:

$$\gamma A_{II}(Z_I^0 - Z_{II}^0) + p_I^0 A_{II} - p_{II}^0 A_{II} + \rho Q v_I - \rho Q v_{II} = 0$$

Prvi član je komponenta sile težine u x -pravcu, i iznosi $\gamma A_{II} L \sin \alpha$, gde je L rastojanje od preseka (I') do preseka (II), a ugao α zaklapa osa x sa horizontalom. Kako je $\sin \alpha$ jednako $Z_I^0 - Z_{II}^0$ podeljeno sa L , dobija se komponenta težine kako je u prethodnoj jednačini i napisano. Drugi i treći član su sile pritiska u presecima (I') i (II) čije površine iznose A_{II} , a za prvi se, shodno prethodnom objašnjenju, preuzima piježometarska kota kao i pritisak u težištu iz preseka (I), tj. p_I^0 . Poslednja dva člana su komponente inercijalne sile u presecima (I') i (II). Zane-maruje se trenje između fluida i cevi.

Može se $Z^0 + p^0/\gamma$ za pojedini presek zameniti sa Π , i to je piježometarska kota koja se odnosi na ceo presek (tako je to kod svih graničnih preseka za proučavani deo struje). To će se učiniti, i u isti mah jednačina će se podeliti sa γA_{II} , pošto se prethodno obavi zamena $Q = v_{II} A_{II}$. Tako se dobija:

$$\Pi_I - \Pi_{II} + \frac{v_I v_{II}}{g} - \frac{v_{II}^2}{g} = 0$$

Ova jednačina omogućava da se odredi jedna piježometarska kota (Π_I ili Π_{II}) ako je poznata druga, odnosno pritisci u presecima – razume se uz poznati proticaj, jer su onda poznate brzina v_I i v_{II} . Može se zadati piježometarska razlika $\Pi_I - \Pi_{II}$, pa jednačina određuje proticaj.

Ovaj rezultat se upoređuje sa jednačinom mehaničke energije (83–9) tako da ona obračuna izgublenu energiju E_{izg} , uz $\Pi_I - \Pi_{II}$ prema

prethodno utvrđenom. U jednačini mehaničke energije, napisanoj sa:

$$E_{izg} = \Pi_I + \frac{v_I^2}{2g} - \Pi_{II} - \frac{v_{II}^2}{2g}$$

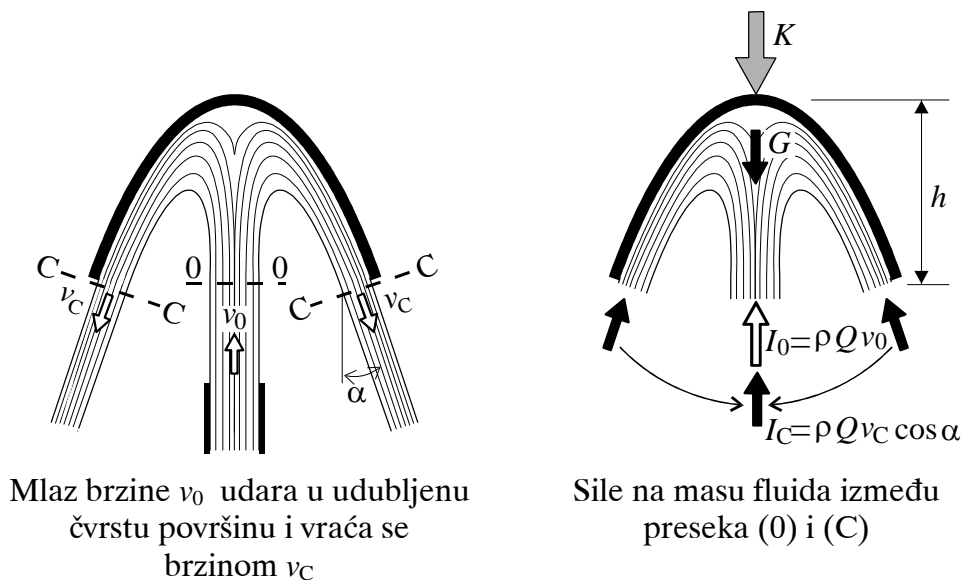
sa nametnutim $\Pi_I - \Pi_{II}$ daje

$$E_{izg} = \frac{1}{2g}(2v_{II}^2 - 2v_I v_{II} + v_I^2 - v_{II}^2) = \frac{(v_I - v_{II})^2}{2g}$$

Ovo rešenje navodi se često pod naslovom „Teorema Borda” (BOR-DA).

Četvrti primer. Vertikalni mlaz usmeren na gore zaustavlja zakrivljena (udubljena) površina oblikovana tako da je odbijeni mlaz skrenut, u odnosu na dolazni, za ugao $180^\circ - \alpha$ (sl. 83-6). Strujanje je osnosimetrično: osovina simetrije je osovina dolaznog mlaza. Traži se sila udara mlaza, odnosno sila kojom se čvrsta površina odupire mlazu.

Postaviće se ravnoteža vertikalnih sila na masu fluida između preseka (0) dolaznog mlaza i površine (C) kroz koju povratni mlaz napušta čvrstu površinu (brzina u svakoj tački površine (C) je normalno



Slika 83-6

usmerena na površinu u datoj tački). Zbog osne simetrije, u osovini dolaznog mlaza (to je osovina simetrije strujanja) deluju sledeće vertikalne sile: težina G posmatrane mase, inercijalna „sila” I_0 u preseku (0), inercijalna „sila” I_C po površini (C), te sila K kojom čvrsta površina deluje na fluid. Korisno je da se uoči da je inercijalna „sila” I_C za celu površinu (C) vertikalna, mada su njeni elementarni sabirci koso usmereni, ali se horizontalne komponente sile na elementarne delove površine (C) međusobno potiru, i u integralu daju nulu. Silu, dakle, čini zbir elementarnih komponenti, od kojih pojedini sabirak iznosi $\rho v_C \cos \alpha dQ$ (odnosi se na elementarni deo površine kroz koji prolazi proticaj dQ). Za celu površinu „sila” I_C iznosi $\rho v_C \cos \alpha Q$. Zanimariće se vertikalna komponenta trenja između fluida i vazduha. Izostaju sile pritiska u preseku (0) i po površini (C) jer je mlaz slobodan.

Ravnoteža pobrojanih sila daje:

$$I_0 + I_C - G - K = 0$$

iz čega se dobija

$$K = \rho Q(v_0 + v_C \cos \alpha) - G$$

Ako se fluid smatra idealnim, jednačina energije između preseka (0) i (C) daje, s obzirom da je $\Pi_0 = \Pi_C$ (oba preseka imaju težišta na istoj koti, na kojoj su im i pijezometarske kote, jer nema pritiska):

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_C^2}{2g}, \quad \text{tj.} \quad v_0 = v_C$$

Ovo znači da su presek mlaza A_0 i površina A_C omotača jednaki (jer isti proticaj kroz njih prolazi sa istom brzinom), pa zapremina između (0) i (C) je nešto malo veća od $2A_0h$ (sa h je označena i ucrtana u sliku visina u kojoj se zapremina proteže), pa se za red vrednosti težine G može uzeti $2\gamma A_0h$. Zbir $I_0 + I_C$, s obzirom da $\cos \alpha$ nije mnogo manji od jedinice, približno je $2\rho Qv_0 = 2\rho A_0v_0^2$. Odnos između težine G i sile $I_0 + I_C$ je stoga približno gh/v_0^2 , pa je težina zanemarljiva, u odnosu na inercijalnu „silu”, ako je $h \ll v_0^2/g$, a to se i ostvaruje u zadacima, koji su praktično zanimljivi, a to su oni u kojima sila K udara mlaza nije beznačajna.

Sa $v_C = v_0$, i izostavljanjem G , prethodni izraz za silu K postaje:

$$K = \rho Qv_0(1 + \cos \alpha)$$

Ako se ne prihvati idealizacija fluida, v_c neće biti jednako v_o , jer će jednačina energije dati $v_c < v_o$, a prema sledećem:

$$\frac{v_C^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} - E_{izg}^{0-C}$$

Treba, dakle, poznavati E_{izg} , da bi se odredila brzina v_c posmatranog mlaza, na osnovu poznate dolazne brzine v_0 . Sa određenom brzinom v_C sila udara K , uz zanemarenje težine G , iznosi:

$$K = \rho Q(v_0 + v_C \cos \alpha)$$

Ako bi E_{izg}^{0-C} iznosilo manje od $(0,1v_0^2/2g)$, brzina v_c se ne bi spuštala niže od $0,95v_0$, pa bi sila udara bila neosetno manja (ne više od 2,5%) od sile koja se dobija uz pretpostavku idealnog fluida. Za procenu E_{izg} (iz čega se zaključuje o opravdanosti zanemarenja, ili naprotiv o potrebi da se uzme u obzir) mora se raspolagati iskustvenim saznanjima.

Vođenje računa o izgubljenoj energiji u realnom fluidu, za razliku od idealnog gde gubitka nema, dovelo je do smanjenja sile K , što se može pripisati sili trenja između čvrste granice i fluida, koja se izostavlja pretpostavkom o idealnom fluidu. Sila trenja je uključena u silu K , kao jedan njen deo (jer sila K je ukupna sila između čvrste granice i fluida, pa u nju ulaze i pritisak i trenje). Trenje smanjuje silu udara, jer je suprotno usmereno. Razumljivo je da sila trenja deluje takođe u osovini dolaznog mlaza (zbog osne simetrije) kao i sve ranije razmatrane sile.

UOPŠTENNA ZAPAŽANJA, STEČENA PRILIKOM REŠAVANJA PRETHODNIH PRIMERA

Primeri prikazani u prethodnom poglavlju (82) i ovom poglavlju (83) pokazuju da se primene jednačine uravnoteženja sila (iz 82) i jednačine mehaničke energije (iz 83) međusobno prepliću. Moglo se primetiti da se rešava po jednoj jednačini, a to se rešenje onda nalaže drugoj da samo obračuna ono što joj se nalaže. Ovo znači da navedene dve jednačine nisu međusobno nezavisne (nisu sistem dve jednačine, koje određuju dve nepoznate).

1. Primeri sa slike 82–5 (početak cevi, ugurane u rezervoar) i slike 83–5 (naglo proširenje cevi) spadaju u zadatke gde se mogao

unapred odrediti raspored napona po celoj graničnoj površini, pa je bila poznata i sila K između čvrste granične površine i fluida. (U oba navedena primera to je bilo moguće, što se može smatrati izuzetno povoljnom okolnošću, a u pretežnom broju slučajeva nije moguće unapred pristupiti rešavanju zadatka sa poznatom silom K između čvrste granice i fluida. Može se čak reći da je to izuzetak, gde je naponsko stanje po granici poznato, odnosno lako odredljivo.) U navedenim primerima, zahvaljujući poznavanju sile K , jednačinom uravnoteženja sila određena je sila pritiska u jednom od preseka, uz poznatu silu pritiska u drugom, ili se može odrediti razlika sila pritisaka (razume se, uz poznati proticaj), a to znači određena je razlika pijezometarskih kota za granične preseke (I) i (II). Time je zadatak rešen. Sa rešenjem se ulazi u jednačinu energije i sa njom se samo „knjigovodstvenim savnjivanjem” dobija izgubljena energija.

Primer sa slike 82–4, gde se traži sila K udara mlaza u ploču rešen je primenom uravnoteženja sila, jer je jedina nepoznata sila bila sila udara koja se traži. Treba uočiti da je za određivanje te sile bilo potrebno poznavati stanje samo u jednom preseku, a i u njemu je sila pritiska otpala (mlaz je slobodan), a inercijalnu „silu” određuju proticaj i brzina mlaza, kao i gustina fluida, a to se zadaje. Nije trebalo nikakvih saznanja o promenama u struji u sudaranju sa pločom, izuzevši prihvatljivu pretpostavku da struja napušta ploču u pravcu paralelnom sa pločom.

2. Za zadatak na sl. 83–6 gde mlaz udara u udubljenu čvrstu površinu i od nje se odbija moralo se ući u razmatranje promena u struji u sudaru sa pločom. Naime, bilo je potrebno da se, primenom jednačine energije, najpre odredi brzina v_c povratnog mlaza na osnovu poznate brzine v_0 dolaznog mlaza, pa se tek onda moglo preći na uravnoteženje sila, koje daje traženu silu K između fluida i čvrste granice.

Ovaj primer spada u zadatke, gde rešavanje mora otpočeti primenom jednačine energije (jer u dinamičkoj jednačini uravnoteženja sila nije samo jedna sila nepoznata, da bi se ta jednačina mogla odrediti), a treba naglasiti da je jednačina energije u tom slučaju neprimenljiva bez dopunskog saznanja o izgubljenoj energiji,

a to saznanje je empirijskog porekla. Dakle, nemoguće je analitičkim putem doći do rešenja, treba uneti iskustvena saznanja. U nekim zadacima može se zanemariti izgubljena energija, jer to zanemarenje dovodi do beznačajnog odstupanja u rezultatu zadatka, ali se mora naglasiti da je potrebno iskustveno saznanje koje opravdava to zanemarenje.

Zadatak sa strujanjem kroz mlaznik (sl. 82–3 i drugo prikazivanje istoga primera na sl. 83–4) pokazuje takođe da je nemoguće doći do sile K između čvrste granice i fluida primenom jednačine uravnoteženja sila, tj. načelno je isto kao kod prethodnog slučaja, pa se i ovom zadatku moralo pristupiti rešavanjem jednačine energije, uz prethodnu procenu izgubljene energije, na osnovu iskustva. Tako se došlo do pijeometarske kote, a sa njom i do sile pritiska, u preseku pred mlaznikom, i ta sila se uravnotežava sa ostalim silama i to uravnoteženje je dalo silu K između čvrste granice i fluida.

* * *

Iz prethodnih razmatranja mogu se izvući praktični zaključci uopštenog značaja.

- a) Samo u zadacima, gde se rešavanje može otpočeti primenom dinamičke jednačine uravnoteženja sila (jer je od svih sila, uključivši i inercijalnu, nepoznata samo jedna, i ona se sračuna), može se doći do rešenja čisto analitičkim postupkom, bez korišćenja dopunskih saznanja (van jednačina), koja potiču iz iskustva. Rešenje dobijeno uravnoteženjem sila nametne se jednačini energije, koja onda sračuna izgubljenu energiju.

Primeri ovakvih zadataka navedeni su malo pre – pod 1, a takvi zadaci su u praksi izuzetno retki.

- b) Ako se rešavanje ne može otpočeti primenom dinamičke jednačine uravnoteženja sila (jer je više od jedne sile nepoznato), mora se otpočeti jednačinom energije, a to zahteva da se moraju znati iskustveni podaci o izgubljenoj energiji. Rešenje dobijeno jednačinom energije omogućava onda primenu jednačine uravnoteženja sila.

U ovu vrstu zadataka spadaju primeri navedeni pod 2.

Na žalost, u ovu drugu vrstu zadataka spada pretežan deo praktičnih zadataka. Da se navede samo najprostiji zadatak hidraulike: pad kote energije niz jednoliku pravolinijsku struju (istoga poprečnog preseka), usled gubitaka prouzrokovanih trenjem. To se raspravlja kasnije u Poglavlju 91 (može se odmah pogledati slika 91–1) a problem se svodi na to što su za zadati proticaj nepoznate i sila trenja K_x između fluida i zidova cevi, kao i razlika sila pritisaka $P_I - P_{II}$ pa se ne može primeniti jednačina uravnoteženja sila, ako se prethodno ne iskoriste iskustvena saznanja, koja određuju silu K_x .

PRIMEDBA

U prethodnom tekstu rečeno je da dinamička jednačina (jednačina uravnoteženja sila) i jednačina energije nisu međusobno nezavisne. To je potpuno jasno ako se posmatraju te jednačine u svom opštem obliku, kako su izvedene u poglavljima 33 i 34. Tamo je po ispisivanju jednačine mehaničke energije (34–2) rečeno da ona ne unosi ništa suštinski novo, ona se dobila jednostavnim množenjem dinamičke jednačine (33–2) sa brzinom u_j i to treba shvatiti kao formalni postupak, a ne kao unošenje izraza nove i nezavisne zakonitosti. Dakle, unošenje jednačine energije, pored dinamičke, ne dozvoljava određivanje nijedne nepoznate više od onoga što je dala dinamička jednačina.

Izvođenje dinamičke jednačine (jednačine uravnoteženja sila) i jednačine energije, sprovedeno je u prethodnom poglavlju (82) i ovom, sa ciljem da se najlakše dođe do izraza koji će se primenjivati isključivo na struju između dva njena preseka. Nije se pošlo od jednačina u opštem obliku – misli se na jednačine (33–2) i (34–2) – nego od neposredne primene mehaničkih stavova o promeni količine kretanja i o energiji na struju (između dva preseka), uz prethodna uproštavanja, jer se hidromehaničke veličine u presecima mogu približno veoma jednostavno odrediti. Međutim, tako dobijene jednačine (82–3) i (83–9) ne mogu svojim oblikom ukazati da su međusobno zavisne, ali je njihova primena, kako se iz izloženih primera uvidelo, ukazala na njihovu međuzavisnost.

84

**KRITIČKI OSVRT
I DOPUNSKA OBJAŠNJAVANJA
NA IZLAGANJA U POGLAVLJU 82**

Jednačina (82–6) iz Poglavlja 82, koja je osnova za rešavanja praktičnih zadataka, podvrićće se analizi sa stanovišta opštih zakonitosti, izloženih u Prvoj knjizi.

* * *

I. Opšti oblik dinamičke jednačine za konačnu zapreminu napisan je sa (33–7), i ta se jednačina može napisati i kao jednačina „ravnoteže sila”, što je urađeno sa (33–10), pošto je, sa (33–9), uvedena inercijalna „sila”. Prepisuje se (33–10):

$$\int_V -\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) dV + \int_A -\rho u_j u_i n_i dA + \int_V f_j \rho dV + \int_A \sigma_{ij} n_i dA = 0 \quad (84-1)$$

Pretpostavlja se ustaljeno strujanje, pa otpada prvi član. Drugi član predstavlja inercijalnu „silu” u ustaljenom strujanju, uz napomenu da integrisanje po omotaču daje nulu, jer kroz omotač, bio on čvrsta granica ili slobodna površina vode (kod kanala), nema proticaja. Ostaje samo po poprečnim presecima A_I i A_{II} , gde se, zbog pravolinijskog i paralelnog strujanja kroz presek (normalno upravljeno na njega), izraz pojednostavljuje jer je:

- a) $u_i n_i = -u$ za A_I , gde se brzina u_i i ort spoljne normale podudaraju po pravcu, ali su suprotno usmereni;
- b) $u_i n_i = +u$ za A_{II} , gde se brzina u_i i ort spoljne normale podudaraju i po pravcu i po smeru.

U prethodnom se podrazumeva da je tečenje od preseka I ka preseku II, i zbog toga je pozitivno proticanje $u_i n_i dA$ na izlaznom preseku II, a negativno na ulaznom preseku I.

Sa ovim pojednostavljenjem, i sa $\rho = \text{const}$, može se napisati:

$$I_j = \int_A -\rho u_j u_i n_i dA = \rho \int_{A_I} u_j u dA - \rho \int_{A_{II}} u_j u dA \quad (84-2)$$

U svakom od preseka vektor u_j se množi sa u , pa se onda u^2 integriše po preseku, i primenjujući (81-8), dobija se $\beta v^2 A = \beta v Q$. Međutim, rezultat mora da bude vektor, upravljen u pravcu j , pa se dobijeni rezultat piše sa $\beta Q v_j$ za svaki od preseka, što prethodnu jednačinu svodi na:

$$I_j = \rho Q (\beta v_j)_I - \rho Q (\beta v_j)_{II} \quad (84-3)$$

Ne vodeći računa o neravnomernosti brzina po preseku, tj. uzimajući da je po celom preseku srednja brzina v za presek, tj. sa $\beta = 1$, izraz (84-3) se svodi na izraz (82-4).

Pošto se ovde, kao i svuda, uslovljava da je težina jedina zapreminska sila, treći član u (84-1) je težina G_j zapremine V , što se izražava sa $G_j = \rho g_j V$, jer su gustina ρ i sila po jedinici mase $f_j = g_j$ konstante.

Četvrti (i poslednji) član u (84-1) je površinska sila K_j po omotaču i površinske sile po graničnim poprečnim presecima – (I) i (II) – posmatranog dela struje. U Poglavlju 82 obrazloženi uprošteni postupak, namenjen praktičnoj primeni, sile u presecima izražava samo kao posledicu dejstva pritisaka (samo sferni deo napona), i to po hidrostatičkoj zakonitosti rasporeda pritisaka, jer to dozvoljava izostavljanje (zanemarenje) devijatorskih napona. Obrazloženje za to zanemarenje je u sledećem. Osa 1 neka bude normalno upravljena na onaj poprečni presek, koji se razmatra, pa je onda $\sigma_{11}^d = 0$, jer je on srazmeran sa $\partial u_1 / \partial x_1$, a taj izvod je jednak nuli, ako se kroz presek ostvaruje paraleleno i pravolinijsko strujanje, normalno na presek. Navedena zavisnost proizlazi iz veze napona i deformacija (41-7) za $i = j = 1$ i za nestišljiv fluid, gde je $\partial u_k / \partial x_k$ jednako nuli, i, razume se, uz pretpostavku konstantnog koeficijenta viskoznosti. Naponi σ_{12} i σ_{13} ne mogu da budu jednaki nuli po celom preseku, jer su oni srazmerni sa $\partial u_1 / \partial x_2$, odnosno $\partial u_1 / \partial x_3$, što se opet uviđa iz (41-7), uz $u_2 = u_3 = 0$. Međutim, ovi izvodi moraju imati i pozitivne i negativne vrednosti po istom preseku, jer brzina raste od zida ka središtu preseka, da bi odavde opadala, ka naspramnom zidu. Integrisanje napona po preseku daće silu, a ona će biti jednaka nuli ako je presek simetričan, upravo ako se ose 2 i 3, koje leže u ravni preseka, mogu postaviti tako da budu simetrane preseka (to je ostvarljivo, na

primer, kod cevi kružnog, ili pravougaonog preseka). Ovo se obrazlaže sledećim rasuđivanjem. Naponu $\sigma_{21} = \partial u_1 / \partial x_2$ u jednoj tački odgovara napon iste vrednosti, ali suprotnog znaka, u drugoj tački simetrično postavljenoj u odnosu na prvu (simetrala je osa 3), jer su u tim tačkama $\partial u_1 / \partial x_2$ iste vrednosti, a suprotnog znaka. Pošto svaka tačka ima svoj „par”, u integrisanju po preseku dobije se da napon σ_{12} daje nulu. Isto se može zaključiti za napon σ_{13} ako je osa 2 simetrala preseka. Ako presek i nije simetričan (u iznetom smislu), može se očekivati sila koja će se moći zanemariti i u odnosu na komponentu inercijalne „sile” za isti presek, jer se dobrim delom potire dejstvo pozitivnih i negativnih napona po istom preseku, a svaki zasebno nisu od značajnijeg uticaja (u odnosu na ostale sile).

Pošto su prethodnim razmatranjem obuhvaćene površinske sile po poprečnim graničnim presecima (I) i (II), preostaje i sila kojom čvrsta granica deluje na fluid. (Ova sila zajedno sa silama u presecima ulazi u četvrti član jednačine (84–1).) Ta sila se obično u praktičnim zadacima traži, jer ona sa obrnutim smerom daje opterećenje kojim fluid deluje na čvrstu granicu (što je uobičajeni praktični zadatak). Ona će biti poznata ako su sve ostale (i razmotrene) sile poznate.

* * *

II. Uz prethodno tumačenje primene opšte jednačine (84–1) na struju između dva preseka treba staviti ozbiljnu zamerku. To se može odnositi samo za laminarno strujanje. Za turbulentno strujanje, to ne može da važi, jer kod njega nisu ispunjeni uslovi, kojim se strujanje uprostilo. Naime, turbulentno strujanje ne može da bude ustaljeno, niti može da bude paralelno i pravolinijsko, normalno na presek, jer trenutna brzina u tački menja kroz vreme i vrednost i pravac. Za turbulentno strujanje, prema tome ne može se izostaviti prvi član jednačine (84–1), niti se ostali mogu uprostiti, morali bi se i za sile pritiska i za inercijalnu „silu” zadržati integrali, za čije rešenje bi trebalo znati raspored trenutnih brzina po celom strujnom polju i raspored trenutnih brzina po presecima. To bi vodilo ka određivanju trenutne sile K_j (ta sila fluktuirala). Taj tako složen zadatak ne može se ni rešiti, jer su previše složeni početni uslovi (stanje u nekom trenutku) i granični uslovi po omotaču i preseku. Tako se i ne radi. Treba se podsetiti da su zbog nepogodnosti za praktičnu upotrebu jednačina sa trenutnim

vrednostima i uvedene jednačine za turbulentno strujanje, gde se pišu posebne jednačine za ono što se nazvalo „glavno strujanje”, a posebno za ono što je „sporedno” (sekundarno), i što se nazvalo i „fluktuacije”. Ako se žele utvrditi osrednjene vrednosti, a to praksu u prvom redu zanima, od fluktuacija će se obuhvatiti samo ono što je neophodno da se odrede osrednjene vrednosti – tako se upravo i ispisuju jednačine za glavno strujanje. U njima se pojavljuju pretežno članovi sa osrednjenim vrednostima, i uz njih članovi u kojima se pojavljuju fluktuacije, i koji predstavljaju „uticaj fluktuacija na glavno strujanje”, čime se u stvari obračuna uticaj onoga što se, radi lakšeg proučavanja, odvojilo. Ovo je razjašnjeno u poglavljima 51 i 52 kao osnovni stav u prikazu razmatranja turbulentnog strujanja, a na takvoj osnovi su ispisane jednačine u Poglavlju 53.

Uz ovo valja skrenuti pažnju da su se sve veličine u Poglavlju 82 smatrale osrednjenim, pa bi jednačina za glavno strujanje mogla da posluži da se proveri da li se može prihvatiti jednačina (82–6), koja je namenjena praktičnoj primeni. Tu se misli i na proveru pretpostavki i uslova pod kojima su osrednjene sile koje ulaze u jednačinu (82–6).

Može se unapred reći, a to će biti dokazano u nastavku, da uticaji turbulencije nisu toliko značajni da se jednačine, koje su ispisane u Poglavlju 82, ne bi mogle primenjivati u praksi, i to podrazumevajući da su u njima osrednjene vrednosti.

* * *

III. Za dinamičku jednačinu koja uravnotežava sile u glavnom strujanju turbulentne struje, osrednjavanjem članova jednačine (84–1) dobija se:

$$\begin{aligned}
 - \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{u}_j) dV - \int_A \rho \bar{u}_j \bar{u}_i n_i dA - \int_A \rho \overline{u'_j u'_i} n_i dA + \\
 + \int_V \bar{f}_j \rho dV + \int_A \bar{\sigma}_{ij} n_i dA = 0 \quad (84-4)
 \end{aligned}$$

što je i ranije već napisano, izrazom (53–18), uz napomenu da poslednji član u (84–4) zamenjuje zbir trećeg i četvrtog desne strane u (53–18).

Treći član u prethodnoj jednačini predstavlja uticaj fluktuacija i može se zameniti prema sledećem:

$$- \int_A \rho \overline{u'_i u'_j} n_i dA = \int_A \sigma_{ij}^t n_i dA$$

jer je $-\rho \overline{u'_i u'_j} = \sigma_{ij}^t =$ „napon” turbulencije, uveden izrazom (53–13). Primećuje se da je inercijalna „sila”, koja zapravo i nije sila, u jednačinu ušla umesto promene količine kretanja u jedinici vremena. Ona se izjednačava sa pravim silama, formalno čini „ravnotežu sila”. Deo te sile, koji unose fluktuacije, kako prethodni izraz pokazuje, može se prikazati kao integral „napona” turbulencije po površini, a i ti „naponi” nisu naponi u fizičkom smislu reči, ali se sa njima može postupati kao i sa pravim naponima, i kako se pokazalo, dobiti „sila” koja daje njihovo dejstvo po površini.

* * *

IV. Ustaljenost osrednjene brzine dozvoljava da se izostavi prvi član u (84–4). Drugi i treći član zajedno predstavljaju osrednjenu inercijalnu „silu”. Drugi član se svodi na izraz (84–2) samo se u_j zamenjuje sa $\overline{u_j}$, a u sa \overline{u} (jer ulaze osrednjene brzine). Tako se dobija deo osrednjene inercijalne „sile” koji potiče od osrednjenih brzina i koji će se označiti sa $\overline{I_j}(\overline{u_i})$. Međutim, to nije cela osrednjena „sila”, jer treba dodati i njen deo koji potiče od fluktuacija. Taj deo je treći član u (84–4), i biće označen sa $\overline{I_j}(u'_i)$.

Za drugi član u (84–4) se piše:

$$\overline{I_j}(\overline{u_i}) = \int_A -\rho \overline{u_j} \overline{u_i} n_i dA = \rho \int_{A_I} \overline{u_j} \overline{u} dA - \rho \int_{A_{II}} \overline{u_j} \overline{u} dA \quad (84-5)$$

Ovo se, uvođenjem koeficijenta neravnomernosti brzine β , svodi na:

$$\overline{I_j}(\overline{u_i}) = \rho Q(\beta v_j)_I - \rho Q(\beta v_j)_{II} \quad (84-6)$$

Dakle, dobilo se potpuno isto što je napisano sa (84–3), samo uz napomenu da (84–6) nije celokupna osrednjena „sila”, jer treba, kao što je već napomenuto, dodati ono što će se izneti u narednom odeljku (V), i što predstavlja treći član u (84–4).

Objašnjenje o podudarnosti (84–6) i (84–3) je sledeće: i kod turbulentnog strujanja, srednja brzina v za presek dobija se jednostavnim deljenjem proticaja Q sa presekom A , tj. $v = Q/A$, pošto fluktuacije ne utiču na proticaj. Ovo je objašnjeno ispred ispisivanja jednačine (81–7), iz koje se vidi da je srednja brzina v za presek srednja vrednost već kroz vreme osrednjenih lokalnih brzina (za pojedine tačke preseka). Koeficijent β kod turbulentnog strujanja je koeficijent neravnomernosti osrednjenih brzina \overline{u} po preseku – što je napisano u izrazu koji je napisan

kao prvi u (81–10). Napominje se da je vrednost toga koeficijenta kod turbulentnih struja bliska jedinici, obično je između 1 i 1,03. Ovo važi za presek podoban za proučavanje struja (paralelno i pravolinijsko strujanje kroz presek, normalno na njega, bez lokalnih poremećaja koji bi izazvali veću neravnomernost brzine po preseku), a takav se presek podrazumeva.

* * *

V. Od integrala, koji predstavlja treći član u (84–4) uzeće se u razmatranje samo ono što pripada jednom preseku (a kasnije će se isto moći primeniti i na drugi presek), dok integrisanje po omotaču daje nulu. Za presek A_I neka se osa 1 postavi normalno na presek, a usmerena kao i osrednjena brzina \bar{u} . Fluktuirajuća „sila” po preseku neće biti upravljena samo normalno, nego će imati i tangencijalnu komponentu, jer postoje sve tri komponente fluktuacione brzine. Normalno usmerena daće komponentu:

$$\bar{I}_1^I(u'_i) = \int_{A_I} \overline{\rho u'_1 u'_1} dA = \int_{A_I} \overline{\rho u_1'^2} dA \quad (84-7)$$

Indeks 1 ukazuje na pravac, indeks I na presek, a pisanje još i $\bar{I}(u')$ znači da je to osrednjena sila, ali od uticaja fluktuacija.

U preseku (I) ležaće ostale dve komponente „sile” $\bar{I}_j^I(u'_i)$, od kojih se ona u pravcu 2 izražava sa:

$$\bar{I}_2^I(u'_i) = \int_{A_I} \overline{\rho u'_2 u'_1} dA \quad (84-8)$$

Sa praktičnog stanovišta zanimljiv je odnos između (84–7) i dela „sile” (84–6), koji se odnosi na presek I. Taj deo iznosi:

$$\bar{I}_1^I(\bar{u}_i) = \rho Q(\beta v)_I = \rho(\beta A v^2)_I \quad (84-9)$$

pa je najavljeni odnos

$$\frac{\bar{I}_1^I(u'_i)}{\bar{I}_1^I(\bar{u}_i)} = \frac{\int_{A_I} \overline{u'_1 u'_1} dA}{(\beta A v^2)_I} \quad (84-10)$$

Ako bi se ocenilo da je ovaj odnos reda vrednosti 1%, mogao bi se zanemariti uticaj fluktuacija na osrednjenu „silu”, a zadržati samo

uticaj osrednjenih brzina. Na isti način – kao (84–10) – napisao bi se odnos i za presek A_{II} . Razmatranja u nastavku će se odnositi na bilo koji od dva granična poprečna preseka, upravo na normalnu komponentu inercijalne „sile” na granični presek posmatranog dela struje.

Sa $\beta = 1$ (malo pre je navedeno da je vrednost za β zaista bliska jedinici) odnos (84–10) za jedan od preseka iznosi:

$$\frac{\int_A \overline{u'_1 u'_1} dA}{Av^2} = \varepsilon_{11} \quad (84-11)$$

Naglašava se da je pravac 1 normalno usmeren na presek koji se posmatra, pa je ε_{11} odnos normalno usmerene osrednjene sile na presek, koji potiče od fluktuacija, prema sili od osrednjenih brzina.

Za procenu ε_{11} treba raspolagati saznanjem o $\overline{u'_1 u'_1}/v^2$ za pojedine tačke preseka, a taj odnos je jedan od uobičajenih pokazatelja turbulencije, i kvadratni koren toga odnosa naveden je u Poglavlju 54, sa nazivom „intenzitet turbulencije”, i napisan u (54–6). Odnos $\overline{u'_1 u'_1}/v^2$ može se tumačiti i kao odnos kinetičkih energija (po jedinici mase): lokalno (u tački) koju sadrže podužne (u pravcu strujanja) fluktuacije i one kinetičke energije koju daje srednja brzina v u preseku.

Raspolaže se saznanjima o „intenzitetu turbulencije”, proizašlim iz istraživanja u cevima kružnog preseka – o tome će biti reči u Odeljku IV Poglavlja 98. Tamo će se pokazati da je za taj slučaj odnos (84–10) reda vrednosti 0,01. Razume se da se podrazumeva da je struja u kružnoj cevi jednolika, a pod pojmom „jednolika” treba shvatiti pravolinijsko osrednjeno strujanje bez ikakvih lokalnih poremećaja u posmatranoj deonici struje, tako da je u svim poprečnim presecima struje raspored osrednjenih brzina, i osrednjenih proizvoda fluktuacionih brzina $\overline{u'_i u'_j}$, isti. Ti rezultati mogu se preneti, barem u proceni reda vrednosti odnosa (84–11), sa jednolike struje u cevi kružnog preseka na sve jednolike struje (tj. na jednoliku struju i u nekom drugom preseku).

Uz ove navode treba se podsetiti da granični presek za posmatranu zapreminu mora da zadovoljava uslov da je osrednjeno strujanje paralelno i pravolinijsko, normalno na presek. (To treba da ispune preseki I i II.) Ne treba nigde, pa ni ovde, smetnuti sa uma da je to uključeno u pojam „presek struje” kao što se on svuda shvata. Bez toga nema jasnoće graničnih uslova, pa ni mogućnosti za primenu opštih stavova na veći broj primera, a bez čije primene svako uopšteno razmatranje

je besmisleno. Navedeni uslov znači da osrednjeno strujanje kroz presek nema zakrivljenja strujnica, niti povratno usmerenih brzina, niti ma kakvih lokalnih poremećaja, koji приметно uznemiravaju struju u njenom osrednjenom pravolinijskom paralelnom strujanju. Na primer, da bi se uslov za presek strujanja ispunio na primeru sa sl. 83–5 (to je naglo proširenje), mora se presek II odmaknuti od mesta gde se presek geometrijski menja, odnosno presek II mora da bude tamo gde je prizidna, od središnje struje odvojena, vrtložna oblast već završena, gde se struja već smirila od lokalnog poremećaja, i gde je već ceo presek cevi ispunjen pravolinijskim paralelnim strujanjem.

Prethodno podsećanje na uslov za granični presek struje treba da posluži za ohrabrenje da u preseku koji taj uslov ispunjava nema tako intenzivne turbulencije da bi se osetno razlikovala od one koja se postiže u jednolikoj struji.

* * *

VI. Rečeno je već da osrednjena inercijalna „sila” za presek može da ima komponentu u pravcu koji leži u preseku. Neka to bude pravac 2 (a pravac 1 je normalan na presek), pa je onda komponenta za presek (uzet je presek I) napisana sa (84–8). Na isti način bi se napisala i komponenta u pravcu 3 (koji takođe leži u posmatranom poprečnom preseku).

Za ocenu uticaja poprečnih fluktuacionih brzina na osrednjenu inercijalnu „silu” za presek može da posluži pokazatelj:

$$\varepsilon_{12} = \frac{\int_A \overline{u'_1 u'_2} dA}{v^2 A} \quad (84-12)$$

ε_{12} predstavlja odnos poprečne sile od fluktuacija napisane sa (84–8), prema sili za isti presek od osrednjenih brzina, napisanoj sa (84–9). Ako je taj odnos beznačajan, onda su uticaji od poprečnih fluktuacija na osrednjenu inercijalnu silu zanemarljivi.

Iza izraza (84–11) za ε_{11} pomenuta su izlaganja na kraju Poglavlja 98, u kojima će se pokazati da ε_{11} ne prelazi 0,01, a na istom mestu će se navesti da je ε_{12} još manji. Može se, sakle, zaključiti da su zanemarljivi uticaji poprečnih fluktuacionih brzina na inercijalnu „silu” za presek. Zanimljiv je i navod na kraju Poglavlja 98 da je $\varepsilon_{12} = 0$ za

kružni poprečni presek i za poprečni presek struje između dve paralelne ploče.

* * *

VII. Razmatranja u dva prethodna odeljka (V i VI) dozvolila su da se može zaključiti da su podužne i poprečne fluktuacije na poprečnim presecima od zanemarljivog uticaja na osrednjenu inercijalnu „silu”.

Uz prethodno treba primetiti da se obično više greši u osrednjenju inercijalnoj „sili” za presek, ako se zanemari neravnomernost osrednjenih brzina tj. ako se u (84-6) uzme $\beta = 1$, nego što se čini zanemarenjem uticaja fluktuacija. Naime, rečeno je da β neće preći 1,03, a to je, za praktične zadatke beznačajno, a pogotovo je onda beznačajan uticaj fluktuacija, koji bi silu povećao manje.

Prema tome, za praktične zadatke može se inercijalna „silu” za presek računati sa iznosom ρQv .

Inercijalna „silu” u ustaljenom strujanju ispoljava se samo integralom po graničnoj površini kao da je površinska sila, i to sa iznosom $-\rho u_i u_j$ po jedinici površine. Osrednjavanje ovoga iznosa daje $-\rho \overline{u_i u_j} - \rho \overline{u'_i u'_j}$, a drugi član je tzv. „napon” turbulencije σ_{ij}^t . Treba se podsetiti da su „naponi” turbulencije uvedeni u Poglavlju 53, sa $\sigma_{ij}^t = -\rho \overline{u'_i u'_j}$, i protumačeni kao „posrednici” između glavnog strujanja i fluktuacija. Stoga se i treći član u (84-4), koji predstavlja uticaj fluktuacija na osrednjene vrednosti, može napisati i sa „naponima” turbulencije, tj. kao površinska „silu”:

$$\overline{I_j}(u'_i) = \int_A -\rho \overline{u'_i u'_j} n_i dA = \int_A \sigma_{ij}^t n_i dA \quad (84-13)$$

U prethodnim razmatranjima je pokazano da je ova „silu” tj. dejstvo „napona” turbulencije zanemarljivo u odnosu na ostale sile koje deluju na struju. Uz ovo treba se podsetiti da je u Odeljku I rečeno da se površinske sile u graničnim poprečnim presecima posmatranog dela struje ispisuju uz zanemarenje devijatorskog dela napona. Za to zanemarenje, kod turbulentnih strujanja, može se navesti ubedljiv razlog. Naime, kod razvijene turbulencije se ostvaruje $\overline{\sigma_{ij}^d} \ll \sigma_{ij}^t$ (osrednjeni devijatorski napon usled viskoznosti, zanemarljiv je u odnosu na takozvani „napon” turbulencije). Malo pre je pokazano da je dejstvo „napona” turbulencije zanemarljivo, s obzirom na ostale (i merodavne) uticaje,

a onda je pogotovo zanemarljivo dejstvo devijatorskih napona, posredstvom viskoznosti.

* * *

VIII. U Poglavlju 82, a i malo pre u Odeljku I, sile pritiska u preseccima (I) i (II) određene su uz hidrostatičku raspodelu pritiska po poprečnom preseku (ovo znači ista pijezometarska kota za sve tačke u jednom preseku). To nije potpuno tačno ako je strujanje turbulentno, i to se uviđa iz jednačine (81–5). Tamo je, doduše, nagovešteno da se pijezometarske kote za različite tačke u istim preseccima neznatno razlikuju. Sada će pokušati da se oceni da se to zaista neznatno.

Za ocenu promene pijezometarske kote po jednom preseku može da posluži sledeće razmatranje koje će se odnositi na presek, na koga je normalno upravljena osa 1, koja ima pravac glavnog strujanja. Uz to se pretpostavlja da je strujanje ravansko, u ravni (1, 2), a na zid provodnika normalna je osa 2, ili je strujanje osnosimetrično, u kružnoj cevi, a istražuje se duž jednog od prečnika (bilo koga), postavljenog duž ose 2. Za takve uslove ranije je napisana jednačina (81–6), a iz nje se dobija:

$$\bar{\Pi} + \frac{\overline{u'_2 u'_2}}{g} = \text{const} \quad (84-14)$$

Po zidu, gde je $u'_2 = 0$, pijezometarska kota će se označiti sa $\bar{\Pi}_{\text{zid}}$, pa se može napisati:

$$\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_{\text{zid}} - \frac{\overline{u'_2 u'_2}}{g} \quad (84-15)$$

Treba primetiti da je kota $\bar{\Pi}_{\text{zid}}$ ista za ceo obim jednoga preseka (ovo važi, razume se, za ravansko, odnosno osnosimetrično strujanje). Iz jednačine se vidi da je osrednjena pijezometarska kota $\bar{\Pi}$ za neku tačku u preseku niža od pijezometarske kote na zidu za $\Delta\bar{\Pi} = \overline{u'_2 u'_2}/g$.

Ako se za pritisak u svim tačkama preseka uzme pritisak koji odgovara istoj pijezometarskoj koti za ceo presek (neka to bude kota $\bar{\Pi}_{\text{zid}}$), onda se u osrednjenom pritisku, zbog zanemarenja uticaja fluktuacija, greši za:

$$\Delta p = \gamma \Delta\bar{\Pi} = \gamma \frac{\overline{u'_2 u'_2}}{g} = \overline{\rho u'_2 u'_2} \quad (84-16)$$

pa će se u sili pritiska pogrešiti za

$$\Delta P = \int_A \overline{\rho u'_2 u'_2} dA \quad (84-17)$$

a to je sila istoga reda veličine kao „sile” u presecima napisane sa (84-7) i (84-8), koje su takođe proizašle iz uticaja fluktuacija. Za te sile je ustanovljeno da su zanemarljive u odnosu na ostale uticaje, pa se to može onda reći i za (84-17). Po ugledu na odnose ε_{11} i ε_{12} , koji su napisani sa (84-11) i (84-12), i ovde se može uvesti odnos:

$$\varepsilon_{22} = \frac{\int_A \overline{u'_2 u'_2} dA}{v^2 A} \quad (84-18)$$

gde je $\overline{u'_2 u'_2}/2$ kinetička energija poprečnih fluktuacija, a $v^2/2$ je kinetička energija glavne struje (računata sa srednjom brzinom u preseku) – obe po jedinici mase. Njihov odnos je $\overline{u'_2 u'_2}/v^2$, a kvadratni koren iz toga odnosa naziva se „intenzitet turbulencije” – u ovom slučaju poprečne, dok je za odnos $\overline{u'_1 u'_1}/v^2$ rečeno – iza izraza (84-11) – da je takođe „intenzitet turbulencije”, ali podužne.

Na kraju Poglavlja 98, kako je kod uvođenja ε_{11} nagovešteno, obrazložiće se da je ε_{11} reda vrednosti 1%. Tamo će se to obrazložiti i za ε_{12} , i za malo pre uvedeni odnos ε_{22} . Unapred verujući da će se to i učiniti (i za ε_{22}), može se reći da poprečne fluktuacije utiču na silu pritiska u preseku u iznosu koji je zanemarljiv, pa se sila pritiska može računati po načelima hidrostatike.

Prethodno ocenjivanje odnosilo se na ravansku ili osnosimetričnu struju – tako se u početku izlaganja uslovalo, pa se pošlo od jednačine (81-6), i na osnovu nje se došlo do izraza (84-14), iz koga su izvučeni prethodni zaključci. Za proizvoljan presek struje ne može se napisati (81-6), nego se mora poći od (81-5), gde se vidi da $\overline{\Pi}$ zavisi od x_2 i od x_3 (obe te ose leže u poprečnom preseku struje). Nadalje, po ugledu na (81-5) trebalo bi napisati jednačinu, u kojoj bi se pojavilo $\partial \overline{\Pi} / \partial x_3$. Iz te dve jednačine moglo bi se oceniti da je promena $\overline{\Pi}$ po preseku istoga reda vrednosti kao u razmatranom uproštenom slučaju: razlika za $\overline{\Pi}$ dve tačke istoga preseka je reda vrednosti $\overline{u'_i u'_j}/g$ (gde $\overline{u'_i u'_j}$ simbolično označava neki od osrednjenih proizvoda fluktuacionih brzina), a to je red vrednosti malo pre razmatranoga proizvoda $\overline{u'_2 u'_2}$. Stoga se

zaključak o zanemarljivom značaju odstupanja pijeometarske kote za različite tačke istoga preseka, izveden za ravansko i osnosimetrično strujanje kroz presek, može proširiti na bilo kakav presek struje (razume se da pojam „presek struje” i ovde, kao i svuda, podrazumeva osrednjeno paralelno i pravolinijsko strujanje, normalno na presek).

* * *

IX. Sem sila na граниčnim presecima struje (P_I , P_{II} , I_I i I_{II}) koje su u prethodnim izlaganjima raspravljene, i za koje je zaključeno da fluktuacije zanemarljivo utiču na njihove osrednjene vrednosti, u jednačinu (82–6), koja upravo izražava sile, ulaze još težina G i sila dodira između fluida i čvrste granice obeležena sa K . Težina ne fluktuiira i posve je određena zapreminom V . Jednačina za glavno strujanje dobija se osrednjavanjem sila u (82–6):

$$\overline{I}_j + \overline{I}_j^{\text{II}} + \overline{P}_j + \overline{P}_j^{\text{II}} + \overline{G}_j + \overline{K}_j = 0 \quad (84-19)$$

Rečeno je da fluktuacije zanemarljivo utiču na sve do sada razmatrane članove izuzev na član \overline{K}_j , pa onda ne mogu ni na njega uticati. Ovo znači da će osrednjena vrednost sile \overline{K}_j biti dobro ocenjena ako se primeni postupak iz Poglavlja 82, jer sva učinjena pojednostavljenja i zanemarenja, koja su postupak učinili veoma pristupačnim za praktičnu upotrebu, imaju svoja opravdanja. Dakako, uz ovaj zaključak ne treba smetnuti sa uma da preseki (I) i (II) struje moraju da ispune uslov o paralelnom i pravolinijskom osrednjenom strujanju. Za zadatak, gde je sila K_j poznata, podrazumeva se da je poznata njena osrednjena vrednost \overline{K}_j , a tada se traži druga sila (traži se osrednjena vrednost te druge sile).

Kod otvorenih tokova zanemarljiva je sila između slobodne površine vode i vazduha (što je objašnjeno još u Poglavlju 82, neposredno pre primera), pa se sila K_j po omotaču (u koga ulazi i slobodna površina vode) računa kao sila između fluida i čvrste granice.

Sva izlaganja u ovom poglavlju (84) odnosila su se na utvrđivanje osrednjenih vrednosti sila, odnosila su se na ono što se i određuje u „glavnom strujanju”, pa se od fluktuacija zahvatilo samo onoliko koliko se moralo da se odrede osrednjene vrednosti, i pokazalo se, da je to – u posmatranim okolnostima – beznačajno. Razmatranja u ovom poglavlju kojima se to dokazivalo bila su nužna, jer se ne

sme nešto jednostavno zanemarivati, bez ikakvog razjašnjenja koliko to iznosi, upravo da ne iznosi više od onoga što se može zanemarivati.

Valja imati na umu da postupak iz Poglavlja 82, koji se malo pre opravdao i oglasio podobnim i za primenu za turbulentnu struju između dva preseka, može da odredi osrednjenu silu \overline{K}_j na celokupnu čvrstu graničnu površinu, ali ne daje i raspored opterećenja, ne daje delove sile \overline{K}_j za pojedine delove čvrste granične površine. Treba tražiti druge metode, prvenstveno eksperimentalne, ako se želi odrediti i raspored pritisaka po čvrstoj graničnoj površini. Prethodna napomena bila je izlišna, jer je trebalo odmah shvatiti da od jednog postupka ne treba očekivati više, nego što on može da pruži.

Treba se podsetiti da je iza izraza (84–6) rečeno da je koeficijent β , neravnomernost brzine po preseku, koji je ušao u taj izraz, blizak jedinici. To se odnosi na osrednjene (kroz vreme) brzine \bar{u} za pojedine tačke preseka, jer se one po celom preseku (izuzev blizine zida) mnogo ne razlikuju. Kod laminarnog tečenja β je znatno veće, jer je veća neravnomernost brzina po preseku, dok turbulencija, mešanjem delića (brži se zamešaju u sporije, odnosno sporiji među brže), ne dozvoljava veću neravnomernost osrednjene brzine. Tako izgleda da turbulencija čak pojednostavljuje zadatak, jer se, u pretežnom broju praktičnih slučajeva, ne mora voditi računa o rasporedu brzina po preseku. Razume se da se ovo odnosi na razmatranje koje se ograničava na osrednjene vrednosti sila, i sa čime se praksa najčešće zadovoljava.

Praktične potrebe, u nekim primerima, mogu zahtevati da se razmatraju i fluktuacije sila pritisaka, jer poznavanje samo osrednjenih vrednosti nije dovoljno. Tada se moraju određivati fluktuacione karakteristike, koje se izražavaju statističkim pokazateljima, prikazanim u Poglavlju 54. Posebno su zanimljive maksimalne i minimalne vrednosti sila pritisaka, njihova raspodela (da se zna unutar kojih granica se njihove vrednosti pretežno kreću), periodičnost (da se zaključi da li postoji mogućnost za pojavu vibracija čvrste granice), a onda i veza između istovremenih pritisaka u različitim tačkama (korelacija).

* * *

X. Dosadašnja izlaganja u ovom poglavlju odnosila su se na ustaljeno strujanje, razmatrani su svi članovi u jednačini (84–1), odnosno (84–4), izuzev prvoga, koji i unosi uticaj neustaljenosti.

Može se reći da taj do sada nerazmatrani član predstavlja dodatnu inercijalnu silu, koja ulazi u (84-4), i iznosi:

$$\Delta \bar{I}_j = -\rho \int_V \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} dV \quad (84-20)$$

Ta sila sa ostalim silama upisana u navedenu jednačinu čini „ravnotežu sila” i bila bi dodata u (84-19).

Ako količina kretanja u zapremini V raste, brzina \bar{u}_j u pretežnom delu zapremine V raste, tačnije rečeno u pretežnom delu zapremine lokalno ubrzanje $\partial \bar{u}_j / \partial t$ je pozitivno. Tada je sila $\Delta \bar{I}_j$ negativne vrednosti i deluje suprotno od smera brzine, pa ostale sile to moraju naknaditi pojačanim delovanjem niz struju, većim nego da je strujanje ustaljeno, kada je $\Delta \bar{I}_j = 0$. Ovo je potpuno razumljivo, jer dodavanje lokalne komponente ubrzanja zahteva i dodatno povećanje sila.

Jasno je da unošenje sile $\Delta \bar{I}_j$ u jednačinu stvara velike teškoće u praktičnoj primeni jednačine, jer se unosi zapreminski integral, koji zahteva određivanje rasporeda brzina po celoj zapremini, a on se menja kroz vreme. Nije, međutim, najveća nezgoda u dodatnom članu u jednačini, velike teškoće su da se jednačina mora utvrđivati za pojedine vremenske trenutke, jer se svi članovi menjaju kroz vreme, dok su kod ustaljenog strujanja ustaljeni, pa se rešenje jednačine odnosi na bilo koji vremenski trenutak, a ovo, posve razumljivo, ukazuje da se ustaljeno strujanje neuporedivo lakše rešava od neustaljenog. Kod neustaljenog tečenja mogu se očekivati praktična rešenja samo u veoma uproštenim slučajevima, ili ako srećne okolnosti ukažu da je sila $\Delta \bar{I}_j$ zanemarljiva u odnosu na ostale sile.

85

**KRITIČKI OSVRT
I DOPUNSKA OBJAŠNJAVANJA
NA IZLAGANJA U POGLAVLJU 83**

Izlaganja iz Poglavlja 83 sada će se razmatrati sa stanovišta opštih zakonitosti navedenih u Prvoj knjizi.

* * *

I. Jednačina mehaničke energije (34–6), važeća za proizvoljnu konačnu zapreminu fluida, primeniće se na deo struje između dva preseka, i uzeće se u obzir sva pojednostavljena koja su ovde, kod struja, prihvaćena.

Uslov ustaljenosti odstranjuje levu stranu jednačine (34–6), pa od promena kinetičke energije ostaje samo prvi član desne strane, koja se integriše po graničnoj površini tamo gde ima proticanja kroz površinu, a to su samo poprečni preseci, i tu su brzine normalno usmerene na presek, pa se dobija:

$$\begin{aligned} -\rho \int_A \frac{u_j u_j}{2} u_i n_i dA &= \rho \int_{A_I} \frac{u^3}{2} dA - \rho \int_{A_{II}} \frac{u^3}{2} dA = \\ &= \rho \left(\alpha \frac{v^3}{2} A \right)_I - \rho \left(\alpha \frac{v^3}{2} A \right)_{II} = \rho Q \left[\left(\alpha \frac{v^2}{2} \right)_I - \left(\alpha \frac{v^2}{2} \right)_{II} \right] \end{aligned} \quad (85-1)$$

U prethodnom izvođenju korišćeno je sledeće:

- a) Fluid je konstantne gustine ($\rho = \text{const}$).
- b) Skalarni proizvod $u_j u_j$ zamenjen je sa u^2 .
- c) Pravac brzina normalno je usmeren na ravan poprečnog preseka, pa je $u_i n_i$ jednako $-u$ za presek I, a $+u$ za presek II. Podrazumeva se da je smer tečenja od I prema II. Ova izjednačavanja su već korišćena pri prelasku iz jednačine (84–1) u (84–2).
- d) Koeficijent neravnomernosti brzine α , napisan sa (81–9).

Naredni član u (34–6) je rad zapreminskih sila od kojih deluje samo težina, pa je, shodno (28–6), $f_j = -g\partial Z/\partial x_j$, sa čime se dobija:

$$\begin{aligned}\int_V \rho f_j u_j dV &= -\rho g \int_V \frac{\partial Z}{\partial x_j} u_j dV = -\rho g \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (Z u_j) dV = \\ &= -\rho g \int_A Z u_j n_j dA\end{aligned}\quad (85-2)$$

Ovde je korišćena zamena:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_j} u_j = \frac{\partial}{\partial x_j} (Z u_j)$$

jer je usled nestišljivosti $\partial u_j / \partial x_j = 0$. Korisno je podsetiti se da Z svuda, pa i ovde označava vertikalnu osu usmerenu na gore.

Pisanje izraza (85–2) je preobraćanje zapreminskog integrala u površinski, a ovaj ima sabirke samo tamo gde ima proticanja kroz graničnu površinu, a to je po poprečnim presecima.

Motorni rad površinskih sila iz (34–6) može se napisati kao razlika između ukupnog rada i deformacionog:

$$\int_V u_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dV = \int_A \sigma_{ij} u_j n_i dA - \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dV \quad (85-3)$$

što je već napisano u (34–7).

Sada će se to rastaviti na sferni i devijatorski deo. U prvi ulazi – vidi (27–8):

$$\int_V -u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} dV = \int_A -p u_j n_j dA \quad (85-4)$$

jer je deformacioni rad pritiska kod nestišljivog fluida jednak nuli i stoga je i izostavljen u napisanom izrazu.

Za devijatorski deo se može napisati:

$$\int_V u_j \frac{\partial \sigma_{ij}^d}{\partial x_i} dV = \int_A \sigma_{ij}^d u_j n_i dA - \int_V \sigma_{ij}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dV \quad (85-5)$$

Ukupan rad devijatorskih napona, dat površinskim integralom, za površinu koja omeđava deo struje između dva poprečna preseka, jednak je nuli iz sledećih razloga: po omotaču nema brzine, pa nema ni

rada. Na graničnom poprečnom preseku tangencijalni naponi leže u ravni preseka, a tu nema brzine, dok u pravcu brzine od devijatorskog dela napona deluje samo deo normalnog napona σ_{11}^d (neka osa 1 bude normala na presek) koji je srazmeran sa brzinom dilatacije $\partial u_1/\partial x_1$, a ona je nula, jer je poprečni presek postavljen tamo gde se brzina duž struje ne menja, ili se, zanemarljivo menja. (Inače strujanje kroz presek ne bi bilo pravolinijsko i paralelno, pa ni približno tako, a onda to nije poprečni presek kakav se za proučavanje zahteva.) Prema tome, napon σ_{11}^d na graničnim presecima je jednak nuli, što je već objašnjeno u Poglavlju 84 pri razmatranju četvrtog člana jednačine (84–1). Ako je napon jednak nuli, onda ni rada nema.

Ovo znači da se motorni i deformacioni rad devijatorskih napona međusobno potiru (jer je ukupan rad nula) pa se za rad devijatorskog dela napona piše:

$$\int_V u_j \frac{\partial \sigma_{ij}^d}{\partial x_i} dV = - \int_V \sigma_{ij}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dV \quad (85-6)$$

ili simbolično:

$$mot^d = -def^d \quad (85-7)$$

koji se odnose na celu zapreminu, a u jedinici vremena.

Ovo saznanje navodi na naredna rasuđivanja.

Deformacioni rad devijatorskog dela napona je pozitivan (njime se stvara toplota) – a to je iskazano jednačinom (41–15) i objašnjeno iza nje – pa je onda motorni rad negativan. Njime se, dakle, oduzima energija, a oduzme se upravo toliko koliko je potrebno za deformaciju. Treba naglasiti da ovo važi za uslovljene okolnosti, tj. za zapreminu između dva poprečna preseka struje, i da to važi samo za tu zapreminu, posmatranu kao celina. Važi, dakle, zbirno a ne i za svaki delić posmatran zasebno. Ima delića koji za svoju deformaciju troše više nego što im se motornim radom oduzme, dok za uzvrat ima onih kojima se motornim radom oduzme manje nego što zahteva sopstvena deformacija, ali se to u celoj posmatranoj zapremini izravna. Uravnoteženje deformacionog i motornog rada za struju kazuje da se gubitak ili „izgubljena energija” (ono što se kroz deformacioni rad otuđuje iz mehaničke energije) nadoknađuje onim što se oduzima motornim radom (a oduzimanje uvek ide uz „otpor”) – stoga se u praktičnim razmatranjima mešaju i zamenjuju nazivi „gubitak” i „otpor”.

Jednačina energije (34–6) primenjena na deo struje između dva poprečna preseka daje nulu za zbir njenih članova desne strane (leva strana je, kao što je objašnjeno, jednaka nuli, jer se posmatra ustaljeno strujanje). Ti članovi u prethodnim izvođenjima izraženi su sa (85–1), (85–2), (85–4) i (85–6). Pre sabiranja tih izraza združiće se (85–2) i (85–4), što znači združavanje rada težine i pritiska (ili smanjenje potencijalne energije) pa će se pojaviti pijezometarska kota, a ona je za jedan presek konstantna, pa se može izvući pred integral – dobija se:

$$\begin{aligned} - \int_A \gamma \left(Z + \frac{p}{\gamma} \right) n_j u_j dA &= \gamma \Pi_I \int_{A_I} n_j u_j dA - \gamma \Pi_{II} \int_{A_{II}} n_j u_j dA = \\ &= \gamma Q (\Pi_I - \Pi_{II}) \end{aligned} \quad (85-8)$$

jer je

$$- \int_{A_I} n_j u_j dA = \int_{A_{II}} n_j u_j dA = Q$$

Združivanjem rada sila težine i pritisaka, članovi jednačine (34–6) svode se na (85–1), (85–8) i (85–6). Ovaj poslednji izraz može se zameniti sa (85–7). Sa tako izraženim članovima i deljenjem sa γQ dobija se:

$$\left(\Pi + \alpha \frac{v^2}{2g} \right)_I - \left(\Pi + \alpha \frac{v^2}{2g} \right)_{II} = \frac{def^d}{\gamma Q} \quad (85-9)$$

Umesto (83–9) energetske promene u struji mogu se tačnije napisati sa:

$$\left(\Pi + \alpha \frac{v^2}{2g} \right)_I - \left(\Pi + \alpha \frac{v^2}{2g} \right)_{II} = E_{izg} \quad (85-10)$$

jer je tako kinetička energija tačnije izražena, jer se vodi računa o neravnomernosti brzine po preseku.

Upoređivanjem (85–9) sa (85–10) dobija se:

$$\frac{def^d}{\gamma Q} = E_{izg} \quad (85-11)$$

što pokazuje da se kroz deformacioni rad devijatorskih napona (trenjem uzrokovanim viskoznošću) jedan deo mehaničke energije otuđuje (za struju je izgubljen) – nepovratno odlazi u toplotu.

Naglašava se da uslovljena jednostavnost strujanja omogućava pisanje jednostavne jednačine pogodne za primenu. Ustaljenost strujanja

odstranjuje jedan zapreminski integral koji se ne može pretvoriti u površinski, nego se mora poznavati raspored lokalnih promena kinetičke energije po celoj zapremini. Površinski integrali se svode na poprečne preseke, gde se sve uprošćava pretpostavkom o jednostavnom preseku (sa pravolinijskim i paralelnim strujanjem kroz presek). Treba, međutim, naglasiti, da se ni motorni, ni deformacioni rad, ne mogu izraziti površinskim integralom (što je objašnjeno u Poglavlju 27) nego se mora istraživati po celoj zapremini, a treba poznavati, jedan ili drugi (međusobno se ovde uravnotežuju). Zbog velikih teškoća oko utvrđivanja rasporeda deformacionog rada po zapremini (ili rasporeda motornog rada) u praktičnim zadacima se u to ne ulazi, nego se zbirno procenjuje E_{izg} , upravo vrednost integrala, izraženog desnom stranom u (85–6), na osnovu eksperimentalnih rezultata na sličnim zadacima. To je redovna hidraulička metoda. Stoga je pogodan izraz „disipacija” (rasipanje), jer se energija „rasipa” (troši se na deformaciju), po celoj zapremini, a obično se ne ulazi u raspored toga rasipanja po prostoru. Izraz „izgubljena energija” je takođe prihvatljiv, pogotovo kada se zna da je to sve „izgubljeno negde u zapremini” ali se ne utvrđuje tačan raspored gubljenja, niti se ulazi u bilans toplote, a sva ta „izgubljena energija” nepovratno prešla u toplotu. U Poglavlju 34 ovi nazivi su razjašnjeni, a prethodnim je ukazano na primenu toga saznanja kod struja.

* * *

Deformacioni rad, napisan desnom stranom jednačina (85–6) i (85–7), uz prihvaćenu vezu između napona i deformacija, izloženu u Poglavlju 41, svodi se na integrisanje izraza (41–14) po zapremini:

$$def^d = \int_V \sigma_{ij}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dV = \mu \int_V Y_{dis} dV \quad (85-12)$$

gde se koeficijent viskoznosti μ množi sa takozvanom „funkcijom disipacije”, Y_{dis} , napisanom sa (41–15).

* * *

Dosadašnja izlaganja pretpostavljala su da je omotač struje nepokretna čvrsta granica pa po njemu nema brzina. Međutim, ako bi se izlaganja primenila na otvorene tokove (tečne struje koje imaju slobodnu površinu – na primer kanali), ne bi se moglo tvrditi da je jednak

nuli ukupan rad devijatorskog dela napona na posmatranu zapreminu, jer se on svodi na rad po graničnoj površini – što je prvi član desne strane jednačine (85–5). Ovo znači da se ne bi moglo napisati (85–6) i (85–7). Umesto (85–7) trebalo bi pisati:

$$mot^d = uk^d - def^d \quad (85-13)$$

gde je uk^d skraćeno pisanje za ukupan rad devijatorskog dela napona, tj. za prvi član desne strane u (85–3). To je rad koji tečnost predaje vazduhu, da bi se on kretao u tankom sloju uz gornju površinu tečnosti. Na toj dodirnoj površini brzina vazduha i tečnosti je ista, a udaljavanjem od te površine brzina vazduha, kroz tanak sloj, smanji se do nule. Navedeni rad je negativan za tečnost tj. $uk^d < 0$, jer se njime oduzima energija tečnosti. Malo pre je pomenuto da je $def^d > 0$, pa desna strana u (85–13) znači združivanje dva dejstva, kojima se struji oduzima energija – to zajedno treba shvatiti kao za struju nepovratno izgublenu energiju (prešla u toplotu unutar struje), i predatu vazduhu (na graničnoj površini) i sve to se nadoknađuje motornim radom. Prema tome, u jednačini (85–9) desna strana je $-mot^d/\gamma Q$, i za nepokretan, a i za pokretan omotač, i to treba shvatiti kao E_{izg} , i takvom se shvatanju ne može staviti zamerka. No, pored ovakvog objašnjenja, može se nagovestiti da je uk^d zanemarljivo u odnosu na def^d , jer je energija koju tečnost preda vazduhu beznačajna u odnosu na energiju izgubljenu unutar tečne struje. Ovo se može objasniti činjenicom da za pokretanje sloja vazduha iznad vode treba veoma malena energija s obzirom da se radi o veoma malenoj masi, jer je gustina vazduha skoro 1000 puta manja od gustine vode.

* * *

II. Jednačina mehaničke energije za struju može se dovesti u vezu sa jednačinom mehaničke energije za jednu strujnicu, koja se izvela u Poglavlju 35, pod II. Tamo se izvodi jednačina energije za jednu strujnicu ustaljenog strujanja nestišljivog idealnog fluida i dolazi se do *Bernulijeve jednačine* (BERNOULLI) (35–13) ili (35–14), odnosno (35–15). Ako se zamisli niz strujnica, tako da čine struju, i sa istom pijezometarskom kotom i istom brzinom u preseku, ista jednačina važiće i za struju (jer se odnosi na jedinicu težine). Naime, za sve strujnice u istom preseku ista je pijezometarska kota Π (zbir Z i p/γ), a može se uzeti i ista brzina v

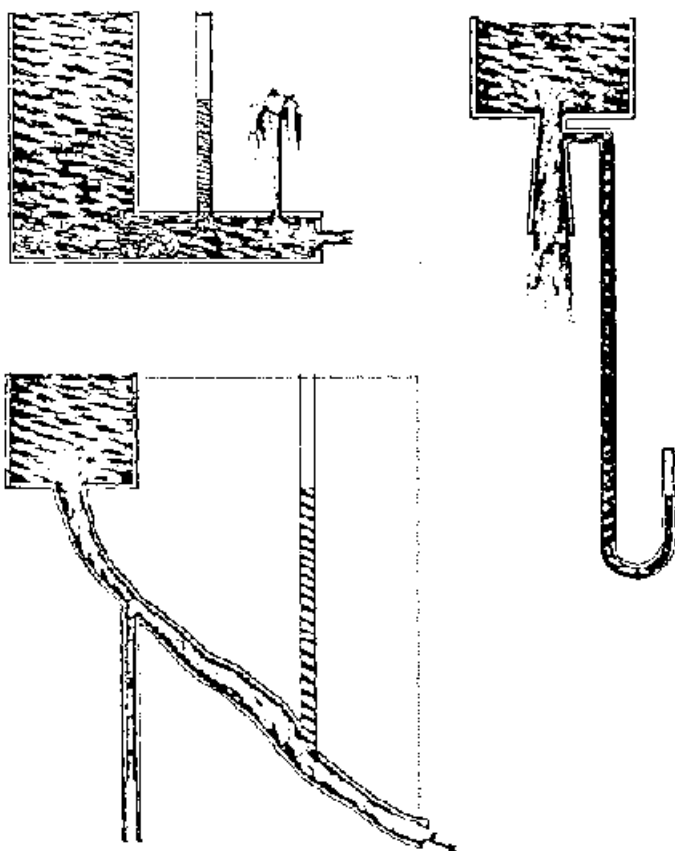
(svuda prosečna brzina). Deljenjem (35–15) sa g , i uvođenjem Π i v , dobija se (83–10), što bi značilo „podebljavanje” strujnice – da postane struja.

Ako se napusti pretpostavka o idealizaciji fluida, jednačina strujnice se mora popraviti, što je i učinjeno, napisano je (35–16). Ako se posmatra jedna strujnica, motorni rad u (35–16) sa negativnim predznakom ne može se zameniti deformacionim (sa izgubljenom energijom), jer duž jedne strujnice ne mora se baš ono što se motornim radom oduzme trošiti na deformaciju. Ako bi se sa strujnice prelazilo na struju, onda bi se zamena mogla napraviti, jer se tada celokupni motorni rad nadoknađuje utrošenim za deformaciju, kako je malo pre razjašnjeno. Korisno je još jedanput reći da se to odnosi na struju kod koje kroz omotač nema izmene energije.

Proširenje (35–16) na struju dozvolilo bi da se umesto Mot^d stavi $-Def^d$ (oba rada se odnose na rad po jedinici mase), pa bi se onda pokazalo da je smanjenje energije (kinetičke + potencijalne) jednako deformacionom radu.

U pomenutom izlaganju (u Poglavlju 35, pod II) objašnjeno je shvatanje pritiska kao potencijalne energije, što potvrđuje shvatanje pjezometarske kote kao združene potencijalne energije težine i pritiska, a po jedinici težine.

Uz jednačinu (35–13) napisano je da se zove „Bernulijeva” i treba se podsetiti da se ona odnosi na jednu strujnicu nestišljivog fluida u ustaljenom strujanju sa težinom kao zapreminskom silom. Drugi način njenog pisanja je (35–14). Isto se piše (samo sa prosečnom brzinom za presek) i kada se odnosi na struju – to je jednačina (83–10). I jednačina (83–9) koja napušta idealizaciju fluida, i kojom se praksa služi, takođe se naziva Bernulijevom. Tako naziv može obuhvatiti jednačinu strujnice i struje. Bernuli u svom delu „Hidrodinamika ili objašnjenja o silama i kretanjima fluida” („Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum Commentarii”), izdatom 1738. godine, tvrdio je da povećanje (odnosno smanjenje) „žive sile” (to je u stvari kinetička energija) mora da se nadoknadi smanjenjem (odnosno povećanjem) „potencijala”. To je i ilustrovao nizom crteža, od kojih se jedan daje kao slika 85–1, gde je uočljiva veza između promene pjezometarske kote („potencijala”) i brzine („žive sile”). Tako je Bernuli prvi ukazao na načelo održanja energije u fluidnoj struji. Samu jednačinu u raznim oblicima, a koja to



Slika 85–1 Jedan od crteža iz Bernulijeve knjige *Hidrodinamika*, gde se prikazuje pad piježometarske kote (potencijalne energije) sa porastom brzine (kinetičke energije), i obrnuto; u gornja dva crteža i do prvog piježometra u donjem crtežu povećanjem brzine snižena je piježometarska kota, a od prvog do drugog piježometra u donjem crtežu smanjena je brzina i stoga je povišena piježometarska kota

načelo iskazuje, napisalo je niz autora i svi se sa pravom pozivaju na Bernulija, jer su to samo različiti izrazi istoga načelnoga stava, koji je prvi rečima i slikama objasnio Bernuli u svojoj knjizi.

* * *

III. Na početku Odeljka III Poglavlja 83, u objašnjavanju primera iz toga poglavlja, kao i iz Poglavlja 82, rečeno je da dinamička jednačina

uravnoteženja sila i jednačina mehaničke energije nisu dve međusobno nezavisne jednačine, nisu sistem jednačina, a to se tamo ispostavilo preko posledica, kroz primere, jer se pojedinačan primer rešio po jednoj jednačini, i to rešenje se nameće drugoj da samo sravnji ono što se u njoj pojavljuje. Tako je nagovešteno da će se u ovom odeljku razjasniti uzroci, koji su doveli do navedenih posledica – to će se i uraditi u produžetku.

U početku Poglavlja 34 množenjem dinamičke jednačine (masa \times ubrzanje = sila) za elementarnu masu dobio se prvi oblik onoga što se nazvalo „jednačina mehaničke energije” (34–4). Iz toga je zaključeno da jednačina mehaničke energije nije suštinski nova, od dinamičke jednačine nezavisna jednačina, nije posledica nekoga drugoga načelnog stava, jer se dobija jednostavnim množenjem izraza za jedan već prihvaćeni aksiom. (Jednačina energije, ali tek kada se uključi toplota, je međutim, nova jednačina, jer je ona izraz svoga aksioma – o održanju energije.) Iza jednačina (41–11) i (41–12) je objašnjeno da se raspolaze sa dovoljnim brojem jednačina za rešavanje zadataka strujanja nestišljivog fluida. Pri tome se nije računala jednačina mehaničke energije, baš iz navedenoga razloga.

Dinamička jednačina i jednačina energije pišu se u različitim oblicima, pa kada se preobliče, ne uviđa se neposredno da se druga dobila množenjem prve sa u_j . Pogotovo se to ne vidi iz jednačina (82–3) i (83–6), tj. iz dinamičke jednačine i jednačine mehaničke energije, napisanih za struju, ne vidi se da bi se druga mogla dobiti jednostavnim množenjem sa u_j elementarnih delova koji ulaze u prvu, a to nije uočljivo jer jednačine daju integralni iznos za konačnu zapreminu (za struju između dva preseka). Ta prikriivena veza između dve jednačine, koje nisu onda nezavisne, ispoljila se potpuno ubedljivo u praktičnoj primeni, o čemu je opširno raspravljano na kraju Poglavlja 83, gde se zaključilo da se zadatak rešava samo jednom jednačinom, a to se rešenje nameće onda drugoj, odnosno da one nisu međusobno nezavisne, da ne čine sistem jednačina.

* * *

IV. Razmatranjima u Odeljku I mora se staviti ozbiljna zamerka, jer se ona mogu odnositi samo na laminarna strujanja. Ista zamerka je učinjena i u Poglavlju 84, na početku Odeljka II i tamo je objašnjeno da se za turbulentno strujanje mora poći od jednačina prilagođenih

turbulentnom strujanju, koje su tamo kasnije i primenjene. Isto će se uraditi i ovde.

Ako bi se želela napisati jednačina mehaničke energije za zapreminu između dva preseka struje, a za turbulentno strujanje morala bi se zadržati jednačina (34–6) sa svim integralima, jer ne bi bilo opravdanja za uprošćavanja. Dakako, sve bi vrednosti tu bile trenutne. Ako se razmatranja usmere na određivanje osrednjenih vrednosti, treba poći od jednačine mehaničke energije glavnog strujanja – to je jednačina (53–26) – i od nje će se i poći u sledećem odeljku (V), pa će se doći do njenog oblika, primenljivog na turbulentnu struju, između dva njena preseka. Tako će se, upoređivanjem sa (85–9), utvrditi kakve prepravke treba izvršiti u toj jednačini da bi se ona odnosila na osrednjene vrednosti u turbulentnoj struji. Tako se kod jednačine uravnoteženja sila postupilo, u Poglavlju 84.

Naredni odeljak (V) namenjen je jednačini energije za ono što se naziva „glavno strujanje”, a za turbulentnu struju između dva njena poprečna preseka, a Odeljak VII jednačini energije za fluktuacije.

Treba naglasiti da se u Poglavlju 83 izvela jednačina energije neposredno za struju, i da se ona i primenjivala, i da se tu podrazumevalo da su sve veličine osrednjene (misli se, pre svega, na piježometarske i energetske kote, te na proticaj), a to se posebno nije naglašavalo. Stoga, u narednom izlaganju treba protumačiti šta u jednačini (85–9) ulazi u E_{izg} kod turbulentnog tečenja.

* * *

V. Za glavno strujanje u turbulentnoj struji merodavna je jednačina (53–26), primenjena na deo struje između dva preseka. Ako se pretpostavi da je glavno strujanje ustaljeno, tj. da su ustaljene osrednjene vrednosti, leva strana pomenute jednačine jednaka je nuli. Prvi član desne strane može se napisati po ugledu na (85–1), jer u njega sada ulaze osrednjene brzine $\overline{u_j}$, $\overline{u_i}$ umesto trenutnih, a one se svode na osrednjenu brzinu \overline{u} (u pravcu glavnog strujanja). Ako se obavi integrisanje po preseku, onda se uvodi faktor neravnomernosti α , ali uz osrednjene brzine, kako je i napisano u drugom izrazu u (81–10).

Sa ovim napomenama prvi član desne strane u (53–26) svodi se na:

$$-\frac{1}{2}\rho \int_A \overline{u_i} \overline{u_j} \overline{u_j} n_i dA = \rho Q \left[\left(\frac{\alpha v^2}{2} \right)_I - \left(\frac{\alpha v^2}{2} \right)_{II} \right] \quad (85-14)$$

Napominje se da je koeficijent α određen drugim izrazom u (81–10). Isto je bilo i sa β u (84–6), on je određen prvim izrazom u (81–10).

Drugi i treći član mogu se spojiti, kako je to učinjeno i za pisanje (85–8), samo će se sada pojaviti osrednjena pijeziometarska kota $\bar{\Pi} = Z + \bar{p}/\gamma$ za pojedini presek. Treba primetiti da pijeziometarska kota nije ista za ceo presek što se objasnilo još u Poglavlju 81, i na šta je ukazano jednačinom (81–5), ali je dodatno objašnjeno da ta odstupanja nisu značajna, pa se može prihvatiti ista osrednjena kota za ceo jedan presek. Ova aproksimacija već je korišćena u Poglavlju 84, pa će i sada koristiti. Sa osrednjenim kotama za preseke I i II, označenim sa $\bar{\Pi}_I$ i $\bar{\Pi}_{II}$, dobija se istim postupkom kojim se došlo i do (85–8):

$$\rho \int_V \bar{f}_j \bar{u}_j dV + \int_A -\bar{p} n_j \bar{u}_j dA = \gamma Q (\bar{\Pi}_I - \bar{\Pi}_{II}) \quad (85-15)$$

Četvrti član desne strane u (53–26) piše se, po ugledu na (85–6) i (85–7), sa:

$$\int_V \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}^d}{\partial x_i} dV = - \int_V \bar{\sigma}_{ij}^d \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} dV \quad (85-16)$$

$$mot_{gl}^d = -def_{gl}^d \quad (85-17)$$

Donjim indeksom „gl” ukazuje se da se radi o odgovarajućim radovima koji se obračunavaju u glavnom strujanju, gde se pojavljuju samo osrednjene brzine i osrednjeni naponi. I ovde je ukupan rad osrednjenih devijatorskih napona jednak nuli što je i dovelo do (85–16), odnosno (85–17).

Uticaj fluktuacija na glavno strujanje izražava poslednji član u (53–26). Ovde se nisu mogle izbexi fluktuacije, kao što je to bilo moguće kod prethodnih članova (53–26). Uostalom, negde se i mora ispoljiti uticaj fluktuacija na glavno strujanje.

Na isti način kao što se to pisalo sa (85–5) za devijatorske napone, može se napisati i za „napone turbulencije”:

$$\int_V \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}^t}{\partial x_i} dV = \int_A \bar{\sigma}_{ij}^t \bar{u}_j n_i dA - \int_V \bar{\sigma}_{ij}^t \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} dV \quad (85-18)$$

čime je rečeno da je „motorni rad” (leva strana jednačine) jednak „ukupni rad” minus „deformacioni”. Ukupni rad se može preobratiti iz zapreminskog integrala u površinski, kako je i napisano prvim članom

desne strane. Treba se prisjetiti da „naponi” turbulencije nisu naponi u pravom (fizičkom) smislu reči, ali da se sa njima može postupati kao sa pravim naponima, jer izražavaju uticaje fluktuacija na osrednjeno (glavno strujanje), što se formalno može predstaviti kao dejstvo napona.

Kako je $\sigma_{ij}^t = -\overline{\rho u'_i u'_j}$ prethodna jednačina se može napisati i kao:

$$\int_V \overline{u_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (-\overline{\rho u'_i u'_j}) dV = \int_A -\overline{\rho u'_i u'_j} \overline{u_j} n_i dA - \int_V -\overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} dV \quad (85-19)$$

Prvi član desne strane u (85-18) ili (85-19) kao integral po graničnoj površini ima sabirke samo tamo gde ima proticanja kroz graničnu površinu, gde $\overline{u_j} n_i$ nije jednako nuli, a to su samo poprečni preseki A_I i A_{II} , koji ograničavaju posmatrani deo struje.

Kroz presek A_I postaviće se osa 1 normalno na presek ($n_2 = n_3 = 0$), dok je $n_1 = -1$, jer je spoljna normala suprotno usmerena od pravca strujanja. (Pretpostavlja se da je tečenje usmereno od A_I ka A_{II}). Stoga deo integrala, koji se odnosi na A_I , iznosi:

$$\int_{A_I} -\overline{\rho u'_i u'_j} \overline{u_j} n_i dA = \int_{A_I} \overline{\rho u'_1 u'_1} \overline{u} dA \quad (85-20)$$

jer je $\overline{u_j} = \overline{u} =$ osrednjena brzina koja je upravljena u pravcu 1 ($\overline{u_2} = \overline{u_3} = 0$), pa onda s obzirom na već zaključeno ($n_2 = n_3 = 0$), ostaju sabirci gde je $i = j = 1$, odnosno od proizvoda fluktuacija $\overline{u'_i u'_j}$ ulazi samo $\overline{u'_1 u'_1}$, kako je i napisano.

Kroz presek A_I , kako pokazuje leva strana u (85-14), prolazi kinetička energija:

$$-\frac{1}{2} \int_{A_I} \overline{u_i} \overline{u_j} \overline{u_j} n_i dA = \frac{1}{2} \int_{A_I} \overline{u}^3 dA = \frac{\rho}{2} (A \alpha v^3)_I \quad (85-21)$$

Podelom desne strane jednačine (85-20) sa desnom stranom (85-21) dobija se odnos:

$$\frac{2 \int_{A_I} \overline{u'_1 u'_1} \overline{u} dA}{(\alpha v^3 A)_I} \approx \frac{2 \int_{A_I} \overline{u'_1 u'_1} dA}{(\alpha v^2 A)_I} = 2\varepsilon_{11} \quad (85-22)$$

Pri pisanju prethodnoga smatralo se da se ne greši mnogo (nikako u redu vrednosti) ako se \overline{u} po celom preseku zameni sa v (negde će se

preceniti a negde potceniti). Uz tu aproksimaciju i korišćenjem faktora ε_{11} , uvedenog sa (84–11), došlo se do prethodnog izraza. Za faktor ε_{11} rečeno je, prilikom njegovog uvođenja, da je reda vrednosti 0,01. Stoga se izraz (85–20) može zanemariti u odnosu na (85–14).

Zanemarenjem prvog člana desne strane u (85–18), odnosno (85–19), jer su to prethodna razmatranja opravdala, može se pisati:

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ij}^t}{\partial x_i} \bar{u}_j dV = - \int_V \sigma_{ij}^t \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} dV \quad (85-23)$$

ili simbolično, po ugledu na (85–17)

$$mot^t = -def^t \quad (85-24)$$

Rečeno je da je leva strana u (53–26) jednaka nuli, zbog pretpostavljene ustaljenosti glavnog strujanja, a svi članovi desne strane iste jednačine raspravljani su u prethodnim izlaganjima, i svedeni na izraze (85–14), (85–15), (85–16) ili (85–17). Dodaje se još i (85–23), odnosno (85–24), pa se jednačina (53–26) svodi na:

$$\frac{1}{2} \rho Q [(\alpha v^2)_I - (\alpha v^2)_{II}] + \gamma Q (\bar{\Pi}_I - \bar{\Pi}_{II}) - def_{gl}^d - def^t = 0 \quad (85-25)$$

ili, deljenjem sa γQ

$$\left(\bar{\Pi} + \frac{\alpha v^2}{2g} \right)_I - \left(\bar{\Pi} + \frac{\alpha v^2}{2g} \right)_{II} = \frac{def_{gl}^d}{\gamma Q} + \frac{def^t}{\gamma Q} \quad (85-26)$$

Na kraju, može se, radi upoređenja sa praktičnim oblikom jednačine energije (83–9), prethodna jednačina napisati sa:

$$\begin{aligned} E_{izg} &= \left(\bar{\Pi} + \frac{v^2}{2g} \right)_I - \left(\bar{\Pi} + \frac{v^2}{2g} \right)_{II} = \\ &= \left[(\alpha - 1) \frac{v^2}{2g} \right]_{II} - \left[(\alpha - 1) \frac{v^2}{2g} \right]_I + \frac{def_{gl}^d}{\gamma Q} + \frac{def^t}{\gamma Q} + \Delta \end{aligned} \quad (85-27)$$

U prethodnoj jednačini dodat je poslednji član (Δ), koji treba da ukaže na odstupanja, iako je objašnjeno da nisu značajna, a usled prihvaćenih aproksimacija:

1. Izraz (85–15), a onda i izraz (85–25), odnosno (85–27), napisani su pod pretpostavkom da je osrednjena piježometarska kota ista za jedan presek.
2. Zanimaren je prvi član desne strane u (85–18), a onda i u (85–19), što je dovelo do izjednačavanja (85–23), odnosno (85–24).
3. Ako je struja sa slobodnom površinom vode, zanemareno je oduzimanje energije vodi da bi se pokrenuo sloj vazduha na dodiru sa vodom, što je opravdano ranijim izlaganjem, iza izraza (85–13).

Upoređenje (85–27) sa (83–9) pokazuje da desna strana u (85–27) izražava ono što je u (83–9) označeno sa E_{izg} . Za def_{gl}^d koristiće se desna strana u (85–16), a potom će se obaviti zamena prema (53–28), da bi se pokazalo da je to deformacioni rad koji se obavlja posredstvom viskoznosti. Dobija se:

$$def_{gl}^d = \int_V \overline{\sigma_{ij}^d} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} dV = \int_V \mu Y_{dis}(\overline{u_i}) dV \quad (85-28)$$

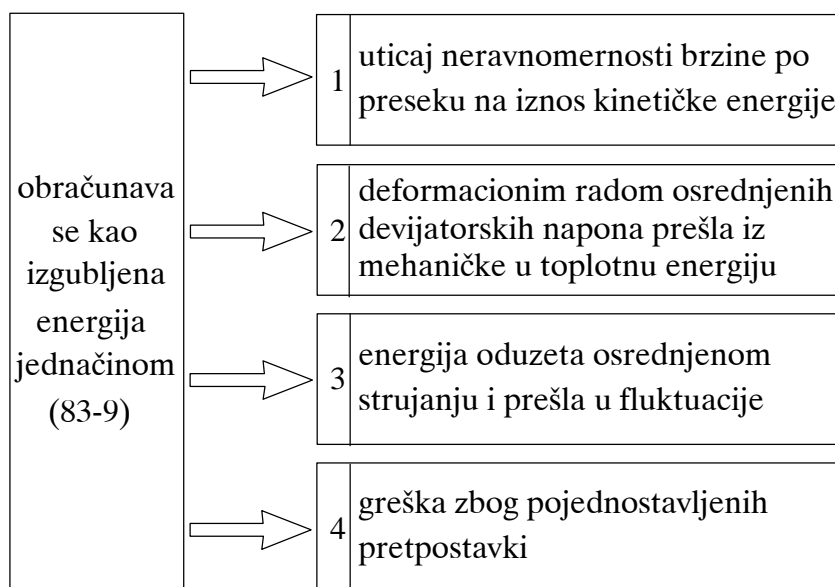
Pri narednom pisanju jednačine koristiće se i zamena $\mu = \nu\rho$, gde je μ koeficijent viskoznosti, a ν njegova kinematička zamena, uvedena sa (62–12).

Za def^t koristiće se desna strana (85–23) uz zamenu σ_{ij}^t sa $-\rho \overline{u'_i u'_j}$. Uz navedene zamene može se na osnovu (85–27) i (83–9) pisati:

$$E_{izg} = \underbrace{\left[(\alpha - 1) \frac{v^2}{2g} \right]_{II} - \left[(\alpha - 1) \frac{v^2}{2g} \right]_I}_{(1)} + \underbrace{\frac{\nu}{gQ} \int_V \overline{Y_{dis}} dV}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{gQ} \int_V -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} dV}_{(3)} + \underbrace{\Delta}_{(4)} \quad (85-29)$$

Ono što pokazuje prethodna jednačina rečima je iskazano i šematski prikazano slikom 85–2, gde se polja (1), (2), (3) i (4) odnose na isto tako označene članove u prethodnoj jednačini.

Valja zapaziti da ono što se obračunava kao E_{izg} u (83–9) ulazi u uticaj usled neravnomernosti brzina u presecima (I) i (II), obeleženo sa (1) u jednačini, jer se u (83–9) u promeni kinetičke energije računa



Slika 85–2 Prikaz energetske promene ispisane jednačinom (85–29)

bez vođenja računa o neravnomernosti brzina po preseku. Na primer, ako je brzina u preseku (I) jednaka, ili bliska nuli, a u preseku (II) je znatne vrednosti (jer je presek (II) znatno manji od (I)), onda bi leva strana (83–9) računala povećanje kinetičke energije za $v^2/2g$, a tačniji račun bi zahtevao da se računa sa $\alpha v^2/2g$, pa se ta greška obračunava u E_{izg} . Međutim, ako su brzine v_I i v_{II} iste, ili bliske, ovaj član – (1) na desnoj strani (85–29) – je nula, ili beznačajan.

Ako se još izostavi član obeležen sa (4) kao zanemarljiv, ostaje da izgubljenu energiju čine članovi (2) i (3). Prvi od njih označava rad koji posredstvom viskoznosti prelazi u toplotu (nepovratno izgubljena mehanička energija), i taj proces se obavlja unutar cele zapremine između dva poprečna preseka, i stoga je ostao kao zapreminski integral, nije se mogao pretvoriti u površinski (što je u više navrata rečeno za deformacioni rad devijatorskih napona). Njega izražava „funkcija disipacije” Y_{dis} (tj. rasipanja), jer je on rasut po celoj zapremini. Rečeno je već, iza izraza (85–11), da je redovna hidraulička praksa da se iznos toga člana ceni zbirno za celu posmatranu zapreminu (između dva poprečna preseka struje), ne ulazeći u to kako je to raspoređeno po zapremini.

Član (3) predstavlja otuđenje energije iz glavnog (osrednjenog)

strujanja, na koga se jednačina i odnosi, u sekundarni deo strujanja, u fluktuacije. Ovo se formalno može shvatiti kao „deformacioni rad napona turbulencije” – tako je izražavano u Poglavlju 53. I, kao što pravi naponi (misli se na devijatorski deo napona, koji deluje posredstvom viskoznosti) nepovratno oduzimaju mehaničku energiju struji i preobraćaju je u toplotu, tako i ovi formalni naponi („naponi” turbulencije) takođe nepovratno oduzimaju mehaničku energiju glavnom strujanju i ta energija prelazi u fluktuacije gde će se pojaviti kao dobitak mehaničke energije (što će se kasnije i napisati, u Odeljku VII, kada se bude raspravljalo o energetskim zbivanjima u fluktuacijama) – dakle, radi se o prelazu mehaničke energije iz jednog obračunskog dela strujanja u drugi. To se izražava zapreminskim integralom, bez mogućnosti preobraćanja u površinski integral (isto kao i kod deformacionog rada pravih napona koji deluju posredstvom viskoznosti), jer se oduzimanje mehaničke energije glavnom strujanju, za račun fluktuacija, obavlja po celoj zapremini. Uz prethodna razmatranja korisno je prisetiti se opštih razmatranja o energetskim zbivanjima u turbulentnom strujanju, koja su navedena iza jednačine (53–26), kao njeno objašnjenje. Zaključiće se da su ovdašnja razmatranja potpuno u skladu sa onima iza jednačine (53–26).

Slikom (51–3) je šematski prikazano kako se energija oduzeta glavnom strujanju na kraju sva preobraća u toplotu – to se događa unutar fluktuacija, možda ne odmah i tu, neposredno, ali svakako negde kasnije niz struju. Za obračun glavnog strujanja bitno je da je to otuđenje nepovratno i stoga se odmah, unapred, i otpisuje, kao izgubljeno za mehaničku energiju glavnog strujanja.

Sa praktičnog stanovišta zanimljivo je razmotriti šta znači ako se ostvari da je član (2) u (85–29) zanemarljiv u odnosu na član (3), tj. da je $def_{gl}^d \ll def^t$. To znači da je ono što se računa kao izgubljena energija (E_{izg}) u stvari oduzimanje mehaničke energije glavnom strujanju, da bi prešla u fluktuacije. To takođe znači da se u praktičnim obrascima za E_{izg} neće pojavljivati viskoznost, odnosno, u bezdimenzionalnim izrazima neće se pojavljivati Re -broj. U takvim okolnostima viskoznost je preslaba da bi uticala na zahvatanje energije prvostvorenim vrtlozima u glavnom strujanju, ona je nemoćna da utiče na obim otuđenja te energije iz glavnog strujanja, ta energija prelazi u fluktuacije, a tamo će viskoznost uz duži napor to morati da preobraća u toplotu. To je načelno objašnjeno u Poglavlju 53 u tekstu između „zvezdica” koji počinje

desetak redova iza jednačine (53–36), a završava pre jednačine (53–37). Tamo se kazalo da se radi o „razvijenoj turbulenciji” – upravo toliko razvijenoj da je zanemarljiv član (2) u odnosu na član (3) u prethodnoj jednačini (85–29).

* * *

VI. U praktičnim zadacima obično se primenjuje jednačina (83–9) koja iskazuje da je izgubljena energija E_{izg} , između dva poprečna preseka struje, razlika između energetske kote u ta dva preseka. Za jedan primer, koji će poslužiti za naredna izlaganja, slikom 85–3 prikazano je ono što iskazuje (83–9). Objašnjeno je ranije da se izgubljena energija E_{izg} obračunava u jednačini (83–9) na osnovu iskustva, i to u zbirnom iznosu, ne upuštajući se u to šta zapravo čini ono što se računa kao E_{izg} , a što je razjašnjeno pisanjem izraza (85–29). Procenjuje se zbirno, jednim iznosom, sve što ulazi u desnu stranu izraza (85–29), ne ulazeći u pojedinačno učešće pojedinih članova, a pogotovo ne u raspored po zapremini onoga što čini pojedini član.

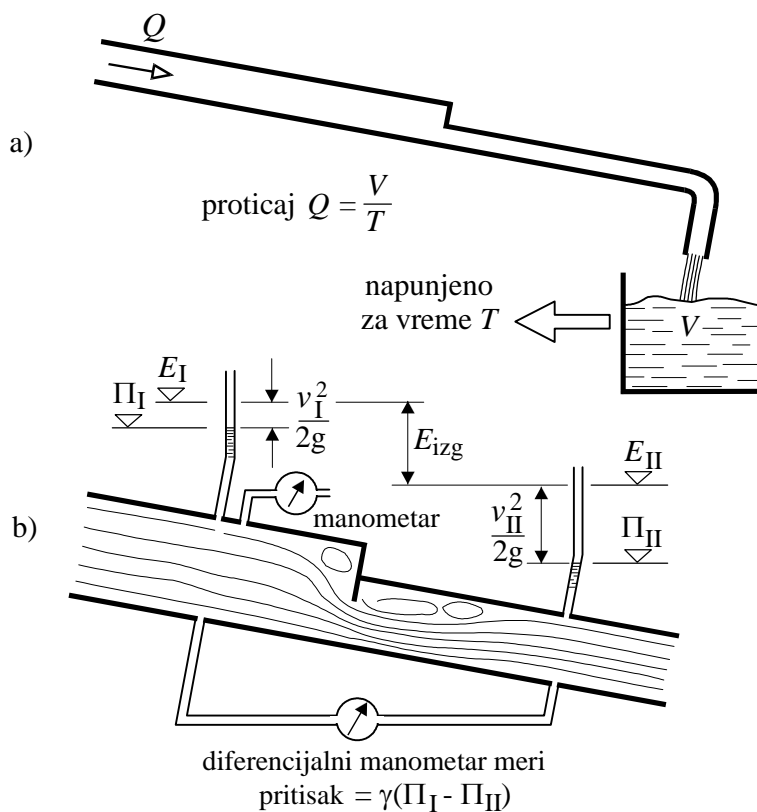
Izgubljena energija utvrđuje se eksperimentalno. Mere se pijezometarske kote i Π_I i Π_{II} i proticaj Q . Poznavanjem proticaja poznate su i brzine v_I i v_{II} (jednostavnim deljenjem proticaja sa površinom poprečnih preseka). Ako je navedeno izmereno, jednačinom (83–9) sračuna se E_{izg} , a to se može i prikazati slikom (za jedan primer – na to se odnosi slika 85–3). Podrazumeva se da je pijezometarska kota za ceo jedan presek ista – jednačina (83–9) je i izvedena uz prihvatanje takve pretpostavke, a ona je u nekoliko navrata do sada bila i objašnjena, dokazujući da su zanemarljiva odstupanja pijezometarske kote za različite tačke jednog preseka struje, koje nastaju zbog uticaja turbulencije.

Pijezometarska kota se meri neposredno – to je kota nivoa u pijezometarskoj cevčici, ili se utvrđuje merenjem pritiska (sl. 85–3). Pijezometarska cevčica se spoji sa zidom cevi u kome je izbušena rupica da voda uđe u cevčicu.

Za merenje proticaja postoji niz postupaka, o njima će biti reči i na nekoliko mesta u Desetom delu. Međutim, može se primeniti i najjednostavniji: izmeri se zapremina koja je protekla strujom za određeno vreme (koje se takođe meri), pa se proticaj dobija deljenjem zapremine sa vremenom (vidi opet sl. 85–3). Treba primetiti da uopšte nije potrebno meriti brzine u presecima, jer se do srednje brzine za presek (v_I , odnosno v_{II}) dolazi, kako je rečeno, deljenjem proticaja sa

površinom poprečnog preseka.

Na svakom drugom pojedinačnom primeru koji je potpuno istovetan (u geometrijskom smislu) sa onim na kome su obavljena merenja, ako se radi o fluidu iste viskoznosti, važi, potpuno razumljivo ista zavisnost $E_{izg} = E_{izg}(Q)$, pa se po jednačini (83–9) za poznati proticaj može sračunati jedna piježometarska kota (Π_I ili Π_{II}) na osnovu poznate druge, ili za poznatu piježometarsku razliku može se sračunati proticaj. Dakle, stvorena je mogućnost za rešavanje zadataka na osnovu stečenog iskustva.



Slika 85–3 Eksperimentalno određivanje izgubljene energije između dva preseka struje. Meri se:

- zapremina V napunjena za vreme T , čime je određen proticaj Q (crtež 'a')
- piezometarske kote Π_I i Π_{II} ; pojedina kota opaža se neposredno u piježometarskoj cevčici, ili se meri pritisak na manometru (crtež 'b')

Napomena: jednim manometrom može se neposredno odrediti piježometarska razlika $\Pi_I - \Pi_{II}$ (donji deo crteža 'b')

Rezultati opita mogu se primeniti i na primeru koji nije geometrijski potpuno istovetan sa modelom na kome se istraživalo, ali je geometrijski sličan sa modelom, pa čak ako teče i drugi fluid. Za to je potrebna analiza sličnosti, a pod sličnosti, shodno izrečenom na početku Poglavlja 63, treba shvatiti mogućnost prenošenja rezultata sa modela na sve objekte njemu slične.

Naglašava se da je za primenu eksperimentalnih rezultata bitno da se zadaci na koje se primenjuju ti rezultati razmatraju na isti način kako su obračunati pri obradi eksperimentalnih rezultata. Sporedno je šta se u stvari obračunava, ne ulazi se u to da li je to zaista stvarno izgubljena mehanička energija, jer se iskazuje zbirno ono što čini desnu stranu izraza (85–29). Na primer, ako je u preseku (I) brzina zanemarljiva, u preseku (II) ima značajnu vrednost – to je slučaj isticanja iz suda (gde je voda mirna) kroz otvor (gde mlaz ističe značajnom brzinom). Radi se, dakle, o naglom povećanju brzine. U tom slučaju član (1) desne strane u (85–29) bio bi uticajan, usled neravnomernosti rasporeda brzina u preseku (II). Bio bi, van svake sumnje, istog reda vrednosti kao zbir članova (2) i (3). Međutim, to ništa ne bi smetalo u obračunu, ako se tako postupilo i pri obradi eksperimentalnih rezultata, gde se nije morao ni utvrđivati raspored brzina po preseku da bi se utvrdilo koliko utiče sam član (1) u (85–29).

* * *

VII. Da se razmotri šta se zbiva u fluktuacijama, u zapremini između dva poprečna preseka struje, poslužiće jednačina (53–32). U toj jednačini pojavljuje se „produkcija” turbulentne energije, tj. ono što je prešlo iz glavnog strujanja – formalno se shvata da se to tu „proizvodi”, odatle i naziv „produkcija”. To je, kao što se iz jednačine (53–32) vidi, njen poslednji član.

U jednačini (53–32) izostaviće se leva strana, jer se pretpostavlja ustaljenost glavnog strujanja, kao i drugi član desne strane, jer je $f'_j = 0$ (zapreminska sila, po jedinici mase, ne fluktuiše, jer od zapreminskih sila deluje samo težina). Motorni rad devijatorskih napona (to je pretposlednji član jednačine) zameniće se prema sledećem:

$$\int_V \overline{u'_j \frac{\partial \sigma_{ij}^{d'}}{\partial x_i}} dV = \int_A \overline{u'_j \sigma_{ij}^{d'}} n_i dA - \int_V \overline{\sigma_{ij}^{d'} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} dV \quad (85-30)$$

Po ugledu na oznake uvedene u (85-17) mogla bi se leva strana u prethodnom izrazu označiti sa mot_{fl}^d , a drugi član desne strane sa def_{fl}^d , gde bi donji indeks (fl) ukazao da se radovi obračunavaju u fluktuacijama, a u izraze ulaze fluktuacione brzine i fluktuacioni naponi.

Prethodnim izrazom motorni rad je izražen kao ukupni rad umanjen za deformacioni rad, a izraz za ukupni rad je napisan kao površinski integral, jer je za njega moguće preobraćanje zapreminskog u površinski integral.

Koristeći prethodni izraz, kao i malopređašnje navode o članovima jednačine (53-32) koji su za posmatrani slučaj jednaki nuli, jednačina se svodi na:

$$\underbrace{\int_V -\rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} dV}_{\text{produkcija (def}^t)} = \underbrace{\int_V \sigma_{ij}^{d'} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} dV}_{\text{disipacija (def}_{fl}^d)} + \psi \quad (85-31)$$

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{1}{2} \rho \int_A \overline{u_i u'_j u'_j} n_i dA + \frac{1}{2} \rho \int_A \overline{u'_i u'_j u'_j} n_i dA + \int_A \overline{p' u'_j} n_j dA + \\ & + \int_A -\sigma_{ij}^{d'} u'_j n_i dA \end{aligned} \quad (85-32)$$

ψ je zbir površinskih integrala, koji imaju sabirke različite od nule samo po graničnim poprečnim presecima (gde ima proticanja), tj. integriše se po $A_I + A_{II}$.

Kao prvo razmotriće se slučaj u kome je $\psi = 0$, a to nastaje kada su preseki A_I i A_{II} istovetni, i sa potpuno podudarnim strujanjem, što znači da je isti raspored osrednjenih brzina i osrednjenih proizvoda fluktuacija brzina, kao i osrednjeni proizvodi fluktuacionih brzina sa fluktuacijama napona (pritiska, odnosno devijatorskog napona). To se zaista ostvaruje u pravolinijskoj struji istoga poprečnog preseka ako deonica od preseka (I) do preseka (II) nije pod uticajem nikakvog lokalnog poremećaja. U tom slučaju svi sabirci koji čine ψ u (85-32) su jednaki nuli jer je spoljna normala na presek (I) usmerena suprotno od strujanja, a na presek (II) istosmerna je sa strujanjem, pa se stoga uticaji na graničnim presecima međusobno potiru.

Sa $\psi = 0$ izraz (85-31) kazuje da se celokupna „produkcija” turbulentne energije (sve ono što je oduzeto glavnim strujanjem i prešlo

u fluktuacije) utroši za deformacioni rad fluktuirajućih devijatorskih napona, kojima se ta energija, posredstvom viskoznog trenja, preobrati u toplotu, pa je onda potpuno opravdano što se oduzimanje mehaničke energije glavnom strujanju za račun fluktuacija unapred „otpisalo” kao nepovratni gubitak mehaničke energije, jer će se u fluktuacijama preobratiti u toplotu.

Za jedan vodeni tok koji počinje iz mirne vode i završava se u drugoj mirnoj vodi, ako se za preseke (I) i (II) uzmu oni u mirnim vodama, onda je svakako $\psi = 0$ za celu zapreminu toka. Sve što se u tom toku dešava i stvara turbulenciju, sva „produkcija” mora se preobratiti u toplotu (posmatrano za tok kao celinu), ne baš odmah i na istom mestu, ali kasnije i nešto nizvodnije. Dakle, sve što je oduzeto glavnom strujanju zaista je nepovratno izgubljeno, jer će se u fluktuacijama kad-tad i negde preobratiti u toplotu.

Ako je veličina ψ , napisana sa (85–32) pozitivne vrednosti ($\psi > 0$), „produkcija” je veća od deformacionog rada fluktuirajućih devijatorskih napona, kojim mehanička energija prelazi u toplotu, što se zaključuje iz (85–31). Taj višak mora onda povećati mehaničku energiju u fluktuacijama: u preseku (II) je veća nego u preseku (I).

Ako se pogleda izraz (85–32) uviđa se da je prvi član desne strane premoćan u odnosu na ostale članove, jer u prvom članu se pojavljuje osrednjena brzina \bar{u}_i pomnožena sa proizvodom fluktuirajućih brzina, dok svi ostali članovi imaju isključivo osrednjene proizvode fluktuirajućih veličina, pa su od manjeg značaja. Drugim rečima, manji je uticaj tri člana koji unose energetske promene, odnosno rad sila difuzijom od uticaja prvoga člana gde se promene unose osrednjenom brzinom. Prema tome, može se pretpostaviti da pozitivna vrednost prvog člana desne strane u (85–32) nameće i pozitivnu vrednost za ceo izraz, tj. $\psi > 0$. Prvi član će zaista biti pozitivne vrednosti ako je kinetička energija u fluktuacijama veća u preseku (II) nego u preseku (I), jer je tada (izlaz – ulaz) te energije u posmatranu zapreminu, što predstavlja taj član, pozitivan: izlaz kroz presek (II) je veći od ulaza u presek (I), a to znači povećanje te energije od (I) do (II). Može se reći da se, u tom slučaju, turbulencija povećava jer je produkcija veća od disipacije.

Na isti način se zaključuje: ako je $\psi < 0$, onda se kinetička energija u fluktuacijama smanjuje od (I) do (II), pa se turbulencija smanjuje, ona se „gasi”, jer je „produkcija” manja od onoga što viskoznim trenjem

prelazi u toplotu.

Na jednom primeru može se razjasniti ono što je rečeno u prethodnim izlaganjima. Neka je između preseka (I) i (II) značajniji lokalni poremećaj u strujanju, koji pojačava turbulencija stvaranjem dodatnih vrtloženja. U tom slučaju kinetička energija u fluktuacijama se povećava, turbulencija postaje izrazitija. Međutim, ako iza toga nema više lokalnih poremećaja ona će se kasnije, duž struje, „gasiti” da bi se svela na stanje pre lokalnog poremećaja.

* * *

VIII. Sva dosadašnja izlaganja u ovom poglavlju odnosila su se na ustaljeno strujanje, pa se pri korišćenju opšte važećih jednačina (34–6), (53–26) i (53–32) izostavljao član koji unosi neustaljenost, i izvođenja su obavljena, i krajnji izrazi uspostavljeni, bez uticaja toga člana, i sada će se razmotriti taj uticaj.

Izostavljeni član u pomenutim jednačinama je:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\rho \int_V \frac{\partial}{\partial t} (u_j u_j) dV}_{\text{u jednačini (34-6)}} = \underbrace{\frac{1}{2}\rho \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_j u_j}) dV}_{\text{u jednačini (53-26)}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u'_j u'_j}) dV}_{\text{u jednačini (53-32)}} \quad (85-33)$$

Izvođenja koja su dovela do (85–24), ako bi se izostavljeni član uveo u razmatranje, dovela bi do toga da u (85–25) treba pripisati i prvi član desne strane prethodno napisanog izraza (85–33), ali sa promenjenim znakom (jer bi se član prebacio sa leve na desnu stranu jednačine), i onda sve izjednačiti sa nulom. Pri prelasku sa (85–25) na (85–26) dobilo bi se onda:

$$\left(\overline{\Pi} + \alpha \frac{v^2}{2g} \right)_I - \left(\overline{\Pi} + \alpha \frac{v^2}{2g} \right)_{II} = \frac{def_{gl}^d}{\gamma Q} + \frac{def^t}{\gamma Q} + \frac{1}{2gQ} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_j u_j}) dV \quad (85-34)$$

Ova jednačina (85–34) ukazuje da smanjenje mehaničke energije (potencijalna + kinetička) u glavnom strujanju između dva preseka struje (leva strana jednačine) nastaje usled gubitka energije deformacionim radom napona posredstvom viskoznosti, i otuđenja iz glavnog strujanja u fluktuacije (prva dva člana desne strane), čemu za neustaljeno strujanje treba dodati i lokalno povećanje kinetičke energije kroz vreme.

Jasno je da se jednačina (85–34) piše za pojedini vremenski trenutak. Ako se u tom trenutku kinetička energija povećava u zapremini između dve poprečne struje, onda je veća razlika između energetskog stanja u presecima. Ako se ta energija smanjuje, onda je obrnuto.

Uz prethodnu jednačinu (85–34) mora se staviti ograničenje: ona važi samo za struju čiji je omotač čvrsta granica koja se ne menja kroz vreme, i tada je proticaj Q isti u oba preseka – u (I) i (II), u jednom trenutku (a jednačina se odnosi na jedan trenutak). Međutim, u otvorenom toku omotač se vremenom menja (menja se slobodna površina tečnosti), pa proticaj u oba preseka nije isti (u nizvodnom je veći ako se zapremina struje između preseka smanjuje, odnosno manja ako se zapremina povećava). Time je proučavanje znatno teže nego kod cevi, a već i za njih je malo pre rečeno da neustaljenost unosi velike teškoće u rešavanje. Sva razmatranja, sem poslednjih, pod VIII, odnosila su se na ustaljeno tečenje, pa je bilo ispravno što su se ona temeljila na jednakosti proticaja u oba preseka, jer se to ostvaruje u ustaljenom tečenju, i u otvorenim tokovima.

U primeni jednačine (53–32), koja izražava energetska zbivanja u fluktuacijama, u izlaganjima u prethodnom odeljku (VII) izostavljena je leva strana jednačine, jer je ona jednaka nuli za ustaljeno glavno strujanje, kakvo je tamo razmatrano. Za neustaljeno strujanje mora se i taj član uzeti u obzir, pa bi izvođenja koja su ranije dovela do (85–31) i (85–32) završila sa izrazom za ψ kojem bi, u odnosu na (85–32), trebalo, shodno napisanom sa (85–33), dodati:

$$\frac{1}{2}\rho \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u'_j u'_j}) dV$$

Ovo znači da bi „produkcija” turbulentne energije u fluktuacijama morala pored tamo predviđenoga podmiriti još i povećanje (u jedinici vremena) turbulentne kinetičke energije u zapremini V .

Malo pre pomenute su velike teškoće koje unosi neustaljenost u praktičnoj primeni jednačine energije za glavno strujanje, upravo je rečeno da su to one teškoće koje su objašnjene na kraju Poglavlja 84. Isto objašnjenje moglo bi se i ovde reći za uticaj neustaljenosti na praktičnu primenu jednačine energije za fluktuacije.

DRAFT verzija 2001.

deo deveti

**DUGAČKI OBJEKTI –
PROUČAVANJE TOKOVA POD
ISKLJUČIVIM UTICAJEM
TRENJA, BEZ LOKALNIH
POREMEĆAJA**

OSNOVE ZA REŠAVANJE PRAKTIČNIH ZADATAKA JEDNOLIKIH STRUJA

Posmatra se *pravolinijska struja konstantnog poprečnog preseka*, pa je strujanje kroz sve poprečne preseke struje ne samo pravolinijsko i paralelno, nego je i u svim presecima istovetno. Strujanje duž struje je *jednoliko*, srednja brzina je konstantna. Za masu između bilo koja dva poprečna preseka takve struje – slika 91–1 – može se napisati dinamička jednačina, iz koje izostaje „inercijalna sila”, jer su njene komponente u oba preseka iste, pa se potiru (uostalom, čim nema promene brzine, nema ni „inercijalne sile”).

Uslov za ravnotežu sila u pravcu strujanja (x -pravac) zahteva da se uravnoteže sledeće sile (slika 91–1a).

1. *Komponenta sile težine:*

$$G_x = \gamma A \Delta x \sin \alpha = \gamma A (Z_I^o - Z_{II}^o) \quad (91-1)$$

γ = specifična težina, $A \Delta x$ = zapremina između preseka (I) i (II) i Z_I^o, Z_{II}^o = položajne kote težišta preseka.

Prilikom ispisivanja (91–1) korišćeno je:

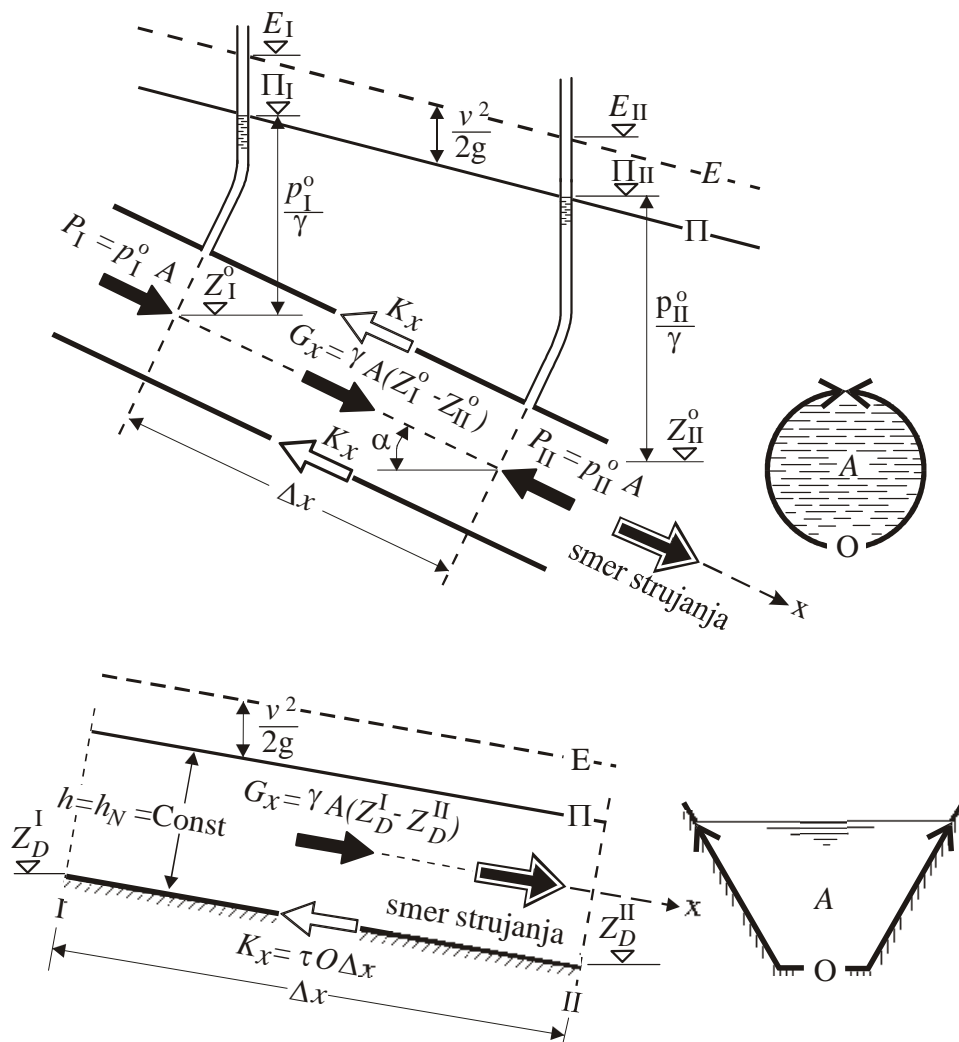
$$\sin \alpha = \frac{Z_I^o - Z_{II}^o}{\Delta x}$$

što je vidljivo iz slike 91–1a.

2. *Sile pritiska na poprečnim presecima:*

$$P_I - P_{II} = A(p_I^o - p_{II}^o) \quad (91-2)$$

Na posmatranu masu deluje navedena razlika sila pritiska. p_I^o i p_{II}^o su pritisci u težištima.



Slika 91-1 Sile, pjezometarske i energetske kote pri jednolikom tečenju: a) pod pritiskom (u cevi); b) u otvorenom toku (u kanalu)

3. Sila trenja:

$$K_x = \tau O \Delta x \quad (91-3)$$

To je sila kojom čvrsta granica deluje na posmatranu masu u x -pravcu. τ = tangencijalni napon po graničnoj površini između zida i fluida – pretpostavlja se da je on *ravnomerno* raspoređen po obimu O (o umesnosti ove pretpostavke biće reči kasnije). Sila

deluje smerom suprotnim strujanju, dok τ ima pozitivnu vrednost. Napomena: Tangencijalni napon između zida i fluida nazivaće se i „napon trenja” i uvek će biti označivan sa τ .

Sile napisane izrazima (91-1), (91-2) i (91-3) stoje u ravnoteži, pa je jednačina ravnoteže sila koje deluju u x -pravcu:

$$\gamma A(Z_I^o - Z_{II}^o) + A(p_I^o - p_{II}^o) = K_x \quad (91-4)$$

Deljenjem sa γA dobija se:

$$(Z^o + \frac{p^o}{\gamma})_I - (Z^o + \frac{p^o}{\gamma})_{II} = \frac{K_x}{\gamma A} \quad (91-5)$$

Ili, uvođenjem pijeometarske kote, uvedene sa (71-7), i korišćenjem (91-3):

$$\Pi_I - \Pi_{II} = \frac{K_x}{\gamma A} = \frac{\tau \cdot O}{\gamma A} \Delta x \quad (91-6)$$

Naglašava se da se pijeometarska kota odnosi na ceo presek, shodno navedenom pod III u Poglavlju 81, dok se Z^o i p^o odnose na težište preseka.

Energetska jednačina (83-9) primenjena na dva preseka u kojima je ista brzina svodi se na:

$$E_I - E_{II} = \Pi_I - \Pi_{II} = E_{izg} \quad (91-7)$$

Upoređenje (91-6) i (91-7) daje:

$$E_{izg} = \frac{K_x}{\gamma A} = \frac{\tau O}{\gamma A} \Delta x \quad (91-8)$$

Jednačina (91-8) izjednačuje izgubljenu energiju i izraz u kome se nalazi tangencijalni napon τ (koji pomnožen sa površinom obloge daje silu trenja). To je napon, odnosno sila između fluida i zida provodnika. Površno posmatranje moglo bi da navede na zaključak da se radom sile trenja po zidu otuđuje energija. To bi bilo pogrešno, jer je čvrsta granica (zid) nepokretna i preko nje se ne može obaviti rad, pa ni preneti energija. O ovome je bilo reči prilikom izvođenja energetske jednačine (Poglavlje 83) – tamo je objašnjeno da sila po čvrstoj graničnoj površini ne obavlja rad, a da se energija gubi, rasipanjem

unutar cele mase. To zbirno iznosi koliko je napisano u (91–8), a dobilo se formalnim upoređenjem primene dve jednačine. Treba se podsetiti završnih izlaganja u Poglavlju 83, gde se naglasilo da te dve jednačine (dinamička – uravnoteženje sila i energetska) nisu međusobno nezavisne, jer su posledice suštinski istoga načela, pa po iskorišćavanju jedne, druga samo obračunava rešenje nametnuto iz prve. To se upravo malo pre uradilo – tako se obračunalo E_{izg} .

Za kanalske tokove, može se smatrati da je sila trenja na slobodnu površinu zanemarljiva u odnosu na trenje o čvrstu graničnu površinu (bokovi i dno kanala), pa je zanemarljiva i izmena energije kroz slobodnu površinu u odnosu na izgublenu energiju po celoj posmatranoj zapremini. Trenje se računa samo o čvrstu površinu i stoga se za obim O uzima samo „okvašeni obim” (vidi sliku 91–1b).

U jednačinama (91–6) i (91–8) pojavljuje se odnos A/O , pa je stoga prikladan pojam:

$$\boxed{\underbrace{R}_{\text{hidraulički radijus}} = \frac{A}{\underbrace{O}_{\text{poprečni presek}} / \text{okvašeni obim}}} \quad (91-9)$$

Od dva provodnika sa istom površinom A poprečnog preseka, sa stanovišta propusne moći povoljniji je onaj koji ima veći hidraulički radijus, jer ima manju površinu trenja (manji O). Veći hidraulički radijus, uz isti obim, znači pak veći poprečni presek – pa i veću propusnu moć. Hidraulički radijus se može protumačiti kao pripadajući deo poprečnog preseka na jedinicu okvašenog obima.

Uvođenje hidrauličkog radijusa ima svoj smisao u prihvaćenoj pretpostavci o ravnomernosti tangencijalnog napona po obimu, što je potpuno tačno samo za tečenje pod pritiskom kroz kružni poprečni presek (zbog osne simetrije), ali se kao aproksimacija usvaja u praktičnim zadacima za bilo koji presek. To se opravdava time što se tako svi zadaci jednolikog tečenja objedinjavaju, a odstupanja zbog toga, po praktičnim posledicama, nisu značajna. Druge okolnosti (na primer procena hrapavosti zidova provodnika, o kojoj će biti reči kasnije) unose više neizvesnosti od učinjene pretpostavke. Uvođenjem hidrauličkog

radijusa – prema (91-9) – jednačine (91-6) i (91-7), uz prelazak na neizmerno mali priraštaj dx , daju:

$$-\frac{d\Pi}{dx} = -\frac{dE}{dx} = \frac{\tau}{\gamma R} = \text{const} \quad (91-10)$$

jednačina jednolike ustaljene struje

Pri pisanju ove jednačine vodilo se računa da prelazak sa Δx na dx (pozitivan smer za x je niz struju) znači prelazak sa $E_{\text{II}} - E_{\text{I}}$ na $-dE$, i sa $\Pi_{\text{II}} - \Pi_{\text{I}}$ na $-d\Pi$.

Duž kanala pri jednolikom tečenju dubina se ne menja, slika 91-1b, i naziva se „normalna dubina”:

$$\frac{dh}{dx} = 0 \quad \text{tj.} \quad h = \text{const} = h_{\text{N}} = \text{normalna dubina} \quad (91-11)$$

Kod otvorenih tokova pijezometarska linija je nivo tečnosti, pa je paralelna sa dnom (jer se dubina ne menja). Jednačina (91-10) se može proširiti:

$$-\frac{dZ_{\text{D}}}{dx} = -\frac{d\Pi}{dx} = -\frac{dE}{dx} = \frac{\tau}{\gamma R} = \text{const} \quad (91-12)$$

Z_{D} je *kota dna*, pa prvi član znači *nagib dna* (nagib kanala) – spuštanje niz struju, po jedinici dužine kanala. Za jednoliko tečenje nagib dna je konstantan.

Jednoliko strujanje u kanalima uspostavlja se izjednačenjem trenja i komponente težine u pravcu struje, dok je sila pritiska data sa (91-2) jednaka nuli. Dubina koja se uspostavlja je ona koju uslovljava sam kanal svojim nagibom, bez ikakvih uzvodnih ili nizvodnih uticaja, koji bi je poremetili – ona se stoga i može nazvati „normalnom”.

Uvode se sledeći pojmovi:

- *linija energije* (energetska linija), $E = E(x)$, koja prikazuje energetske kote duž struje;
- *pijezometarska linija*, $\Pi = \Pi(x)$, koja prikazuje pijezometarske kote duž struje;
- *nagib* (spuštanje po jedinici dužine) *linije energije*

$$I_E = -\frac{dE}{dx} \quad (91-13)$$

– nagib piježometarske linije

$$I_{\Pi} = -\frac{d\Pi}{dx} \quad (91-14)$$

Za jednoliko tečenje navedeni nagibi su jednaki:

$$I_E = I_{\Pi} = \frac{\tau}{\gamma R} = \text{const} \quad (91-15)$$

Za kanal se uvodi i nagib dna:

$$I_D = -\frac{dZ_D}{dx} \quad (91-16)$$

pa se (91-12) za kanale može napisati

$$I_D = I_{\Pi} = I_E = \frac{\tau}{\gamma R} = \text{const} \quad (91-17)$$

Izrazi (91-15) i (91-17) važe samo za jednoliko strujanje (takvo se za sada raspravlja) pa su $E(x)$, $\Pi(x)$ i $Z_D(x)$ prave linije.

* * *

Tangencijalni napon τ izraziće se bezdimenzionalnom veličinom:

$C_{\tau} = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho v^2} = \frac{\tau}{\gamma \frac{v^2}{2g}}$	(91-18)
koeficijent tangencijalnog napona	

pa se tangencijalni napon meri u odnosu na „dinamički pritisak” – ili „zaustavni pritisak” – objašnjen u Poglavlju 83, i napisan sa (83-13).

Uvođenjem C_{τ} u izraz (91-17), dobija se:

$I_E = C_{\tau} \frac{v^2}{2gR}$	(91-19)
nagib linije energije za jednoliko tečenje	

što za brzinu daje

$$v = \sqrt{\frac{1}{C_\tau} 2gRI_E} \quad (91-20)$$

Uz napisano se treba podsetiti da je kod jednolikog tečenja $I_E = I_\Pi$ (kod kanala $I_E = I_\Pi = I_D$).

Za cevi kružnog preseka hidraulički radijus je:

$$R = \frac{A}{O} = \frac{\frac{1}{4}\pi D^2}{\pi D} = \frac{D}{4} \quad (91-21)$$

a pogodno je uvesti

$$\lambda = 4C_\tau = \frac{4\tau}{\gamma \frac{v^2}{2g}} \quad (91-22)$$

koeficijent trenja za cevi kružnog preseka

Jednačina (91-19) izražena sa D i λ glasi:

$$I_E = \lambda \frac{v^2}{2gD}$$

nagib linije energije za tečenje u cevima kružnog preseka

(91-23)

pa je izgubljena energija za cev kružnog preseka, a na dužini L

$$E_{izg} = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

(91-24)

izgubljena energija u cevima kružnog preseka

* * *

Poznavanje koeficijenata trenja λ u jednačini (91-23), ili (91-24) odnosno C_τ u (91-19), znači i rešenje zadatka jednolikog tečenja. Razmatranju trenja u cevima i kanalima biće posvećen dobar deo izlaganja u narednim poglavljima (93 do 99), jer trenje, s obzirom na praktični

značaj, zahteva iscrpna tumačenja i objašnjenja. Tamo će se izvesti i zakonitosti za vrednost koeficijenta λ , odnosno C_τ . Za sada, upravo neposredno u produžetku, daće se samo prvi uvid, koji će, iako kratak i površan, pružiti mogućnost da se proceni red vrednosti za otpore trenja. Razmotriće se cevi kružnog poprečnog preseka, pa će rezultati biti preneti i na ostale provodnike.

* * *

Daju se „na poverenje” dva empirijska obrasca za trenje u cevima:

$$\lambda = 0,115 \left(\frac{k}{D} \right)^{1/4} \quad (91-25)$$

$$\lambda = 0,185 \left(\frac{k}{D} \right)^{1/3} \quad (91-26)$$

U ovim izrazima pojavljuje se $k =$ *apsolutna hrapavost* (to je visina izbočina na zidu cevi). Odnos k i D je:

$$\text{relativna hrapavost} = \frac{k}{D} = \frac{\text{apsolutna hrapavost}}{\text{prečnik}} \quad (91-27)$$

Pretpostavlja se da je dovoljan samo jedan podatak (jedna vrednost za k), koji određuje hrapavost u nekom pojedinačnom primeru. To treba shvatiti kao „računsku hrapavost”, kao nekakav prosek iz različitih izbočina koje sačinjavaju hrapavost.

Za izbor između (91-25) ili (91-26) može da posluži sledeće praktično uputstvo:

Od prvog obrasca mogu se očekivati dobri rezultati za $10^{-4} < k/D < 10^{-2}$, a od drugoga za k/D između $1/20$ i 10^{-3} .

Treba primetiti da obrasci (91-25) i (91-26) za istu cev (isti prečnik D , ista apsolutna hrapavost k) daju $\lambda = \text{const}$, pa je onda, shodno (91-23) nagib linije energije I_E (ili izgubljena energija E_{izg} za određenu dužinu L cevi) srazmeran sa kvadratom brzine (sa v^2), a to znači i sa kvadratom proticaja. S obzirom na srazmernost I_E i napona trenja τ , što je određeno sa (91-17), onda je i napon τ srazmeran sa kvadratom brzine (sa v^2). Ovo se izražava obično iskazom da se *ostvaruje „kvadratna zakonitost otpora”*.

Za provodnike preseka koji nije krug, a tu ulaze i kanali, u svim navedenim obrascima treba obaviti zamene:

$$D = 4R \quad (91-28)$$

$$\lambda = 4C_\tau \quad (91-29)$$

što dozvoljava prihvaćena pretpostavka o ravnomernoj raspodeli tangencijalnog napona po zidu provodnika (a ovo znači da je za isti fluid tangencijalni napon za datu brzinu v i datu hrapavost k isti ako je hidraulički radijus isti, bez obzira na površinu poprečnog preseka i njegov oblik).

Koristeći zemene napisane sa (91-28) i (91-29), umesto (91-25), odnosno (91-26), koristi se:

$$C_\tau = \frac{0,115}{4} \left(\frac{k}{4R} \right)^{1/4} = 0,020 \left(\frac{k}{R} \right)^{1/4} \quad (91-30)$$

$$C_\tau = 0,029 \left(\frac{k}{R} \right)^{1/3} \quad (91-31)$$

Daće se nekoliko podataka za procenu apsolutne računске hrapavosti.

Za betonske cevi procenjuje se da je računska hrapavost od $k = 0,5$ mm do $k = 3$ mm, zavisno od uglađenosti (niža vrednost odgovara dobro uglađenoj površini, a viša hrapavoj, nebrizljivo urađenoj). Za tunele, ili kanale sa betonskom oblogom hrapavost je nešto veća. Ako je izrada veoma loša ili je na površinu očvrsao nataloženi materijal koga je voda pronosila može hrapavost preći i 1 cm, pa čak i više. Za čelične i gvozdene livene cevi apsolutna hrapavost se kreće od 0,2 do 2 mm, a za zakovane čelične cevi zakivci mogu hrapavost povećati i do 1 cm. Ima savremenih materijala za izradu cevi gde je apsolutna hrapavost manja čak i od 0,1 mm.

Za neobložene kanale u zemlji, zavisno od stanja površine (načina iskopa) apsolutna hrapavost se cení na $k = 2$ do 20 cm. Za kanale i tunele usečene u steni, i neobložene apsolutna hrapavost je veća i kreće se od nekoliko santimetara do nekoliko desimetara. Za rečne tokove sa šljunkom apsolutnu hrapavost daju krupnija zrna šljunka, a kod pešćanog dna hrapavost ne daje krupnoća peska, nego nabori na dnu.

U hidrauličkoj praksi, pogotovo za kanalske tokove, praktični zadaci gotovo uvek se nalaze u „oblasti hrapavih provodnika” (gde se ostvaruje „kvadratna zakonitost”) rasprostranjena je upotreba *Maningove formule* (MANNING):

$$v = \frac{1}{n} R^{2/3} I_E^{1/2} \quad (91-32)$$

što za proticaj daje

$$Q = Av = A \frac{1}{n} R^{2/3} I_E^{1/2} \quad (91-33)$$

gde je n = koeficijent hrapavosti. Uz formulu se daje „spisak obloga provodnika” sa vrednostima tog koeficijenta. Određenoj oblozi (na primer navodi se „dobro ugrađen beton” ili „osrednje” ili „slabo ugrađen”, pa „kanal u zemlji dobro održavan” ili „rđavo održavan”, itd.) odgovara određena vrednost „koeficijenta hrapavosti”. On je u stvari pokazatelj apsolutne hrapavosti sa takvom vrednošću da se formulom sračuna brzina koja treba da se ostvari u zadatom primeru. Treba zapaziti da je, za isti presek i nagib, proticaj obrnuto srazmeran koeficijentu hrapavosti, što je za praktičnu upotrebu veoma pogodno – na primer, dva puta veći n znači dva puta manji proticaj uz isto A , R i I_E . Skreće se pažnja da formula (91-32) zahteva da n ima dimenziju $[L^{-1/3}T]$ iako on predstavlja hrapavost. To je posledica činjenice što formula izražava srazmernost između v i $R^{2/3} I_E^{1/2}$, za istu apsolutnu hrapavost, pa je za faktor srazmernosti uzeto $1/n$ (da bi faktor bio veći kada je hrapavost veća). Za drugu hrapavost, drugi je faktor srazmernosti, druga je vrednost za n . Tako uzeti faktor srazmernosti je onda dimenzionalna vrednost, a formula je najkraća moguća.

Prilog 1 „VREDNOSTI KOEFICIJENTA HRAPAVOSTI ZA MANNINGOVU FORMULU” prikazuje gde se otprilike kreću te vrednosti za različite obloge provodnika.

Između Maningovog koeficijenta n i apsolutne hrapavosti k mora postojati veza, jer n predstavlja apsolutnu hrapavost, odnosno vrednost za n znači određenu apsolutnu hrapavost. U toj vezi ne sme se pojavljivati hidraulički radijus R , jer veza mora da važi za bilo koju vrednost hidrauličkog radijusa. Takva veza se dobija kada se najpre izjednače desne strane jednačina (91-20) i (91-32), što dovodi do:

$$\sqrt{\frac{2g}{C_\tau}} = \frac{R^{1/6}}{n} \quad (91-34)$$

Nadalje, za C_τ se mora uzeti izraz kojim će se prethodno izjednačavanje svesti na oblik u kome se neće pojaviti R . Takav izraz je (91–31), a ne može da bude (91–30). Zamenom C_τ prema (91–31) u prethodnom izrazu dolazi se do:

$$n = \sqrt{\frac{0,029}{2g}} k^{1/6} \quad (91-35)$$

što znači da se za k od 1 mm do 25 cm, n kreće od 0,012 do 0,030 m^{-1/3}s.

Prilikom uvođenja u razmatranje „apsolutne hrapavosti” jednostavno je rečeno da je to „visina izbočina na zidu”. U praktičnim slučajevima nije baš jednostavno odrediti tu visinu, jer su izbočine različite, različitog oblika i rasporeda, pa se uzima nekakav prosek. Stoga su ranije formule (bilo ih je neizmerno mnogo) hrapavosti izražavale preko nekakvog dogovorenog koeficijenta – primer za to je uzeta formula (Maningova).

Za cevi (provodnike pod pritiskom) unapred je poznat poprečni presek struje A (to je presek cevi), pa je za zadati proticaj Q poznata brzina v i onda se lako, prema (91–19) ili (91–23), sračuna I_E (a to je ujedno i I_{II}). Za λ , odnosno C_τ , uzme se neka od navedenih formula. Može se zadatak postaviti i obrnuto: traži se proticaj koji odgovara unapred određenoj razlici energetskeg kota.

Kod kanala tečnost obrazuje poprečni presek, on nije unapred poznat, može baš da se traži dubina za zadati proticaj i tada treba zadovoljiti:

$$\frac{Q}{\sqrt{2gI_D}} = \left(A \sqrt{\frac{1}{C_\tau} R} \right)_N \quad (91-36)$$

što se dobilo iz (91–20) sa $v = Q/A$ i $I_E = I_D$ (jednoliko tečenje u kanalu). Tada je dubina $h = h_N$ (normalna), pa sve vrednosti A , C_τ , R važe pri h_N , stoga je i dat indeks „N”. Ako se primeni Maningova formula (91–32) prethodni izraz postaje:

$$\frac{nQ}{\sqrt{I_D}} = (AR^{2/3})_N \quad (91-37)$$

Kod većine zadataka h_N se dobija postepenim približavanjem, dok se izraz (91–36), odnosno (91–37) ne zadovolji.

Zadatkom može da se traži potreban nagib dna I_D za jednoliko tečenje proticaja Q , uz određenu dubinu u određenom kanalu, ili se

traži proticaj uz poznati nagib dna i poznatu dubinu – sve su to zadaci veoma lako i neposredno rešivi.

* * *

Napominje se da obrasci (91–25) i (91–26) imaju ograničenu primenu, nisu primenljivi na glađe cevi pri manjim brzinama, jer se onda ne ostvaruje malo pre objašnjena „kvadratna zakonitost otpora”. Obrazac (91–25) treba stoga proširiti da se unese i uticaj odstupanja od kvadratne zakonitosti, a on potiče od jedne od fizičkih osobina tečnosti, od viskoznosti. Nju će izraziti „koeficijent viskoznosti” ν , koji ulazi u proširenje izraza (91–25). Prošireni obrazac glasi:

$$\lambda = 0,115 \left(\frac{k}{D} \right)^{1/4} \left(1 + \frac{60\nu}{vk} \right)^{1/4} \quad (91-38)$$

Ako se u proceni koeficijenta λ dozvoli relativna greška od 2% između rezultata po (91–28) i (91–25), treba da bude vk/ν približno 750, jer onda vrednost dobijena sa (91–25) pomnožena sa 1,02 daje (91–38). Na osnovu toga piše se uslov:

$$\frac{vk}{\nu} > 750 \quad (91-39)$$

Shodno prethodnom postupku ispunjenje ovoga uslova obezbeđuje da račun po prostom obrascu (91–25) daje relativnu grešku manju od 2% u odnosu na račun po (91–38).

Za vodu koeficijent ν zavisi od temperature: za uobičajene temperature između 5° i $20^{\circ}C$ koeficijent ν od $0,015 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ (za 5°) opada sa porastom temperature i iznosi $0,01 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ (za 20°). Može se računati sa prosekom $\nu = 0,0125 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$. Za tu vrednost nejednačina (91–29) daje $vk > 9,4 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$, što se može zaokružiti na:

$$vk > 8 \text{ cm}^2\text{s}^{-1} \quad (91-40)$$

Na osnovu ovih navoda zaključuje se da bi provodnici sa apsolutnom hrapavošću $k = 0,1 \text{ mm}$ zadovoljili uslov (91–39), tek sa brzinom većom od 10 m/s , pa se moraju računati sa (91–38), a ne sa (91–25). Za $k = 1 \text{ mm}$ navedena granična brzina je 10 puta manja, pa se dobar deo primera može sračunati po (91–25) ili (91–26), jer se obično

provodnik računa za najveći predviđeni proticaj, a on u pretežnom delu primera teče sa brzinom većom od 1 m/s. Za praksu je redovno nezanimljiv račun sa manjim, iako mogućim proticajima. Za apsolutne hrapavosti od 1 cm tek za brzine manje od 10 cm/s ne bi se mogao primeniti obrazac (91–25) ili (91–26).

Izloženo ukazuje da se pretežan deo primera hidrotehničke prakse u građevinarstvu mogu primeniti (91–25) ili (91–26), odnosno (91–30) i (91–31). Izuzetak su samo glatke vodovodne cevi.

Pokušaće da se objasni kako viskoznost utiče na izgubljenu energiju u strujanju. Reč „viskoznost” doslovno se prevodi sa „lepljivost”, a njeno delovanje može se protumačiti kao „sposobnost fluida da stvara unutrašnje trenje”, u međusobnom dodiru delića fluida brži povlači sporiji, a sporiji koči brži. Izraz (91–38) pokazuje da je uticaj viskoznosti manji ako je manje odstupanje od jedinice dodatnog člana u (91–38), u odnosu na (91–25), a to znači ako je brzina veća, i ako je hrapavost veća, a manji koeficijent viskoznosti. Objašnjenje za to je sledeće. Veća brzina i veća hrapavost, i manje viskozan fluid, dovode do veće uznemirenosti (turbulencije) strujanja, do većeg poprečnog strujanja, do izrazitijeg mešanja delića, koje ih uvlači u vrtloženje, a ono oduzima energiju strujanju (što se računa kao izgubljena energija). Pri tome trenje posredstvom viskoznosti ima manji značaj, pa može postati i beznačajno. Vrednosti koeficijenta u zavisnosti od temperature napisani su u priloženoj tablici 3.

* * *

PRIMEDBA

U poglavljima 94-97 opširno će se raspravljati o trenju u provodnicima, sa posebnim osvrtom na uticaj hrapavosti i viskoznosti, gde će biti obrazložene i sve prethodno napisane formule, one su, za sada, date, može se reći na poverenje.

OSNOVE ZA PROUČAVANJE NEJEDNOLIKIH KONTINUALNIH STRUJA

I

OPŠTA RAZMATRANJA

Struja postepeno, ali veoma blago, menja poprečni presek, ili je veoma blago zakrivljena (ili je i jedno i drugo, ali treba naglasiti, ne naglo), pa se može smatrati da neprekidno približno ispunjava uslove o paralelnom i pravolinijskom strujanju kroz poprečni presek. Tada se za masu u zapremini između bilo koja dva bliska poprečna preseka može postaviti dinamička jednačina po ugledu na izvedeno na početku Poglavlja 91. To će se uraditi za masu između preseka (I) i (II) na slici 92–1. Napisaće se sve sile koje deluju u pravcu strujanja (pozitivan smer je smer strujanja) – uključiće se i komponente inercijalne „sile” na presecima.

1. *Komponenta sile težine:*

$$G_x = \frac{1}{2}(A_I + A_{II})(Z_0^I - Z_0^{II})\gamma$$

Ovo je napisano po ugledu na (91–1), a za neizmereno malo rastojanje između preseka prelazi u:

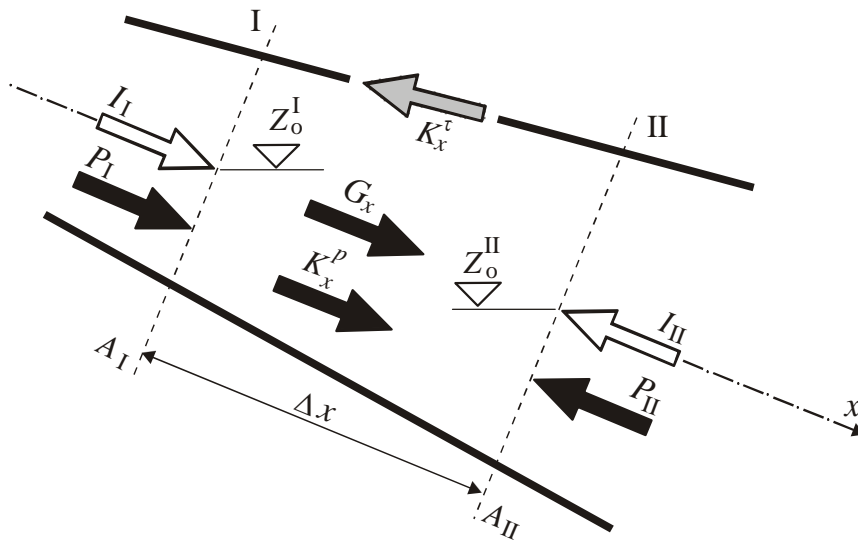
$$dG_x = \frac{1}{2}(A + A + dA)(-dZ_0)\gamma = -A\gamma dZ_0 \quad (92-1)$$

Uzeta je srednja vrednost poprečnog preseka u posmatranoj masi, zanemaren je proizvod $dAdZ_0$ kao neizmerno malen u odnosu na preostali deo zbira. Z_0 , i ovde, kao i ranije, označava položajnu kotu težišta.

2. *Sile pritiska na presecima:*

$$P_I - P_{II} = (p_0A)_I - (p_0A)_{II}$$

p_0 je već ranije uvedena oznaka za pritisak u težištu preseka.



Slika 92–1 Sile koje deluju na struju između preseka (I) i (II)

Prethodno se, smanjivanjem rastojanja između preseka, svodi na:

$$dP = -d(p_0A) = -p_0dA - Adp_0 \quad (92-2)$$

uz zanemarenje proizvoda $dAdp_0$, jer je neizmerno malen u odnosu na napisano.

3. Sila kojom omotač deluje na fluid (u pravcu strujanja) ovde se sastoji od sile pritiska i sile trenja.

– Sila pritiska po omotaču (komponenta u pravcu strujanja, u x -pravcu) iznosi:

$$dK_x^p = \frac{1}{2}(p_0 + p_0 + dp_0)dA = p_0dA \quad (92-3)$$

jer se prosečna vrednost pritiska, $p_0 + dp_0/2$, množi sa projekcijom površine na koju sila deluje, a ta projekcija je povećanje dA poprečnog preseka struje.

– Komponenta sile trenja iznosi:

$$dK_x^τ = -\tau \frac{1}{2}(O + O + dO)dx = -\tau O dx \quad (92-4)$$

$O + dO/2$ je prosečna vrednost obima struje za posmatrani deo dužine dx , a τ je napon trenja između zida i fluida.

Uz prethodno izražavanje komponente sile trenja korisna je sledeća napomena. Napon trenja τ deluje na elementarnoj površini $Odx/\cos\alpha$, gde je α ugao koji zaklapa pravac delovanja napona (taj pravac leži na omotaču) i pravac strujanja. Naime, struja se na dužini dx širi (ili sužava), pa ugao α nije jednak nuli. Međutim, komponenta napona u pravcu tečenja je $\tau \cos\alpha$, pa se množenjem te komponente i površine dobija baš ono što je napisano. Treba naglasiti da je ugao α veoma malen ($\cos\alpha$ zanemarljivo odstupa od jedinice), jer u protivnom strujanje ne bi bilo približno paralelno, a to je u početku poglavlja uslovljeno (da bi se struja mogla kontinualno razmatrati). Rečeno je da promena preseka mora da bude veoma blaga.

Pri pisanju (92-3) i (92-4) izostavljeni su, kao zanemarljivi, proizvodi dve neizmerno malene veličine – tako se postupalo i u ranijim izrazima.

4. *Komponente inercijalne sile u presecima:*

$$I_I - I_{II} = \rho Q v_I - \rho Q v_{II} = \rho Q (v_I - v_{II})$$

što se, smanjenjem rastojanja na dx , svodi na

$$dI = -\rho Q dv = -\rho A v dv = -\rho A d\left(\frac{v^2}{2}\right) \quad (92-5)$$

Zbir sila ispisanih sa (92-1) do (92-5) mora da bude jednak nuli:

$$- \left[A\gamma dZ_0 + Adp_0 + \tau O dx + \rho A d\left(\frac{v^2}{2}\right) \right] = 0$$

ili deljenjem sa $-A\gamma dx$

$$d\left(Z_0 + \frac{p_0}{\gamma}\right) + \frac{\tau O}{A\gamma} dx + d\frac{v^2}{2g} = 0 \quad (92-6)$$

Uvešće se pijezometarska kota:

$$\Pi = Z_0 + \frac{p_0}{\gamma}$$

uz napomenu datu iza izraza (91-6), da se Z_0 i p_0 odnose na težište preseka, a pijeziometarska kota se odnosi na ceo presek, jer je ista za sve tačke istoga preseka (a tolika je i u težištu).

Kako je, prema (91-9), A/O jednako hidrauličkom radijusu R , a $\Pi + v^2/2g$ je jednako energetskej koti E , prethodna jednačina (92-6) se svodi na:

$$\underbrace{-\frac{dE}{dx}}_{(I_E)} = -\frac{d}{dx} \left(\Pi + \frac{v^2}{2g} \right) = \underbrace{\frac{\tau}{\gamma R}}_{\left(C_\tau \frac{v^2}{2gR} \right)} \quad (92-7)$$

osnovna jednačina nejednolikog tečenja

Ovde je napisano, da se, prema (91-13), $-dE/dx$ može iskazati kao nagib linije energije, a da se τ izražava sa $C_\tau \rho v^2/2$, kako je napisano sa (91-18), gde se uveo „koeficijent tangencijalnog napona” C_τ .

Diferenciranjem izraza (83-9) po dx dobija se:

$$-\frac{dE}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\Pi + \frac{v^2}{2g} \right) = \frac{dE_{izg}}{dx}$$

što upoređeno sa (92-7) pokazuje da je

$$\frac{dE_{izg}}{dx} = \frac{\tau}{\gamma R} = C_\tau \frac{v^2}{2gR}$$

Integrisanjem duž struje, od x_I do x_{II} , dobija se:

$$E_I - E_{II} = E_{izg} = \int_{x_I}^{x_{II}} \frac{\tau}{\gamma R} dx = \int_{x_I}^{x_{II}} C_\tau \frac{v^2}{2gR} dx \quad (92-8)$$

Izraz za nagib energije I_E (92-7) isti je kao i (91-10) napisan za jednoliko tečenje, ali treba naglasiti da to sada (kod nejednolikog tečenja), nije ujedno i nagib pijeziometarske linije kao što je bio ranije (kod jednolikog tečenja), a sada nije ni konstanta.

Za rešavanje zadatka treba poznavati samo C_τ , koje se određuje na isti način (istim obrascem) za jednoliko i nejednoliko strujanje, samo

što se kod nejednolikog strujanja menja duž struje, $C_\tau = C_\tau(x)$, jer se presek struje menja, a C_τ se određuje prema lokalnim vrednostima za presek, dok je kod jednolikog tečenja $C_\tau = \text{const}$ za celu struju.

Pretpostavci da je nagib I_E za nejednoliko tečenje isti kao u jednolikom (za isti presek i proticaj) može se staviti zamerka: Nejednoliko i jednoliko tečenje kroz isti presek nisu potpuno istovetni, pa to nisu ni otpori trenja. U nejednolikom tečenju strujanje, strogo uzevši, nije pravolinijsko i paralelno, jer se presek duž struje menja. Uslovljavanje da ta promena bude postepena približava nejednoliko strujanje jednolikom, pa se u praktičnoj primeni može računati sa istim nagibom.

* * *

Razmatranje struja kod ustaljenog tečenja je *razmatranje veličina koje zavise isključivo od x (od rastojanja duž struje)*. To je *linijski zadatak*. Sve se veličine ($A, R, \tau, v, E, \Pi, \dots$) kod struje odnose na presek, struja se proučava od preseka do preseka. Svođenje zadatka na linijski kod provodnika fluida (ili toplote, ili elektriciteta), ili kod štapova u konstrukcijama, je uobičajen metod u tehnici, i primenjuje se ako daje rezultate upotrebljive u praksi kod kojih nije nužno i istraživanje rasporeda uticaja po preseku, nego se zbivanja po preseku cene vrednostima koje se odnose na presek.

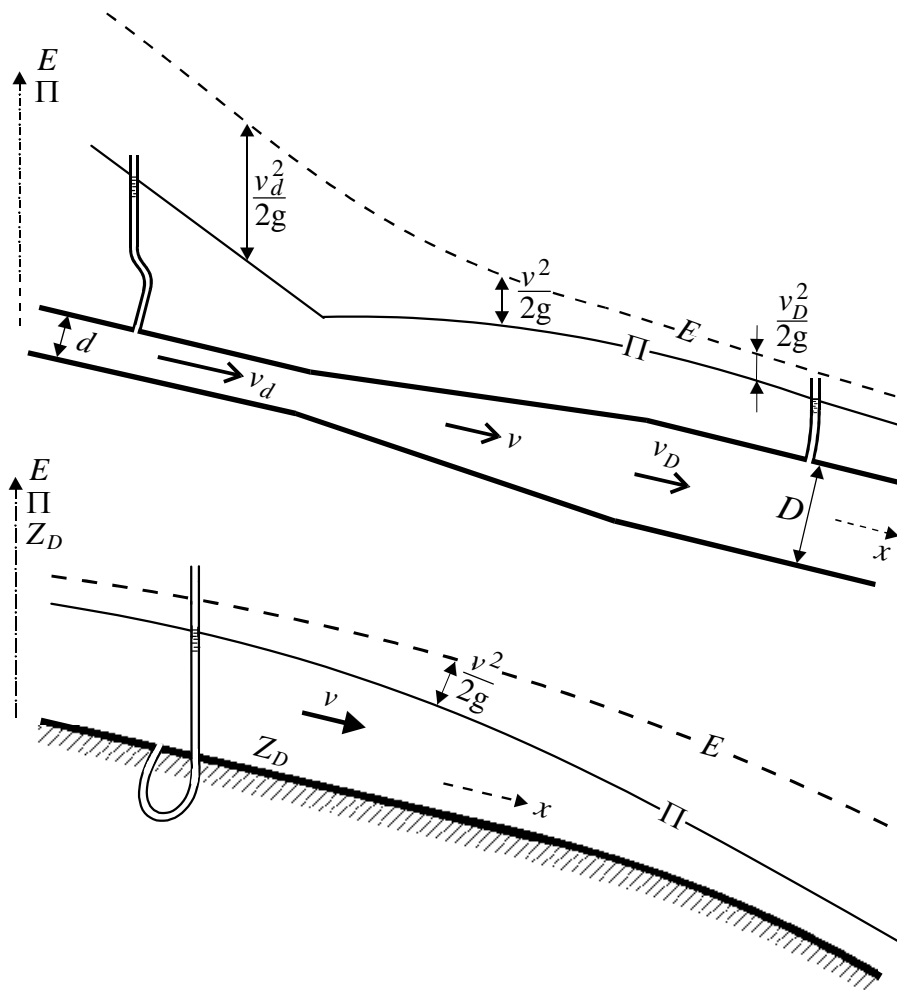
Linijski zadatak kod strujanja se može učiniti preglednijim ako se pored položaja samog provodnika ucrtaju:

- piježometarska linija $\Pi = \Pi(x)$ i
- linija energije $E = E(x)$

koje određuju kote (piježometarsku i energije) za preseke duž toka.

Na slici 92–2 te linije su ucrtane za jedan primer tečenja pod pritiskom (u cevi) i jedan primer otvorenog toka (u kanalu). U drugom slučaju piježometarska linija je ujedno i linija nivoa. Veća brzina, veće trenje, veći nagib linije energije, i veća razlika između E i Π (jer je ta razlika $= v^2/2g$) – to se htelo pokazati na slici 92–2. Treba zapaziti da linija energije *pada niz struju*, dok piježometarska to *ne mora* (opadanjem brzine može i da raste).

Ukazuje se na razliku između tokova pod pritiskom i otvorenih, jer kod prvih je poprečni presek struje unapred određen samim presekom



Slika 92–2 Primeri za pijeziometrijsku (II) i energetska (E) liniju: a) za cev; b) za kanal

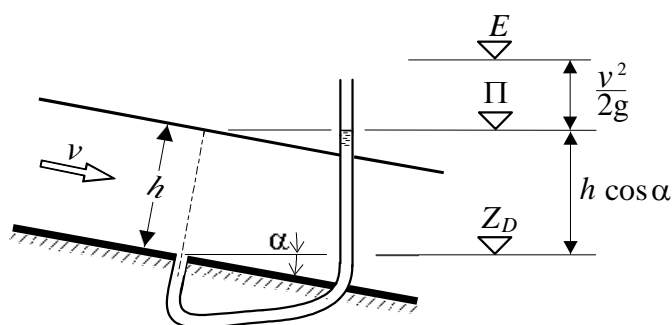
provodnika, dok kod drugih fluid sam obrazuje proticajni poprečni presek, i on je *unapred nepoznat*. Stoga su zadaci sa kanalima složeniji od onih sa cevima i njima se posvećuje produžetak izlaganja – Odeljak II.

II

NEJEDNOLIKO TEČENJE U OTVORENIM TOKOVIMA

Na presek otvorenog toka odnose se sledeće veličine (slika 92–3):

- h = dubina u preseku (merena normalno na pravac strujanja),
 Z_D = kota dna,
 Π = pijezometarska kota za presek,
 E = energetska kota, takođe za presek.



Slika 92–3 Kota dna (Z_D), pijezometarska (Π) i energetska kota (E) za poprečni presek struje u kanalu

Može se napisati:

$$Z_D + h \cos \alpha = \Pi$$

Ako se izuzmu veoma strmi kanali, oni kod kojih je $\sin \alpha > 0,2$, a to je zaista samo kod izuzetnih zadataka, može se $\cos \alpha$ zameniti sa jedinicom, jer je za $\sin \alpha < 0,2$, $\cos \alpha$ između 0,98 i 1, pa se umesto prethodnog izraza piše:

$$Z_D + h = \Pi \quad (92-9)$$

pa je onda

$$Z_D + h + \frac{v^2}{2g} = E \quad (92-10)$$

Otvoreni tok, kako je malopre rečeno, nema unapred određen proticajni presek, nego se u sagrađenom poprečnom preseku voda popne do neke dubine h . Dubina duž toka, $h = h(x)$, obrazuje se zavisno od uslova koji se nameću toku u datom zadatku. Praktični razlozi stoga, i pre svega, zahtevaju određivanje $h = h(x)$, što se i raspravlja u produžetku.

Diferenciranje (92–10) po x daje:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dZ_D}{dx} + \frac{dh}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) \quad (92-11)$$

Duž toka proticaj je konstantan pa se poslednji član zamenjuje prema sledećem:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = \frac{Q^2}{2g} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A^2} \right) = \frac{-Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dx} \quad (92-12)$$

Proticajni presek A zavisi od dubine h i od mesta gde se nalazi (od x), pa je:

$$dA = \frac{\partial A}{\partial h} dh + \frac{\partial A}{\partial x} dx \quad (92-13)$$

Za isti presek ($dx = 0$), priraštaj dA jednak Bdh ($B =$ širina slobodne površine tečnosti), što znači da je:

$$\frac{\partial A}{\partial h} dh = B dh$$

pa se (92-13) može napisati sa

$$dA = Bdh + \frac{\partial A}{\partial x} dx$$

što uvršteno u (92-12) daje

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = -\frac{Q^2 B}{gA^3} \frac{dh}{dx} - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (92-14)$$

U (92-11) koristiće se nagibi I_E i I_D , uvedeni sa (91-13) i (91-16), te dobijeno u (92-14), pa se dobija tražena veza dubine h i rastojanja x duž struje, u vidu sledeće diferencijalne jednačine:

$$\frac{dh}{dx} \left(1 - \frac{Q^2 B}{gA^3} \right) = I_D - I_E + \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (92-15)$$

Razmatranja će se nadalje odnositi *isključivo na prizmatične kanale* (kod njih je sagrađeni presek duž celoga kanala istovetan), za koje važi da je A funkcija samo od dubine h , i da ta funkcija važi za bilo koje rastojanje x , pa je poslednji član u (92-13), odnosno poslednji u (92-15) jednak nuli. Tako se dobija:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{I_D - I_E}{1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}} \quad (92-16)$$

gde je I_E , shodno (91–19):

$$I_E = C_\tau \frac{v^2}{2gR} = C_\tau \frac{Q^2}{2gA^2R} = f(h) \quad (92-17)$$

jer su C_τ , A i R funkcije isključivo od dubine, pošto se Q ne menja duž toka, a pretpostavlja se prizmatično korito i hrapav provodnik sa konstantnom apsolutnom hrapavošću.

Za normalnu dubinu nagib linije energije se izjednačava sa nagibom dna, pa važi ranije data jednačina (91–36). Jednačine (92–17) i (91–36) omogućavaju da se izrazi odnos I_E/I_D za bilo koju dubinu na osnovu C_τ , A i R za tu dubinu i odgovarajućih vrednosti za normalnu dubinu:

$$\frac{I_E}{I_D} = \frac{C_\tau}{A^2R} \left(\frac{A^2R}{C_\tau} \right)_N \quad (92-18)$$

ili primenom Manningovog koeficijenta n

$$\frac{I_E}{I_D} = \frac{(A^2R^{4/3})_N}{A^2R^{4/3}} \quad (92-19)$$

Prelaz sa (92–18) na (92–19) obavljen je zamenjivanjem C_τ uz korišćenje (91–34).

Pisanjem (92–18) i (92–19) prećutno se prihvatilo da je nagib u nejednolikom tečenju isti kao u jednolikom (za isti presek i isti proticaj). Opravdanje za to dato je iza jednačine (92–18) na (92–8).

U jednačinama (92–15) i (92–16) pojavila se bezdimenzionalna veličina, koja se obično naziva:

$$Fr = \frac{Q^2 B}{gA^3} = \frac{v^2}{g \frac{A}{B}} \quad (92-20)$$

Frudov (FROUDE) broj za otvorene tokove

Fr -broj često se pojavljuje u hidrotehnici (u nekoliko pogodnih oblika, prilagodjenih praktičnim potrebama), on se i ovde može prihvatiti, jer ga je samo izvođenje jednačine (92–16) prosto nametnulo.

Treba naglasiti da je Fr -broj za određeni proticaj i za prizmatični kanal funkcija isključivo od dubine:

$$Fr = \frac{Q^2 B}{g A^3} = Fr(h) \quad (92-21)$$

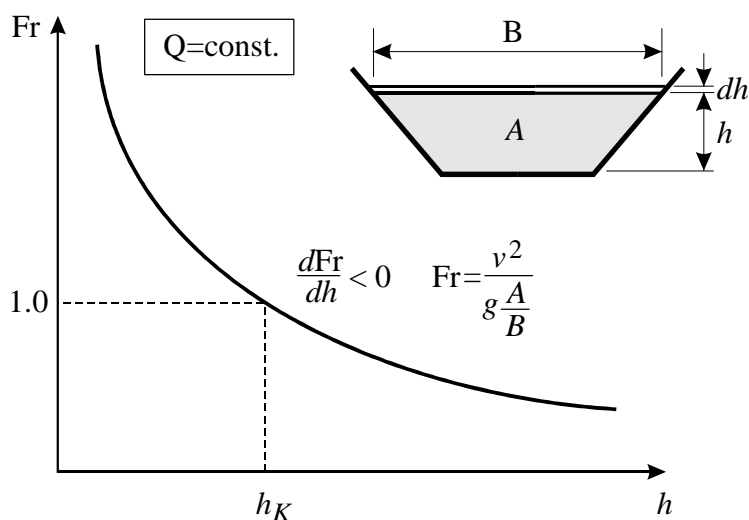
jer su: $A = A(h)$ i $B = B(h)$.

Na primer, izraz (92-20) primenjen za kanal pravougaonog poprečnog preseka ($A = Bh$) daje:

$$Fr = \frac{Q^2}{g B^2 h^3} \quad (92-22)$$

Iz izraza (92-20) se uviđa da Fr -broj opada sa porastom dubine h , jer je to porast i odnosa A/B , a opadanje brzine v (razume se, za isti proticaj i isti presek kanala). Dakle, izvod dFr/dh je negativan, tj. $Fr(h)$ je funkcija koja neprekidno opada. Na sl. 92-4 to je i načelno prikazano.

Ako se u jednačinama (92-15) i (92-16) obavi zamena prema (92-20), vidi se da je značajna dubina pri kojoj se uspostavlja $Fr = 1$, jer tada dh/dx dobija beskonačnu vrednost. Ta dubina naziva se „kritična” i označavaće se sa h_K . Opravdanje ovoga naziva će biti dato



Slika 92-4 Uz objašnjenje Fr -broja za jedan poprečni presek otvorenog toka

kasnije. Indeks „K” imaće i druge veličine koje se uspostavljaju pri toj dubini.

Za $Fr = 1$, $h = h_K$, iz (92-20) dobija se:

$$\left(\frac{A}{B}\right)_K = \frac{v_K^2}{g} = \frac{Q^2}{gA_K^2} \quad (92-23)$$

Ova jednačina za dati proticaj određuje h_K , jer njemu pripadajućí A_K i B_K treba da zadovolje jednačinu.

Za trapezni presek do h_K dolazi se postepenim približavanjem, dok se za pravougaoni i trougaoni, gde su $A = A(h)$ i $B = B(h)$ monomi, dolazi neposredno. Za pravougaoni presek ($B = \text{const}$, $A = Bh$), dobija se:

$$h_K = \frac{v_K^2}{g} \quad \text{ili} \quad h_K = \frac{Q^2}{gB^2h_K^2} \quad \text{tj.} \quad h_K = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}} \quad (92-24)$$

Za trougaoni presek širina B slobodne površine tečnosti i površina A preseka jednake su: $B = Ch$ i $A = Ch^2/2$. Za pojedini primer $C = \text{const}$, a vrednost konstante određuje nagib bokova kanala. Primenom jednačine (92-23) dobija se:

$$h_K = \frac{2v_K}{g} \quad \text{tj.} \quad h_K = \left(\frac{8Q^2}{gC^2}\right)^{1/5}$$

Uobičajena je podela koju određuje kritična dubina:

$$\left. \begin{array}{l} \text{burno tečenje} \quad Fr > 1, \quad h < h_K \\ \text{mirno tečenje} \quad Fr < 1, \quad h > h_K \\ \text{kritična dubina} \quad Fr = 1, \quad h = h_K \end{array} \right\} \quad (92-25)$$

* * *

Jednačina (92-16) sa Fr -brojem, uvedenim sa (92-20), može se napisati:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{I_D - I_E}{1 - Fr}$$

jednačina nejednolikog ustaljenog strujanja u prizmatičnom kanalu

(92-26)

Zadatak će se dalje ograničiti na deonicu prizmatičnog kanala sa konstantnim nagibom dna.

Svojevremeno je objašnjeno, uz izraze (92-17) i (92-21) da su I_E i Fr funkcije isključivo od h (za prizmatični kanal i konstantan proticaj). Uz te uslove pridodaće se i malo pre usvojeni ($I_D = \text{const}$). Sve to dovodi do toga da se može napisati:

$$\frac{dh}{dx} = f(h) \quad f(h) = \frac{I_D - I_E}{1 - Fr} \quad (92-27)$$

Ovako napisana jednačina ukazuje da se za konačni priraštaj Δh (na primer sa h_I na h_{II}) dobija $x_{II} - x_I$ (rastojanje preseka gde su dubine h_I i h_{II}) na osnovu sledećeg:

$$\frac{h_{II} - h_I}{x_{II} - x_I} = \frac{1}{2}[f(h_{II}) + f(h_I)] \quad (92-28)$$

gde su na desnoj strani vrednosti $f(h)$ za h_{II} , odnosno h_I . Vrednost koraka Δh određuje zahtevana tačnost računa. Može se unapred usvojiti Δx , a onda se, na osnovu h_I i $h_I = f(h_I)$ postepenim približavanjem određuje h_{II} , čije $f(h_{II})$ zadovoljava jednačinu.

Pre početka računanja moraju se odrediti granični uslovi i oni nameću šta će se računati, od koje do koje dubine, i kojim smerom, a to će se raspraviti neposredno u produžetku. Normalna i kritična dubina određuju oblasti u kojima su brojtelj i imenitelj u (92-26) pozitivni, odnosno negativni, a to se vidi iz sledećeg (1, 2, 3):

1. Normalna dubina uspostavila bi se celom dužinom kanala jedino ako se to obezbedi uzvodnim i nizvodnim uslovima. Oni, međutim, mogu da nametnu drukčije dubine i tada se dubina postepeno približava normalnoj dubini: linija normalne dubine $h = h_N = \text{const}$ je asimptota za liniju dubine $h = f(x)$ koja se uspostavlja. Ovo se obrazlaže sledećim: Približavanjem normalnoj dubini (smerom od mesta uzroka uspostavljanju neke druge dubine) dolazi se do dubine bliske normalnoj, pa se nagib I_E približio I_D , pa brojtelj desne strane u (92-26) dobija veoma malenu vrednost, i onda treba jako veliko rastojanje Δx da se dobije primetna promena Δh dubine h . To se može izraziti i ovako: Do normalne dubine bi se moglo doći ako bi povećanje rastojanja bilo neizмерно veliko, a to znači da je linija normalne dubine asimptotska za liniju nivoa.

Za dubine veće od normalne brzina je manja, hidraulički radijus je veći, pa je trenje manje od onoga koje za isti proticaj deluje pri normalnoj dubini, tj. pad dna je veći nego što zahteva energetski gubitak, pa je $I_D > I_E$. Za dubine manje od normalne, stanje je suprotno ($I_D < I_E$).

Sve izloženo može se pregledno napisati:

$$\left. \begin{array}{l} I_E \rightarrow I_D \quad \text{za } h \rightarrow h_N \\ I_E = I_D \quad \text{za } h = h_N \\ I_E < I_D \quad \text{za } h > h_N \\ I_E > I_D \quad \text{za } h < h_N \end{array} \right\} \quad (92-29)$$

2. Za $Fr = 1$ (a to je pri $h = h_K$) imenitelj u (92-26) postaje beskonačan i to je prekid u liniji dubina. Napisano sa (92-25) određuje znak imenitelja u (92-26), jer je:

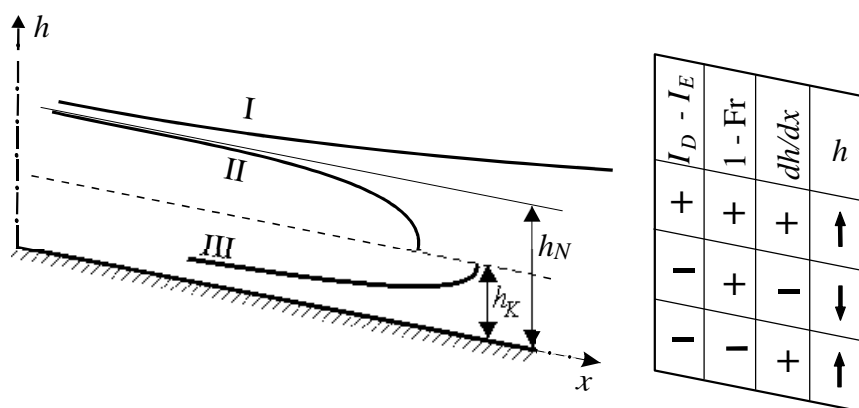
$$\left. \begin{array}{l} 1 - Fr > 0 \quad \text{za } h > h_K \\ 1 - Fr = 0 \quad \text{za } h = h_K \\ 1 - Fr < 0 \quad \text{za } h < h_K \end{array} \right\} \quad (92-30)$$

3. Za veoma velike dubine nivo je skoro horizontalan, jer je brzina zanemarljiva, pa onda i trenje. Može se uzeti da je tada $I_E = 0$ i $Fr = 0$, pa je $dh/dx = I_D$, što znači da se dubina menja tačno onako kako nameće spuštanje dna, pa je nivo horizontalan. Dakle:

$$\frac{dh}{dx} \rightarrow I_D \quad \text{za } h \rightarrow \infty \quad (92-31)$$

Stavovi 1, 2 i 3, primenjeni na kanal sa takvim nagibom dna da je za zadati proticaj $h_N > h_K$, pokazuju da linije dubina $h = h(x)$ izgledaju kako je prikazano na slici 92-5. Skreće se pažnja da su znakovi za $I_D - I_E$, tj. za brojitelj u (92-26), i za $1 - Fr$ (imenitelj), određeni na osnovu (92-29) i (92-30), a iz njih i znak za količnik dh/dx .

Pored toga vođeno je računa da se linija nivoa asimptotski približava normalnoj dubini, i da za kritičnu dubinu ($Fr = 1$) nagib dh/dx ima beskonačnu vrednost. Takođe je vođeno računa i o napisanom sa (92-31), odnosno da se povećanjem dubine nivo približava horizontalnoj liniji.

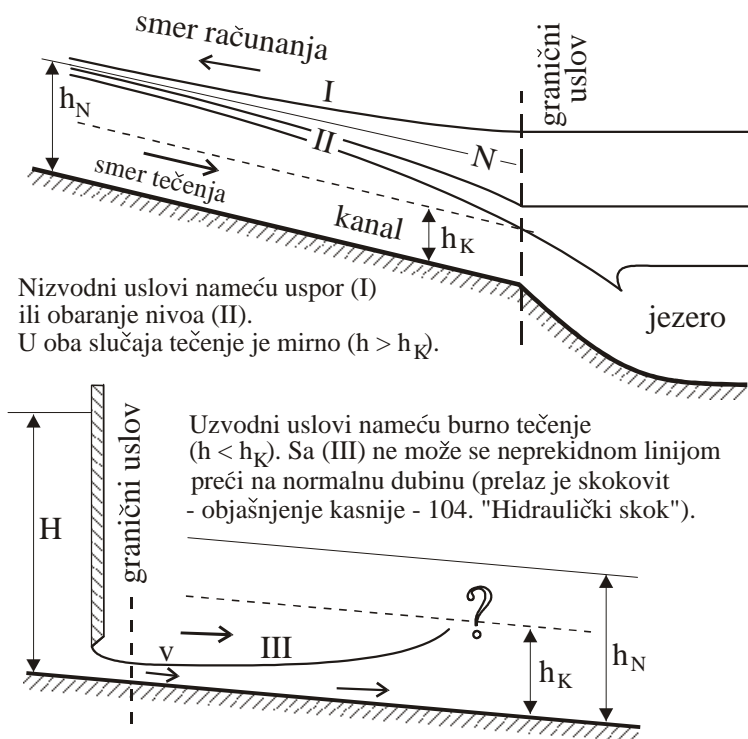


Slika 92–5 Linije nivoa pri normalnoj dubini većoj od kritične

Na sledećoj slici (92–6) dati su primeri ostvarenja linija sa sl. 92–5. Uzet je kanal koji se uliva u jezero i uviđa se da dubina na nizvodnom kraju kanala ne može biti manja od h_K , jer se linija (II) ne spušta niže, bez obzira što je nivo u jezeru još niži. Nivo u jezeru utiče na tečenje u kanalu tek ako je viši od nivoa kritične dubine na kraju kanala, i onda se nivo na kraju kanala izjednačuje sa nivoom u jezeru. Linija nivoa u kanalu biće linija (II) sa sl. 92–5 sve dok se slučajno ne postigne da je nivo u jezeru baš toliko da je na istoj koti i normalna dubina u kanalu i tada će do kraja kanala biti jednoliko tečenje. Ako je nivo u jezeru još viši uspostavlja se linija (I) sa sl. 92–5 – tok je u kanalu usporen.

Treba zapaziti da se za primere za linije (I) i (II) na nizvodnom kraju nalazi poremećaj koji nameće dubinu koja nije normalna – tu je granični uslov i od njega se uticaji prenose uzvodnim smerom – to je onda i smer računanja.

Pojavu linije (III) na sl. 92–5 moguće je ostvariti ako se nametne dubina h , gde je $h < h_K < h_N$, a ta dubina, jer je malena, zahteva veliku brzinu v (za zadati proticaj), koju je moguće postići, na primer, onako kako je to pokazano primerom za liniju (III) na sl. 92–6. Potrebna brzinska visina $v^2/2g$ može se dobiti stavljanjem ustave ispred koje je dubina dobijena za postizanje $v^2/2g$ (prema jednačini energije). Uz ovaj primer zanimljiva je primedba napisana na slici, o nemogućnosti da se iz linije (III) pređe kontinualno na dubine veće od kritične. Naime, za oblast između kritične i normalne dubine nema rešenja kojim bi dubina

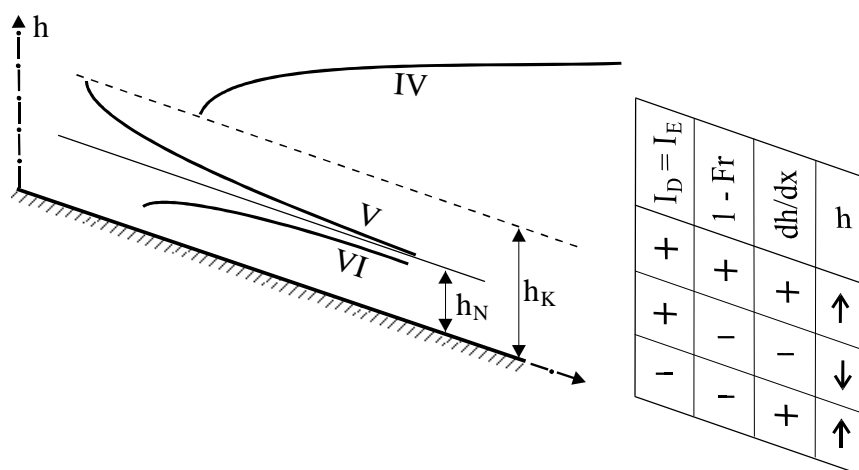


Slika 92-6 Primeri uz sliku 92-5

rasla (a to bi trebalo), u toj oblasti ostvaruje se linija (II), a njom dubina opada nizvodnim smerom.

Istim rasuđivanjem kako su nacrtana moguća rešenja – (I), (II) i (III) – na sl. 92-5, došlo se do linija (IV), (V) i (VI) na sl. 92-7 koje predstavljaju moguća rešenja osnovne jednačine (92-26) za slučaj kada je $h_K > h_N$. Naime, korišćeno je napisano izrazima (92-29) i (92-30) kao i približavanje nivoa horizontali kada je dubina h jako velika. Na sl. 92-8 dati su primeri gde se ostvaruju takva rešenja kod kojih je uočljivo da je odstupanje od normalne dubine uslovljeno nizvodnim graničnim uslovom za liniju (IV), dok je granični uslov na uzvodnom kraju za linije (V) i (VI). Uz primer za liniju (IV) slična je primedba kao ranije za (III): ne može se kontinualnom linijom preći iz normalne dubine na liniju IV.

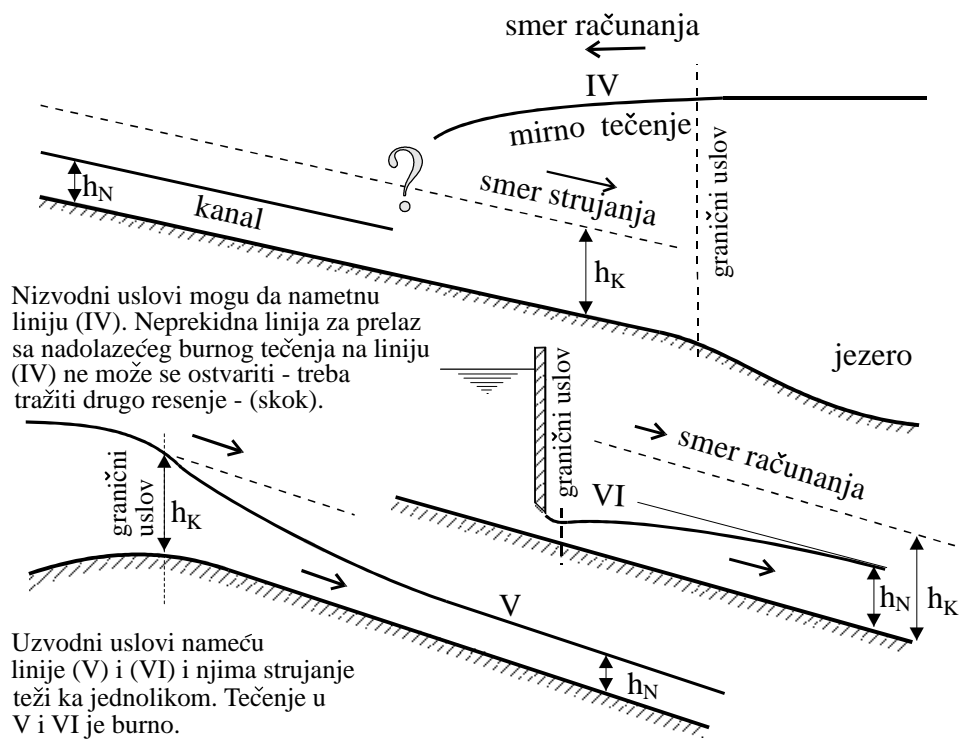
Na osnovu prethodnih izlaganja, koja su pratila prikazano na sl. 92-5 do 92-8, dolazi se do sledećih *zaključaka* (1, 2, 3).



Slika 92–7 Linije nivoa pri normalnoj dubini manjoj od kritične

1. Za *mirno tečenje* ($h > h_K$) – poremećaji koji remete uspostavljanje normalne dubine imaju uzrok negde nizvodno i *poremećaj se prenosi uzvodnim smerom*. To je ujedno i smer računanja (od graničnog uslova). To su linije I, II i IV, i dati su primeri njihovog ostvarivanja.
2. Za *burno tečenje* ($h < h_K$) – to su linije III, V i VI – primeri pokazuju da ih uslovljavaju uzroci koji su negde uzvodno, a poremećaj se prenosi nizvodnim smerom, pa je takav i smer računanja.
3. Treba zapaziti da je kod primera za linije III i IV došlo do neizvesnosti, *do nemogućnosti da se neprekidnom linijom pređe iz burnog tečenja u mirno*, jer takvih rešenja na sl. 92–5, odnosno 92–7, nema. Idući uzvodno linija IV se ne može spustiti ispod kritične dubine, a linija III ne može preći kritičnu dubinu i preći u mirno tečenje. To nameće zadatak da se istraže ti prelazi – oni su skokoviti (jer postepeni ne mogu da budu) – kasnije u Poglavlju 104 „Hidraulički skok” dolazi se do rešenja.

Rečeno pod 1, 2 i 3 objašnjava, upravo opravdava nazive „burno” i „mirno”. Tečenje čiji uticaji prodiru nizvodno, i koga je nemoguće smiriti postepenim podizanjem nivoa, je „burno” (naziva se i „silovito” jer silovito prodire nizvodno). Tečenje na koga se može uticati sa nizvodne

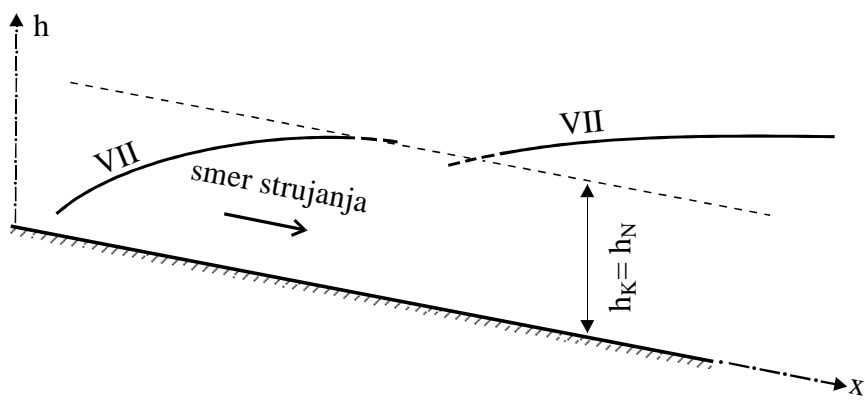


Slika 92-8 Primeri uz sliku 92-7

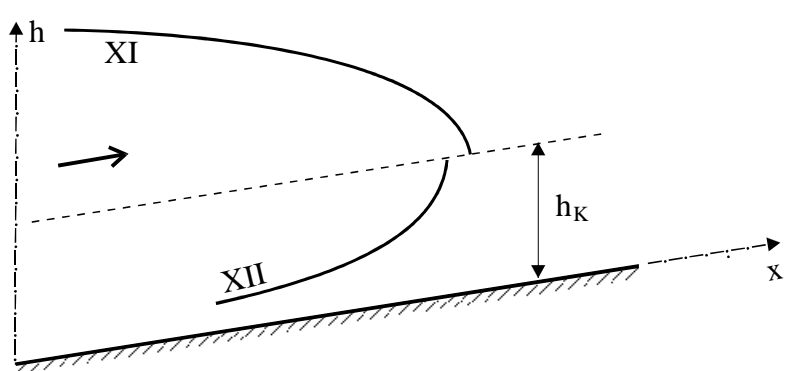
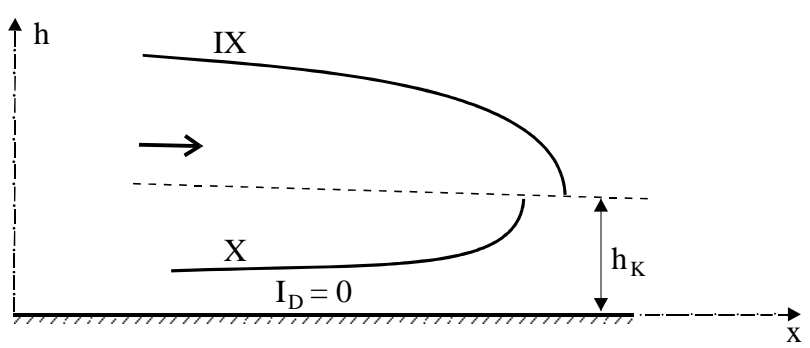
strane je „mirno”. Dakle, tečenje se različito ponaša zavisno od toga da li je „mirno” ili „burno” govori se o „dva režima tečenja”. Stoga je *dubina koja odvaja te dve vrste tečenja presudna* (odlučujuća) pa njoj i odgovara naziv „kritična”.

Slika 92-9 se odnosi na slučaj kada su normalna i kritična dubina baš (slučajno) međusobno jednake. Tada ispada oblast gde je dubina između normalne i kritične (srednja oblast na slici 92-5 i 92-7). Brojitelj i imenitelj u (92-26) su istoga znaka ($dh/dx > 0$) za $h > h_N = h_K$ i za $h < h_N = h_K$, pa dubina u obe oblasti raste niz struju. Treba primetiti da je za ovaj slučaj $I_D = I_E$ i $Fr = 1$ pri $h = h_N = h_K$, pa se u (92-26) dobija nula podeljena sa nulom, što dovodi do konačne vrednosti za dh/dx .

Slika 92-10 prikazuje kanal sa horizontalnim dnom i kanal sa suprotnim nagibom. Za ove slučajeve nema normalne dubine (jednoliko tečenje na takvom padu nije moguće), a uvek je $I_D < I_E$, jer je $I_D = 0$



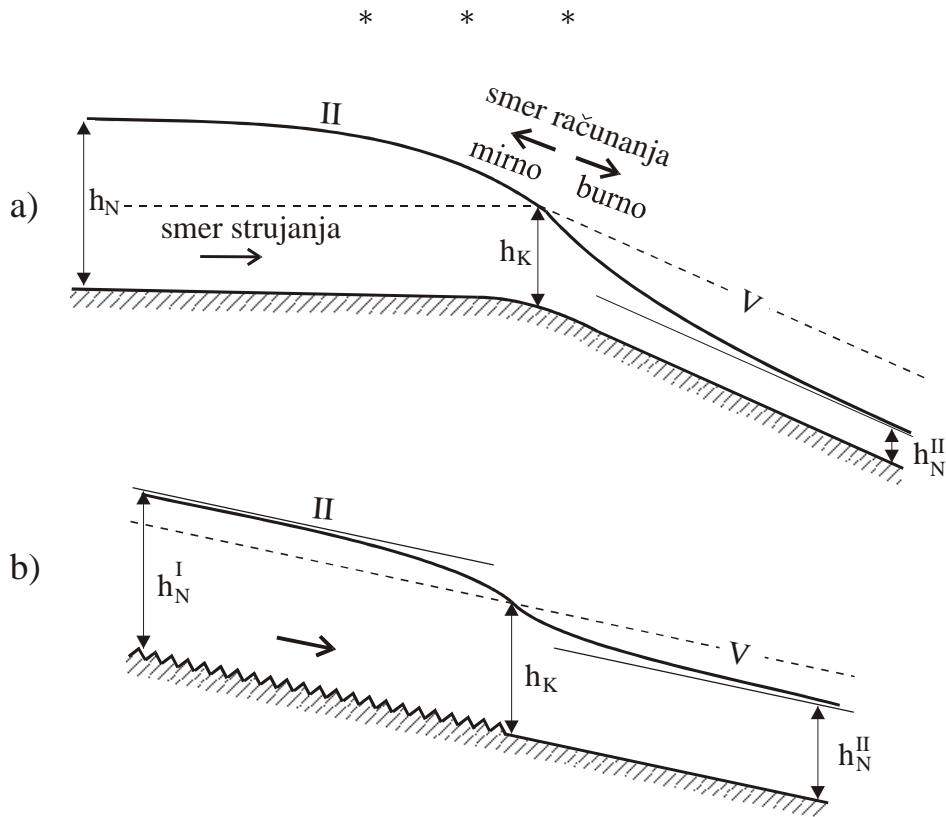
Slika 92-9 Linije dubina duž struje $h = h(x)$ kada se normalna i kritična dubina podudaraju



Slika 92-10 Linije dubina duž struje, $h = h(x)$, za horizontalno dno i dno u suprotnom nagibu

(ili $I_D = 0$), a $I_E > 0$, jer mora da bude gubitka. Promena znaka za $1 - Fr$ biće i ovde na kritičnoj dubini. Nizvodni uslovi nameću linije IX i XI (mirno tečenje), dok su linije X i XII (burno tečenje) moguće samo ako se uzvodnim uzrokom tečnost prisili na malene dubine i velike brzine (može se postići, na primer ustavom – isto kao i linija III).

Dok je postepeni prelaz iz burnog u mirno tečenje nemoguć (jer silovitost burnog tečenja nije lako smiriti), dotle se prelaz iz mirnog u burno tečenje ostvaruje kao postepen prelaz (neprekidnom linijom) – prelaz je na kritičnoj dubini – slika 92–11. Prvi slučaj je promena pada, a drugi promena hrapavosti, ali se poprečni presek kanala ne menja.



Slika 92–11 Prelaz iz mirnog u burno tečenje u kanalu istog poprečnog preseka zbog: a) promene nagiba dna, b) promene hrapavosti (promena nagiba ili hrapavosti menja normalnu dubinu, ali kritična dubina ostaje ista jer je presek isti)

Uz prethodnu analizu treba napomenuti da ona omogućava da se postave granični uslovi za zadati primer, za koji se onda primenom jednačine (92–26), odnosno (92–28) računaju dubine duž toka, i dobija linija $h = h(x)$, u jednom kanalu, bolje rečeno jednoj kanalskoj deonici (isti presek, pad dna i hrapavost). Ako se te deonice sastavljaju na istoj koti dna i u istom preseku, tu se sastavljaju nivoi (primer na slici 92–11) poštujući granični uslov. Ako se tu menja presek, ili kota dna, ili oboje, treba sastavljanje tokova obaviti uz primenu jednačine energije, vodeći računa o gubitku energije na tom mestu (tu je baš zbog nagle promene proticajnog preseka i lokalni koncentrisani gubitak energije). O lokalnim pojavama, međutim, biće reči kasnije, u Desetom delu knjige.

* * *

Kod razmatranja otvorenih tokova pogodno je uvesti i pojam:

$$e = h + \frac{v^2}{2g} \quad (92-32)$$

specifična energija

koja čini zbir dubine i brzinske visine. Ona je takođe energija po jedinici težine, ali u odnosu na dno. Naime, ukupna energija (po jedinici težine) E dobija se dodavanjem kote dna Z_D na e , što se uviđa iz upoređenja (92–10) i (92–32). Kota dna prikazuje potencijalnu energiju usled toga što je presek kanala uzdignut za Z_D iznad nultog nivoa, a *specifična energija* prikazuje *sopstvenu energiju struje* (energiju u samom toku), pa je to za struju njena svojstvena (osobena) energija – odatle i naziv „specifična”.

Za isti proticaj energija u određenom preseku može da bude različita, jer se može uspostaviti bilo koja dubina. U nastavku će se istraživati zavisnost specifične energije od dubine, tj. $e = e(h)$, za konstantan proticaj i uz poznatu zavisnost proticajnog preseka od dubine, tj. sa $Q = \text{const}$ i uz poznato $A = A(h)$. Kada h teži beskonačnosti, brzina teži ka nuli, pa postaje zanemarljiv drugi član u (92–32) i onda $e \rightarrow h$, tj. $e = h$ je asimptota krive linije $e = e(h)$ pa $e \rightarrow \infty$ kada $h \rightarrow \infty$. Međutim i kada h teži nuli, opet e teži beskonačnosti, jer su sada brzine ogromne.

Diferenciranjem (92-32) po h dobija se:

$$\frac{de}{dh} = 1 + \frac{1}{2g} \frac{d(v^2)}{dh}$$

što se, za $Q = \text{const}$, svodi na:

$$\frac{de}{dh} = 1 + \frac{Q^2}{2g} \frac{d}{dh} \left(\frac{1}{A^2} \right) = 1 - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dh} = 1 - \frac{Q^2 B}{gA^3} = 1 - Fr$$

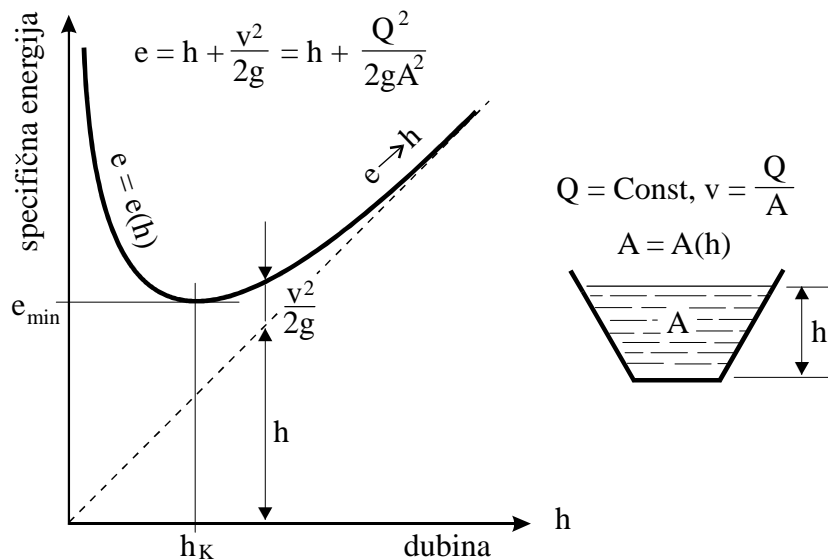
Ovde je iskorišćeno da je $dA = B dh$, te izraz (92-20) za Fr -broj. Prethodno pokazuje da je:

$$e = e_{\min} \quad \text{za} \quad \frac{de}{dh} = 0, \quad \text{a to je pri} \quad Fr = 1 \quad (h = h_K)$$

Grafički prikaz $e = e(h)$, na osnovu objašnjenog, izgleda načelno kao što prikazuje slika 92-12.

* * *

Sada se može dati i dopunsko tumačenje za „mirno” i „burno tečenje”. Prvo nastaje, kako je objašnjeno, kada je $h > h_K$, a tada



Slika 92-12 Dijagram specifične energije za jedan presek struje

je de/dh pozitivno, što znači da će povećanjem dubine h rasti sopstvena energija e struje čemu se ona ne protivi, dok će se sa $h < h_K$ struja protiviti povećanju dubine, jer joj to smanjuje energiju. To se izrazilo ispoljilo u primerima za linije (I) i (IV): u prvom slučaju nizvodni uslovi povećavaju dubinu (iznad normalne) i tome se struja ne protivi, usporava se, dok se u drugom slučaju struja protivi povećanju (iznad normalne) i ne može se kontinualno povećavati dubina.

* * *

U prethodnim izlaganjima objašnjeno je kako se računaju dubine u kanalima, čiji se sagrađeni poprečni presek ne menja, a položeni su pravolinijski, pa su nazvani „prizmatični kanali”, i kod kojih je još uz to i konstantan nagib dna. Osnovna jednačina nejednolikog tečenja (92–7) odnosi se na sve nejednolike struje, a ne samo na „prizmatične kanale”, pa može da posluži za računanje dubina (a samim tim i nivoa vode) duž proizvoljno oblikovanog otvorenog toka, čiji se poprečni preseki duž kanala menjaju, čak i bez ikakve pravilnosti, i čija linija dna može da bude potpuno proizvoljna. Tako se mogu računati ne samo kanali promenljivog preseka i nagiba dna nego i prirodni otvoreni tokovi (rečni tokovi). Bitno je samo da su promene poprečnog preseka blage, postepene, tako da je u svim poprečnim presecima strujanje približno pravolinijsko i paralelno, normalno na presek.

Malo pre pominjana jednačina (92–7) pomnožena sa dx daje:

$$-d \left(\Pi + \frac{v^2}{2g} \right) = I_E dx = C_\tau \frac{v^2}{2gR} dx \quad (92-33)$$

Ako se ona iz neizmerno male dužine dx proširi na konačni maleni deo struje između dva poprečna preseka – (I) i (II) – dobija se:

$$\left(\Pi + \frac{v^2}{2g} \right)_I - \left(\Pi + \frac{v^2}{2g} \right)_{II} = (I_E^I + I_E^{II}) \frac{x_{II} - x_I}{2} \quad (92-34)$$

Smer tečenja je od (I) ka (II), I_E^I i I_E^{II} su nagibi linije energije koji daje presek (I), odnosno (II) (a računa se sa njihovim prosekom), $x_{II} - x_I$ je razmak između preseka. Nagib linije energije izražen je sa (91–19), pa se piše:

$$I_E^I = \left(C_\tau \frac{v^2}{2gR} \right)_I \quad I_E^{II} = \left(C_\tau \frac{v^2}{2gR} \right)_{II} \quad (92-35)$$

Koeficijent trenja C_τ se računa obrascima (91–30) ili (91–31), u koje ulazi apsolutna hrapavost k .

Veoma čest primer u hidrotehničkoj praksi je račun dubine, odnosno nivoa, u nepravilnom prirodnom toku (rečnom) u kome je tečenje mirno. Račun počinje od graničnog uslova na nizvodnom kraju, i računa se uzvodnim smerom (jer je tečenje mirno). Tako se na osnovu poznatog stanja u nekom preseku (II), računa dubina h_I na uzvodnom preseku (I), a na kratkom rastojanju od preseka (II). Sa pretpostavljenom dubinom h_I , određena i pijezometarska kota $\Pi_I = Z_D^I + h_I$ (jer je kota dna Z_D^I poznata), a nametnute su i vrednosti za sve veličine u preseku (I). To su poprečni presek A_I (a onda je brzina $v_I = Q/A_I$, a proticaj Q je zadat), hidraulički radijus R_I i koeficijent trenja C_τ^I (za poznatu apsolutnu hrapavost k), koji sa (91–35) dodređuje nagib I_E^I . Sa svim tim vrednostima, kao i onima za presek (II) ulazi se u jednačinu (92–34), uz prethodno korišćenje (92–35), i dubina h_I se pretpostavlja da sve dotle dok se jednačina ne zadovolji.

Umesto računa sa C_τ može se nagib I_E računati upotrebom Maningove formule (91–32) koja daje:

$$I_E = \frac{v^2 n^2}{R^{4/3}} \quad (92-36)$$

* * *

PRIMEDBA

Fr-broj, uveden izrazom (92–20) poseban je slučaj opšteg izraza (62–3) u kome treba staviti da je karakteristična brzina u_0 srednja brzina v u preseku, a karakterističnu dužinu L_0 predstavlja A/B (kod pravougaonog preseka to je dubina h).

U poglavlju 62, posle uvođenja *Fr*-broja objašnjeno je da je on pokazatelj odnosa inercijalnih uticaja prema uticajima težine, i da je on veći ako su inercijalni uticaji izrazitiji. *Fr*-broj (92–20) je veći ako je v_0^2 veće, a A/B manje. Kako je u_0 pokazatelj inercijalnih uticaja (jer kvadrat brzine ukazuje na kinetičku energiju), a A/B ukazuje na težinu struje, *Fr* će biti veći što su inercijalni uticaji izrazitiji u odnosu na uticaje težine, a tako i treba da bude.

DODATAK

Dosadašnja razmatranja odnosila su se isključivo na ustaljeno strujanje, a sada će se raspraviti neustaljeno.

Silama koje su uravnotežene jednačinom (92–6) treba dodati i komponentu inercijalne „sile” usled neustaljenosti, napisanu u opštem obliku prvim članom u (84–1), gde se odnosi na konačnu zapreminu. Za elementarnu zapreminu $dV = Adx$, sa brzinom v , ta „sila” iznosi:

$$-\rho \frac{\partial v}{\partial t} Adx$$

Dodavanjem prethodnog izraza u jednačinu napisanu između (92–5) i (92–6) dobija se:

$$-\left[\rho A \frac{\partial v}{\partial t} dx + \gamma A \frac{\partial}{\partial x} \left(Z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) dx + \tau O dx \right] = 0$$

Pošto se radi o neustaljenom tečenju, a sile težine, pritisaka i inercijalna odnose se na jedan trenutak (za koji je napisana jednačina), zbog istovremenosti promena je samo po dužini x , pa su priraštaji napisani kao parcijalni (drugi sabirak u prethodnoj jednačini).

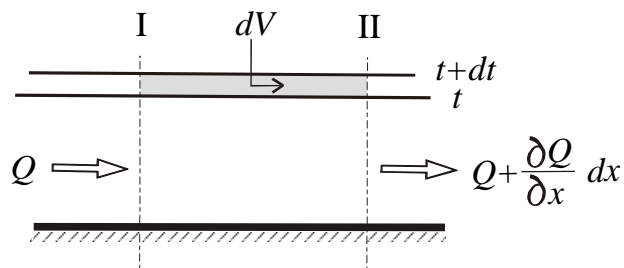
Prethodna jednačina podeliće se sa $-\gamma A$, uvešće se pijezometarska kota Π , a $O\tau/\gamma A$ zameniće se sa $\tau/\gamma R = I_E$, pa se dobija:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Pi + \frac{v^2}{2g} \right) + I_E = 0 \quad (92-37)$$

Nagib I_E se računa kao da je isti kao u ustaljenom tečenju (za isti presek i isti proticaj), što nije potpuno tačno, ali se može prihvatiti u rešavanju praktičnih primera, jer je u tu svrhu dovoljno tačno.

U otvorenim tokovima može se na istom mestu (lokalno) menjati poprečni presek A kroz vreme. To se mora odraziti u jednačini nepromenljivosti mase. Povećanje zapremine na elementarnom delu dužine dx za elementarno vreme dt iznosi (vidi sliku 92–13):

$$dV = \frac{\partial A}{\partial t} dt dx$$



Slika 92–13 Za vreme dt zapremina tečnosti između preseka (I) i (II) poveća se za dV , jer je proticaj kroz (II) manji od proticaja kroz (I) ($\partial Q/\partial x < 0$)

To povećanje je moguće ako kroz nizvodni granični presek elementarnog dela struje ističe manje tečnosti od onoga što utiče kroz uzvodni granični presek (tj. $\partial Q/\partial x < 0$). Razlika ulaznog i izlaznog proticaja pomnožena sa dt čini povećanje zapremine, pa je:

$$dV = \left[Q - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) \right] dt$$

Prethodna dva izražavanja izjednačuju se, pa se dobija:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (92-38)$$

**LAMINARNE JEDNOLIKE STRUJE:
RAVANSKA (IZMEĐU DVE PARALELNE
PLOČE) I OSNOSIMETRIČNA
(U KRUŽNOJ CEVI)**

I

**JEDNOLIKA LAMINARNA RAVANSKA STRUJA
(IZMEĐU DVE PARALELNE PLOČE)**

Razmatra se strujanje nestišljivog fluida između dve paralelne nepokretne ploče, uz uslov da je ustaljeno i laminarno i da se može proučavati kao ravanski zadatak. Strujanje je upravljeno u pravcu 1, proučava se u ravni (1, 2), pa su granične ploče postavljene normalno na pravac 2, a nalaze se na rastojanju $2h$ – vidi sliku 93–1, gornji crtež.

Jednačina o nepromenljivosti mase za nestišljiv fluid, (32–7) glasi:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

što je napisano i sa (23–6). Ovaj izraz, za postavljeni zadatak gde je $u_2 = u_3 = 0$, daje

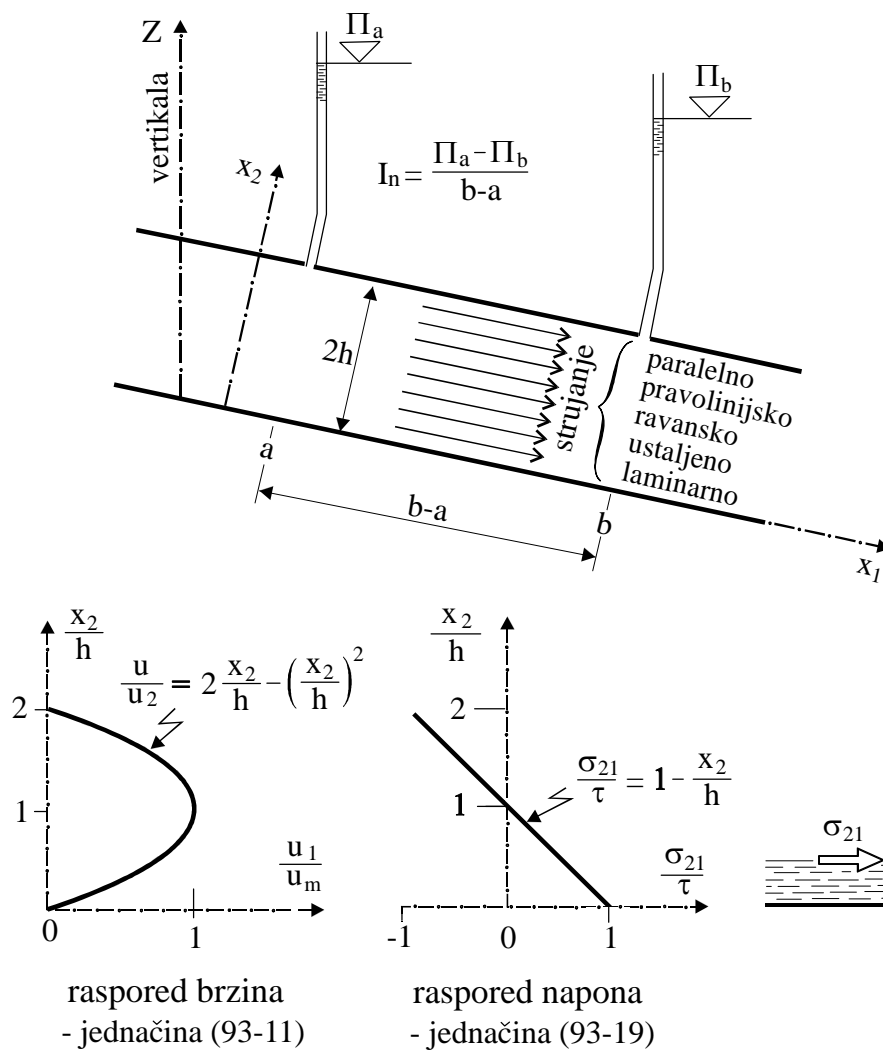
$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$$

što za ravanski zadatak, u ravni (1, 2), uslovljava

$$u_1 = u_1(x_2) \tag{93–1}$$

što znači jednolikost rasporeda brzina u svim poprečnim presecima struje. Prethodno, uz uslov ustaljenosti, nameće da je ubrzanje po celom polju jednako nuli, jer jednačina (21–4) za ustaljeno strujanje i navedenu zakonitost za brzine daje:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{Du_1}{Dt} = u_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} = u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$$



Slika 93-1 Strujanje između dve ploče – raspored brzina i napona

Od zapreminskih sila deluje samo težina, koja – shodno (28-6) – po jedinici mase iznosi $f_i = -g\partial Z/\partial x_i$.

Na postavljeni zadatak primeniće se dinamička jednačina (Navije-Stoksova) – (41-11), koja za sve navedene uslove daje za pravac 1:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \quad (93-2)$$

Pri pisanju ove jednačine korišćeno je malopredšašnje saznanje da je ubrzanje jednako nuli, a onda je i leva strana (41-11) jednaka nuli.

Deljenjem sa g i uvođenjem pijezometarske kote $\Pi = Z + p/\gamma$, prethodna jednačina se svodi na:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = \frac{\mu}{\gamma} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \quad (93-3)$$

Primena jednačine 41-11 na pravac 2 (normala na pravac strujanja) dovodi do:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = 0 \quad (93-4)$$

što znači da je pijezometarska kota ista za sve tačke jednog preseka strujanja, pa je Π samo funkcija od x_1 , $\Pi = \Pi(x_1)$, pa leva strana u (93-3) može da bude funkcija isključivo od x_1 , ili konstanta, dok desna strana u (93-3), shodno (93-1) može da bude samo funkcija isključivo od x_2 , ili konstanta. Iz ovoga se zaključuje da leva i desna strana u (93-3) moraju da budu konstante, i da se obe mogu upisati totalnim izvodima. Sa ovim obrazloženjem (93-3) se može napisati sa:

$$\frac{\mu}{\gamma} \frac{d^2 u}{dx_2^2} = \frac{d\Pi}{dx_1} = -I_{\Pi} = \text{const} \quad (93-5)$$

gde je I_{Π} nagib pijezometarske linije, uveden sa (91-14), i on je konstanta za jednoliku struju.

Integrisanjem prethodnog izraza po x_2 dobija se:

$$\frac{\mu}{\gamma} \frac{du}{dx_2} = -I_{\Pi} x_2 + C_I \quad (93-6)$$

Još jednim integrisanjem dolazi se do:

$$\frac{\mu}{\gamma} u = -I_{\Pi} \frac{x_2^2}{2} + C_I x_2 + C_{II} \quad (93-7)$$

C_I i C_{II} su integracione konstante koje se odstranjuju iz uslova: $u = 0$ za $x_2 = 0$ i za $x_2 = 2h$ (na samim pločama brzina je jednaka nuli). Dobija se:

$$C_I = I_{\Pi} h \quad \text{i} \quad C_{II} = 0 \quad (93-8)$$

pa jednačina (93-7) daje za raspored brzina

$$u = \gamma \frac{I_{\Pi} h^2}{\mu} \left[\frac{x_2}{h} - \frac{1}{2} \left(\frac{x_2}{h} \right)^2 \right] \quad (93-9)$$

Maksimalna brzina u_m se ostvaruje na simetralnoj ravni ($x_2 = h$) i iznosi:

$$u_m = \frac{1}{2} \gamma \frac{I_{\Pi} h^2}{\mu} \quad (93-10)$$

Deljenjem (93-9) sa (93-10) dobija se pogodan *bezdimenzionalni oblik za raspored brzina*:

$$\boxed{\frac{u}{u_m} = 2 \frac{x_2}{h} - \frac{x_2^2}{h^2}} \quad (93-11)$$

što je prikazano na sl. 93-1.

Prethodna jednačina predstavlja parabolu simetričnu u odnosu na središnu (simetralnu) ravan struje. Rastojanje od te ravni obeležiće se sa y , (pa je $y = x_2 - h$), i prethodni raspored brzina, u zavisnosti od y , glasi:

$$\frac{u}{u_m} = 1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \quad (93-12)$$

Od sredine struje brzina se smanjuje i to smanjenje $u_m - u$, koje se naziva „deficit brzine”, izraženo je sa:

$$\frac{u_m - u}{u_m} = \left(\frac{y}{h} \right)^2 = \left(\frac{x_2 - h}{h} \right)^2 \quad (93-13)$$

* * *

Srednja brzina v za struju dobija se na osnovu sledeće dve jednačine za proticaj:

$$Q = 2hL_3v$$

$$Q = 2L_3 \int_0^h u dx_2 = 2L_3 u_m h \int_0^1 \left(2 \frac{x_2}{h} - \frac{x_2^2}{h^2} \right) d \left(\frac{x_2}{h} \right) = \frac{4}{3} L_3 u_m h$$

Sa L_3 je ovde označena proizvoljno uzeta širina struje (pruža se normalno na crtež na slici 93-1, tj. u pravcu '3'). U drugoj jednačini korišćeno je (93-11).

Prethodne dve jednačine daju:

$$\frac{\text{srednja brzina}}{\text{maksimalna brzina}} = \frac{v}{u_m} = \frac{2}{3} \quad (93-14)$$

što i odgovara paraboličnom rasporedu brzina.

* * *

Prema osnovnoj vezi napona i deformacija za devijatorski deo, napisanoj sa (41-7), može se napisati za nestišljiv fluid:

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \mu \frac{du_1}{dx_2} = \mu \frac{du}{dx_2} \quad (93-15)$$

To je jedini od devijatorskih napona, koji deluju u posmatranom slučaju. Izostavljen je drugi sabirak u zagradi, jer je u posmatranom slučaju $u_2 = 0$, dok je $u_1 = u$, a brzina u je funkcija isključivo od x_2 , pa se piše se totalnim izvodom.

Zamena prema (93-15) u (93-6) daje:

$$\frac{1}{\gamma} \sigma_{21} = -I_{II} x_2 + C_I \quad (93-16)$$

što sa konstantom C_I prema (93-8) daje nadalje:

$$\sigma_{21} = \gamma I_{II} (h - x_2) \quad (93-17)$$

Napon između fluida i čvrste granice označavaće se sa τ (tako je označavan i u Poglavlju 91). Kako je τ jednako σ_{21} za $x_2 = 0$ prethodni izraz daje:

$$\tau = \gamma I_{II} h \quad (93-18)$$

Deljenjem (93-17) sa (93-18) dobija se *raspored napona*:

$$\boxed{\frac{\sigma_{21}}{\tau} = 1 - \frac{x_2}{h}} \quad (93-19)$$

Za $x_2 = h$ napon je jednak nuli (tamo je du/dx_2 jednako nuli), a za $x_2 = 2h$ (na drugoj ploči) $\sigma_{21} = -\tau$ (negativna vrednost zbog konvencije o pozitivnom smeru napona, ispisanе uz sliku 25-1).

Vežu između napona trenja τ između ploče i fluida i nagiba I_{Π} piježometarske linije daje (93–18) i ona je sa opštom zakonitosti za jednolike struje iskazanom sa (91–15), samo se R zamenjuje sa h . Ovde je hidraulički radijus R i jednak h , jer je presek $A = 2hL_3$, a okvašeni obim $O = 2L_3$, gde je L_3 proizvoljno uzeta širina struje.

* * *

Jednačina (93–10) može se proširiti korišćenjem (93–14) i (93–18) pa se dobija pregledna veza između veličina koje opisuju zadatak:

$$\boxed{u_m = \frac{3}{2}v = \frac{\gamma I_{\Pi} h^2}{2\mu} = \frac{\tau h}{2\mu}} \quad (93-20)$$

Ova jednačina omogućava rešavanje prikazanog zadatka, jer za zadati proticaj određenog fluida kroz zadati razmak između ploča (poznato: v , $2h$) određuje nagib piježometarske linije I_{Π} i napon trenja τ između fluida. Ili obrnuto, za raspoloživu piježometarsku razliku, ona određuje proticaj. Određena srednja brzina v znači i određenu maksimalnu brzinu u_m , sa kojom je određen raspored brzina prema jednačini (93–11). Određeno τ znači i poznavanje rasporeda napona, prema (93–19).

* * *

Do rasporeda napona moglo se doći bez prethodnog razmatranja rasporeda brzina. Moglo se poći od opšte dinamičke jednačine (33–3), u kojoj se pojavljuju devijatorski naponi (jer još nisu iskorišćene veze između tih napona i brzina deformacija). Uslovi koji su jednačinu (44–11) sveli na (93–2), jednačinu (33–3), napisanu za pravac 1, svode na:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{p}{\rho} + gZ \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2}$$

jer od dejstva devijatorskih napona dolazi u obzir samo ono što je izraženo parcijalnim izvodom po x_2 . (Strujanje je ravansko pa otpada izvod po x_3 , a jednoliko duž struje, pa otpada izvod po x_1).

Množenjem prethodne jednačine sa ρ dobija se:

$$\gamma \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2}$$

Leva i desna strana u prethodnom izrazu su konstante – isto je bilo i sa (93–3). I ovde se pojavljuje $\partial\Pi/\partial x_1$, za koga je zaključeno da je funkcija isključivo od x_1 , a kako je σ_{21} funkcija samo od x_2 , takva je funkcija i desna strana u prethodnom izrazu. Ovo znači da su obe strane konstante, pa se piše:

$$\text{const}_I = \frac{d\sigma_{21}}{dx_2} = \gamma \frac{d\Pi}{dx_1} \quad (93-21)$$

što integrisano daje

$$\sigma_{21} = \text{const}_I x_2 + \text{const}_{II} \quad (93-22)$$

Granični uslovi (na pločama) su:

$$\begin{aligned} \sigma_{21} &= \tau \quad \text{za} \quad x_2 = 0, \\ \sigma_{21} &= -\tau \quad \text{za} \quad x_2 = 2h \end{aligned}$$

Na prvoj ploči napon τ je pozitivan, a na drugoj negativan (zbog konvencije o znaku napona) a moraju imati istu apsolutnu vrednost (zbog simetričnosti strujanja, u odnosu na simetralu $x_2 = h$). Ovo rasuđivanje dovelo je do prethodnog ispisivanja graničnih uslova, koji određuju vrednosti konstanti:

$$\text{const}_I = -\frac{\tau}{h} \quad \text{const}_{II} = \tau$$

Prema tome, za napon se piše:

$$\frac{\sigma_{21}}{\tau} = 1 - \frac{x_2}{h}$$

Dobilo se – a i moralo se dobiti – ono što je već napisano sa (93–19). Iz poslednje napisane jednačine sledi:

$$\frac{d\sigma_{21}}{dx_2} = -\frac{\tau}{h}$$

što uvršteno u (93–21) daje

$$\frac{\tau}{h} = -\gamma \frac{d\Pi}{dx_1} = \gamma I_{II}$$

tj.

$$\tau = \gamma I_{\Pi} h$$

što je već napisano sa (93–18), to se uklapa u opštu jednačinu jednolikoga strujanja (91–15), koja se dobila iz dinamičke jednačine za konačnu zapreminu, gde se ne ulazi u raspored napona po celoj struji, jer se posmatra struja kao celina, pa od napona ulaze samo oni po graničnoj površini posmatrane zapremine, što znači da od devijatorskih napona ulazi samo τ . Desna strana poslednjeg napisanog izraza ($\gamma I_{\Pi} h$) unosi dejstvo sile težine i pritiska.

* * *

Rad devijatorskog dela napona za razmatrani zadatak, gde je $u_1 = u = u(x_2)$, iznosi *u jedinici vremena i po jedinici zapremine*:

$$\underbrace{\frac{d}{dx_2}(\sigma_{21}u_1)}_{\left[\begin{array}{c} \text{ukupni} \\ \text{rad} \end{array} \right]} = \underbrace{u_1 \frac{d\sigma_{21}}{dx_2}}_{\left[\begin{array}{c} \text{motorni} \\ \text{rad} \end{array} \right]} + \underbrace{\sigma_{21} \frac{du_1}{dx_2}}_{\left[\begin{array}{c} \text{deforma-} \\ \text{cioni rad} \end{array} \right]} \quad (93-23)$$

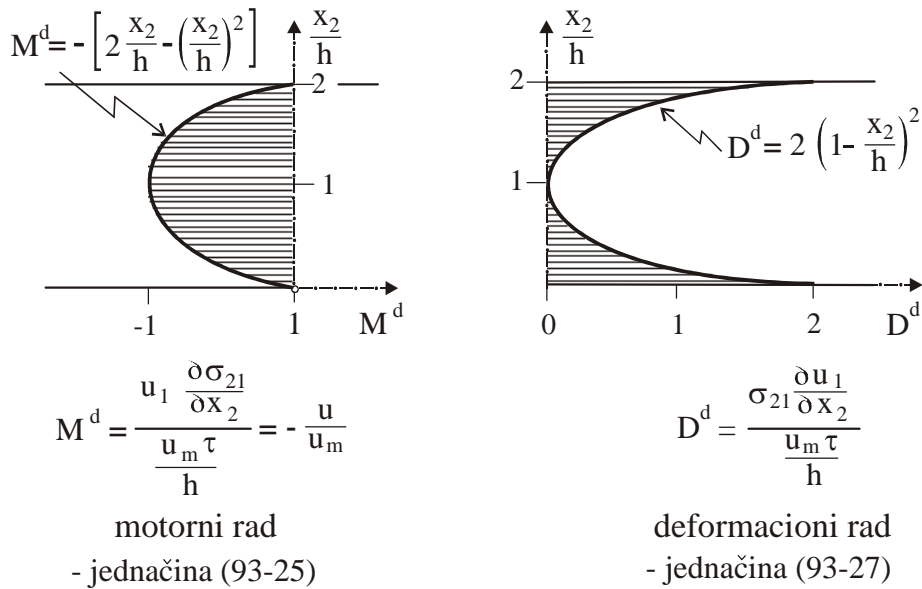
Ovo je napisano na osnovu jednačine (27–2), primenjene na razmatrani slučaj. Koristeći (93–19) *motorni rad* se izražava sledećim:

$$u \frac{d\sigma_{21}}{dx_2} = u \left(-\frac{\tau}{h} \right) \quad (93-24)$$

Rad po jedinici zapremine, i u jedinici vremena, je, kao što se iz (93–24) uviđa, negativan (njime se struji oduzima mehanička energija, a raspoređen je isto kao brzina (jer je τ/h konstanta), pa se najviše energije oduzima na sredini struje, a sve manje što je bliže ploča. Raspored motornog rada prikazan je na slici 93–2 u bezdimenzionalnom obliku:

$$M^d = \frac{u \frac{d\sigma_{21}}{dx_2}}{u_m \frac{\tau}{h}} = \frac{-u}{u_m} = - \left(2 \frac{x_2}{h} - \frac{x_2^2}{h^2} \right) \quad (93-25)$$

Pri pisanju izraza korišćeno je (93–24) i (93–11).



$$\text{osenčena površina} = \int_0^2 -M^d d\left(\frac{x_2}{h}\right) = \int_0^2 D^d d\left(\frac{x_2}{h}\right) = \frac{4}{3}$$

Slika 93–2 Raspored motornog i deformacionog rada devijatorskog dela napona za strujanje sa slike 93–1 (za struju kao celinu ovi radovi se međusobno uravnotežuju)

Deformacioni rad, po jedinici zapremine – drugi član u (93–23) – može se pisati, korišćenjem (93–11) i (93–19):

$$\sigma_{21} \frac{du}{dx_2} = \tau \left(1 - \frac{x_2}{h} \right) u_m \left(\frac{2}{h} - 2 \frac{x_2}{h^2} \right) \quad (93-26)$$

ili

$$D^d = \frac{\sigma_{21} \frac{du}{dx_2}}{\frac{u_m \tau}{h}} = 2 \left(1 - \frac{x_2}{h} \right)^2 \quad (93-27)$$

Ovde je raspored suprotan od onoga kod motornog rada: najviše se za deformaciju troši uz zidove, a sve manje na sredini struje (vidi sliku 93–2).

Rad, u jedinici vremena, na celokupnu masu između dva poprečna preseka struje na rastojanju L_1 , a uz širinu struje L_3 (i L_1 i L_3 mogu

se uzeti proizvoljno, a indeksi kazuju pravac pružanja tih dužina) dobija se integrisanjem po zapremini izraza (93–24), odnosno (93–26) uz korišćenje (93–11) (elementarna zapremina je $L_1L_3dx_2$). Motorni rad je:

$$mot^d = 2L_1L_3\tau u_m \int_0^1 \left(2\frac{x_2}{h} - \frac{x_2^2}{h^2} \right) d\left(\frac{x_2}{h}\right) = -\frac{4}{3}L_1L_3\tau u_m \quad (93-28)$$

a deformacioni rad je

$$def^d = 4L_1L_3\tau u_m \int_0^1 \left(1 - \frac{x_2}{h} \right)^2 d\left(\frac{x_2}{h}\right) = \frac{4}{3}L_1L_3\tau u_m \quad (93-29)$$

Prethodno pokazuje da je:

$$mot^d + def^d = 0 \quad (93-30)$$

tj. da je ukupni rad jednak nuli, ali za zapreminu između dva poprečna preseka struje, uzetu kao celina, što izražava (93–30) dok ukupan rad za pojedini delić nije jednak nuli, izrazi (93–24) i (93–26) su različiti upravo $M^d + D^d$ nije jednako nuli. Neki delići (oni blizu zida) traže za svoju deformaciju više, dok drugi (oni bliže sredini struje) troše manje energije od onoga što im se motornim radom oduzima. U zbiru, za sve deliće zapremine između dva poprečna preseka struje, to se uravnotežava. Ranije (Poglavlje 85), pri opštem energetskom razmatranju struja, ovo je bilo načelno razjašnjeno, a sada se to, na jednom primeru, i pokazuje. Treba se podsetiti ranije jednačine (85–5), ona je istovetna sa ovde dobijenom (93–30).

Izgubljena energija na dužini L_1 mora da bude:

$$E_{izg} = I_E L_1 = I_{\Pi} L_1$$

jer su nagibi linije energije I_E i pjezometarske linije I_{Π} isti.

Prema (85–11), E_{izg} se dobija deljenjem sa γQ izraza def^d , koji je ovde dat sa (93–29), a γQ , ovde iznosi $\gamma v 2h L_3$, pa se dobija:

$$E_{izg} = \frac{def^d}{\gamma Q} = \frac{\frac{4}{3}L_1L_3\tau u_m}{\gamma v 2h L_3} = I_{\Pi} L_1 \quad (93-31)$$

a to se i moralo dobiti. U prethodnom izrazu svođenje na $I_{II}L_1$ je bilo omogućeno zamenom τ prema (93–18), a $u_{m/v}$ prema (93–14).

* * *

Dodaje se sledeće izlaganje, koje ne mora da važi samo za razmatranu ravansku jednoliku struju, nego za svaku jednoliku laminarnu struju.

Za svako jednoliko strujanje nema promene kinetičke energije duž struje, jer jednolikost znači isti raspored brzina po svim poprečnim presecima. Uz to se pretpostavlja nepokretan omotač struje, pa nema ni izmene energije preko graničnih površina. Združeni rad težine i pritiska, koji se može izraziti i smanjivanjem potencijalne energije (nju, po jedinici težine, predstavlja piježometarska kota, i ona opada duž struje), potire se sa motornim radom devijatorskog dela napona (jer promene kinetičke energije nema) – to daje bilans mehaničke energije. Međutim, ukupni rad devijatorskog dela napona jednak je nuli pa se deformacioni mora nadoknaditi motornim radom. To se može pregledno napisati:

$$\boxed{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \text{združeni rad} \\ \text{pritiska i težine} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{motorni rad} \\ \text{devijatorskog} \\ \text{dela napona} \end{array} \right] = 0 \\ \text{(nema priraštaja kinetičke energije)} \end{array}} \quad (93-32)$$

$$\boxed{\left[\begin{array}{l} \text{deformacioni rad} \\ \text{devijatorskog} \\ \text{dela napona} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{motorni rad} \\ \text{devijatorskog} \\ \text{dela napona} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{ukupan} \\ \text{rad} \end{array} \right] = 0} \quad (93-33)$$

Obe jednačine zajedno dovode do zaključka da se združeni rad težine i pritiska troši na deformacioni rad, na izgublenu energiju. (To se dobija oduzimanjem druge jednačine od prve) Treba naglasiti da to važi za struju kao celinu (a ne za pojedini delić), i za jednoliku struju sa čvrstim nepokretnim granicama.

* * *

U produžetku se razmatra izmenjeni zadatak: postoji izmena energije između čvrste granice i fluidne ravanske struje konstantne debljine.

Upravo, donja ploča neka bude i dalje nepokretna ($u = 0$ za $x_2 = 0$), ali se gornja kreće konstantnom brzinom U , pa je $u = U$ za $x_2 = 2h$ (slika 93–3). Tada ukupan rad neće biti nula, jer pokretna ploča obavlja rad po granici. Izmenjeni granični uslovi za jednačinu (93–7) nameću sada:

$$C_I = I_{II}h + \frac{\mu U}{\gamma 2h} \quad C_{II} = 0 \quad (93-34)$$

pa se dobija raspored brzina

$$\frac{u}{U} = \gamma \frac{I_{II}h^2}{\mu U} \left(\frac{x_2}{h} - \frac{x_2^2}{2h^2} \right) + \frac{x_2}{2h} \quad (93-35)$$

Uvodi se posebna oznaka za bezdimenzionalni izraz u prethodnoj jednačini (ispred zagrade):

$$K = \frac{\gamma I_{II}h^2}{\mu U} \quad (93-36)$$

pa se jednačina (93–35) piše

$$\frac{u}{U} = K \left(\frac{x_2}{h} - \frac{x_2^2}{2h^2} \right) + \frac{x_2}{2h} \quad (93-37)$$

Pozitivan smer je smer brzine U . Pijezometarska kota može da opada, ili da raste, tim smerom, odnosno nagib $I_{II} = -d\Pi/dx_1$ može da bude veći, manji, ili jednak nuli, i tada je i K veće, manje ili jednako nuli – slika 93–3.

Raspored napona σ_{21} dobija se iz (93–16) sa konstantom C_I prema (93–34):

$$\sigma_{21} = \gamma I_{II}(h - x_2) + \frac{\mu U}{2h} \quad (93-38)$$

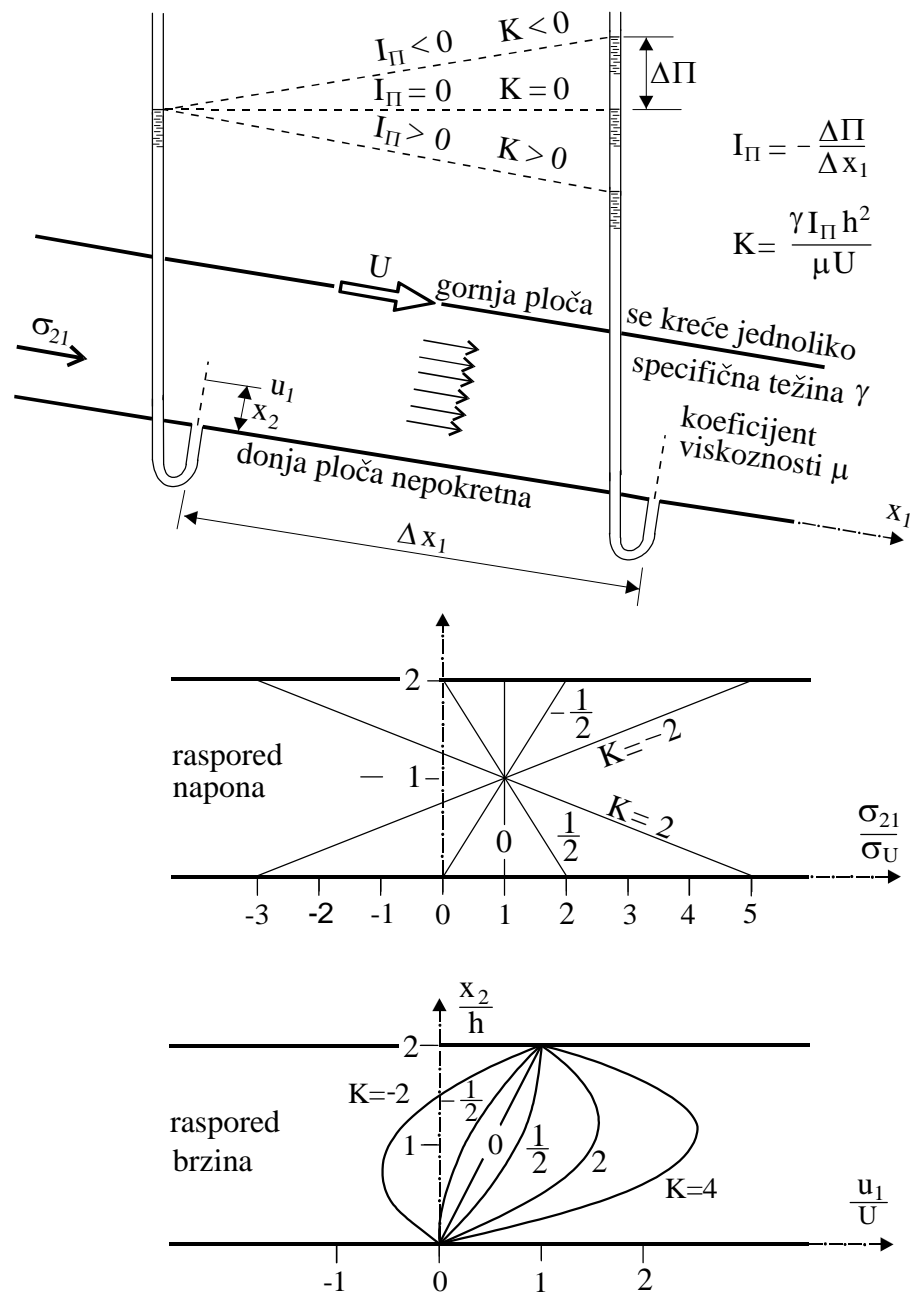
Izlaganje se može učiniti preglednijim ako se uvede posebna oznaka za dodatni napon koji je posledica kretanja ploče – to je drugi član u prethodnom izrazu:

$$\sigma_U = \frac{\mu U}{2h} \quad (93-39)$$

Iz (93–38) se uviđa da je $\sigma_U = \sigma_{21}(h) =$ napon u sredini struje.

Raspored napona u bezdimenzionalnom obliku sada se piše izrazom koji predstavlja odnos između σ_{21} i σ_U , i gde se koristi K , dat sa (93–36):

$$\frac{\sigma_{21}}{\sigma_U} = 1 + 2K \left(1 - \frac{x_2}{h} \right) \quad (93-40)$$



Slika 93-3 Raspored napona i brzina za laminarnu struju između dve ploče od kojih se jedna kreće

Na slici 93–3 prikazani su rasporedi brzina i napona, prema jednačinama (93–37) i (93–40), a za nekoliko vrednosti za K . Treba zapaziti sledeće:

- a) Za $K = 0$, tj. $I_{\Pi} = 0$, piježometarska kota za celo strujno polje se ne menja, $\Pi = \text{const}$, brzina raste, od nule do brzine U , po linearnom zakonu, a tangencijalni napon je konstantan (i iznosi σ_U). Za $K \neq 0$ napon se menja, ali njegov grafički prikaz je uvek prava linija, dok je prikaz rasporeda brzina parabola drugog reda.
- b) Za pozitivne vrednosti za K piježometarska kota opada u smeru brzine U . Za $0 \leq K \leq 1/2$ maksimalna brzina je na pokretnoj ploči (i jednaka U), dok je za $K > 1/2$ maksimalna brzina veća od U i nalazi se negde u struji, i to bliže njenoj sredini što je K veće. Kada K teži beskonačnosti (brzina U teži ka nuli) raspored brzina teži simetričnom paraboličnom zakonu za nepokretne ploče. Za $K > 1/2$, na mestu maksimalne brzine napon prolazi kroz nultu vrednost i tu menja znak, dok za $0 < K \leq 1/2$ napon uopšte ne menja znak, za $K = 1/2$ baš na pokretnoj ploči napon je jednak nuli.
- c) Za negativne vrednosti za K piježometarska kota raste u smeru brzine U . Do strujanja u smeru suprotnom od U (na delu struje uz nepokretnu ploču) dolazi pri $K < -1/2$. Tada dolazi i do promene smera delovanja graničnog napona uz tu ploču.

* * *

Motorni i deformacioni rad, u jedinici vremena, na zapreminu između dva poprečna preseka struje, ranije, za nepokretne ploče su bili izraženi sa (93–28) i (93–29). Sada, kada se gornja ploča kreće, odgovarajući izrazi ispisuju se na osnovu (93–37) i (93–40), pa se dobija:

$$\begin{aligned}
 \text{mot}^d &= L_1 L_3 \int_0^{2h} u \frac{d\sigma_{21}}{dx_2} dx_2 = \\
 &= -2L_1 L_3 U \sigma_U K \int_0^2 \left[K \left(\frac{x_2}{h} - \frac{x_2^2}{2h^2} \right) + \frac{x_2}{2h} \right] d \left(\frac{x_2}{h} \right) = \\
 &= -L_1 L_3 U \sigma_U \left(\frac{4}{3} K^2 + 2K \right) \qquad (93-41)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
def^d &= L_1 L_3 \int_0^{2h} \sigma_{21} \frac{du}{dx_2} dx_2 = \\
&= 2L_1 L_3 U \sigma_U \int_0^2 \left[K \left(1 - \frac{x_2}{h} \right) + \frac{1}{2} \right]^2 d \left(\frac{x_2}{h} \right) = \\
&= L_1 L_3 U \sigma_U \left(\frac{4}{3} K^2 + 1 \right) \tag{93-42}
\end{aligned}$$

Zbir prethodna dva izraza je ukupan rad, i on ovde nije jednak nuli, jer pokretanje ploče obavlja rad na posmatranoj zapremini fluida, upravo na površini $L_1 L_3$ deluje silom $L_1 L_3 \sigma_{21}(2h)$ gde je $\sigma_{21}(2h)$ napon između te ploče i fluida, i on shodno (93-40) iznosi:

$$\sigma_{21}(2h) = (1 - 2K)\sigma_U$$

Množenje sile sa brzinom U daje rad u jedinici vremena pa on iznosi:

$$L_1 L_3 \sigma_U (1 - 2K) U$$

a to je baš zbir (93-41) i (93-42).

II

JEDNOLIKA LAMINARNA OSNOSIMETRIČNA STRUJA (U KRUŽNOJ CEVI)

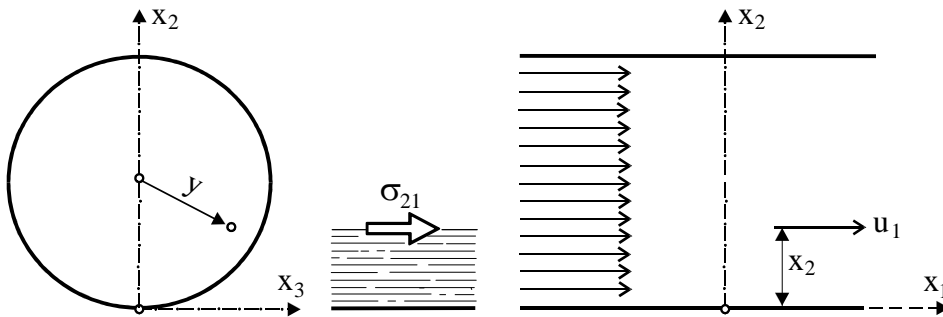
Za laminarno pravolinijsko strujanje u cevi kružnog poprečnog preseka poluprečnika r (slika 93-4), brzina $u = u_1$ zavisi od x_2 i x_3 , pa se umesto (93-3) piše:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = \frac{\mu}{\gamma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) \tag{93-43}$$

Jednačina za druga dva pravca dovodi do:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} = 0 \quad \text{tj.} \quad \Pi = \Pi(x_1) \tag{93-44}$$

Ovo pokazuje da je i ovde, kao kod svakog pravolinijskog i paralelnog strujanja, pijeometarska kota ista za sve tačke jednog poprečnog preseka. S obzirom da Π zavisi samo od x_1 , a u opet ne zavisi od x_1 , i



Slika 93–4

ovde, u jednačini (93–43), kao i ranije u jednačini (93–3), leva i desna strana moraju da budu konstante.

Raspored brzina za laminarno strujanje u kružnoj cevi (to je laminarno osnosimetrično strujanje) je isti kao i za laminarno ravansko strujanje – ako se rastojanje meri od središta struje (od centra ose simetrije odnosno od ravni simetrije). Ovaj iskaz trebalo bi dokazati, i to će biti kasnije i učinjeno, a njegovo prihvatanje znači da se za kružnu cev može koristiti jednačina (93–12), uz napomenu da je y rastojanje od središta cevi, u kome je brzina u_m . U toj jednačini treba još h zameniti sa poluprečnikom r , pa se piše:

$$\frac{u}{u_m} = 1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2 \quad (93-45)$$

Veza između koordinata x_2 i x_3 (datih slikom 93–4) i rastojanja r (od središta kruga) je:

$$y^2 = (x_2 - r)^2 + x_3^2 \quad (93-46)$$

Napominje se da su ose x_2 i x_3 na slici 93–4 namerno tako postavljene da x_2 i ovde, kao i svuda, označava rastojanje od zida.

Na osnovu (93–45) i (93–46) piše se raspored brzina u zavisnosti od x_2 i x_3 :

$$\frac{u}{u_m} = 1 - \frac{(x_2 - r)^2 + x_3^2}{r^2} \quad (93-47)$$

Iz ovoga se dobija:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = -2 \frac{u_m}{r^2}$$

Ovo uvršteno u (93-43) daje:

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = 4 \frac{\mu u_m}{\gamma r^2} = \text{const} = I_{\Pi} \quad (93-48)$$

čime je jednačina (93-43) zadovoljena, upravo (93-48) je njeno rešenje, a onda je ispravna i tvrdnja iskazana sa (93-45) tj. tvrdnja o istovetnosti rasporeda brzina za ravansko i osnosimetrično strujanje.

Duž jednog prečnika postavljena je osovina 2, pa je duž nje $x_3 = 0$, a zavisnost brzine od rastojanja x_2 od zida je onda, shodno (93-11):

$$\boxed{\frac{u}{u_m} = 2 \frac{x_2}{r} - \left(\frac{x_2}{r}\right)^2} \quad (93-49)$$

Ovo, razume se, važi duž jednog prečnika, ali bilo koga prečnika, pa to u potpunosti određuje raspored brzina, i on je isti kao kod ravanskog strujanja, gde je izražen sa (93-11).

Napon σ_{21} se dobija iz rasporeda brzina (93-49):

$$\sigma_{21} = \mu \frac{\partial u}{\partial x_2} = \mu u_m \left(\frac{2}{r} - 2 \frac{x_2}{r^2} \right) = 2 \frac{\mu u_m}{r} \left(1 - \frac{x_2}{r} \right)$$

Na zidu ($x_2 = 0$) napon σ_{21} se izražava sa τ , koje je jednako:

$$\tau = 2 \frac{\mu u_m}{r} \quad (93-50)$$

Iz prethodna dva izraza dobija se raspored tangencijalnog napona izraženog bezdimenzionalno, a duž jednog prečnika:

$$\boxed{\frac{\sigma_{21}}{\tau} = 1 - \frac{x_2}{r}} \quad (93-51)$$

a to je isti raspored kao i kod ravanskog strujanja, gde je napisan sa (93-19).

Neposredna veza između graničnog napona τ i nagiba I_{Π} pijezometarske linije dobija se zamenom desne strane u (93-50) sa $\gamma I_{\Pi} r / 2$, koja proizilazi iz (93-48). Tako se dobija:

$$\tau = \gamma I_{\Pi} \frac{r}{2} \quad (93-52)$$

a ovo je u skladu sa opštom zakonitošću jednolikih strujanja (91–15), gde se kaže da je $\tau = \gamma R I_{\Pi}$, a ovde je hidraulički radijus R jednak polovini poluprečnika ($r/2$).

Odnos srednje brzine v u preseku i maksimalne u_m daće upoređenje proticaja izraženog preko v , i sa integralom lokalnih brzina po preseku. Za ovo drugo poslužiće izraz (93–45):

$$Q = \pi r^2 v$$

$$Q = \int_0^r u 2\pi y dy = 2\pi r^2 u_m \int_0^1 \left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right) \frac{y}{r} d\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{\pi r^2 u_m}{2}$$

prema tome je:

$$\frac{v}{u_m} = \frac{1}{2} \quad (93-53)$$

Na osnovu (93–50), (93–52) i (93–53) mogu se pregledno napisati veze između brzina v , ili u_m , napona τ i nagiba I_{Π} , za određenu cev i određeni fluid:

$$u_m = 2v = \frac{\gamma I_{\Pi} r^2}{4\mu} = \frac{\tau r}{2\mu} \quad (93-54)$$

Ovo omogućava rešavanje praktičnih zadataka. Uz poznato u_m , odnosno v poznat je i raspored brzina, odnosno napona – prema (93–49), odnosno (93–51).

* * *

Na kraju razmatranja laminarnog strujanja u kružnoj cevi napominje se da i za ovo strujanje važe izrazi (93–32) i (93–33), jer oni važe za svako jednoliko strujanje – tako je i objašnjeno prilikom njihovog pisanja.

III

PRIMENA DIMENZIONALNE ANALIZE NA LAMINARNE JEDNOLIKE STRUJE

Iz jednačine (93–20), koja je rešenje laminarnog ravanskog strujanja, ispisuje se bezdimenzionalni izraz:

$$\frac{\tau h}{\mu v} = 3 \quad (93-55)$$

Jedna bezdimenzionalna veličina sa konstantnom vrednošću (jednakom 3) određuje trenje u posmatranom zadatku. U međusobnoj vezi su 4 veličine: polovina razmaka ploče h , srednja brzina v (koja određuje proticaj), koeficijent viskoznosti μ i napon trenja τ . Primenom dimenzionalne analize 4 dimenzionalne svode se na jednu bezdimenzionalnu i ta je onda konstanta.

Treba primetiti da se nije uzela u obzir gustina (jer ona unosi inercijalne uticaje, a ovih kod laminarne jednolike struje nema, jer nema ubrzanja), ni hrapavost (jer sloj uz zid pokrije hrapavost, a naredni sloj po njemu teče).

Za cev kružnog preseka, umesto (93–55), a na osnovu (93–54) piše se bezdimenzionalna konstanta:

$$\frac{\tau r}{\mu v} = 4 \quad (93-56)$$

jer i ovaj slučaj određuje jedna jedina bezdimenzionalna konstanta, na koju dimezionalna analiza svodi vezu 4 dimenzionalne veličine (τ , r , μ i v).

Upoređenjem ovog sa (93–55) vidi se da je ovde konstanta jednaka 4, a tamo je bila 3. Ovde je u izrazu poluprečnik r , a tamo je polovina debljine struje h .

Otpor trenja u cevi kružnog preseka izraziće se preko uobičajenih bezdimenzionalnih veličina:

- koeficijent tangencijalnog napona $C_\tau = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho v^2}$
- *Rejnoldsov broj* (REYNOLDS) $Re = \frac{\rho D v}{\mu} = \frac{\rho 2r v}{\mu}$

pa se izraz (93–56) svodi na

$$C_\tau Re = 16$$

ili izražavanjem sa koeficijentom trenja λ za kružne cevi, uvedenom sa (91–22), kao $\lambda = 4C_\tau$:

$$\boxed{\lambda = \frac{64}{Re}} \quad (93-57)$$

Za struju između dve ploče iz (93-55) dobija se na isti način:

$$C_\tau Re_h = 6 \quad (93-58)$$

gde je:

$$Re_h = \frac{\rho h v}{\mu}$$

* * *

Dodaće se neka uopštena razmatranja koja će se odnositi na ustaljeno laminarno strujanje u provodniku bilo kakvog poprečnog preseka, ali konstantnog duž provodnika, što se može nazvati „jednoliko laminarno strujanje”, za koga se može uopšteno napisati da postoji veza između trenja i proticaja:

$$\frac{\tau l}{v\mu} = f\left(\frac{l_1}{l}, \frac{l_2}{l}, \dots\right) \quad (93-59)$$

gde su l, l_1, l_2, \dots dužine koje opisuju presek struje, a u funkciju ulaze njihove bezdimenzionalne zamene (u odnosu na osnovnu dužinu l). Prethodna veza je bezdimenzionalna zamena za:

$$f(\tau, v, \mu, l, l_1, l_2, \dots) = 0 \quad (93-60)$$

koja obuhvata sve veličine koje ulaze u razmatranje, a to su sve dužine koje određuju poprečni presek, te τ, v i μ . Za struju između ploča, gde je samo jedna dužina (h) određivala presek, nikakva bezdimenzionalna veličina nije ušla u funkciju (93-59) – stoga je ona konstanta (jednaka 3). Isto je i kod cevi kružnog preseka, samo je druga vrednost konstante (koja iznosi 4) a jedina dužina koja određuje presek je poluprečnik r . Ako je cev pravougaona, elipsasta, trougaona i slično, izraz (93-59) je konstanta samo za konstantne vrednosti $l/l_1, l/l_2, \dots$ tj. samo za međusobno geometrijski slične preseke.

**ODREĐIVANJE RASPOREDA NAPONA
I UVOĐENJE LOGARITAMSKE
ZAKONITOSTI ZA RASPORED BRZINA
U TURBULENTNOJ RAVANSKOJ
ILI OSNOSIMETRIČNOJ STRUJI**

I

RASPORED NAPONA

Jednačina za glavno strujanje u turbulentnom strujanju (Rejnoldsova), napisana u opštem obliku sa (53–12), za ravansko strujanje u ravni (1, 2) između dve ploče, a za pravac strujanja (1), i sa težinom kao zapreminskom silom ($f_j = -g\partial Z/\partial x_j$) svodi se na:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(gZ + \frac{\bar{p}}{\rho} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_2} (-\overline{u'_2 u'_1}) \quad (94-1)$$

Upoređenje napisane jednačine sa jednačinom (93–2), napisanom za laminarno strujanje pokazuje da se ovde – u (94–1) – pojavljuju osrednjene vrednosti pritiska i brzine (položajnu kotu Z ne treba osrednjavati, jer ne fluktuiše), i da je dodat član koji unosi uticaj fluktuacija na glavno strujanje.

Prilikom pisanja jednačine (94–1) korišćeno je saznanje da za osrednjene brzine važi sve ono što je, u početku Poglavlja 93, utvrđeno za brzine laminarnog strujanja za isti primer (strujanje između dve ploče). Naime, pošto je $\bar{u}_2 = \bar{u}_3 = 0$, jednačina nepromenljivosti mase (53–5) daje $\partial \bar{u}_1 / \partial x_1 = 0$, a ustaljenost daje $\partial \bar{u}_1 / \partial t = 0$. Stoga je jednaka nuli leva strana u (94–1), jer je to leva strana (53–12) primenjena na posmatrani primer.

Od uticaja fluktuacija napisan je samo izvod po x_2 , jer je izvod po x_1 nula, zbog istovetnosti rasporeda osrednjenih pokazatelja fluktuacija

po svim poprečnim preseccima. Izvod po x_3 je takođe nula, jer se ravansko strujanje ovde ostvaruje neprenošenjem osrednjenih uticaja fluktuacija u pravcu normalnom na ravan proučavanja.

Prethodni navodi su u skladu sa objašnjenjima u Poglavlju 52, koja su pratila primer sa slike 52–1, koji prikazuje baš isti primer koji se i ovde razmatra (ravansko strujanje između dve paralelne ploče) – tamo se i objasnilo kako se shvata ustaljenost, jednolikost i ravanski zadatak kod turbulentnog strujanja.

Prvi član u (94–1) može se zameniti sa $-g\partial\bar{\Pi}/\partial x_1$, gde je $\bar{\Pi}$ osrednjena piježometarska kota:

$$\bar{\Pi} = Z + \frac{\bar{p}}{\gamma}$$

Drugi i treći član u (94–1) su površinske sile po jedinici mase, a potiču od dejstva devijatorskog dela napona i od „napona” turbulencije – za posmatrani slučaj to su naponi:

$$\overline{\sigma}_{21} = \mu \frac{\partial \overline{u}_1}{\partial x_2} \quad \sigma_{21}^t = -\overline{\rho u_2' u_1'}$$

Prvi izraz napisan je osrednjavanjem napisanog izrazom (93–15), a drugi na osnovu (53–13).

Sa ovim napomenama jednačina (94–1) se piše sa:

$$g \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{\sigma}_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{21}^t}{\partial x_2} \right)$$

ili, množenjem sa ρ :

$$\gamma \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} (\overline{\sigma}_{21} + \sigma_{21}^t) \quad (94-2)$$

γ označava, i ovde, kao svuda, specifičnu težinu.

U uvodnim razmatranjima o strujama (Poglavlje 81) uvedena je pretpostavka o istoj piježometarskoj koti za ceo jedan presek, ali je kasnije tome stavljena zamerka. Naime, strogo uzevši, navedena pretpostavka se ostvaruje samo kod laminarnog strujanja, dok kod turbulentnog strujanja fluktuacije unose odstupanja od te pretpostavke. Za

posmatrani slučaj jednačina (53–12), čija je primena za pravac 1 dovela do (94–1), za pravac 2 dovodi do:

$$0 = -g \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} (\overline{u'_2 u'_2})$$

što je već ranije, za isti slučaj utvrđeno jednačinom (81–6). Diferenciranje prethodnog izraza po x_1 daje:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[g \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\overline{u'_2 u'_2}) \right] = 0$$

Zbog istovetnosti osrednjenih turbulentnih karakteristika po svim preseccima, drugi sabirak u ugaonoj zagradi je nula, pa ostaje:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(g \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (94-3)$$

Ovo znači da leva strana u (94–2) ne zavisi od x_2 , dok desna ne zavisi od x_1 (jer su naponi $\overline{\sigma_{21}}$ i σ_{21}^t u svim preseccima istovetno raspoređeni), a to znači da je rešenje u tome da su leva i desna strana jednačine konstante. Tako je bilo i kod jednačine (93–5) za laminarno strujanje.

Napisaće se desna strana jednačine (94–2) izjednačena sa konstantnom, koja će se obeležiti kao const_I :

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (\overline{\sigma_{21}} + \sigma_{21}^t) = \text{const}_I$$

Parcijalni izvod na levoj strani ove jednačine može se zameniti sa totalnim, jer $\overline{\sigma_{21}}$ i σ_{21}^t zavise samo do x_2 , pa se po obavljenoj takvoj zameni, može obaviti integrisanje koje daje:

$$\overline{\sigma_{21}} + \sigma_{21}^t = \text{const}_I x_2 + \text{const}_{II} \quad (94-4)$$

Jednačina (94–4) razlikuje se od jednačine (93–22) napisane za laminarno strujanje, samo u tome što je tamošnji (u laminaarnom strujanju) devijatorski napon σ_{21} ovde zamenjen sa $\overline{\sigma_{21}} + \sigma_{21}^t$, tj. sa zbirom osrednjenog devijatorskog napona i „napona” turbulencije. Na isti način granični uslovi napisani iza (93–22) zamenjuju se sa:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\sigma_{21}} + \sigma_{21}^t &= \tau & \text{za } x_2 &= 0 \\ \overline{\sigma_{21}} + \sigma_{21}^t &= -\tau & \text{za } x_2 &= 2h \end{aligned} \right\} \quad (94-5)$$

I ovde se oznaka τ odnosi na devijatorski napon (tangencionalni napon trenja) na zidu. Treba primetiti da na zidu nema brzina, pa nema „napona” turbulencije, pa je τ osrednjena vrednost devijatorskog napona na zidu (oko koje oscilišu trenutne vrednosti), i stoga bi, strogo uzevši, trebalo pisati $\bar{\tau}$. Međutim, neće se izučavati trenutne vrednosti, niti će uopšte biti potrebno da se čak i pominju fluktuacije od τ , pa će se pisati jednostavno τ , i to će se svuda odnositi na osrednjenu vrednost.

Uslovi (94–5) unešeni u (94–4) odstranjuju konstante, pa se dobija:

$$\overline{\sigma_{21}} + \sigma_{21}^t = \tau \left(1 - \frac{x_2}{h} \right) \quad (94-6)$$

Dobio se isti raspored napona kao kod laminarnog tečenja, gde je to bilo napisano sa jednačinom (93–19) i prikazano na slici 93–1. I ovde napon opada od zida ka središnjoj ravni po linearnoj zakonitosti, samo što se to ovde odnosi na zbir devijatorskog napona i „napona” turbulencije.

Ako se izuzme blizina zida (gde su uticaji viskoznosti značajni, čak premoćni), za celi preostali deo turbulentne struje (a to je pretežan deo preseka) može se staviti da su uticaji viskoznosti zanemarljivi, u odnosu na uticaje fluktuacija, tj. da je $\overline{\sigma_{21}} \ll \sigma_{21}^t$.

Zanemarenjem $\overline{\sigma_{21}}$ (u odnosu na σ_{21}^t), izraz (94–6) se pojednostavljuje:

$$\sigma_{21}^t = -\overline{\rho u_2' u_1'} = \tau \left(1 - \frac{x_2}{h} \right) \quad (94-7)$$

Treba naglasiti da ovaj izraz ne važi za blizinu zida, što je prethodno i navedeno, pa ne važi ni za zid (za $x_2 = 0$), gde fluktuacija nema ($u_1' = u_2' = 0$) pa nema ni napona σ_{21}^t , ali važi već na veoma maloj udaljenosti od zida (za $x_2 \ll h$), gde se uzima da je $\sigma_{21} = \tau$.

Prema (94–7) je $\sigma_{21}^t > 0$ tj. $\overline{u_1' u_2'} < 0$, za $x_2 < h$, a to se i ostvaruje. Trenutno povećanje podužne brzine, $u_1' > 0$, je posledica pristizanja delića sa većom brzinom, a taj je morao da stigne sa mesta udaljenijeg od zida (gde je brzina veća), on se, dakle, kretao prema zidu, pa je $u_2' < 0$, a to znači da je $u_1' u_2'$ (tj. istovremeni proizvod u_1' i u_2') negativan. Ako je $u_1' < 0$, onda je delić pristigao sa mesta, gde je manja brzina, pa je $u_2' > 0$, što znači da je $u_1' u_2'$ opet negativan. Prema tome, za osrednjenu vrednost proizvoda u_1' i u_2' može se napisati $\overline{u_1' u_2'} < 0$, pa je

onda $\sigma_{21}^t > 0$, a to pokazuje (94-7). Sve ovo važi do polovine struje (a dotle se i posmatralo), a za drugu polovinu, za $h < x_2 < 2h$, trenutnom $u'_1 > 0$ odgovara $u'_2 > 0$ (delić ide ka zidu), pa je sada $\overline{u'_1 u'_2} > 0$, odnosno $\sigma_{21}^t < 0$, a tako kazuje i (94-7). Dakle, „napon” turbulencije menja znak na središnjoj ravni, tu je jednak nuli, što je već uslovljeno pisanjem graničnih uslova (94-5).

Treba uočiti da se „napon” turbulencije ponašao kao pravi napon (pod pojmom „pravi napon” podrazumeva se onaj koji deluje posredstvom viskoznosti): na dodiru dva sloja, sloj bliži zidu koči udaljeniji, odnosno ovaj drugi povlači prvi, a to nameće smer delovanja napona. „Napon” turbulencije pri tome ispoljava svoje dejstvo kroz uticanje fluktuacija na glavno strujanje, što je u stvari otuđenje kinetičke energije iz glavnog strujanja.

Valja naglasiti da izraz (94-7) ne može odrediti napon trenja τ , on samo određuje raspored napona σ_{21}^t , ako je τ poznat, pa određivanje napona τ ostaje nerešeno pitanje (za sada), pogotovo što izraz (94-7) izuzima blizinu zidu, pa i sam zid, gde baš napon τ deluje.

* * *

Diferenciranjem (94-6) po x_2 dobija se da je $\partial(\overline{\sigma_{21}} + \sigma_{21}^t)/\partial x_2$ jednako $-\tau/h$, a to je const_I iz (94-4), a ta ista konstanta, shodno (94-2) mora da bude jednaka i $\gamma \partial \overline{\Pi} / \partial x_1$, pa se može napisati:

$$\gamma \frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial x_1} = -\frac{\tau}{h} = \text{const}$$

Napominje se da se ovde ne sme $\partial \overline{\Pi} / \partial x_1$ zameniti sa $d\overline{\Pi}/dx_1$, jer $\overline{\Pi}$ zavisi i od x_2 (nije kod turbulentnog strujanja ista pijeometarska kота $\overline{\Pi}$ za ceo presek). Međutim, iako je $\overline{\Pi} = \overline{\Pi}(x_1, x_2)$, izvod $\partial \overline{\Pi} / \partial x_1$ ne zavisi ni od x_1 , ni od x_2 , jer je utvrđeno da je konstanta. Stoga se može $-\partial \overline{\Pi} / \partial x_1$ zameniti sa nagibom pijeometarske linije I_{II} , i onda se prethodna jednačina može napisati i kao:

$$\tau = \gamma I_{II} h \quad \text{gde je} \quad I_{II} = -\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial x_1} \quad (94-8)$$

a to se napisalo i za laminarno tečenje, sa (93-18).

Treba primetiti da je nagib I_{II} kod turbulentnog tečenja izvod po x_1 , osrednjene pijeometarske kote $\overline{\Pi} = Z + \overline{p}/\gamma$, uz napomenu da pritisak p

fluktuīše, pa onda i Π . Prema tome, I_{Π} je u stvari osrednjena vrednost, a takva je i vrednost napona τ , na šta je malo pre skrenuta pažnja.

* * *

Za ravansko i osnosimetrično strujanje, ako je laminarno, važi isti raspored napona (po normali na ravansku struju, odnosno, duž prečnika kružne cevi) – to je ustanovljeno u Poglavlju 93, i vidi se upoređenjem izraza (93–19) i (93–51). Isto će biti i za turbulentno strujanje, jer su opet iste jednačine duž normale, odnosno duž prečnika (to je osovina x_2 , a x_2 se meri od zida). Prema tome, jednačine (94–7) i (94–8) važiće i za kružnu cev, samo h treba zameniti sa poluprečnikom r .

Napon na zidu, označen sa τ , kod svih jednolikih struja, shodno opštoj jednačini za te struje, napisanoj još u Poglavlju 91 sa (91–10) i (91–15), jednak je $\gamma I_{\Pi} R$, gde je R hidraulički radijus. U taj opšti izraz uklapaju se izrazi (93–18) i (94–8), oba su u stvari isti izraz, a prvi se odnosi na laminarnu, a drugi na turbulentnu, obe ravanske struje, gde je $R = h =$ polovina razmaka između ploča. Po ugledu na to za turbulentno osnosimetrično strujanje, u kružnoj cevi prepisuje se (iz laminarnog strujanja) izraz (93–52) tj.:

$$\tau = \gamma I_{\Pi} \frac{r}{2} \quad (94-9)$$

* * *

Pošto osrednjena pijeometarska kota $\bar{\Pi}$ nije ista za sve tačke jednog preseka, u dve tačke ($x_2 = a, x_2 = b$) istoga preseka neka pijeometarske kote budu $\bar{\Pi}_a, \bar{\Pi}_b$. Njihova razlika je $\bar{\Pi}_a - \bar{\Pi}_b$, a ista tolika razlika biće i u svakom drugom preseku, a za dve tačke određene sa istim razdaljinama od zida (a, b), jer je $\partial \Pi / \partial x_1 = \text{const}$. Međutim, navedena razlika nema nikakav značaj za određivanja nagiba pijeometarske linije ($I_{\Pi} = -\partial \bar{\Pi} / \partial x_1$), jer je taj nagib isti za sve deliće duž ma koje linije paralelne sa osovinom 1 tj. duž strujanja. Prema tome, nagib I_{Π} može se odrediti duž zida ($x_2 = 0$), gde je merenje pijeometarske kote veoma lako. Priključe se merne pijeometarske cevčice u dva preseka, na međusobnom rastojanju L , dobiće se izmerene pijeometarske kote Π_I (na uzvodnom) i Π_{II} (na nizvodnom), pa je nagib pijeometarske linije:

$$I_{\Pi} = \frac{\Pi_I - \Pi_{II}}{L}$$

Iz ovako određenog nagiba I_{Π} sračuna se napon trenja τ jednačinom (94–9). Napominje se da se napon obično neposredno i ne meri, nego sračuna iz eksperimentalno određenog nagiba I_{Π} .

Još u Poglavlju 81, iza jednačine (81–6), koja je malo pre već pomenuta, nagovešteno je da je odstupanje piježometarske kote po jednom preseku beznačajno, a to je kasnije, u nekoliko navrata, u Poglavljima 84 i 85, opširno razmatrano i zaključeno je da su ta odstupanja zaista beznačajna, a to znači da se $\bar{\Pi}_{zid}$ može uzeti kao piježometarska kota za ceo presek, jer se osrednjene piježometarske kote ($\bar{\Pi}$) za pojedine tačke istoga preseka međusobno zanemarljivo razlikuju, upravo zanemarljivo odstupaju od $\bar{\Pi}_{zid}$. Treba se podsetiti da se u Poglavljima 82, 83, 91 i 92, koja su namenjena praktičnim zadacima, piježometarska kota smatrala jedinstvenom za ceo presek, ona se svuda vezivala za presek.

Ovo sve se odnosi, razume se, na presek u kome je osrednjeno strujanje pravolinijsko i paralelno, normalno na presek – a taj uslov se smatrao neophodnim za presek koji je razmatran u svim pomenutim analizama.

II

UVOĐENJE LOGARITAMSKE ZAKONITOSTI ZA RASPORED BRZINA

Jednačina (94–1) ne omogućava određivanje rasporeda osrednjenih brzina, ne može dovesti do određenja funkcije $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(x_2)$, ako se pored poznavanja $\partial\Pi/\partial x_1$, ne znaju i fluktuacije brzine, upravo $\overline{u'_2 u'_1}$. Treba se podsetiti izlaganja u Poglavljima 52 i 53, gde se ukazivalo da se razdvajanje na osrednjene i fluktuacione vrednosti obavlja radi preglednosti, ali se tako broj veličina povećava, a broj jednačina ne, pa se pojavljuje nedostatak jednačina. Stoga je Poglavlje 53 i zaključeno sa nagoveštajem da se veze između fluktuacija i osrednjenih vrednosti nekako moraju odrediti (da bi se namirio potreban broj jednačina), upravo te veze se pretpostavljaju, a na kraju se prihvata ona pretpostavka koja daje krajnje rezultate koji su u skladu sa onim što pokazuju opiti.

Najčešće se navodi *logaritamska zakonitost brzina* u turbulentnom sloju, a takva zakonitost se potvrđuje brojnim opitima, a objašnjava se prihvatljivim pretpostavkama, koje mogu dovesti do takve zakonitosti. Najpre će se napisati zakonitost, a potom će se raspravljati kakve bi pretpostavke mogle dovesti do te zakonitosti.

Logaritamska zakonitost rasporeda brzina, u opštem obliku može se napisati sa:

$$\bar{u} = \bar{u}_1 = C_I \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \ln \frac{x_2}{x_0} + \bar{u}_0 \quad (94-10)$$

gde je: $C_I = \text{const}$. To je prva od konstanti, koje će se u narednim izlaganjima koristiti, kasnije će se redom uvoditi C_{II}, C_{III}, \dots . Sve te konstante se zamišljaju tako da se njihovo određenje prepušta eksperimentalnim istraživanjima, koji treba najpre da potvrde zakonitost (da je zaista logaritamska) a potom da odrede numeričku vrednost konstante, odnosno konstanti.

U jednačinu (94-10) ušlo je $\sqrt{\tau/\rho}$, što ima dimenziju brzine, pa je tako dobijena dimenzionalna usklađenost, a raspored brzina, van svake sumnje, mora da zavisi od napona trenja na zidu τ , kao i od gustine ρ , jer od nje zavisi vrednost „napona” turbulencije, a oni u posmatranom zadatku izražavaju ono što je bitno, a to je uticaj fluktuacija na raspored osrednjenih brzina.

Veoma često se $\sqrt{\tau/\rho}$ naziva „brzina trenja”, jer izražava napon trenja, a ima dimenziju brzine.

Za pisanje (94-10) morao se uzeti granični uslov:

$$\bar{u} = \bar{u}_0 \quad \text{za} \quad x_2 = x_0 \quad (94-11)$$

koji traži poznavanje brzine na nekom određenom rastojanju x_0 od zida. Treba naglasiti da to ne može da bude na zidu, jer u blizini zida jednačina (94-10) ne važi. Ona je čak neprimenljiva i sa formalne strane, jer za zid, za $x_2 = 0$, daje $\bar{u} = -\infty$. To ništa ne smeta, jer je jednačina namenjena turbulentnom sloju, pa se od nje ne može ni zahtevati da važi skroz do zida, gde se ni ne ostvaruju pretpostavke usvojene za turbulentni sloj (misli se na zanemarivanje devijatorskih napona u odnosu na „napone” turbulencije). Granični uslov (94-11) treba da ograniči turbulentni sloj sa prizidne strane, što će se kasnije, u Odeljku III, i obaviti.

Utvrđivanjem uslova (94-11) zadatak bi bio rešen, jer je za određeni napon trenja τ (upravo za određeno $\sqrt{\tau/\rho}$) određen raspored brzina, a onda i proticaj (on se dobija integrisanjem brzina po preseku, upravo po x_2). Ili, za zadati proticaj određen je napon τ . Poznavanje τ znači i

poznavanje nagiba pijeometarske linije I_{II} , jer su oni međusobno vezani sa (94-8), odnosno (94-9).

* * *

Diferenciranje jednačine (94-10) po x_2 daje:

$$\frac{d\bar{u}}{dx_2} = C_I \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \frac{1}{x_2} \quad (94-12)$$

Napisan je totalni izvod, jer \bar{u} zavisi samo od x_2 . Izraz (94-12) je najprostiji mogući izraz za $d\bar{u}/dx_2$, ako taj izvod zavisi samo od τ , ρ i x_2 . Desna strana izraza je monom, samo sa jednom konstantom. Primamljiva je stoga ideja da se to prihvati, ako opažanja sa opita to ne opovrgavaju, jer nema razloga da se traže nekakvi složeniji izrazi ako najprostiji može poslužiti svrsi. Izraz je načelno prihvatljiv: on daje veće $d\bar{u}/dx_2$ (a time i veće brzine) ako je $\sqrt{\tau/\rho}$ veće (ako je trenje veće), a pored toga pokazuje da će brzina sa udaljavanjem od zida sve blaže rasti (što odgovara stvarnom stanju stvari, jer uticaj trenja opada udaljavanjem od zida).

U početku ovog odeljka (II) skrenuta je pažnja na ranija načelna izlaganja o turbulenciji, upravo na to da praktično rešavanje zadatka zahteva da se moraju prisvojiti nekakve veze između fluktuacija i osrednjenih vrednosti. Za zadatak koji se rešava treba dati vezu između $\overline{u'_1 u'_2}$ i osrednjenih vrednosti, a ta veza već je posredno data, ispisivanjem (94-12). Ako se u u tom izrazu napon τ zameni prema onome što za njega daje (94-7), dobija se, kao posledica pretpostavljene logaritamske zakonitosti:

$$-\overline{u'_1 u'_2} = \left(\frac{1}{C_I} \frac{d\bar{u}}{dx_2} x_2 \right)^2 \left(1 - \frac{x_2}{h} \right) \quad (94-13)$$

Ovaj izraz pokazuje da je $\overline{u'_1 u'_2}$ suprotnog znaka od $1 - x_2/h$, a tako i treba da bude – to je obrazloženo iza pisanja izraza (94-7), koji je malo pre iskorišćen za pisanje (94-13).

* * *

Kod laminarnog strujanja, izrazom (93-13), uveden je tzv. „deficit brzine”. Može se napisati odgovarajući izraz i za pretpostavljenu logaritamsku zakonitost u turbulentom sloju. U jednačinu (94-10) može

se kao granični uslov (za sredinu struje) staviti $\bar{u} = \bar{u}_m =$ maksimalna brzina, za $x_2 = h$, pa se dobija:

$$\bar{u}_m - \bar{u} = C_1 \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \ln \frac{h}{x_2} \quad (94-14)$$

Da bi se dobio raspored brzina $\bar{u} = \bar{u}(x_2)$ treba u prethodnom izrazu poznavati \bar{u}_m i τ , a vrednosti tih veličina ne mogu se zadati kao međusobno nezavisne, jer, očigledno, zavise jedna od druge, a ta veza je (za sada) nepoznata. Rešenje za raspored brzina mora se naći onako kako je na to već ukazano – povezivanjem turbulentnog sloja sa prizidnim graničnim uslovima (a to je, kako je već rečeno, predmet sledećeg odeljka – III).

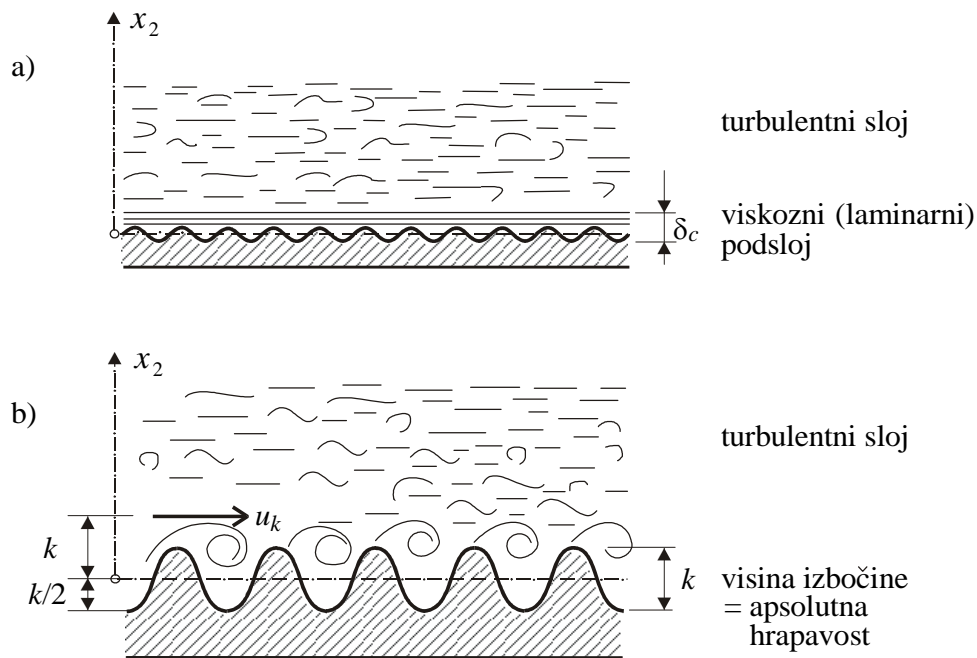
Napominje se da bi se jednačina (94–14) mogla napisati i za cev kružnog preseka, jednostavnom zamenom h sa r , a x_2 se mora i tu, kao i svuda, shvatiti kao rastojanje od zida. Ovo ispada iz istovetnosti jednačina za oba slučaja.

III

GRANIČNI UTICAJI NA RASPORED BRZINA: GLATKI I HRAPAVI ZID

Uz zid se obrazuje veoma tanak „*laminarni podsloj*”, koji se naziva i „*viskozni podsloj*”, u njemu nema turbulencije, a presudno je dejstvo viskoznosti. Preostali deo struje je „*turbulentni sloj*”. Takvim nazivima hoće da se kaže da „sloj struji preko podsloja”. Naglašava se da je debljina podsloja veoma malena u odnosu na debljinu sloja (sloj čini cela struja između ploča, odnosno u kružnoj cevi, odnosno u bilo kom provodniku, izuzimajući veoma tanak podsloj uz zid). Kod cevi „turbulentni sloj” se ponegde naziva i „turbulentno jezgro” (koje je opkoljeno tankim podslojem uz zidove).

Naziv „*gladak zid*” primeniće se na slučaj u kome su izbočine na zidu (koje čine ono što se obuhvata pojmom „hrapavost”) potpuno prekrivene podslojem, tako da hrapavost ne utiče na strujanje u sloju (nije granični uslov za sloj), pa ne utiče ni na raspored brzina u sloju (sl. 94–1a). Ovde je granični uslov za sloj njegovo trenje o viskozni (laminarni) podsloj, pod uticajem viskoznosti.



Slika 94–1 a) Gladak zid – laminarni podsloj pokriva izbočine na zidu; b) hrapav zid – izbočine prodiru u turbulentni sloj

„Hrapav zid” zvaće se zid kada izbočine probijaju podsloj (razbijaju njegovu celinu), zadiru u sloj i postaju merodavni granični uslov za strujanje u sloju (pa i za raspored brzine), a pri tome je uticaj viskoznosti zanemarljiv (sl. 94–1b).

Nazivi „gladak”, odnosno „hrapav zid” su uslovni: nije samo visina izbočina presudna da li je zid „gladak” ili „hrapav”, nego to (za isti zid) zavisi od debljine podsloja, a ova zavisi od brzina u cevi, te od gustine i viskoznosti. Dakle, ne može samo geometrijski opis zida odrediti da li je zid „gladak” ili „hrapav” (što bi se moglo pomisliti doslovno tumačeći te reći), nego se to određuje uz hidrodinamičke uslove, koje nameće određeni proticaj kroz cev, sa određenim fluidom. Isti zid može da bude u jednom slučaju „gladak”, a u drugom „hrapav”. Stoga je ispravnije reći da se jedan zid u jednom slučaju „ponaša kao gladak”, a taj isti zid u drugom slučaju može da se „ponaša kao hrapav”.

Između „glatkog” i „hrapavog” zida postoji prelazna oblast, gde zid nije dovoljno gladak da se ne oseća osećaj hrapavosti, a nije ni dovoljno

hrapav da jedino hrapavost utiče na otpore.

„Hrapav zid” treba da stvori strujanje u provodniku za koje se može reći da je to ono što se nazivalo „razvijena turbulencija”, a to je, u nekoliko navrata, u ranijim izlaganjima (poglavlja 53, 84 i 85) tumačeno: turbulencija je toliko razvijena da na osrednjene vrednosti veličina ne utiče viskoznost. To će se onda ispoljiti i na raspored osrednjenih brzina u struji, što se sada razmatra. Prema tome, u skladu sa pomenutim izlaganjima, zid će se nazvati „hrapav”, ako, u posmatranom slučaju, svojim izbočinama toliko prodire u turbulentni sloj, da stvori takve vrtloge, koji osnovnoj struji (glavnom strujanju) oduzmu toliko energije da je to skoro sva energija koja se obračunava kao „izgubljena”. Ovaj navod je ponavljan, u nizu prilika, već više puta, a uz njega se dodaje da je, u takvom slučaju, viskoznost nesposobna da utiče na količinu energije koju oduzimaju prvostvoreni vrtlozi, viskoznost „dobija zadatak” da to kasnije postepeno pretvori u toplotu, a na obim toga zadatka ona ne može uticati.

Granični uslov za hrapave zidove treba izraziti *visinom izbočina* na zidu, i ta visina se naziva „apsolutna hrapavost” (oznaka k , slika 94–1). U praktičnim slučajevima (zidovi ploča ili cevi, ili zidovi bilo kakvog provodnika) hrapavost je nejednolika i po visini, i po obliku, i po rasporedu po površini zida, pa ju je veoma teško geometrijski opisati. Upravo to je stvaralo teškoće za izučavanje trenja, sve dok se nije počelo eksperimentisati sa *jednolikom peščanom hrapavosti*, koja se izražava samo sa *jednim podatkom* za apsolutnu hrapavost (prečnikom zrnca peska). Moraju se pomenuti eksperimentalni radovi *Nikuradzea* (NIKURADSE), koje pominju svi udžbenici „Mehanike fluida” i „Hidraulike”, uz navođenje rasporeda brzina i obrazaca za trenje koji su iz tih radova proizašli. O tome će biti reči i u ovim izlaganjima: u nastavku ovog Poglavlja (94), i kasnije, u Poglavlju 96.

Hrapavost, sa kojom je Nikuradze radio, bila je jednolika peščana hrapavost: zrna peska iste krupnoće bila su nalepljena na zid cevi (ili ploča) tako da je cela površina zida bila pokrivena zrcima, a da zrno nije bilo lepljeno preko zrna. Rađeno je sa nekoliko jednolikih krupnoća. Do pojedine krupnoće došlo se sejanjem kroz dva sita sa rupama prečnika koji su se malo razlikovali. Zadržano je (za lepljenje) samo ono što je prošlo kroz sito sa većim otvorima, a što nije prošlo kroz sito sa manjim otvorima. Tako je bila napravljena hrapavost koju

određuje jedan podatak – prečnik zrna, i on je ono što se naziva „apsolutna hrapavost”. U tome i jeste značaj ovako zamišljene (i ovako ostvarene) hrapavosti: raspored brzina, a potom otpor trenja, određuje granični uslov, koji se numerički *prosto i jasno* određuje.

Mnoga zamisao, kada se ostvari, izgleda toliko pristupačna, da se može pomisliti da se prosto sama nametala. Tako može izgledati i opisani pristup izučavanju uticaja hrapavosti. Međutim, to nije bilo tako, jer je za takav pristup, u ono vreme (tridesetih godina dvadesetog veka) trebalo da neko bude dosetljiv, da ima smisla da napusti dotadašnji prilaz (i dotadašnji način), koji je vladao u brojnim istraživanjima otpora trenja. Naime, ceo vek pre toga, eksperimentisalo se sa cevima i kanalima, industrijski napravljenim, ili sagrađenim, odnosno iskopanim, i to onima koji su u praktičnoj primeni, ili su njoj namenjeni. Takva saznanja praksa je zahtevala. Kod takvih provodnika nemoguće je premeriti sve izbočine i udubljenja u zidu, koje se razlikuju po visini, širini i debljini, po svom obliku i međusobnom rasporedu po zidu, a sve to čini geometrijski opis hrapavosti. Pitanje je da li se to uopšte, uz razumne napore, može savladati, a ako bi se i savladalo, taj opis bi bio veoma opširan, sa ogromnim brojem podataka, a opet bi se odnosio samo na određeni zid. Stoga je posve razumljivo što su raniji istraživači pribegavali opisivanju zida provodnika uz davanje nekakvog „koeficijenta hrapavosti”, namenjenog određenom opisu zida. Trenje se onda računalo po određenom obrascu, u koga je ulazio „koeficijent hrapavosti”.

Takvih obrazaca, različitih po obliku, svaki sa svojim koeficijentima, bilo je stotinama. Bitno je da svi oni apsolutnu hrapavost *nisu* izražavali visinom izbočina, baš usled opisanih teškoća da se to učini. „Koeficijent hrapavosti” u obrascu nije značio nikakvu fizičku vrednost, nego je bio uslovan: ako se prihvati njegova vrednost propisana za određenu vrstu zida, obrazac će dovesti do otpora trenja (tačnije do nagiba linije energije). O tim obrascima biće opširno reči u Poglavlju 99. U te obrasce spada i Maningov, napisan sa (91–32). Uz njega su u Prilogu 1 date vrednosti koeficijenta hrapavosti (koji ulazi u obrazac) prema jednom od mnogobrojnih „spiskova obloga hidrauličkih provodnika”. Ni Maningov koeficijent hrapavosti (kao ni koeficijenti u drugim formulama) ne meri ništa, čak mu je i dimenzija neprikladna ($m^{-1/3}s$). Kod drugih formula je slično, pa čak i još neprikladnije. Da ne bi bilo zabune, treba naglasiti da veza između Maningovog koeficijenta n i apsolutne

hrapavosti k , data sa (91–35), nije bila poznata sa pojavom Maningovog obrasca, ta veza je napisana znatno kasnije, jer u vreme pojave obrasca, kako je već pomenuto, nije se uopšte razmatrala hrapavost kao nešto merljivo, to se opisivalo.

Prethodna razmatranja potkrepljuju tvrdnju o značaju primene Nikuradzeove veštačke jednolike hrapavosti, jer se tako eksperimentisalo sa jasno i prosto određenim graničnim uslovom, ali takav uslov nije kod stvarnih provodnika u praktičnoj primeni. Iz toga onda proizilazi pitanje: Kako izraziti hrapavost u nekom praktičnom zadatku? Odgovor je sledeći: Treba hrapavost, u nekom slučaju, izražavati preko jednolike peščane hrapavosti koja izaziva iste otpore trenja, ili barem približno iste. To je „*ekvivalentna peščana hrapavost*”. Tako peščana jednolika hrapavost postaje mera za određivanje drugih hrapavosti – govori se o „skali peščane hrapavosti” u koju se pokušava uvrstiti svaki pojedinačni praktični slučaj. Tako je jednolika peščana hrapavost, za koju se može reći da je „veštačka”, dobila praktični smisao, iako se baš takva (potpuno ista) hrapavost gotovo i ne ostvaruje u praktičnim slučajevima.

Kasnije, u Poglavlju 99, biće još reči o hrapavosti, i to sa praktičnog stanovišta, a za sada (za neposredni produžetak izlaganja) treba prihvatiti da apsolutnu hrapavost određuje jedan podatak, označen sa k .

Rečeno je da jedna ista cev može da bude u jednom slučaju „glatka”, a u drugom „hrapava”. Uz to treba dodati da u nekom trećem slučaju može da se desi da se ne ponaša ni kao glatka, ni kao hrapava, jer mora postojati nekakva „prelazna oblast” u kojoj na raspored brzina (a onda i na otpor trenja) utiču i viskoznost, i hrapavost, nijedan uticaj nije zanemarljiv u odnosu na drugi. U narednom izlaganju – u Odeljku IV – raspravljace se slučajevi kada je cev „glatka” (hrapavost neuticajna) ili kada je „hrapava” (zanemarljivi uticaji viskoznosti), a neće se ulaziti u raspored brzina u „prelaznoj oblasti” kada se nijedan od uticaja ne može zanemariti.

IV

LOGARITAMSKE ZAKONITOSTI RASPOREDA BRZINA U GLATKOM I U HRAPAVOM PROVODNIKU

Prvo će se razmotriti granični uslov za gladak zid, što će dovesti do rasporeda brzina za takav uslov, a potom će se isto uraditi i za hrapav zid.

Za *gladak zid* uslove nameće podsloj sa laminarnim strujanjem. On je veoma tanak, pa se može prihvatiti da je napon σ_{21} kroz njega konstantan, upravo da je jednak naponu τ na zidu:

$$\sigma_{21} = \tau = \text{const} \quad (94-15)$$

Kako je u posmatranom slučaju $u_2 = 0$, $u_1 = u = u(x_2)$, napon σ_{21} , shodno (93–15), jednak je $\mu du/dx_2$, pa se prethodni izraz može proširiti na:

$$\sigma_{21} = \mu \frac{du}{dx_2} = \tau = \text{const} \quad (94-16)$$

Ovo znači da je du/dx_2 konstanta, pa je onda brzina u srazmerna sa rastojanjem x_2 od zida, jer je brzina na zidu (za $x_2 = 0$) jednaka nuli. Na granici podsloja i sloja ($x_2 = \delta_c$) brzina se označava sa u_c , pa je onda:

$$\frac{du}{dx_2} = \frac{u}{x_2} = \frac{u_c}{\delta_c} \quad (94-17)$$

Ovo omogućava u (94–16) zamenu du/dx_2 sa u_c/δ_c , pa se, na kraju, može ispisati veza između napona trenja τ na zidu, debljine δ_c viskoznoeg podsloja, i brzine u_c na granici toga podsloja i turbulentnog sloja:

$$\tau = \mu \frac{u_c}{\delta_c} \quad (94-18)$$

Za podsloj se može uvesti Reynoldsov broj u sledećem vidu:

$$Re_c = \frac{\rho \delta_c u_c}{\mu} = \frac{\delta_c u_c}{\nu} \quad (94-19)$$

za koga je razložno pretpostaviti da će u svim pojedinačnim slučajevima imati istu (konstantnu) vrednost, jer zakon sličnosti nameće istovetnost Re -broja (Reynoldsov broj u opštem obliku napisan je sa (62–1), a ovde su karakteristična dužina i brzina δ_c i u_c). Prelaz iz laminarnog u turbulentno strujanje, tj. granicu održanja laminarnog tečenja, određuje međusobna zavisnost 4 veličine (δ_c , u_c , gustina ρ i koeficijent viskoznosti μ), a to se svodi na jednu jedinu bezdimenzionu veličinu, na Re_c , i ona je konstanta.

Može se postaviti pitanje da li prethodni navodi o podsloju važe i za kružnu cev, a ne samo za ravansko strujanje. Drugim rečima, da li

prečnik cevi, odnosno zakrivljenost podsloja, utiče na vrednosti za δ_c , pa onda i na Re_c . Taj uticaj je zanemarljiv, jer je podsloj veoma tanak u odnosu na poluprečnik cevi ($\delta_c \ll r$), pa u njemu zakrivljenost zanemarljivo utiče.

Množenjem, odnosno deljenjem, jednačina (94–18) i (94–19) dobija se:

$$u_c = \sqrt{Re_c} \sqrt{\tau/\rho} \quad (94-20)$$

$$\delta_c = \sqrt{Re_c} \frac{\nu}{\sqrt{\tau/\rho}} \quad (94-21)$$

Treba naglasiti da bi se poznavanjem Re_c znala debljina podsloja za određeni napon trenja τ .

U opštu jednačinu rasporeda brzina, napisanu sa (94–10), staviće se za granični uslov: $u_0 = u_c$ za $x_0 = \delta_c$, i to se izrazi sa (94–20) i (94–21). Tako se dolazi do:

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = C_I \left(\ln \frac{x_2 \sqrt{\tau/\rho}}{\nu} - \ln \sqrt{Re_c} \right) + \sqrt{Re_c} \quad (94-22)$$

Ako se u načelu opitima potvrdi logaritamska zakonitost, opiti određuju vrednost dvema konstantama: C_I i Re_c . Prethodna jednačina obično se piše:

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = C_I \ln \frac{x_2 \sqrt{\tau/\rho}}{\nu} + C_{II} \quad (94-23)$$

C_{II} je nova konstanta – upoređivanjem prethodna dva izraza uviđa se da je:

$$C_{II} = \sqrt{Re_c} - C_I \ln \sqrt{Re_c} \quad (94-24)$$

Jednačina (94–23) važi za turbulentni sloj u struji između dve ploče, i u cevi – svuda je x_2 rastojanje od zida.

Niz istraživanja potvrdio je ostvarenje logaritamske zakonitosti rasporeda brzina, što znači i ostvarenje pretpostavki koje prate prethodna izvođenja, a vrednosti za navedene konstante date od pojedinih istraživača međusobno se mnogo ne razlikuju, upravo mnogo se ne razlikuju rasporedi brzina koji iz njih proizilaze. Najčešće se navode vrednosti

$C_I = 2,5$ i $\sqrt{Re_c} = 11,6$, pa je onda, shodno (94-24), $C_{II} = 5,5$ što, uneseno u (94-23) daje:

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = 2,5 \ln \frac{x_2 \sqrt{\tau/\rho}}{\nu} + 5,5$$

raspored brzina u turbulentnom sloju,
u glatkom provodniku

(94-25)

Ovim je raspored brzina izražen kao veza bezdimenzionalnih veličina $\bar{u}/\sqrt{\tau/\rho}$ i $x_2\sqrt{\tau/\rho}/\nu$. I u podsloju raspored brzina, dat sa (94-17), može se preobličiti u vezu između dve navedene bezdimenzionalne veličine. Dobija se njihova srazmernost:

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = \frac{x_2 \sqrt{\tau/\rho}}{\nu}$$

raspored brzina u podsloju

(94-26)

Do prethodnog se došlo iz (94-17), uz izražavanje u_c i δ_c prema (94-20) i (94-21). Jednačina (94-26) važi samo za podsloj, za $x_2 < \delta_c$, a za granicu podsloja, na osnovu (94-20) i (94-21) piše se:

$$\frac{u_c}{\sqrt{\tau/\rho}} = \frac{\delta_c \sqrt{\tau/\rho}}{\nu} = \sqrt{Re_c}$$
(94-27)

Poznavanjem rasporeda brzina (94-25), što pretpostavlja da su konstante C_I i Re_c u (94-22) određene, omogućava vezu između napona trenja τ i proticaja (jer integrisanje brzine u po preseku daje proticaj).

* * *

Za „hrapav zid” dobiće se granični uslov prema sledećem rasuđivanju. Hrapavost neposredno obrazuje strujanje u sloju, sada „sloj nije zaštićen podslojem”, jer izbočine stvaraju vrtloge, a na čije obrazovanje

viskoznost je zanemarljivo uticajna. Ti vrtlozi su presudni za raspored osrednjenih brzina, koje opisuje funkcija:

$$\bar{u} = \bar{u}[x_2(\rho, k, \tau)]$$

Brzina \bar{u} zavisi od rastojanja x_2 zida, uz uticaj veličina upisanih u unutrašnju zgradu, koje su parametarske veličine (u pojedinačnom primeru one su konstante, a menjaju se od primera do primera. To su gustina ρ (uticaj viskoznosti se izostavlja za strujanje uz hrapav zid), apsolutna hrapavost određena visinom izbočina k i napon trenja τ između zida i fluida. Ne unosi se poluprečnik r cevi ili debljina sloja $2h$ u ravanskom strujanju, jer se pretpostavlja da ista vrednost napona trenja τ , uz iste vrednosti k i ρ , nameće određeni raspored prizidnih brzina bez obzira na vrednosti za h , odnosno r . Upravo sve što se zbiva u sloju prenosi se na delovanje sloja na zid naponom τ .

U prethodno napisanoj funkciji za raspored brzina ulazi 5 veličina, pa će dimenzionalna analiza to svesti na vezu 2 bezdimenzionalne veličine. Za osnovne veličine uzimaju se x_2 , \bar{u} , ρ , a τ i k dobijaju bezdimenzionalne zamene:

$$\frac{\tau}{\rho \bar{u}^2} \quad \frac{k}{x_2}$$

pa se može napisati funkcija

$$\frac{\bar{u}_k}{\sqrt{\tau/\rho}} = f\left(\frac{x_2}{k}\right)$$

Na rastojanju od zida $x_2 = k$, brzina je $\bar{u} = u_k$, (vidi sl. 91–1) pa se na osnovu prethodnoga može zaključiti da je $u_k/\sqrt{\tau/\rho}$ jednako $f(1)$, tj. vrednost funkcije za jednu određenu vrednost, a to je ista konstantna vrednost za sve slučajeve. Prema tome, može se napisati:

$$\frac{\bar{u}_k}{\sqrt{\tau/\rho}} = \text{const} = C_{\text{III}} \quad (94-28)$$

U ovaj izraz nije ušla hrapavost (visina izbočina k), jer je dimenzionalna analiza dovela do bezdimenzionalne veličine za τ , gde se pojavilo k^0 . To je zbog toga što je smišljeno uzeta brzina \bar{u}_k , na mestu $x_2 = k$, čime je k ipak ušlo u razmatranje, jer \bar{u}_k očigledno zavisi od k . U opštu

jednačinu (94–10) staviće se $\bar{u}_0 = \bar{u}_k$ za $x_0 = k$ i istovremeno će se \bar{u}_k izraziti prema (94–28), i dobiće se:

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = C_I \ln \frac{x_2}{k} + C_{III} \quad (94-29)$$

Konstanta C_I je ista kao kod glatkog zida, dok je C_{III} karakteristična konstanta za hrapav zid – njena vrednost je oko 8,5 – pa se stavljanjem takvih vrednosti u prethodnu jednačinu, dobija:

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = 2,5 \ln \frac{x_2}{k} + 8,5$$

raspored brzina u turbulentnom sloju,
u hrapavom provodniku

(94-30)

* * *

Uz obrasce (94–25) i (94–30) treba primetiti da prethodno treba utvrditi da li se primenjuje prvi ili drugi obrazac tj. treba znati da li se u datom slučaju zid provodnika ponaša kao gladak ili kao hrapav. Na prvi pogled izgleda da je ovo veoma lako odrediti: ako je $k < \delta_c$ (visina izbočina manja od debljine podsloja) zid treba smatrati glatkim, a za $k > \delta_c$ zid se proglašava za hrapav. To je, međutim, površno (i nedovoljno tačno) shvatanje. Naime, prelaz iz podsloja u sloj nije nagao, nego postepen, i to će se izlagati malo kasnije. Uvideće se da postoji prelazna oblast kada se cev ne ponaša ni kao glatka, ni kao hrapava – to je uostalom već nagovešteno na kraju prethodnog odeljka (III). Pokazaće se da se zid ponaša kao gladak tek ako su izbočine niže od otprilike polovine debljine podsloja δ_c , sračunate iz $\sqrt{Re_c} = 11,6$. Tek tada one postaju neuticajne na sloj iznad podsloja (jer su dobro pokrivene). Pokazaće se takođe da izbočine k moraju biti čak nekoliko puta veće od δ_c pa da se ostvari da je cev hrapava (da nema uticaja viskoznosti na raspored osrednjenih brzina).

Uz pretpostavku da je razjašnjeno da li je zid gladak ili hrapav, izabrani obrazac za tu oblast, za zadato τ , određuje raspored osrednjenih brzina \bar{u} po celom preseku struje, a integrisanje brzine \bar{u} po preseku,

u stvari po x_2 , daje proticaj. Ili, za zadati proticaj, određen je napon trenja τ . Ovime je pokazano da se, načelno uzevši, zadatak može rešiti, a kako izgledaju posve određene veze između otpora trenja i proticaja, biće napisano u Poglavlju 96, a na osnovu rasporeda brzina datih sa (94–25) i (94–30).

* * *

Poznavanjem vrednosti konstante C_I , ranije napisana jednačina za „deficit brzine” (94–14) potpuno je određena. Sa $C_I = 2,5$ ona postaje:

$$\frac{\bar{u}_m - \bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = 2,5 \ln \frac{h}{x_2} \quad (94-31)$$

Ona važi i za glatke i za hrapave provodnike.

Povodom jednačine (94–31), koja je sa još neodređenom konstantom već napisana sa (94–14), treba reći nešto što važi za sve izraze (ne samo za logaritamske) za tzv. „deficit brzine” tj. za smanjenje brzine od maksimalne (za $\bar{u}_m - \bar{u}$) u turbulentnom sloju. U tim izrazima pojavljuje se napon trenja τ o zid, ali se ne ispoljava poreklo toga napona, ne vidi se da li je on posledica dejstva viskoznosti ili hrapavosti, ili i jednog i drugog. Ti obrasci važe stoga i za glatke i za hrapave provodnike, za njih je potrebno samo da se zna napon τ , a ne uticajno je šta je njegov uzrok. Ista vrednost za τ u istom provodniku (isto h odnosno r) daje isti izraz za „deficit brzine” bez obzira da li je provodnik gladak ili hrapav. Međutim, mora se istaći da izrazi za „deficit brzine” unose τ i \bar{u}_m , a te veličine su međusobno zavisne, pa se obe ne mogu zadati. To je primećeno već iza ispisivanja (94–14), a to znači da je ispisana zakonitost za „deficit brzine” nedovoljna i da treba još saznanja da se zadatak reši. Ta se saznanja nalaze u prizidnim graničnim uslovima, gde je bitno da li je zid hrapav ili gladak – od toga zavisi τ , pa onda prizidni granični uslovi (preko τ) posredno utiču i na raspored brzina, i kada se on izražava počevši od mesta maksimalne brzine, od sredine provodnika.

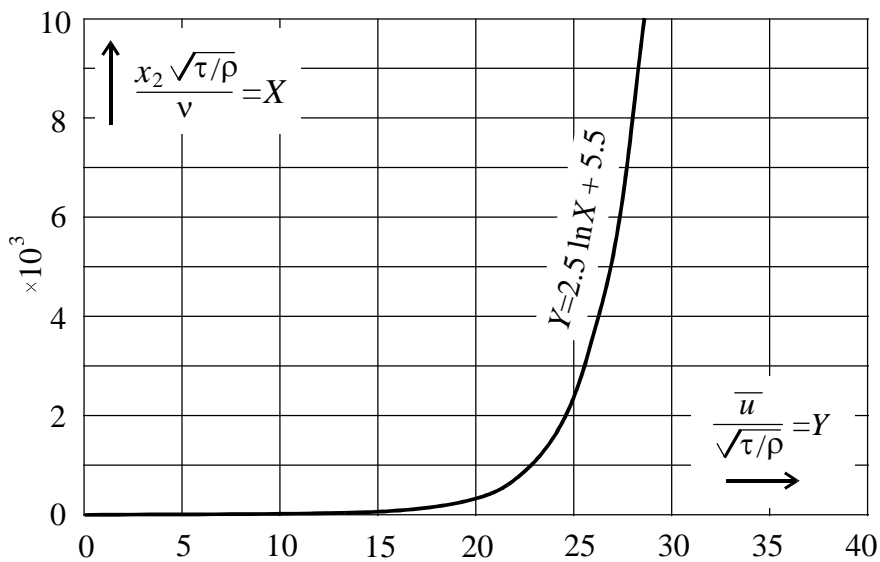
* * *

Jednačine (94–25), (94–30) i (94–31), kao i isti izrazi sa još neodređenim konstantama (94–23), (94–29) i (94–14), namenjeni su ravanskoj struji između dve ploče na rastojanju $2h$, a i za cev kružnog

preseka. Za drugi slučaj i u tim izrazima (uostalom, kao svuda) treba h zameniti sa poluprečnikom r cevi (naglašava se da x_2 svuda označava udaljenost od zida).

* * *

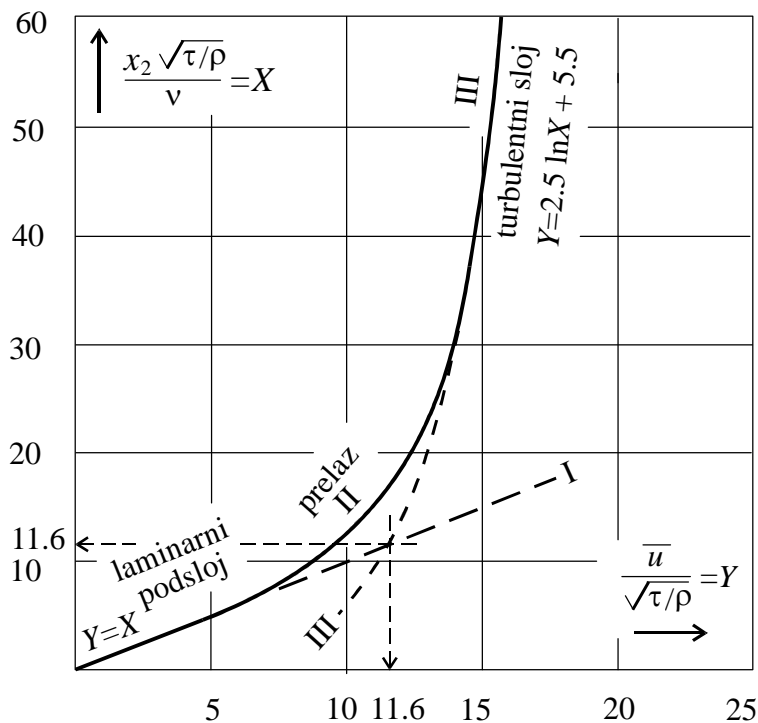
Na slici 94–2 prikazana je grafički zavisnost (94–25) koja je opšti bezdimenzionalni prikaz rasporeda brzina koje nameće gladak zid. Laminarni podsloj uz sam zid ne može se uopšte prikazati u istoj razmeri, ako se želi obuhvatiti ceo sloj. Stoga je posebna slika 94–3 namenjena za prikazivanje rasporeda brzina u blizini zida. Na toj slici, linija (I) se odnosi na podsloj gde je raspored brzina dat izrazom (94–26), koji se za koordinatne ose X i Y svodi na $Y = X$. Linija (III) je grafički prikaz zavisnosti (94–25) za turbulentni sloj ($Y = 2,5 \ln X + 5,5$). Između linija (I) i (III) ucrtana je linija (II) kao prelaz iz (I) u (III), jer se između podsloja i sloja obrazuje prelazna oblast (II) koju dosadašnja razmatranja nisu pominjala. nema naglog prelaza iz laminarnog podsloja u turbulentni sloj, taj prelaz je postepen, sa postepenim jačanjem turbulencije. To pokazuju brojni eksperimenti. Granica laminarnog sloja je otprilike $X = x_2 \sqrt{\tau/\rho/\nu} = 5$. Prelazna oblast zahvata $5 < X < 30$, dok je turbulentni sloj za otprilike $X > 30$. Prelaz (II) se mogao izostaviti u



Slika 94–2

izvođenju zakonitosti (94-25) za turbulentni sloj, ako je prizidni granični uslov tako određen da se dobiju dobri rezultati za $X > 30$. Tako je i urađeno. U pretežnom broju praktičnih zadataka dovoljno je poznavati raspored brzina samo u sloju, jer on čini skoro celu struju, pošto su podsloj (I) i prelaz (II) uzeti zajedno, zanemarljive debljine u odnosu na sloj (III). Uslov za prelaz iz podsloja u sloj uz izostavljanje prelaza, dat je ranije sa granicom podsloja prema (94-27), što se za koordinatne osovine X i Y sa sl. 94-3 svodi na $X = Y = \sqrt{Re_c}$. Jednačina (94-25), a po njoj je nacrtana linija (III), napisana je uz prethodno usvajanje $\sqrt{Re_c} = 11,6$, pa se stoga linije (I) i (III) seku u tački $X = Y = 11,6$ (vidi sl. 94-3), i tako se sa (94-25) mogao dobiti dobar raspored brzina za sloj (III) iako se formalno nije vodilo računa o prelazu (II). Međutim, posebno zanimanje za blizinu zida zahteva da se debljina podsloja izrazi približno sa:

$$\frac{\delta_c \sqrt{\tau/\rho}}{\nu} = 5 \quad (94-32)$$



Slika 94-3 Raspored brzina u podsloju (I), sloju (III) i prelazu (II)

a za prelaznu oblast u granicama:

$$5 \leq \frac{x_2 \sqrt{\tau/\rho}}{\nu} \leq 30$$

vrednosti za $\bar{u}/\sqrt{\tau/\rho}$, prema opitima, se kreću kako je dato u sledećoj tabeli:

$\frac{x_2 \sqrt{\tau/\rho}}{\nu}$	5	10	20	30
$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}}$	5,0	8,5	11,9	14,0

* * *

Slika 94-3, uz prethodno izlaganje, pruža mogućnost da se oceni kada se zid „ponaša kao gladak”, a kada kao „hrapav”. Ako su izbočine manje od debljine laminarnog podsloja, pa čak ne ulaze ni u prelaznu oblast, zid je „gladak”, tada je apsolutna hrapavost manja od debljine podsloja, tj. $k < \delta_c$, a δ_c treba izraziti prema (94-32). Da bi zid bio „hrapav” moraju izbočine da dovoljno prodru u sloj, pa da njihov uticaj postane presudan za raspored brzina u sloju. Prelaz (II) završava kod $x_2 \sqrt{\tau/\rho}/\nu$ jednako otprilike 30, a apsolutna hrapavost mora da bude veća – obično se navodi da vrednost za $k \sqrt{\tau/\rho}/\nu$ treba da pređe 70, pa da se zid iskaže kao „hrapav”. Prethodna razmatranja dozvoljavaju da se napišu sledeći uslovi:

$$\left. \begin{array}{l} \text{gladak zid} \quad \frac{k \sqrt{\tau/\rho}}{\nu} < 5 \\ \text{hrapav zid} \quad \frac{k \sqrt{\tau/\rho}}{\nu} > 70 \end{array} \right\} \quad (94-33)$$

Za vrednosti između 5 i 70 zid nije ni „dovoljno gladak” (da se izostavi uticaj „hrapavosti”), ni „dovoljno hrapav” (da je uticaj viskoznosti zanemarljiv za raspored brzina u sloju). Tada ne važi nijedan do navedenih rasporeda: ni (94-23) za glatke zidove, ni (94-29) za hrapave. Može se čak reći da su oni samo uprošćeni slučajevi, kada je

jedan od uticaja zanemarljiv, a to je pojednostavilo granične uslove, pa tako i omogućilo dobijanje zavisnosti, ali odvojenih (samo za glatke, odnosno samo za hrapave zidove). Za oblast između glatkih i hrapavih zidova raspored brzina zavisi i od viskoznosti i od hrapavosti. To bi izražavala funkcija oblika:

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = f\left(\frac{x_2\sqrt{\tau/\rho}}{\nu}, \frac{x_2}{k}\right) \quad (94-34)$$

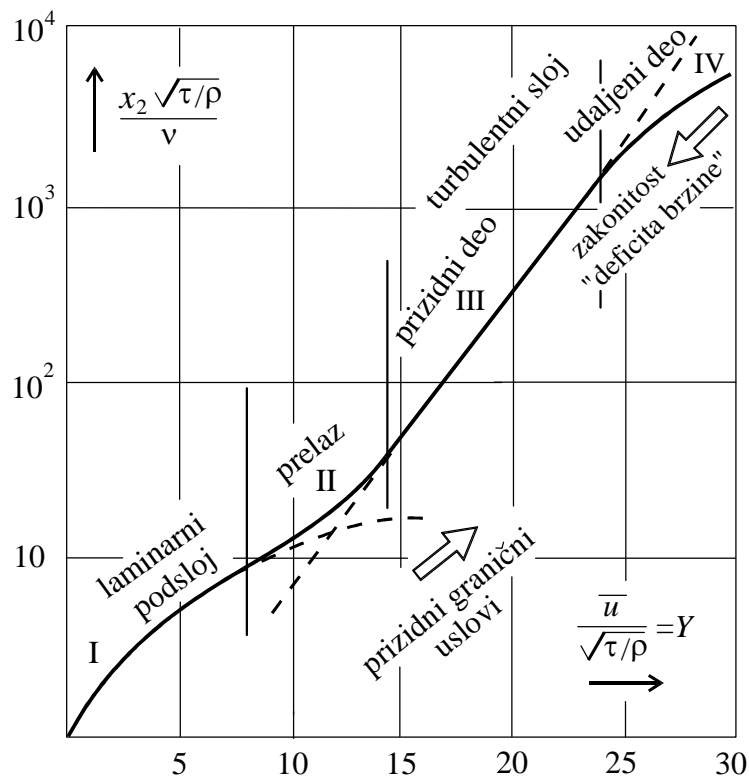
koja povezuje bezdimenzionalne veličine, koje su se pojavljivale u izrazima za gladak i za hrapav provodnik.

V

PODELA TURBULENTNOG SLOJA NA PRIZIDNI I UDALJENI DEO; POSEBNA ZAKONITOST RASPOREDA BRZINA ZA UDALJENI DEO

Na slici 94-3 prikazan je raspored brzine uz zid i obuhvaćen je samo početak sloja, dok je na prethodnoj slici – sl. 94-2 – obuhvaćen ceo sloj, ali se onda nisu mogle ispoljiti zakonitosti za podsloj i prelaz, jer su oni (podsloj i prelaz) srazmerno pretanki (u odnosu na sloj). Moguće je obuhvatiti sve ako se pređe na prikazivanje sa logaritmima rastojanja (a tada logaritamska zavisnost postaje prava) – slika 94-4. Ova slika treba i da posluži da se prikaže da su izvesna eksperimentalna istraživanja ukazala da posle nekog rastojanja od zida raspored brzina napušta logaritamsku zakonitost – to odvajanje prikazuje linija (IV) na slici 94-4. Prihvatanje logaritamske zakonitosti samo do izvesnog rastojanja od zida, njeno dalje napuštanje, dovodi do podele sloja na: „*pri-zidni deo sloja*” (III) i „*udaljeni deo sloja*” (IV) – slika 94-4. Samo se u (III) prihvata logaritamska zakonitost, dok se u (IV) traži usklađivanje sa maksimalnom brzinom – tu vlada „zakon deficita brzine”. Za prizidni deo sloja važi logaritamska zakonitost, može se primeniti (94-23) koja se prepisuje:

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = C_I \ln \frac{x_2\sqrt{\tau/\rho}}{\nu} + C_{II} \quad (94-35)$$



Slika 94–4 Podela turbulentnog sloja na 'prizidni deo' (III) gde važi logaritamskazakonitost i 'udaljeni deo' (IV), gde se ona napušta

Pošto do sredine struje ne važi logaritamska zakonitost, za brzinu \bar{u}_m (za $x_2 = h$) mora se uneti popravka Δ , pa je:

$$\frac{\bar{u}_m}{\sqrt{\tau/\rho}} = C_I \ln \frac{h\sqrt{\tau/\rho}}{\nu} + C_{II} + \Delta \quad (94-36)$$

Oduzimanjem (94–35) od (94–36) dobija se za deficit brzine:

$$\frac{\bar{u}_m - \bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = C_I \ln \frac{h}{x_2} + \Delta \quad (94-37)$$

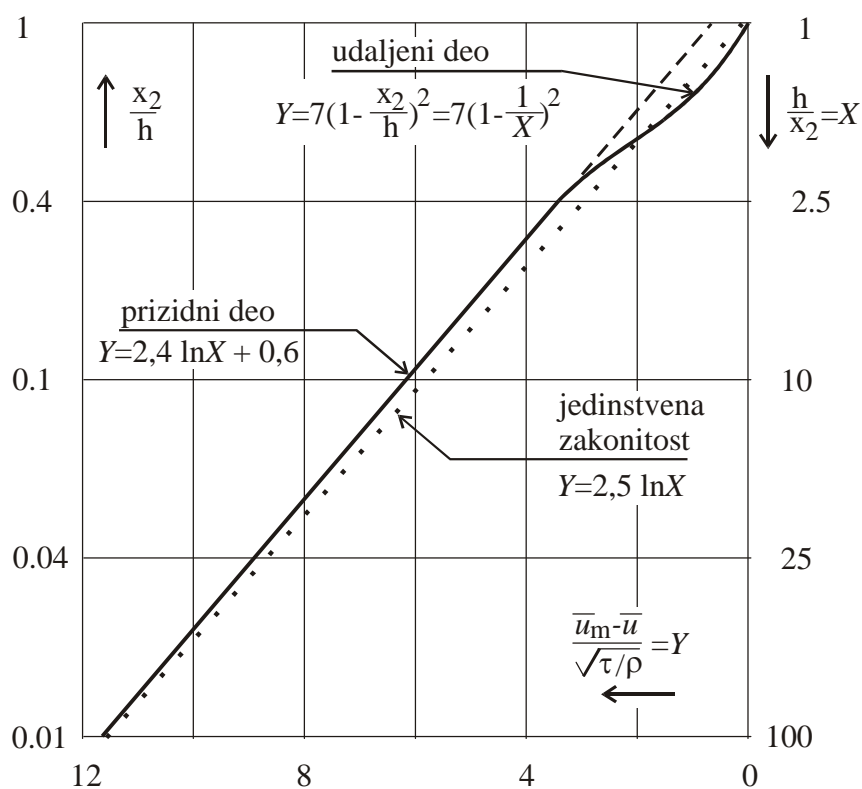
Uticao navedenog odstupanja je praktično zanemarljiv kod struja u cevima kružnog preseka i između paralelnih ploča. Daju se vrednosti

za Δ do 0,7. Međutim, uz to se obično daje za C_I nešto manja vrednost od 2,5, pa se u pretežnom delu struje dobije za brzinu skoro ista vrednost kao i pri uobičajenom $C_I = 2,5$ uz $\Delta = 0$.

Za „udaljeni deo sloja”, ako se za njega ne prihvata logaritamska zakonitost, preporučuje se često „parabolična zakonitost”:

$$\frac{\bar{u}_m - \bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = C_{IV} \left(1 - \frac{x_2}{h}\right)^2 \quad (94-38)$$

Za C_{IV} se daju vrednosti od 6 do 9. Na slici 94-5 nacrtana je zavisnost (94-38) sa $C_{IV} = 7$. Na istoj slici za prizidni deo sloja prihvata



Slika 94-5 Slozeni raspored brzina: logaritamska zakonitost za prizidni deo napisana prema (94-37) sa $\Delta = 0,6$; parabolična zakonitost za udaljeni deo napisana je prema (94-38) sa $C_{IV} = 7$; jedinstvena logaritamska zakonitost je data sa (94-31)

se obrazac (94–37) sa $\Delta = 0,6$ i $C_I = 2,4$. Prikaz je dat, primera radi, da se vidi kako se sa te dve zakonitosti obuhvata sloj, sa time što je razgraničenje tamo gde se linije koje grafički prikazuju te zakonitosti seku – to je za onu vrednost x_2/h koja po oba obrasca – (94–37) i (94–38) – daju istu vrednost $\bar{u}_m - \bar{u}$. Iz ovoga primera može se izvući pouka da se izborom konstanti C_{IV} i C_I može raspored brzina „doterati” tako da izražava ono što se opaža na opitima. Pored toga iz slike 94–5 može se primetiti da jedinstvena logaritamska zakonitost za ceo sloj, sa uobičajenom vrednošću $C_I = 2,5$, ne daje raspored brzina koji se značajno razlikuje od posebnih zakonitosti za prizidni i udaljeni deo sloja.

* * *

Obrazac (94–38) za „udaljeni deo sloja” napisan je u obliku obrazaca za tzv. „deficit brzine” u kojima se izražava smanjenje brzine od maksimalne, pa za njega važi primedba napisana iza izraza (94–31), jer se ona odnosi na sve izraze za tzv. „deficit brzine”. Naime, u njima se pojavljuje napon trenja τ o zid, bez ispoljavanja njegovog porekla, bitna je samo vrednost za τ , a ne uticajno je (za izraz za „deficit brzine”) da li napon trenja τ stvara gladak ili hrapav zid. Ali je tamo – iza izraza (94–31) – zaključeno da poznavanje samo zakona za deficit brzine ne rešava zadatak, jer se u njemu pojavljuju dve veličine za određivanje (τ i \bar{u}_m), a one su međusobno zavisne, a ta zavisnost može se utvrditi samo uz granične uslove na zidu.

Do sada se za „prizidni deo sloja” uzimala zakonitost za gladak zid. Ako bi bio hrapav, umesto (94–35), treba primeniti jednačinu (94–29) koja se prepisuje:

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = C_I \ln \frac{x_2}{k} + C_{III} \quad (94-39)$$

Za maksimalnu brzinu \bar{u}_m treba i ovde uneti popravku Δ pa je:

$$\frac{\bar{u}_m}{\sqrt{\tau/\rho}} = C_I \ln \frac{h}{k} + C_{III} + \Delta \quad (94-40)$$

Na kraju, treba reći da podela na „prizidni” i „udaljeni” deo sloja znači primenu dve zakonitosti, svaki deo ima svoju. Integrisanje brzine \bar{u} po celom preseku, a kroz oba dela sloja daje proticaj, i to mora biti

zadati proticaj, a onda on određuje napon τ i raspored brzina. Ili, umesto proticaja, može biti zadat napon τ , a time je onda potpuno određen proticaj, kao i raspored brzina. Navedena određenja sprovode se, posve razumljivo, za jedan potpuno određen provodnik i određen fluid tj. uz poznavanje veličina koje određuju presek (h , odnosno r), te poznavanje apsolutne hrapavosti k , gustine ρ i koeficijenta viskoznosti μ .

**DODATNA OBRAZLOŽENJA ZA
LOGARITAMSKU ZAKONITOST
RASPOREDA BRZINA**

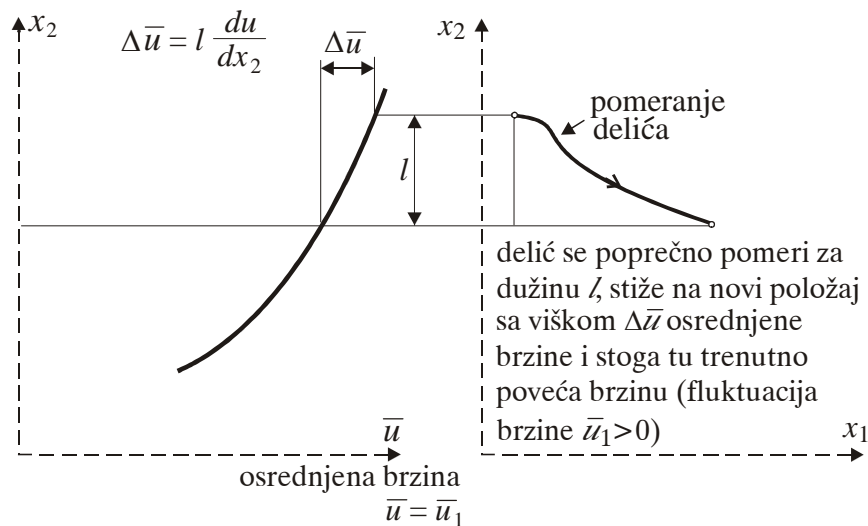
I

**RASPOREDI BRZINA KOJI PROIZILAZE
IZ PRETPOSTAVKE O DUŽINI MEŠANJA**

Logaritamska zakonitost za raspored brzina može se dovesti u vezu sa *Prantlovom hipotezom* (PRANDTL) – on je uveo u razmatranje „*dužinu mešanja*”. Šta se pod „*dužinom mešanja*” podrazumeva objašniće se na primeru koji se proučava – na rasporedu brzina u ustaljenom, ravanskom, paralelnom i pravolinijskom osrednjenom strujanju, gde je $\bar{u}_1 = \bar{u} = \bar{u}(x_2)$, $\bar{u}_2 = \bar{u}_3 = 0$. Na mesto gde je brzina \bar{u} pristigne delić sa mesta gde je brzina $\bar{u} + \Delta\bar{u}$, a razlika $\Delta\bar{u}$ se može približno izraziti sa $l d\bar{u}/dx_2$ (vidi sl. 95–1). Delić je tako poprečno prešao putanju dužine l , i to se može nazvati „*dužina mešanja*” (to je dužina na kojoj se obavlja turbulentno mešanje). Za istu vrednost izvoda $d\bar{u}/dx_2$ višak brzine $\Delta\bar{u}$ koju pristigli delić poseduje, u odnosu na lokalnu brzinu \bar{u} mesta gde je pristigao, biće srazmeran sa „*dužinom mešanja*” l . Može se smatrati da će fluktuacioni dodatak brzine u'_1 biti veći (trenutno povećanje brzine biće veće) ako je delić pristigao sa većim viškom osrednjene brzine, tj. ako je $\Delta\bar{u}$ veće. U jednu tačku pristizu delići sa mesta gde je brzina veća, ali i sa mesta gde je brzine manja, prvi uzrokuju $u'_1 > 0$, a drugi $u'_1 < 0$ (jer je u prvom slučaju $\Delta\bar{u} > 0$, a u drugom $\Delta\bar{u} < 0$).

Za meru fluktuacija brzine može se uzeti prosečna vrednost trenutnih apsolutnih vrednosti fluktuacija, što se za brzinu u pravcu 1 piše:

$$\overline{|u'_1|} = \frac{1}{t_0} \int_{t-t_0/2}^{t+t_0/2} |u'_1| dt \quad (95-1)$$



Slika 95–1

Ovo je napisano po ugledu na opšti obrazac za osrednjavanje vrednosti u turbulentnom strujanju, napisan sa (51–2). Treba napomenuti da, usled pretpostavljenih uslovljenosti, $\overline{|u'_1|}$ ne zavisi od vremena (za jednu tačku je konstantna) tj. trenutak t je proizvoljan, a takođe i vreme opažanja t_0 (treba samo da je t_0 dovoljno dugačko da se ispolje sve osobine fluktuacija).

Naime, primer koji se razmatra je primer ustaljenog strujanja kako se ono u turbulentnom strujanju shvata: osrednjene vrednosti, uključujući i osrednjene vrednosti fluktuacija, su ustaljene.

Prema obrazloženom, $\overline{|u'_1|}$ treba povezati sa razlikom $\Delta\bar{u}$ osrednjenih brzina (koja se takođe uzima u apsolutnoj vrednosti $|\Delta\bar{u}|$, da se poveže sa apsolutnom vrednosti $\overline{|u'_1|}$). Kako se, shodno izloženom, $\Delta\bar{u}$ može izraziti sa $l d\bar{u}/dx_2$, za $|\Delta\bar{u}|$ se piše:

$$|\Delta\bar{u}| = l \left| \frac{d\bar{u}}{dx_2} \right|$$

pa se onda za $\overline{|u'_1|}$ piše

$$\overline{|u'_1|} \sim |\Delta\bar{u}| \sim l \frac{d\bar{u}}{dx_2} \quad (95-2)$$

Ovde l treba shvatiti kao nekakvu prosečnu vrednost „dužine mešanja”.

Nadalje se pretpostavlja da je poprečna fluktuacija istoga reda kao podužna, jer se trenutno povećanje, odnosno smanjenje podužne brzine mora preneti porečnom. To se zapisuje sa:

$$\overline{|u'_2|} \approx \overline{|u'_1|} \quad (95-3)$$

Napisano sa (95-2) i (95-3) omogućava da se osrednjeni proizvod $\overline{u'_1 u'_2}$ (koji određuje „napon turbulencije”) napiše sa:

$$-\overline{u'_1 u'_2} = l^2 \frac{d\bar{u}}{dx_2} \left| \frac{d\bar{u}}{dx_2} \right| \quad (95-4)$$

Ovde je umesto srazmernosti napisana jednakost, jer se kao l sada shvata ona „dužina mešanja” koja zadovoljava jednačinu, a ne tvrdi se da l tačno određuje neku posve određenu dužinu. Međutim širina pojasa u kome se odvija mešanje delića, povezana je sa dužinom l , jer je on, van svake sumnje, veći, ako je l veće. Ako bi se radilo eksperimentalno, ne bi se l merilo, nego bi se merenjem određivalo \bar{u} i $\overline{u'_1 u'_2}$ u zavisnosti od x_2 , a onda bi se l sračunalo primenom (95-4).

Nadalje, izraz (95-4), napisan je tako da su istoga znaka $d\bar{u}/dx_2$ i $-\overline{u'_1 u'_2}$, a to znači da su istoga znaka $d\bar{u}/dx_2$ i σ_{21}^t (jer je $\sigma_{21}^t = -\rho \overline{u'_1 u'_2}$). Za $x_2 < h$ (do polovine struje) $d\bar{u}/dx_2 > 0$ (jer se brzina povećava udaljavanjem od zida), dok je $d\bar{u}/dx_2 < 0$ za $h < x_2 < 2h$, pa je $\sigma_{21}^t < 0$, a to je saglasno sa (94-7).

Prantl je za „dužinu mešanja” pretpostavio da je srazmerna sa rastojanjem od zida (jer se udaljavanjem od zida mogu očekivati veće mogućnosti za mešanje) što se piše sa:

$$l = \chi x_2 \quad (95-5)$$

gde je χ konstanta.

Korišćenjem ove srazmernosti u (95-4) i množenjem sa ρ dobija se:

$$\sigma_{21}^t = -\rho \overline{u'_1 u'_2} = \rho \chi^2 x_2^2 \frac{d\bar{u}}{dx_2} \left| \frac{d\bar{u}}{dx_2} \right| \quad (95-6)$$

Ovo je jedan od primera za vezu između fluktuacija i osrednjenih veličina, a takva veza (kao dodatna jednačina) omogućava rešavanje

zadataka iz turbulentnog strujanja; bez takve veze broj jednačina bio bi nedovoljan. O tome je načelno raspravljano u Poglavlju 53, i poslednja jednačina u tom poglavlju liči na (95-6) – to je tamo (u Poglavlju 53) namerno učinjeno, jer je to najprostija između mnogobrojnih veza koje se preporučuju kao veze između fluktuacija i osrednjenih veličina.

Iz jednačina (94-7) i (95-6) dobija se:

$$\frac{d\bar{u}}{dx_2} = \frac{1}{\chi} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \frac{1}{x_2} \sqrt{1 - \frac{x_2}{h}} \quad (95-7)$$

što važi da polovine struje ($x_2 \leq h$) a izučavanja ne moraju ni ići dalje jer je struja simetrična. Prilikom ispisivanja (95-7), na osnovu (95-6), vodilo se računa da je $d\bar{u}/dx_2 > 0$ za $x_2 < h$.

Integrisanje prethodne jednačine, uz uslov $\bar{u} = \bar{u}_m$ za $x_2 = h$, daće za „deficit brzine”:

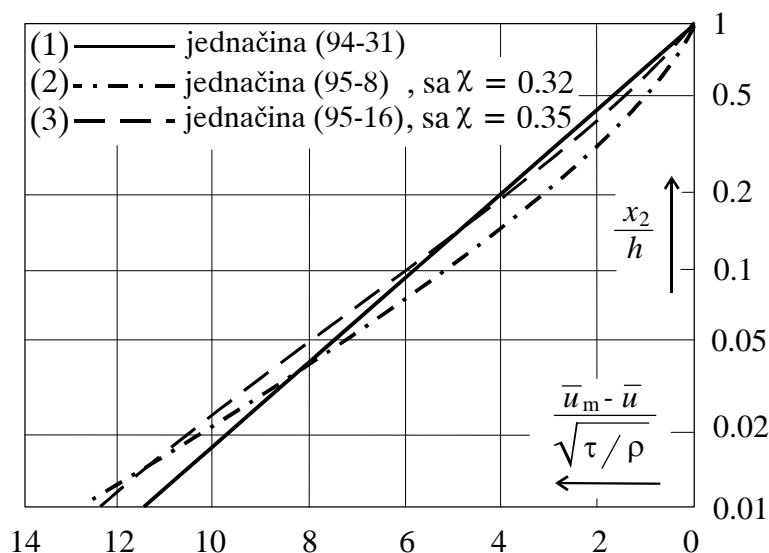
$$\frac{\bar{u}_m - \bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = \frac{1}{\chi} \left[\ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{x_2}{h}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x_2}{h}}} - 2\sqrt{1 - \frac{x_2}{h}} \right] \quad (95-8)$$

U ovoj jednačini, kao i svuda, x_2 označava udaljenost od zida, a h polovinu debljine ravanske struje, što se, kod kružne cevi, zamenjuje poluprečnikom r .

Ova jednačina je konačan cilj iz svih prethodnih pretpostavljanja, a njena valjanost može se eksperimentalno proveriti, i to jednostavno, merenjem samo osrednjenih brzina \bar{u} za ostvareni napon trenja τ , koji bi se lako posredno odredio, merenjem piježometarskih kota i primenom jednačine (94-8), odnosno (94-9). Naglašava se da ispravnost jednačine pretpostavlja da je $\chi = \text{const}$.

Ako bi se nizom primera utvrdila valjanost jednačine (ne bi se naišlo na primere koji je opovrgavaju), mogle bi se prihvatiti sve učinjene pretpostavke, iako se one same neposredno ne proveravaju, nego se samo proverava krajnji rezultat do koga su dovele. Može se reći da je moguće da se sve odvija onako kako pretpostavke kažu, kada je to dovelo do dobrog konačnog rezultata.

Logaritamska zakonitost za „deficit brzine” (94-14) ima znatno jednostavniji oblik od (95-8). Iako su ta dva izraza po obliku dosta različiti, podešavanjem vrednosti konstante u (95-7) može se postići da ona daje približno isti raspored brzina sa (94-31), što je i prikazano na slici 95-2, gde je u (95-7) uzeto $\chi = 0,32$. Tako se logaritamska zakonitost



Slika 95–2 Rasporedi brzina koji proizlaze iz Prantlove (2) i Karmanove (3) pretpostavke za 'dužinu mešanja', i upoređenje sa logaritamskom zakonitosti (1)

može shvatiti i kao dobra aproksimacija, (a u vidu veoma prostog izraza) za zakonitost koja proizilazi iz Prantlove pretpostavke o „dužini mešanja”, a koja se piše podosta složenim izrazom (95–7).

Za logaritamsku zakonitost veza između fluktuacija i osrednjenih vrednosti data je sa (94–13). Može se dobiti logaritamska zakonitost, ako se i zadrži izražavanje „dužinom mešanja”, ali prema sledećem:

$$l = \chi x_2 \sqrt{1 - \frac{x_2}{h}} \quad (95-9)$$

a ne sa $l = \chi x_2$, kako je bilo napisano sa (95–5). Ako se l prema (95–9) uvrsti u (95–4) dobija se zaista (94–13), što odgovara logaritamskoj zakonitosti, samo bi u (95–8) trebalo staviti da je:

$$\chi = \frac{1}{C_1}$$

Za ranije usvojeno $C_1 = 2,5$, sa kojim je napisano (94–30), znači da je u (95–8):

$$\chi = \frac{1}{C_1} = 0,4 \quad (95-10)$$

Do logaritamske zakonitosti rasporeda brzina može se doći i sa pretpostavkom za „dužinu mešanja” $l = \chi x_2$, ako se određuje raspored brzina samo za „prizidni deo sloja”, gde je x_2/h maleno, do 0,1, jer se tu x_2/h može zanemariti u odnosu na jedinicu, pa se izraz (94-7) za napon σ_{21}^t pojednostavljuje:

$$\sigma_{21}^t = -\overline{\rho u_2' u_1'} = \tau \left(1 - \frac{x_2}{h}\right) \approx \tau = \text{const} \quad (95-11)$$

pa je $-\overline{u_2' u_1'} = \tau/\rho$, što sa $l = \chi x_2$, uvršteno u (95-4) daje

$$\frac{d\bar{u}}{dx_2} = \frac{1}{\chi} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \frac{1}{x_2} \quad (95-12)$$

a to sa $\chi = 1/C_1$ daje izraz (94-12) koji važi za logaritamsku zakonitost.

* * *

U svojevremenim nastojanjima da se turbulencija razjasni i da se pronađu „formule za turbulenciju” zapažena je *Karmanova hipoteza* (KÁRMÁN). Ta hipoteza primenjena na zadatak koji se razmatra, daje za „dužinu mešanja”, umesto (95-5) sledeći izraz:

$$l = \chi \frac{d\bar{u}/dx_2}{d^2\bar{u}/dx_2^2} \quad (95-13)$$

što je i u dimenzionalnom skladu, a χ i ovde treba da bude konstanta, i to približno iste vrednosti kao u (95-5). Uvrštavanjem (95-13) u (95-4), za polovinu struje ($0 < x_2 < h$) gde je $d\bar{u}/dx_2 > 0$, dolazi se do:

$$-\overline{u_1' u_2'} = \frac{\chi^2 (d\bar{u}/dx_2)^4}{(d^2\bar{u}/dx_2^2)^2} \quad (95-14)$$

Desna strana ovoga izraza je pozitivna, a to je potpuno u redu, ako se posmatra samo polovina struje ($0 < x_2 < h$) jer se tu ostvaruje $\overline{u_2' u_1'} < 0$, što je obrazloženo iza izraza (94-7), a to je pominjano malo pre, iza (95-4).

Iz (95-14), izražavanjem $\overline{u_2' u_1'}$ preko (94-7) dobija se:

$$\frac{(d\bar{u}/dx_2)^2}{d^2\bar{u}/dx_2^2} = \frac{1}{\chi} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \sqrt{1 - \frac{x_2}{h}} \quad (95-15)$$

Ova diferencijalna jednačina drugog reda ima opšte rešenje sa dve integracione konstante, koje će se odrediti zadovoljavanjem dva granična uslova: $\bar{u} = \bar{u}_m$ (za $x_2 = h$), i $\bar{u} = -\infty$ (za $x_2 = 0$). Ovaj drugi uslov ostvaruje se i kod logaritamske zavisnosti, jer i kod nje, a i kod zavisnosti koja će proisteći iz (95–15), dobijeni raspored brzina ne važi za blizinu zida (za x_2 blisko nuli), jer tu i ne važe zakonitosti turbulentnog strujanja. Naime, granični uslovi (zid) nameću tu povezivanje zakonitosti za turbulentan sloj sa prizidnim uslovima. Integrisanje (95–15), uz navedena dva uslova daje za „deficit brzine”:

$$\frac{\bar{u}_m - \bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = -\frac{1}{\chi} \left[\sqrt{1 - \frac{x_2}{h}} + \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x_2}{h}} \right) \right] \quad (95-16)$$

Na slici 95–2 prikazana je i ova zavisnost. Linija (3) nju prikazuje, sa vrednošću konstante $\chi = 0,35$ – tako se dobija dobro podudaranje sa rasporedom po logaritamskoj zavisnosti, što se uviđa sa iste slike.

* * *

Prikazano na sl. 95–2 dozvoljava da se prihvati sledeće rasuđivanje. Iz načelno drugačijih pretpostavki, koje dovode do različitih matematičkih izraza, kroz podešavanje vrednosti za konstante, mogu se dobiti skoro isti rasporedi brzina. Ovo ide u prilog prihvatanju što je moguće prostijeg izraza za raspored brzina, pošto ni složeniji izraz nije posledica takvih pretpostavki, koje su opštevažee i neprikosnovene. Valjanost neke od pretpostavki ceni se prema rezultatima do kojih dovodi, prema njihovom podudaranju ili nepodudaranju sa stvarno opaženim činjenicama. Treba primetiti da se ne proverava baš ono što je suština pretpostavke, nego se posmatraju dobijeni rezultati – ovde je to raspored brzina. Sama pretpostavka je nedorečena, ostavlja se da se kroz njenu proveru odrede vrednosti onih veličina za koje ona tvrdi da su konstantne, pa su vrednosti konstanti posledica podešavanja da se dobiju dobri rezultati, upravo opitima provereni. Jasno je da u takvim postupcima ima mesta za niz pretpostavki i da se one mogu uskladiti da daju približno iste rezultate – pogotovo kada se radi o prostom zadatku, o određivanju rasporeda brzina između ploča ili u kružnoj cevi.

I složeniji zadaci turbulentnog strujanja pokušavaju se rešavati na način koji je načelno isti sa ovde primenjivanim. Naime, fluktuacione

vrednosti moraju se izraziti nekom vezom sa osrednjenim, tako se dobija dovoljan broj jednačina. Na to je, iza jednačine (95–6) skrenuta pažnja, pozivajući se na načelne rasprave pri kraju Poglavlja 53, uz napomenu da je (95–6) jedna od najprostijih veza između fluktuacionih i osrednjenih vrednosti. Razume se da ta veza može da bude složenija. U novije vreme veze između fluktuacionih i osrednjenih veličina nazivaju se „modeli turbulencije”. Preporučuje se onaj „model” koji dovodi do dobrih krajnjih rezultata (do osrednjenih vrednosti veličina koje se traže). Tako se potvrđuje „ispravnost” modela, a obično se neposredno ne proverava sama pretpostavka na kojoj se zasniva „model”. Ne proveravaju se njeni navodi, nego se ona oglašava podobnom, ako su krajnji rezultati podobni, ako su posledice takve kakve bi ona trebala da proizvede. Ovakvo shvatanje, kome se suštinske zamerke, strogo uzevši, ne mogu otkloniti, pratilo je razmatranja i u ovde primenjivanom „modelu turbulencije” (Prantlov, Karmanov).

II

PRIMENA DIMENZIONALNE ANALIZE NA RASPORED BRZINA

Raspored brzina je poznat, ako se poznaje brzina \bar{u} u zavisnosti od rastojanja x_2 od zida za pojedini primer, a od primera do primera menjaju se parametri: gustina ρ , koeficijent viskoznosti μ , apsolutna hrapavost k , napon trenja τ po zidu, polovina rastojanja između ploča h (to se kod cevi kružnog preseka zamenjuje poluprečnikom r). Međusobnu vezu pomenutih 7 veličina, dimenzionalna analiza svodi na vezu 4 bezdimenzionalne veličine. Za osnovne veličine uzimaju se x_2 , τ i ρ a onda se preostale 4 pišu svojim bezdimenzionalnim zamenama, koje ulaze u međusobnu vezu:

$$f\left(\frac{h}{x_2}, \frac{k}{x_2}, \frac{\tau}{\rho\bar{u}^2}, \frac{\mu}{\rho\bar{u}x_2}\right) = 0$$

Množenjem recipročne vrednosti poslednje upisane bezdimenzionalne veličine sa kvadratnim korenom pretposlednje dobija se $x_2\sqrt{\tau/\rho}/\nu$ (zamenjeno je μ sa $\rho\nu$), što se uzima kao zamena za poslednju veličinu. (Naime, dodavanjem jedne bezdimenzionalne veličine mora se izostaviti

jedna od napisanih.) Ovom zamenom dobija se

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = f \left(\frac{h}{x_2}, \frac{k}{x_2}, \frac{x_2\sqrt{\tau\rho}}{\nu} \right) \quad (95-17)$$

(I) (II) (III)

Za „prizidni deo sloja” umesno je pretpostaviti da raspored brzina zavisi od stanja uz zid, a da nema uticaja ono što je udaljeno od njega. Ovo znači da raspored brzina u tom delu zavisi od τ , k , ρ i μ , a ne i od h . Ovo je već objašnjeno pre ispisivanja (94–28). Primećuje se da je navedena pretpostavka tamo prihvaćena za prizidni deo sloja, kakav se i razmatrao, a ista će se ovde primeniti na ceo sloj, uz primedbu da su verovatno zbivanja u prizidnom delu sloja presudna za raspored brzina u celom sloju. To potkrepljuju i jednačine (94–23) i (94–29) proverene u eksperimentalnom istraživanju, a u njima na raspored ne utiče debljina sloja h . Usvojena pretpostavka se može prihvatiti uz napomenu da će biti proverena. Tako otpada (I) u (95–17) a ostaje veza između preostale tri. Ako se razdvoje proučavanja na sloj uz „gladak”, ili uz „hrapav” zid, pored (I) otpada i (II) (za „gladak zid”), odnosno (III) (za „hrapav zid”). Tako se pišu veze:

$$\text{za gladak zid} \quad \frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = f \left(\frac{x_2\sqrt{\tau/\rho}}{\nu} \right) \quad (95-18)$$

$$\text{za hrapav zid} \quad \frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = f \left(\frac{x_2}{k} \right) \quad (95-19)$$

Druga jednačina već je bila napisana izrazom koji je prethodio (94–28).

Zadatak opita je da potvrde ispravnost učinjenih pretpostavki, koje su vezu (95–17) pojednostavile, i svele na (95–18) i (95–19), i opiti, nadalje, utvrđuju kakve su veze (95–18) i (95–19). Izlaganja u prethodnom poglavlju (94) pokazala su da se mogu prihvatiti izrazi (94–23) i (94–29), a ti se izrazi uklapaju u (95–18) i (95–19).

Treba se podsetiti da je objašnjeno da je odvajanje u oblasti „glatkih” odnosno „hrapavih” zidova omogućeno time što je u pojedinoj oblasti jedan od uticaja premoćan, a drugi zanemarljiv. Međutim, mora postojati i „prelazna oblast” tako da se zadatak ne može rešavati ni kao

„gladak” ni kao „hrapav” zid – tada su oba uticaja ravnopravna, pa je zadatak za istraživanje određivanje funkcije:

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = f\left(\frac{x_2\sqrt{\tau/\rho}}{\nu}, \frac{x_2}{k}\right) \quad (95-20)$$

Za „udaljeni deo sloja” polazi se od maksimalne brzine, pa se „deficit brzine” $\bar{u}_m - \bar{u}$ izražava u funkciji $h - x_2$ (to je rastojanje od mesta maksimalne brzine, dok su gustina ρ , napon trenja τ i debljina struje h parametarske veličine). Veza tih 5 veličina svodi se na:

$$\frac{\bar{u}_m - \bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = F\left(\frac{h - x_2}{h}\right) \quad (95-21)$$

Upoređenje ovoga izraza sa (95-17) pokazuje da su izostavljene ta-mošnje bezdimenzionalne veličine (II) i (IV), dok su (I) i (III) malo preobličene. Izostavljanje navedenih veličina posledica je shvatanja da je isti raspored brzina u „udaljenom delu sloja” ako je isto \bar{u}_m , τ i h , a bez obzira na vrednosti za μ i k tj. bez obzira kako se na zidu stvara napon trenja τ ; bitna je samo njegova vrednost. Tako se i prave zakonitosti za „deficit brzine”, što je i razjašnjeno u izlaganjima iza izraza (94-31) i delimično ponovljeno iza ispisivanja (94-38). Lako se uvidi da se izrazi (94-14) i (94-38), napisani za „deficit brzine”, uklapaju u (95-21), kao mogućnosti njegovog određenja.

* * *

Zanimljivo je pokazati da izražavanje jedinstvene zakonitosti za oba dela sloja (prizidni i udaljeni) navodi na logaritamsku zakonitost, jer ona može da zadovolji obe zavisnosti: (95-18) za prizidni i (95-21) za udaljeni deo sloja. Ako važi za oba dela, zavisnost (95-18) će dati maksimalnu brzinu:

$$\frac{\bar{u}_m}{\sqrt{\tau/\rho}} = f\left(\frac{h\sqrt{\tau/\rho}}{\nu}\right) \quad (95-22)$$

Oduzimanjem (95-18) od (95-22) dobija se:

$$\frac{\bar{u}_m - \bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = f\left(\frac{h\sqrt{\tau/\rho}}{\nu}\right) - f\left(\frac{x_2\sqrt{\tau/\rho}}{\nu}\right) \quad (95-23)$$

(95–21) može se napisati kao:

$$\frac{\bar{u}_m - \bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = F\left(\frac{h}{x_2}\right) \quad (95-24)$$

Jedinstvena zakonitost za ceo sloj (za prizidni i za udaljeni deo sloja) zahteva da desne strane u (95–23) i (95–24) budu istovetne, što znači da je f i F ista funkcija, a to je moguće ako je ona logaritamska, jer će onda na desnoj strani (95–23) biti razlika logaritama, što je ujedno i logaritam odnosa, a odnos h/x_2 se pojavljuje na desnoj strani (95–24). Desna strana u (95–23) može da bude $C_1 \ln h - C_1 \ln x_2$ a to je $C_1 \ln(h/x_2)$ što je u skladu sa desnom stranom u (95–24).

Prethodna izvođenja bila su namenjena glatkom zidu, a za hrapavi dobilo bi se potpuno isto. Naime, umesto (95–23) napisalo bi se:

$$\frac{\bar{u}_m - \bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = f\left(\frac{h}{k}\right) - f\left(\frac{x_2}{k}\right) \quad (95-25)$$

što bi se dobilo na osnovu (95–19).

III

ZAVRŠNA RAZMATRANJA O LOGARITAMSKOJ ZAKONITOSTI RASPOREDA BRZINA

Posle izlaganja u prethodnom i ovom poglavlju (94 i 95) o rasporedu brzina može se postaviti pitanje: zašto se za kružne cevi ne preporučuje jedna zakonitost ako ona proizilazi iz istovetnih opita? Istovetni opiti treba da daju iste rezultate. Odakle onda neslaganja, pa se daju različite zakonitosti ili različite konstante u načelno istim izrazima za raspored brzina? Ta neslaganja nisu, doduše, značajna ako se mere po praktičnim posledicama (ne razlikuju se mnogo rasporedi brzina), ali ipak (iz načelnih razloga) traže razjašnjenje. Može se iz istih razloga, postaviti isto pitanje i za ravansku struju: zašto se svi navodi za strujanje između dve ploče potpuno ne podudaraju?

Objašnjenja za prethodno daju se opširno u nastavku:

1. Neslaganja se, pre svega, mogu pripisati neistovetnosti graničnih uslova. Ovi uslovi morali bi obezbediti jednolikost struje, što

znači potpunu istovetnost rasporeda brzina u svim preseccima, a za to treba da se ostvari i istovetnost rasporeda osrednjenih fluktuacionih brzina, a tako će i biti samo ako na posmatranu deonicu cevi (na kojoj se istražuje) ne utiču nikakvi lokalni uticaji. Tu se, pre svega, misli na uticaje na ulazu u cev, koji na turbulentne fluktuacije utiču priličnom dužinom cevi, pa onda na moguće uticaje od spojeva cevi (u cevovodu). Treba dodati da nije baš jednostavno napraviti cev potpuno osnosimetričnu, i sa pravolinijskim izvodnicama (tako da se odstupanja, ni merenjem, ne primećuju). Posebno treba istaći različitost u postizanju hrapavosti na cevima na kojima se ispitivalo.

Kod ravanske struje između dve paralelne ploče treba postići da te ploče budu zaista ravne, što nije bez praktičnih teškoća, jer struja mora da bude dosta široka, da se na podužnoj simetralnoj ravni (u kojoj se određuju brzine) ne oseća uticaj bočnih zidova. Jasno je da i za ovaj slučaj, opitna deonica mora da bude dovoljno dugačka da se postigne jednolikost struje.

2. Uključivanje jednolikih osnosimetričnih i ravanskih struja u istu zakonitost ne proizilazi iz sličnosti tih struja (nisu, pre svega, geometrijski slične), nego iz zajedničke jednačine, pa se objedinjavanje ta dva strujanja mora tome pripisati. Naime, ista jednačina se mogla napisati za raspored brzina za ravansku struju, i za raspored brzina kod kružne cevi. Istovetnost jednačine znači i istovetnost rasporeda brzina (po normali ravanske struje, odnosno duž prečnika cevi).

Međutim, uprkos neslaganjima u zakonitostima rasporeda brzina i za jedan slučaj (kružna cev, ili ravanska struja između ploča), daju se zakonitosti koje se odnose na oba slučaja, jer se ostvareni rasporedi brzina malo razlikuju, što znači da je ono što se izražava jednačinom dovoljno tačno za praktičnu upotrebu.

3. Zakonitosti za rasporede brzina proizašli su iz eksperimentalnih radova, pa način i tačnost merenja, van svake sumnje, utiču na moguća neslaganja u rezultatima.

Uz prethodno treba skrenuti pažnju na razmatranja iza jednačina (94–8) i (94–9), gde je objašnjeno da se obično napon trenja τ

neposredno ne meri, nego se meri pijezometarska razlika dva preseka, pa se onda τ obračuna iz (94–8), odnosno (94–9). Brzine se neposredno mere – na primer sa Pitoovom cevi (objašnjenom u Poglavlju 83 – sl. 83–2). Merna sredstva i način merenja, kao i stepen postignute tačnosti nisu isti kod svih opita, pa se i tu može naći izvesno objašnjenje za manja neslaganja u prikazu rezultata, a većih neslaganja kako je rečeno i nema, i za njih se ne bi ni moglo naći objašnjenje.

4. Naredna objašnjenja za različite zakonitosti rasporeda brzina, i različite konstante, treba tražiti u obradi opaženih podataka, u traženju i usvajanju zakonitosti koja izražava opaženo. Ako se opaženo može usaglasiti sa nekom zakonitosti, ona se može prihvatiti, sa time što to usaglašavanje daje i vrednosti konstanti koje ulaze u napisane izraze za zakonitost. Zakonitost se načelno prihvata ako se rezultati opita mogu uklopiti u izraz u kome su u njemu predviđene konstante zaista konstante – misli se na konstante $C_I, C_{II}, C_{III}, C_{IV}$ u izrazima (94–23), (94–29) i (94–38), kao i na konstantu χ u (95–8), odnosno (95–16). Međutim, može nastati neslaganje u vrednostima konstanti, iako postoji saglasnost za načelno istu zakonitost. Može se na osnovu izlaganja u prethodnom i ovom poglavlju (94 i 95) reći da svaku od predloženih zakonitosti opravdava neko prihvatljivo rasuđivanje, ali ono ne može dokrajčiti izraz, mora se ostaviti opitima da odrede vrednost konstanti. Prema tome svakoj od predloženih zakonitosti može se dati naziv „semiempirijska”, što iskazuje da ona proizilazi iz načelnih pretpostavki, ali je treba dopuniti iskustvom. Prikazi na sl. 94–5 i 95–2 navode na pomisao da se sve „uz dobru volju” može uskladiti, čak i različite (po izgledu) zakonitosti, uz „pogodan izbor konstanti” dovode do skoro istog rezultata, koji se, kao krajnji cilj traži. Možda se previše napora ulaže da bi se neka od zakonitosti prikazala da je ona baš „ona prava”.

* * *

Prethodno izloženom može da postane blizak zaključak da nije moguće stvaranje nekakve opšte važeće, tačne i potpuno određene zakonitosti, koja se ostvarivala u svim opitima, i koja će se ostvarivati u

svim primerima. Stoga je razumljiva želja da se brojni eksperimentalni podaci uključe u nekakvu približnu zavisnost, koja bi trebala da bude prosta, jer bi složeniji izrazi imali smisla samo kada bi bili potpuno tačni, a to se, shodno svim dosadašnjim razmatranjima, ne može očekivati.

Složeniji izraz – kao na primer (95–8) ili (95–16) nametnuo bi se jedino ako bi bio posledica potpuno određene pretpostavke, kojoj se ne bi mogla staviti nikakva zamerka, niti bi se mogla zameniti drugom, a ako bi taj izraz davao tačnije rezultate u svim zadacima od onih koje daje neki prostiji izraz. To se, međutim, ne može očekivati – shodno ranijim obrazloženjima.

Zaključak iz upoređenja na slikama 94–5 i 95–2, ako se razmišljanjem proširi, dovodi do pomisli da treba prihvatati prostije izraze, ako se mogu podesiti da daju skoro iste praktične rezultate kao i složeniji, pogotovo što je ta složenost samo posledica pretpostavki kojima se ne može pripisati opšte važeća i neprikosnovena tačnost. To nameće i pomisao da bi trebalo prihvatiti logaritamsku zakonitost, jer je ona posledica najprostijeg izražavanja $d\bar{u}/dx$ (tj. za promenu brzina u poprečnom preseku), kako je to obrazloženo iza izraza (94–12), i da bi je trebalo prihvatiti za ceo sloj, a onda i dimenzionalna analiza nju nameće (to je zaključeno u ovom poglavlju – u Odeljku II).

Prihvatanje prethodno izrečene „preporuke” za prihvatanje logaritamske zakonitosti rasporeda brzina navodi i na pomisao da li bi se mogla prihvatiti još prostija zakonitost od logaritamske, ako bi i ta poslužila svrsi, ako bi dala dovoljno dobre rezultate za praktičnu upotrebu. Obrazloženje da ne treba nastojati na upotrebi složenijeg izraza ako nije pouzdaniji od prostijeg, doprinelo je „preporuci” logaritamske zakonitosti, ali takvo obrazloženje nadalje može „preporučiti” još prostiju zakonitost. U izlaganjima je provejavala misao da ne treba uporno nastojati na upotrebi složenijeg izraza ako nije pouzdaniji od prostijeg, jer samo izrazito veća pouzdanost, ili čak neprikosnovenost, opravdava složeniji izraz – ne treba „gajiti iluzije” da je svaka složenost ujedno i pouzdanija tačnost. Može se odmah nagovestiti da su u upotrebi prostiji izrazi, od logaritamskog, za raspored brzina – to su eksponencijalni izrazi, i njima će biti posvećeno Poglavlje 97, pošto se u Poglavlju 96 ispitaaju obrasci za otpor trenja koji proizilaze iz logaritamske zakonitosti brzine.

96
LOGARITAMSKE ZAKONITOSTI
ZA OTPORE TRENJA U CEVIMA

I
POSEBNI OBRASCI ZA OTPORE TRENJA
U GLATKOJ I U HRAPAVOJ CEVI

Srednja brzina v za presek *struje između dve paralelne ploče*, uz pretpostavku ravanskog strujanja, iznosi:

$$v = \frac{1}{h} \int_0^h \bar{u} dx_2 = \int_0^1 \left(\bar{u}_m - 2,5 \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \ln \frac{h}{x_2} \right) d \left(\frac{x_2}{h} \right) \quad (96-1)$$

Uzeta je u razmatranje samo polovina struje (struja je simetrična) tj. od zida ($x_2 = 0$) do središnje simetrale ($x_2 = h$), a \bar{u} je izraženo na osnovu obrasca (94-31) za smanjenje brzine. Iz (96-1) sledi:

$$v = \bar{u}_m + 2,5 \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \int_0^1 \ln \frac{x_2}{h} d \left(\frac{x_2}{h} \right) = \bar{u}_m - 2,5 \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$
$$\frac{v}{\sqrt{\tau/\rho}} = \frac{\bar{u}_m}{\sqrt{\tau/\rho}} - 2,5 \quad (96-2)$$

Ovaj izraz važi i za glatke i za hrapave ploče, jer za oba slučaja važi i malo pre korišćeni izraz (94-31). Ako se razmatranja ograniče na *glatke ploče*, koristi se izraz (94-25), koji za $x_2 = h$, daje $\bar{u} = \bar{u}_m$, i tako dobijena brzina \bar{u}_m uvrštava se u (96-2), što dovodi do:

$$\frac{v}{\sqrt{\tau/\rho}} = 2,5 \ln \frac{h \sqrt{\tau/\rho}}{\nu} + 3,0 \quad (96-3)$$

U nastavku korišćiće se uobičajene bezdimenzionalne veličine:

$$C_\tau = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho v^2} \quad \text{koeficijent trenja}$$

$$Re = \frac{hv}{\nu} \quad \text{Rejnoldsov broj} \quad (96-4)$$

Prvi izraz uveden je sa (91-18), a drugi je prvi put napisan sa (62-1), uz napomenu da je ovde odmah obavljena zamena μ/ρ sa ν (ν = kinematički koeficijent viskoznosti), shodno (62-12).

Za koeficijent C_τ i za Re -broj uzete su za karakteristične veličine (one koje su bitni pokazatelji struje), a to su: srednja brzina v i polovina debljine struje h .

(96-3) sa izražavanjem preko C_τ i Re preobličava se u:

$$\sqrt{\frac{2}{C_\tau}} = 2,5 \left(\ln Re \sqrt{\frac{C_\tau}{2}} + 1,2 \right) \quad (96-5)$$

Ovo je izraz za struju između dve ploče, ako se one ponašaju kao glatke, i uz pretpostavljenu logaritamsku zakonitost uz njene konstante: $C_I = 2,5$ i $C_{II} = 5,5$. Za druge vrednosti konstanti C_I i C_{II} dobio bi se izraz koji bi imao samo drukčije konstante od onih u (96-3).

Za struju između *hrapavih ploča* na isti način iz (96-2) i (94-30), dobija se:

$$\sqrt{\frac{2}{C_\tau}} = 2,5 \left(\ln \frac{h}{k} + 2,4 \right) \quad (96-6)$$

* * *

Za *cev kružnog preseka*, poluprečnika r , proticaj Q je jednak:

$$Q = \pi r^2 v \quad (96-7)$$

a taj isti proticaj mora biti jednak sledećem integralu:

$$Q = \int_0^r \bar{u} 2\pi(r - x_2) dx_2 = 2\pi r^2 \int_0^1 \bar{u} \left(1 - \frac{x_2}{r} \right) d\left(\frac{x_2}{r}\right) \quad (96-8)$$

Pojedini sabirak u napisanom integralu je elementarni proticaj, gde se brzina \bar{u} množi sa površinom kružnog prstena neizmerno malene

debljine dx_2 , a sa poluprečnikom $r - x_2$ ($r =$ poluprečnik cevi, a x_2 i ovde, kao i svuda, označava udaljenost od zida).

Izjednačavanje prethodna dva izraza za Q , uz pisanje \bar{u} prema (94-31), i sa zamenom h sa r , daje:

$$\begin{aligned} v &= 2 \int_0^1 \left(\bar{u}_m + 2,5 \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \ln \frac{x_2}{r} \right) \left(1 - \frac{x_2}{r} \right) d \left(\frac{x_2}{r} \right) = \\ &= 2\bar{u}_m \int_0^1 \left(1 - \frac{x_2}{r} \right) d \left(\frac{x_2}{r} \right) + 5 \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \int_0^1 \ln \frac{x_2}{r} \left(1 - \frac{x_2}{r} \right) d \left(\frac{x_2}{r} \right) \end{aligned}$$

Vrednosti integrala su $1/2$, odnosno $3/4$, pa se dobija:

$$\frac{v}{\sqrt{\tau/\rho}} = \frac{\bar{u}_m}{\sqrt{\tau/\rho}} - 3,75 \quad (96-9)$$

i to važi i za glatku, i za hrapavu cev.

* * *

Za *glatku cev*, brzina u osovini cevi, napisana sa \bar{u}_m u prethodnom izrazu, određena je obrascem (94-25), jer on daje $\bar{u} = \bar{u}_m$ za $x_2 = r$ - tako se dobija:

$$\frac{v}{\sqrt{\tau/\rho}} = 2,5 \ln \left(\frac{rv \sqrt{\tau/\rho}}{\nu v} \right) + 5,50 - 3,75 \quad (96-10)$$

Uvešće se uobičajene bezdimenzionalne veličine:

$$\lambda = 4C_\tau = \frac{8\tau}{\rho v^2} \quad (96-11)$$

$$Re = \frac{vD}{\nu} \quad (96-12)$$

Veličina λ je, prilikom uvođenja u razmatranje, u Poglavlju 91, obrascem (91-22), nazvana „koeficijentom trenja za cev kružnog preseka”, i ona je uobičajena bezdimenzionalna veličina za izražavanje trenja kod cevi.

Re -broj se obrazuje sa prečnikom $D = 2r$ kao karakterističnom dužinom - i to je uobičajeno.

Korišćenjem (96–11) i (96–12), izraz (96–10) se dovodi na oblik:

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 2,5 \ln \left(\frac{1}{2} Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \right) + 1,75$$

što se svodi na:

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} = 0,88 \ln(Re\sqrt{\lambda}) - 0,91 \quad (96-13)$$

Ako se umesto prirodnih logaritama (\ln) uzmu dekadni (\log) prethodno se piše:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,03 \log(Re\sqrt{\lambda}) - 0,91 \quad (96-14)$$

Iz Nikuradzeovih eksperimenata već pomenutih u Poglavlju 94, Odeljak III, proizašao je obrazac:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(Re\sqrt{\lambda}) - 0,80 \quad (96-15)$$

Navedena dva obrasca – (96–14) i (96–15) daju rezultate koji se zanemarljivo razlikuju, drugi obrazac ima zaokruženu konstantu pred logaritmom (2 umesto 2,03), a to se nadoknađuje smanjenjem i druge konstante (sa 0,91 na 0,8). Može se, upoređujući (96–14) i (96–15) videti da je relativna greška za λ zanemarljiva (ispod 1%) ako se računa po drugom, umesto prvom obrascu, i to za vrednosti Re od 5000 do 10^6 (gde se i ostvaruju praktični slučajevi za glatke cevi). Stoga se može prihvatiti izraz (96–15), a on se može napisati i u obliku monoma:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \frac{Re\sqrt{\lambda}}{2,5}} \quad (96-16)$$

obrazac za glatke cevi

* * *

Za *hrapavu cev* primenjuje se opet (96–9), samo što se \bar{u}_m izražava prema obrascu (94–30) za hrapavu cev, koji daje $\bar{u} = \bar{u}_m$ za $x_2 = r$. Tako se dobija:

$$\frac{v}{\sqrt{\tau/\rho}} = 2,5 \ln \frac{r}{k} + 8,50 - 3,75$$

Uvođenjem λ , tj. korišćenjem (96–11), i zamenom $r = D/2$, prethodno se piše sa:

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 2,5 \ln \frac{D}{k} - 2,5 \ln 2 + 4,75$$

Deljenjem sa $\sqrt{8}$ i uvođenjem dekadnih logaritama dobija se:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,03 \log \frac{D}{k} + 1,07 \quad (96-17)$$

Nikuradze je rezultate svojih opita obuhvatio obrascem:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \frac{D}{k} + 1,14 \quad (96-18)$$

Za D/k između 10 i 10^5 (van svake sumnje je da su praktični slučajevi unutar ovih granica) prethodna dva izraza daju rezultate, koji se zanemarljivo razlikuju, pa se može prihvatiti drugi – tako je bilo i sa (96–15), umesto (96–14), kod glatke cevi. Drugi izraz – misli se na (96–18) – može se napisati u monomnom obliku:

$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \frac{3,7D}{k}$ <p>obrazac za hrapave cevi</p>	(96–19)
---	---------

Korisno je primetiti da je do obrazaca (96–16) i (96–19) dovela primena logaritamske zakonitosti rasporeda brzine za ceo sloj uz vrednosti konstanti $C_I = 2,5$, $C_{II} = 5,5$, $C_{III} = 8,5$.

Prihvatanje drukčijih vrednosti za te konstante, u (94–23) i (94–29), dovela bi opet do logaritamskih izraza za λ , upravo za $\sqrt{1/\lambda}$, samo bi u (96–16), odnosno (96–19) bile drukčije konstante (umesto 2 i 2,5, odnosno umesto 2 i 3,7), ali ne mnogo različite od ovih, jer se svi navodi o konstantama C_I , C_{II} i C_{III} kreću u granicama koje se mnogo ne razlikuju. Čak i da su se primenili složeniji izrazi za raspored brzina, pa čak i oni sa dve zakonitosti (za „prizidni” i „udaljeni deo sloja”), ne bi se mnogo izmenili rezultati za λ , jer nije bilo značajnih razlika ni u rasporedima brzina koji proizilaze iz, na prvi pogled, različitih pretpostavki za zakonitosti za raspored brzina.

II

PRIMENA DIMENZIONALNE ANALIZE NA OTPORE TRENJA U CEVI; EKSPERIMENTALNI REZULTATI SA JEDNOLIKOM PEŠČANOM HRAPAVOSTI

Postupak nazvan „dimenzionalna analiza”, objašnjen u Poglavlju 61, primeniće se na otpore trenja u cevima.

Napon trenja τ između fluida i zidova cevi zavisi od: prečnika D , srednje brzine v za presek (čime je određen i proticaj), apsolutne hrapavosti k (to je visina izbočina na zidu cevi) i od vrste fluida (što se izražava gustinom ρ i koeficijentom viskoznosti μ). Međusobna veza 6 nabrojanih veličina je:

$$f^{\text{dim}}(\tau, D, v, k, \rho, \mu) = 0$$

Ovu funkciju od 6 dimenzionalnih veličina, primenom dimenzionalne analize, zamenjuje sledeća funkcija od $6 - 3 = 3$ bezdimenzionalne veličine. Za osnovne veličine uzimaju se D, ρ, v , pa se dobija:

$$f^{\text{bezdim}}\left(\frac{\tau}{\rho v^2}, \frac{k}{D}, \frac{\mu}{\rho D v}\right) = 0 \quad (96-20)$$

Iz (96-4) se vidi da prvi član pomnožen sa 2 daje koeficijent trenja C_τ , a množenjem C_τ sa 4 dobija se, kako pokazuje (96-11), koeficijent λ .

Prema tome, umesto prvog člana u (96-20) može se staviti:

$$\text{koeficijent trenja za kružne cevi} = \lambda = \frac{8\tau}{\rho v^2} \quad (96-21)$$

Drugi član je:

$$\frac{k}{D} = \frac{\text{apsolutna hrapavost}}{\text{prečnik}} = \text{relativna hrapavost} \quad (96-22)$$

Recipročna vrednost trećeg člana je:

$$\text{Rejnoldsov broj} = Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu} \quad (96-23)$$

malo pre već korišćen i napisan sa (96-12).

Navedeno omogućava zamenu u (96–20), pa se trenje može iskazati sledećom funkcijom bezdimenzionalnih veličina:

$$\lambda = \lambda \left(\frac{k}{D}, Re \right) \quad (96-24)$$

* * *

Poznavanjem koeficijenta trenja za kružne cevi (λ) za zadati proticaj (tj. za poznatu brzinu v), poznat je i napon trenja (τ), jer (96–21) daje:

$$\tau = \lambda \frac{\rho v^2}{8} \quad (96-25)$$

a onda je poznat nagib linije energije I_E , koji je kod jednolikoga tečenja jednak nagibu pijeziometarske linije I_{II} :

$$I_E = I_{II} = \frac{\tau}{\gamma D/4} \quad (96-26)$$

što je napisano na osnovu (94–9) ili (93–52), uz zamenu $r = D/2$.

Prethodna dva izraza (96–25) i (96–26) daju vezu između I_{II} i brzine v :

$$I_E = I_{II} = \lambda \frac{v^2}{2gD} \quad (96-27)$$

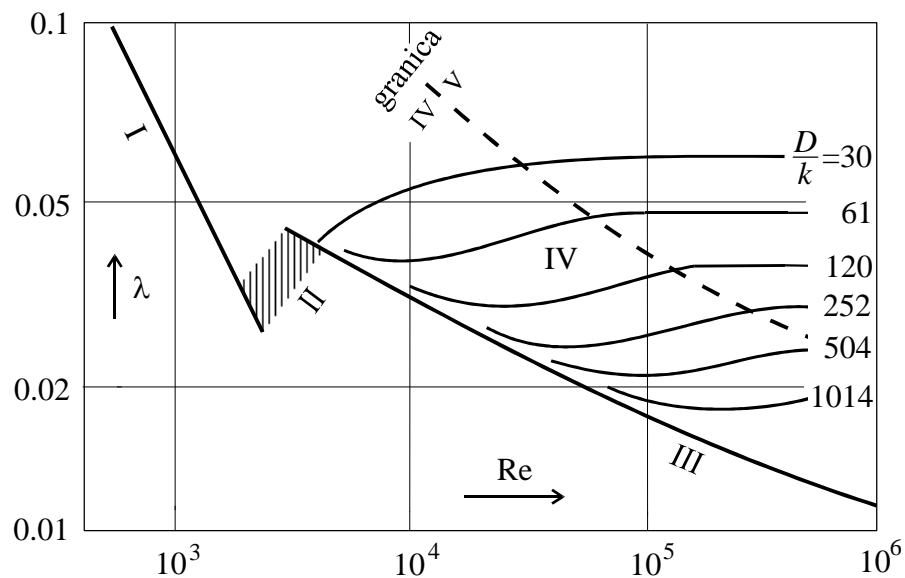
što je takođe već napisano sa (91–23).

Prema tome, poznavanjem λ , zadatak je u potpunosti rešen.

* * *

U opšti izraz za trenje u cevi kružnog preseka (96–24) uklapaju se zakonitosti (96–16) i (96–19), napisane, kao posebni slučajevi, za glatku, odnosno hrapavu cev, gde λ zavisi samo od Re , odnosno samo od k/D . Potpuna zavisnost (96–24) – tj. zavisnost λ i od Re i od k/D , ostvariće se u prelazu iz glatke u hrapavu cev, o tome će biti reči u narednim izlaganjima.

Grafički prikaz funkcije (96–24) na osnovu Nikuradzeovih opita jeste sl. 96–1, koja podseća na harfu, pa se taj prikaz ponegde naziva „Nikuradzeova harfa”. Ti opiti prvi put su pomenuti u Poglavlju 94, u Odeljku III, gde je i opisana „peščana jednolika hrapavost” upotrebljavana u



I - laminarno strujanje - obrazac (93-57)

II - prelaz iz laminarnog u turbulentno strujanje

turbulentno strujanje { III - glatka cev $\lambda = \lambda(\text{Re})$ - obrazac (96-16)
IV - prelazna oblast $\lambda = \lambda(\text{Re}, k/D)$
V - oblast hrapavih cevi $\lambda = \lambda(k/D)$ - obrazac (96-19)

Slika 96-1 Zavisnost koeficijenta trenja (λ) od Re -broja i relativne hrapavosti (k/D) prema Nikuradzeovim opitima

tim opitima. Iz tih opita proizišli su rasporedi brzina (94-25) i (94-30), a iz njih, malo pre u Odeljku I ovog poglavlja, izvedene su pomenute zakonitosti (96-16) i (96-19).

LAMINARNO STRUJANJE – LINIJA (I) NA SLICI 96-1

U Poglavlju 93 raspravljeno je laminarno strujanje u cevi kružnog poprečnog preseka, i tako je izrazom (93-57) određen λ . Taj izraz se prepisuje:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (96-28)$$

Zamenjivanjem λ prema prethodnom izrazu u jednačini (96-27) dobija se:

$$I_E = \frac{64\nu v^2}{vD^2 2g} = \frac{32\nu v}{gD^2}$$

Iz prethodnog se vidi da se ostvaruje „*linearna zakonitost otpora*“: Napon trenja τ za istu cev i isti fluid (isto D , ρ i μ) srazmeran je srednjoj brzini v u preseku, a to znači i proticaju. Onda se tako ostvaruje srazmernost između nagiba I_E linije energije i brzine v .

PRELAZ IZ LAMINARNOG U TURBULENTNO STRUJANJE – OBLAST (II) NA SLICI 96–1

U Poglavlju 64 objašnjen je prelaz iz laminarnog u turbulentno strujanje – taj prelaz prikazuje ubedljivo „Rejnoldsov eksperiment“, prikazan na sl. 64–2. U izlaganjima koja prate tu sliku razjašnjeno je da se pouzdano može tvrditi da je strujanje laminarno ako je Re -broj manji od 2000, a da iznad te vrednosti postoji izvestan pojas Re -brojeva gde se još može održati laminarno strujanje mada je ono tu nestabilno, može se veoma malenim poremećajem preobratiti u turbulentno. Pošto ne postoji potpuno određena granica između laminarnog i turbulentnog strujanja (koja će se uvek i svuda tačno ostvariti) prelaz (II) na sl. 96–1 je prikazan kao „pojas“, a ne jednom linijom.

TURBULENTNO STRUJANJE U GLATKOJ CEVI – LINIJA (III) NA SLICI 96–1

Otpori su izraženi sa:

$$\lambda = \lambda(Re) \quad (96-29)$$

što je skraćeni izraz u odnosu na opšti (96–24), jer je otpao uticaj hrapavosti, pošto laminarni podsloj potpuno pokriva izbočine, koje čine hrapavost. To je opširno raspravljano u Odeljku III Poglavlja 94. Određene funkcije (96–29), prema Nikuradzeovim opitima, je izraz (96–16) čiji je grafikon linija (III) na slici 96–1. Treba se još podsetiti da je oblast glatkih cevi ograničena prvim izrazom u (94–33), jer ako on nije zadovoljen, cev se ne ponaša kao glatka.

PRELAZ IZ GLATKE U HRAPAVU CEV – OBLAST (IV) NA SLICI 96–1

Debljina podsloja u kome se ostvaruje laminarno strujanje može se oceniti na osnovu izraza (94–32), koji se može napisati i drugačije, koristeći $Re = vD/\nu$ i $\lambda = 8\tau/\rho v^2$:

$$\frac{\delta_c \sqrt{\tau/\rho}}{\nu} = \frac{\delta_c v}{\nu} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} = \frac{\delta_c}{D} Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}} = 5 \quad (96-30)$$

Iz izraza (96-16) se vidi da rašćenjem $Re\sqrt{\lambda}$ opada λ , a iz linije (III) na sl. 96-1 uviđa se da opadanjem λ raste Re . Prema tome rašćenjem Re -broja rašće i $Re\sqrt{\lambda}$, a onda, shodno poslednjem izjednačenju u (96-30), opada δ_c/D . Dakle, za isti prečnik podsloj je tanji ako je Re -broj veći. Za isti prečnik i isti fluid (isto D i ν) podsloj se tanji rašćenjem brzine v tj. rašćenjem proticaja. Svojevremeno, u Poglavlju 62, objašnjeno je da Re -broj ukazuje na razvijenost turbulencije (što je Re veći uticaji viskoznosti na osrednjeno strujanje su sve slabije izraženi u odnosu na uticaje fluktuacija), pa je prednji zaključak u skladu sa tim, jer tanjenje laminarnog podsloja znači sve razvijeniju turbulenciju, ona sve više potiskuje podsloj, dok manje razvijena turbulencija daje deblji podsloj. Ako pak turbulencije nema, može se shvatiti da tada laminarni podsloj obuhvata ceo presek, dok turbulentnog sloja uopšte nema.

Izrazima (94-33) određene su granice za glatku i hrapavu cev, a između njih je prelazna oblast. U svakoj cevi rašćenjem Re -broja tanji se podsloj, pa ona „prestaje da bude glatka” jer izbočine počinju da štrče iz podsloja i hrapavost počinje da utiče na otpore (ali pored nje utiče i viskoznost, uticaj viskoznosti postaće zanemarljiv tek daljnjim rašćenjem Re -broja, daljnjim tanjenjem podsloja, kada izbočine toliko prodru u sloj, da „cev postane hrapava”). U prelaznoj oblasti (IV) iz glatke u hrapavu cev, ostvaruje se, dakle:

$$\lambda = \lambda \left(Re, \frac{k}{D} \right) \quad (96-31)$$

tj. potpuna funkcija (96-24) jer nijedan od dva u zagradi upisana uticaja nije zanemarljiv u odnosu na drugi.

Koristeći iste zamene kao kod pisanja (96-30) mogu se granice „prelazne oblasti” date sa (94-33) napisati izrazima gde se pojavljuju λ i Re . „Prelazna oblast” zahvata sledeće:

$$5 < \frac{k\sqrt{\tau/\rho}}{\nu} = \frac{kv}{\nu} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} = \frac{k}{D} Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}} < 70 \quad (96-32)$$

Donja granica u ovom izrazu omogućava da se odredi vrednost broja, gde se linija za određenu relativnu hrapavost „odlepljuje” od linije (III)

za glatku cev. To je određeno sistemom jednačina, u kome je jedna od jednačina:

$$\frac{k}{D} Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}} = 5 \quad (96-33)$$

a druga je jednačina (96-16) za glatku cev. Iz sistema te dve jednačine, za određenu vrednost k/D , dobija se Re -broj, gde ta relativna hrapavost k/D počinje da utiče na trenje (tu je navedeno „odlepljenje”).

Zadržavajući istu levu stranu prethodne jednačine (96-32), a stavljajući na desnu stranu 70 (umesto 5), i koristeći još i jednačinu (96-19) za hrapavu cev, dobija se sistem od dve jednačine, iz kojih je, za određeno k/D , određen Re -broj, gde ta relativna hrapavost k/D napušta prelaznu oblast (IV) i ulazi u oblast hrapavih cevi (V).

TURBULENTNO STRUJANJE U HRAPAVOJ CEVI – OBLAST (V) NA SLICI 96-1

Cev se ponaša kao hrapava ako je

$$\frac{k}{D} Re \sqrt{\frac{\lambda}{8}} > 70$$

što proizlazi iz izraza (96-32) – ta granica ucrtana je na sl. 96-1 kao granica između (IV) i (V).

Za oblast „hrapavih cevi” opšta funkcija (96-24) svodi se na:

$$\lambda = \lambda \left(\frac{k}{D} \right) \quad (96-34)$$

Određenje ove funkcije, prema Nikuradzeu napisano je sa (96-19). Za jednu određenu cev ($k/D = \text{const}$), kada se ponaša kao hrapava, daje koeficijent trenja $\lambda = \text{const}$, a to znači, za trenje istoga fluida, *srazmernost napona trenja i kvadrata brzine* (ili kvadrata proticaja). To se može napisati sa:

$$\tau = \text{const } v^2 \quad \text{const} = \lambda \rho / 8 \quad (96-35)$$

Za izražavanje konstante korišćen je izraz (96-25). Uspostavlja se, dakle, ono što se naziva „*kvadratna zakonitost otpora*”. S obzirom da

je τ za isti provodnik, srazmeran sa I_E , što proizilazi iz osnovne jednačine trenja (96–26), i *nagib linije energije*, I_E , je *srazmeran sa kvadratom brzine* (tj. sa kvadratom proticaja). To je vidljivo i iz (91–23), za $\lambda = \text{const}$.

„Kvadratna zakonitost” znači da se ostvaruje ono što se nazivalo „razvijena turbulencija”, a to znači da su za osrednjeno strujanje premoćni uticaji fluktuacija (to su inercijalni uticaji, to je otuđenje energije u vrtloge, u fluktuacije) dok su uticaji viskoznosti beznačajni. Tumačenje pojma „hrapav zid”, na početku Odeljka III Poglavlja 94, neposredno po uvođenju u razmatranje pojmova „gladak” i „hrapav zid”, bilo je u smislu da „hrapav zid” stvara „razvijenu turbulenciju”, pa je onda viskoznost neuticajna na osrednjene vrednosti veličina, pa i na osrednjenu vrednost napona trenja (a svuda se pod oznakom τ podrazumeva osrednjena vrednost), a to onda znači neuticajne *Re*-broja na bezdimenzionalnu zamenu za τ , na koeficijent trenja λ . Stoga je u (96–24) izostavljen *Re*-broj i napisalo se (96–34). Pod „izgubljenom energijom” kod „hrapavih cevi” podrazumeva se ono što je otuđeno iz glavnog strujanja u fluktuacije, što je takođe razjašnjeno u već pomenutom izlaganju u Odeljku III, Poglavlja 94.

„Otpor hrapavog zida” može se protumačiti kao „otpor tela” (kao otpor izbočina, na koji one utiču, svojim dimenzijama, oblikom i rasporedom po zidu), dok se „otpor glatkog zida” može nazvati „otpor trenja u užem smislu reči”, jer na njega ne utiču nikakva tela (nikakav oblik). Izbočine na zidu, sačinjavaju ono što se nazvalo „hrapavost”, a to se može shvatiti kao veoma mnogo tela koji pružaju otpor. Na prednjoj strani svake izbočine (kao kod svakog tela koje se suprotstavlja strujanju) pritisci se povećavaju, a na stražnjoj strani smanjuju, a ta razlika pritiska i jeste ono što daje pretežni deo otpora izbočina. Otpor svih izbočina obračunava se po jedinici površine zida, i to onda čini „trenje” kod hrapavoga zida.

III

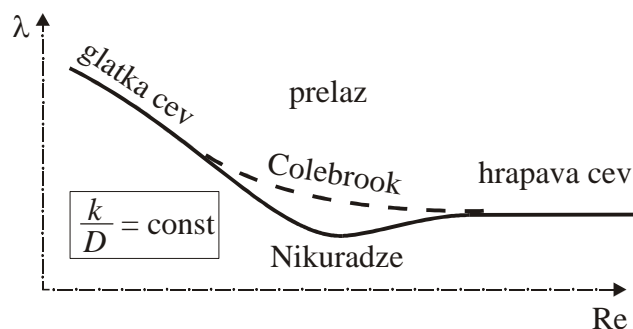
OTPORI TRENJA U CEVIMA U PRAKTIČNOJ UPOTREBI

Dosadašnja razmatranja se odnose na jednoliku peščanu hrapavost (sa kojom je opite obavio Nikuradze), a cevi u praktičnoj upotrebi nisu tako ohrapavljene. Kod njih je hrapavost nejednolika i po vrednosti (po

visini izbočina) i po obliku. O tome će se opširnije raspravljati u Odeljku I Poglavlja 99, a za sada se treba podsetiti navedenog u Odeljku III Poglavlja 94, gde se već postavilo pitanje nejednolikosti hrapavosti u praktičnim slučajevima, i dat je odgovor da hrapavost u pojedinom slučaju treba izraziti „*ekvivalentnom jednolikom peščanom hrapavosti*”, koja daje isti otpor. Ovo, međutim traži obrazloženo opravdanje, jer se može postaviti pitanje: Da li će hrapavost drukčija po obliku od peščane, i nejednolika, slediti zakonitost za jednoliku peščanu? Po načelima sličnosti to se, bez ikakvih dodatnih dokaza, ne sme tvrditi. Može se prihvatiti jedino ako postoje dopunska iskustvena saznanja da je izražavanje sa „*ekvivalentnom jednolikom peščanom hrapavosti*” prihvatljivo za praktične potrebe, jer se dobijaju dovoljno dobri rezultati za praksu. A to je tako i prihvaćeno u praksi.

* * *

Između prikaza na sl. 96–1 i opaženih rezultata kod cevi u praktičnoj upotrebi primećena je načelna razlika u ponašanju u „prelaznoj oblasti” (IV), koja se pripisuje razlici u delovanju hrapavosti pri napuštanju zakonitosti za glatku cev. Kod jednolike peščane hrapavosti povećanjem *Re*-broja (čime podsloj postaje tanji) sve izbočine počinju da štrče iz podsloja odjednom (jer su jednake), pa se to ispoljava kroz naglo odvajanje linije za određenu relativnu hrapavost (za određeno k/D) od linije (III). Nadalje, linija za određeno k/D u prelaznoj oblasti (IV) ima minimum pa se iza njega popela na vrednost za λ koju kao konstantu zadržava kroz celu oblast (V) za hrapave cevi. Kod nejednolike hrapavosti (kakve su redovno u praktičnoj upotrebi) raščćenjem *Re*-broja, izbočine postepeno probijaju podsloj: prvo najveće, pa se uključuju sve manje – stoga je odvajanje linije za određeno k/D od linije (III) postepenije (nego kod jednolike hrapavosti), a postepenije je i uključivanje linije za određeno k/D u $\lambda = \text{const}$. Sem te postepenosti, linija za određeno k/D nema uopšte minimuma. Pomenute razlike za jednoliku i nejednoliku hrapavost prikazane su na sl. 96–2, gde se zakonitost za nejednoliku hrapavost pripisuje *Kolbruku* (COLEBROOK). Za to ime vezana je formula, koja uključuje (III), (IV) i (V) tj. celokupno turbulentno strujanje (glatku cev, prelaz iz nje u hrapavu i hrapavu cev), a izražavajući baš postepeno napuštanje linije (III) i postepeno uključivanje u liniju $\lambda = \text{const}$ za određeno k/D . To se vidi na sl. 96–3



Slika 96–2 Prelaz iz glatke u hrapavu cev pri jednolikoj hrapavosti (prema Nikuradzeovim opitima) i pri nejednolikoj hrapavosti (prema Kolbrukovom obrascu)

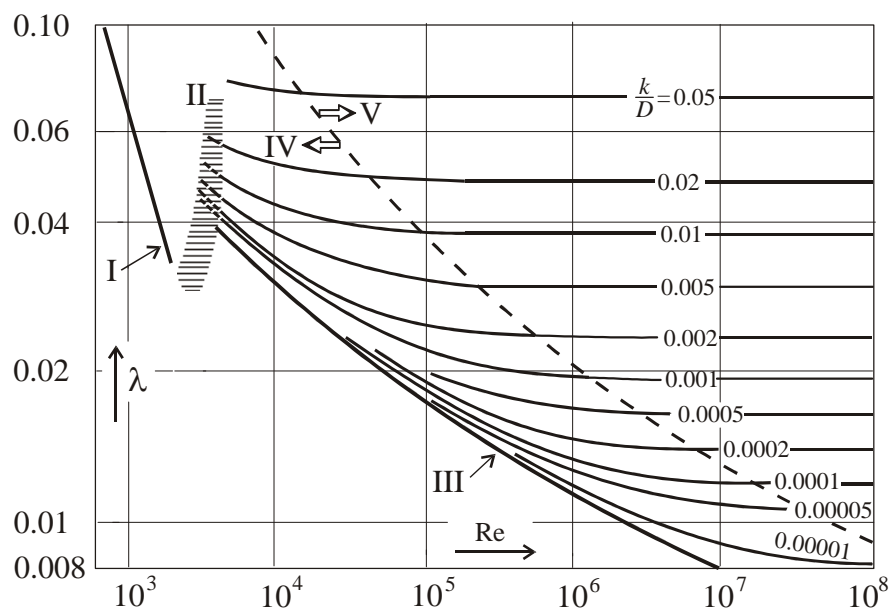
koja je grafički prikaz slučajeva izraza:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,5}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3,7D} \right) \quad (96-36)$$

Kolbrukova formula (COLEBROOK) za otpore trenja pri turbulentnom tečenju u cevi

Napisana formula izražava ono što je unapred rečeno. Naime, ako je drugi član u zagradi zanemarljiv u odnosu na prvi, onda se svodi na izraz (96–16) za glatku cev, a ako je pak prvi zanemarljiv u odnosu na drugi, ona postaje izraz (96–19) za hrapavu cev. Kada nije moguće zanemariti jedan član u odnosu na drugi, mora se uzeti celokupna formula i onda ona izražava prelaznu oblast između glatke i hrapave cevi, kako je načelno prikazano isprekidanom linijom na sl. 96–2, a što se takođe uviđa i iz grafičkog prikaza formule na sl. 96–3.

Izloženo ukazuje da Kolbrukova formula nije u suštini ništa novo u odnosu na Nikuradzeove izraze za glatku i hrapavu cev, ona ih je samo objedinila u jedan izraz i na pogodan način uključila i prelaznu oblast, i to na način koji odgovara cevima u praksi, čija je hrapavost nejednolika. Za računsku apsolutnu hrapavost k kod pojedinog praktičnog slučaja treba uzeti onu vrednost koja daje isti otpor trenja kao i peščana jednolika hrapavost – tako je svojevremeno i objašnjeno.



Slika 96–3 Zavisnost koeficijenta trenja λ od Re -broja i relativne hrapavosti (k/D) prema (93–57) za laminarno strujanje, a prema Kolbrukovom obrascu (96–36) za turbulentno strujanje

Kolbrukova formula dobila je široku primenu – prihvaćena je kao dobar jedinstven izraz za otpore trenja u turbulentnom tečenju. Uz ime Kolbruka za nju se vezuju i imena *Vajt* (WHITE) i *Mudi* (MOODY).

Uz Kolbrukovu formulu (96–36) ne treba smetnuti sa uma primedbe načelnog karaktera koji nameće sam način na koji se do nje došlo. Obrasci (96–16) i (96–19) napisani su za odvojene oblasti glatkih i hrapavih cevi, a dobijeni su iz logaritamskih zakonitosti za raspored brzina, uz određeni posebni granični prizidni uslov za glatke cevi, a posebni za hrapave. Kolbrukova formula samo je povezala već poznate obrasce za glatku i hrapavu cev u jedinstveni obrazac, a bez ulaženja u raspored brzina koji bi doveo do tog jedinstvenog obrasca. Nije se ulazilo ni u pokušaj da se odredi granični prizidni uslov, koji bi obuhvatio sadejstvo uticaja hrapavosti i uticaja viskoznosti.

* * *

Sa praktičnog stanovišta korisno je saznanje o tome dokle se jedna cev može računati kao hrapava, sa „kvadratnom zakonitošću otpora”,

tj. sa $\lambda = \text{const.}$ To znači dokle će zanemarenje prvog člana u (96-36) davati grešku u vrednosti za λ koja se može zanemariti. Takva procena će se obaviti i za nju se izraz (96-36) preobličava u:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{k}{3,7D} \left(1 + \frac{2,5}{Re\sqrt{\lambda}} \frac{3,7D}{k} \right) \right]$$

Zamenom Re sa vD/ν prethodno se piše sa:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \frac{k}{3,7D} - 2 \log \left(1 + \frac{9,25\nu}{vk\sqrt{\lambda}} \right) \quad (96-37)$$

* * *

Iz jednačine (96-19) uviđa se da je prvi član desne strane u prethodnom izrazu $\sqrt{1/\lambda}$ za hrapave cevi, pa će se označiti sa $\sqrt{1/\lambda_{hr}}$. Uz to će se izraz pomnožiti sa $\sqrt{\lambda}$ pa se dobija:

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_{hr}}} = 1 + 2\sqrt{\lambda} \log \left(1 + \frac{9,25\nu}{vk\sqrt{\lambda}} \right) \quad (96-38)$$

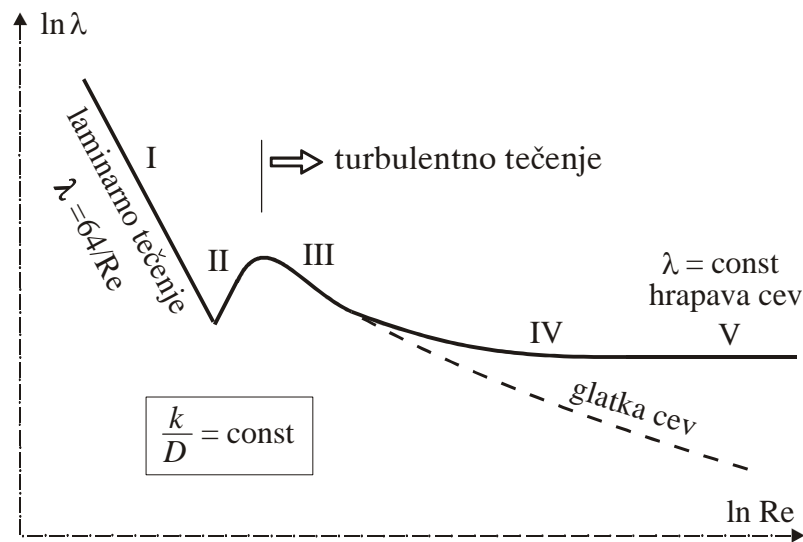
Za $vk/\nu = 750$, i za λ između 0,01 i 0,06 (između tih granica za λ nalaze se skoro svi praktički primeri) prethodna jednačina daje $\sqrt{\lambda/\lambda_{hr}}$ približno 1,01, pa je λ/λ_{hr} približno 1,02, a to znači da je tačna vrednost koeficijenta trenja veća za oko 2% od vrednosti koju daje račun za hrapavu cev. Upravo tolika je relativna greška ako se račun uprosti zanemarujući prvi član u zagradi u izrazu (96-36). Zaključuje se stoga da je:

$$\frac{\lambda}{\lambda_{hr}} < 1,02 \quad \text{za} \quad \frac{vk}{\nu} > 750 \quad (96-39)$$

Isto je već zaključeno izrazom (91-39).

* * *

Za jednu određenu cev k/D je konstanta, pa je za nju $\lambda = \lambda(Re)$, što je prikazano na sl. 96-4, na osnovu sl. 96-3. Posve razumljivo je da, raščćenjem Re -broja, jedna cev prolazi kroz svih pet oblasti od (I) do (V) sa sl. 96-3 – razume se ako se ostvare tako velike vrednosti Re -broja da se uđe u oblast (V).



Slika 96–4 Zavisnost $\lambda = \lambda(Re)$ za jednu određenu cev ($k/D = \text{const}$) – u njoj se mogu ostvariti tečenja iz svih 5 oblasti (I do V sa sl. 96–1, odnosno 96–3); zavisno od Re -broja u istoj cevi moguće je laminarno i turbulentno strujanje, a cev se može ponašati i kao glatka i kao hrapava

Ako se posmatra da kroz istu cev teče isti fluid tj. pored $k/D = \text{const}_1$, još je gustina $\rho = \text{const}_2$, i koeficijent viskoznosti $\mu = \text{const}_3$. Tada je srednja brzina v srazmerna sa Re -brojem, pa se zaključuje da se postepenim povećanjem brzine, počevši od veoma malene, za koju je strujanje laminarno, prelazi se u turbulentno tečenje i to cev se najpre ponaša kao glatka, zatim povećavanjem brzine ulazi u prelaznu oblast iz glatke u hrapavu cev, i na kraju, cev se ponaša kao hrapava. Dakle, raščćenjem brzine v cev prolazi redom kroz sve oblasti od (I) do (V).

Nagib linije energije $I_E = E_{izg}/L$ (gde je E_{izg} izgubljena energija na dužini L), koji je, kod jednolikog tečenja jednak nagibu pijeometarske linije, podatak je koji, pre svega, zanima tehničku praksu. O I_E se za istu cev i isti fluid može reći sledeće:

1. Za laminarno strujanje, naveden je izraz (96–28), za koga je primećeno da on iskazuje „linearnu zakonitost otpora”: za istu cev, i isti fluid, nagib I_E linije energije srazmeran je sa srednjom brzinom v .

Naime sa (96–28) je napisano:

$$I_E = I_{\Pi} = \frac{32\nu}{gD^2}v \quad (96-40)$$

što za istu cev i isti fluid daje:

$$I_E = \text{const}_{\text{lam}}v \quad \text{gde je} \quad \text{const}_{\text{lam}} = \frac{32\nu}{gD^2} \quad (96-41)$$

2. Za turbulentno strujanje u hrapavoj cevi, gde se za istu cev, kako je razjašnjeno pod (V), ostvaruje $\lambda = \text{const}$, što znači „kvadratna zakonitost otpora”, pa se primenom obrasca (91–23) dobija:

$$I_E = \lambda \frac{v^2}{2gD} = \frac{\lambda}{2gD}v^2 = \text{Const}_{\text{hr}}v^2 \quad (96-42)$$

$$\text{gde je} \quad \text{const}_{\text{hr}} = \frac{\lambda}{2gD} \quad (96-43)$$

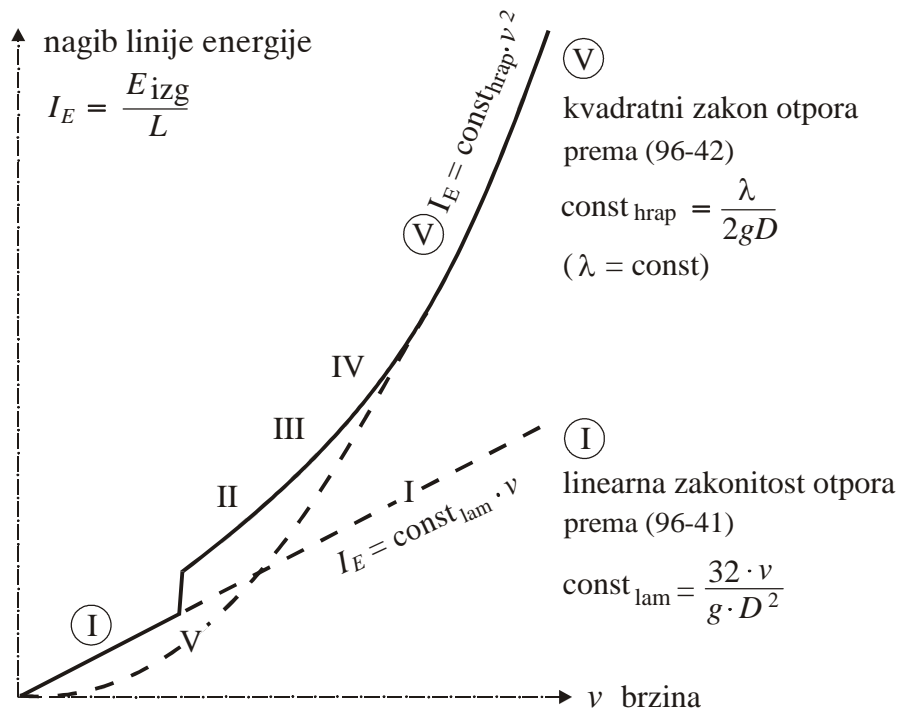
3. Izrazi (96–41) i (96–43) korišćeni su za crtanje slike 96–5, gde oni predstavljaju oblasti (I) i (V) sa sl. 96–1, odnosno 96–3. Između toga su oblasti (II), (III) i (IV), gde zakonitost otpora nije ni linearna, ni kvadratna.

Na prelazu iz (I) u (II) skok je u izgubljenju energiji, jer stvaranje turbulencije naglo povećava gubitke, to se vidi i iz slika 96–1, 96–3 i 96–4. Nadalje, i ovde je uočljivo da turbulentno tečenje (III, IV, V) daje znatno veće gubitke, nego što bi dalo laminarno (I) kada bi se moglo održati.

IV

UTICAJ OTPORA TRENJA NA RASPORED BRZINA

Raspored brzina u cevi prikazaće se u takvom obliku da se ubedljivo izrazi znatno manja neravnomernost srednjih brzina kod turbulentnog strujanja, nego kod laminarnog, i nadalje, da se pregledno ispolji kako otpor trenja utiče na veću ili manju neravnomernost kod turbulentnog strujanja.



Slika 96–5 Zavisnost izgubljene energije E_{izg} od brzine v za određenu dužinu L jedne određene cevi pri strujanju istog fluida

Iz izraza (94–31), napisanog za „deficit brzine”, uz zamenu h sa r , piše se za brzinu \bar{u} na rastojanju x_2 od zida:

$$\bar{u} = \bar{u}_m - 2,5 \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \ln \frac{r}{x_2}$$

Srednja brzina v , prema (96–9) iznosi:

$$v = \bar{u}_m - 3,75 \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

Oduzimanjem drugog napisanog izraza od prvog dobija se:

$$\bar{u} - v = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \left(3,75 - 2,5 \ln \frac{r}{x_2} \right)$$

iz čega se piše odnos lokalne i srednje brzine

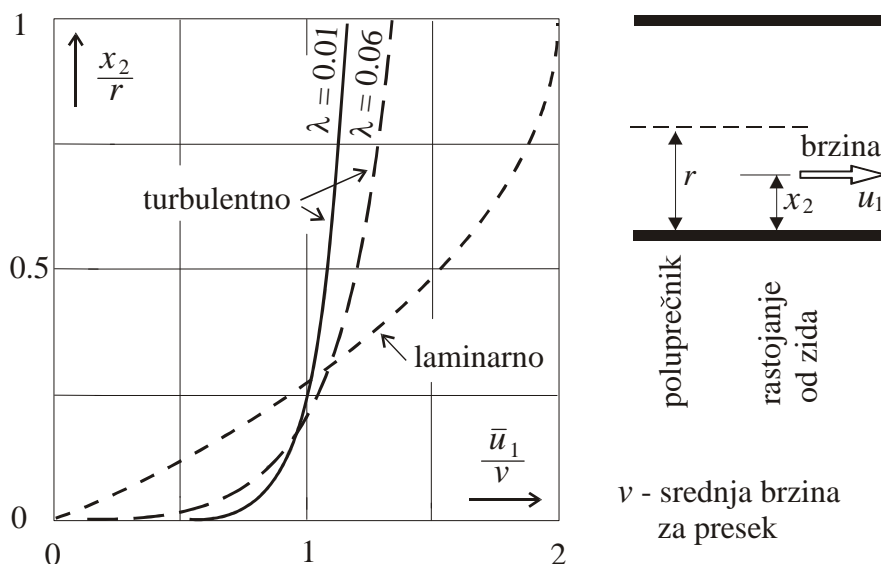
$$\frac{\bar{u}}{v} = 1 + \frac{\sqrt{\tau/\rho}}{v} \left(3,75 - 2,5 \ln \frac{r}{x_2} \right)$$

Kako je $\tau/\rho v^2$ prema (96-25) jednako $\lambda/8$, prethodno se piše sa:

$$\frac{\bar{u}}{v} = 1 + \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \left(3,75 - 2,5 \ln \frac{r}{x_2} \right) \quad (96-44)$$

Tako se dobija lokalna brzina \bar{u} , izražena u odnosu na srednju brzinu v , u zavisnosti od relativnog rastojanja x_2/r od zida, a uz samo jednu parametarsku veličinu – to je koeficijent trenja λ . Vrednost za λ , u pretežnom delu zadataka za turbulentno strujanje, kreće se od 0,01 do 0,06, pa su na sl. 96-6 nacrtani rasporedi brzine za te dve vrednosti, a prema izrazu (96-44). Dodat je upoređenja radi, i raspored za laminarno strujanje, koji je određen sa (93-49), gde treba u_m zameniti sa $2v$, što proizilazi iz (93-53).

Slika 96-6 ubedljivo nameće zaključak da turbulentno strujanje daje mnogo ravnomerniji raspored osrednjenih brzina od laminarnog, što je



Slika 96-6 Rasporedi brzine u cevi kružnog preseka za turbulentno strujanje (pri koeficijentima trenja $\lambda = 0,01$ i $\lambda = 0,06$) i za laminarno strujanje

razumljivo, jer turbulencija, svojim mešanjem doprinosi ujednačavanju osrednjenih brzina. Slika pokazuje da je turbulentnost strujanja i ravnomernost brzina veća ako je vrednost koeficijenta trenja λ manja, a to je kod glatkih cevi pri većem Re -broju, a kod hrapavih pri manjoj relativnoj hrapavosti. Odnos maksimalne \bar{u}_m i srednje brzine v , koji može da posluži kao pokazatelj neravnomernosti, dobija se iz (96–9), jer je $\bar{u} = \bar{u}_m$ za $x_2 = r$:

$$\frac{\bar{u}_m}{v} = 1 + 3,75\sqrt{\frac{\lambda}{8}} \quad (96-45)$$

Za $\lambda = 0,01$, odnosno $0,06$, prethodni odnos je $1,13$, odnosno $1,32$. Praktični zadaci su redovno bliži nižoj vrednosti za λ , tako da je kod turbulentnog strujanja neravnomernost brzina slabo izražena dok je kod laminarnog jako izražena – tamo je \bar{u}_m/v jednako 2 , tako je napisano izrazom (93–53), a tako je i nacrtano na sl. 96–6.

97
EKSPONENCIJALNE ZAKONITOSTI ZA
RASPORED BRZINA I ZA OTPOR TRENJA

I
RASPORED BRZINA

Praktična primena eksponencijalnih izraza za raspored brzina nagoveštena je završnim izlaganjem Poglavlja 95. Za praktične zadatke predlaže se zavisnost:

$$\frac{\bar{u}}{u_m} = \left(\frac{x_2}{h}\right)^n \quad (97-1)$$

gde je n konstanta.

Oznake su iste kao i u dosadašnjim izlaganjima. Napisano važi do polovine struje između ploča do $x_2 = h$, a druga polovina je simetrična prvom.

Ovaj izraz je veoma prost (prostiji je teško zamisliti) i u tome je njegova praktična vrednost, pogotovo ako se pogodnim izborom za n dobije zavisnost koja sledi eksperimentalne podatke. Pobornici eksponencijalnih zavisnosti baš ih zastupaju zbog prostote izraza, iako su približni, a oni i logaritamskim izrazima, zbog neujednačenosti konstanti, primećuju takođe približnost, koja nije izbegnuta, iako je izraz složeniji.

Izraz (97-1) primenljiv je za slučajeve i sa glatkim i one sa hrapavim zidovima, samo se za prve mora uklopiti u funkciju (95-18), a za druge u (95-19).

* * *

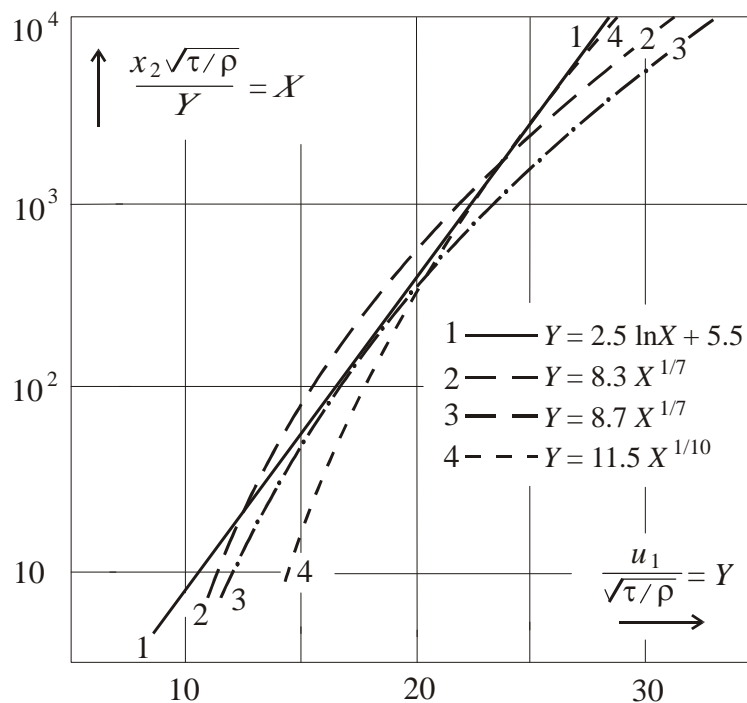
Najpre će se raspraviti provodnici sa *glatkim zidovima*. Za njih se na osnovu (95-18) i (97-1) piše:

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = C_n \left(\frac{x_2 \sqrt{\tau/\rho}}{\nu}\right)^n \quad (97-2)$$

$$\frac{\bar{u}_m}{\sqrt{\tau/\rho}} = C_n \left(\frac{h\sqrt{\tau/\rho}}{\nu} \right)^n \quad (97-3)$$

C_n je konstanta koja se određuje prilagođavanjem izraza eksperimentalnim podacima. Ako se ovi slažu sa logaritamskim zakonom, može se eksponencijalna funkcija shvatiti kao aproksimacija za logaritamsku. Sa $n = 1/7$ i $C_n = C_{1/7} = 8,3$ do $8,7$ (vidi linije 2 i 3 na sl. 97-1) dobija se zakonitost koja mnogo ne odstupa od logaritamske (prikazane kao 1 na istoj slici).

Jednačina (97-2) napisana je za turbulentni sloj, a za njega postoji granični uslov u njegovoj vezi sa laminarnim (viskozni) podslojem. Iz toga uslova proizilazi i vrednost konstanti C_n . Naime, na dodiru sloja i podsloja, mora da važi jednačina za podsloj (94-26) i jednačina za sloj (97-2); obe moraju da daju istu brzinu $\bar{u} = \bar{u}_c$



Slika 97-1 Upoređenje logaritamske (1) i tri eksponencijalne zakonitosti (2, 3, 4) za raspored brzina u turbulentnom sloju – glatki zidovi – logaritamska zavisnost prema (94-25)

za $x_2 = \delta_c =$ debljina podsloja. Upravo, može se napisati:

$$\frac{\bar{u}_c}{\sqrt{\tau/\rho}} = \frac{\delta_c \sqrt{\tau/\rho}}{\nu} = C_n \left(\frac{\delta_c \sqrt{\tau/\rho}}{\nu} \right)^n$$

iz čega sledi

$$C_n = \left(\frac{\delta_c \sqrt{\tau/\rho}}{\nu} \right)^{1-n} \quad (97-4)$$

Ranije je sa (94-19) uveden Re_c kao bezdimenzionalna opšta konstanta za granicu podsloja i sloja. Ako se u prethodnom izrazu napravi smena, prema (94-21), C_n će se izraziti preko Re_c :

$$C_n = \left(\sqrt{Re_c} \right)^{1-n} \quad (97-5)$$

Treba se podsetiti da je prilikom izvođenja logaritamske zakonitosti uzeto $\sqrt{Re_c} = 11,6$. Tako je navedeno ispred pisanja (94-25), pa bi za $n = 1/7$ dalo $C_{1/7} = 11,6^{6/7} = 8,2$. Za malo pre prihvaćene vrednosti za C_n između 8,3 i 8,7 dobija se $\sqrt{Re_c}$ između 11,8 i 12,5, što ne predstavlja značajnije odstupanje, ali to nije ni merodavno za praktične zadatke, gde je potrebno raspraviti brzine u sloju za $x_2 \sqrt{\tau/\rho}/\nu$ veće od 30, a to se postiglo. Naime, pri kraju Odeljka III Poglavlja 94 objašnjeno je da neposredna veza između podsloja i sloja može da posluži samo kao obračunski granični uslov, a ne i za tačan raspored brzina na tom prelazu (iz podsloja u sloj), gde se obrazuje prelazna oblast, označena sa (II) na sl. 94-3 i 94-4. Uvođenjem te oblasti može se, ako za to postoji posebno zanimanje, tačno raspraviti raspored brzina na prelazu iz podsloja u sloj.

Na sl. 97-1 data je linija (4) sa $n = 1/10$, koja daje dobru saglasnost sa logaritamskim rasporedom za $300 < x_2 \sqrt{\tau/\rho}/\nu < 10^4$, a ceo sloj se može nalaziti u tom rasponu. Površan pogled na sliku ukazuje na velika odstupanja za male vrednosti, ali to može da čini čak manje od 3% celokupne debljine struje uz zid (ako je $h \sqrt{\tau/\rho}/\nu$ veće od 10^4 , a to se često dostiže).

Ne mora, i ne treba, da se podobnost eksponencijalne zakonitosti ceni prema podudaranju sa logaritamskom, ne mora se prva shvatiti kao aproksimacija druge. Eksponencijalnu zakonitost treba povezati

neposredno sa onim što ona predstavlja, tj. kao izraz koji se dobro prilagođava stvarno opaženim eksperimentalnim podacima. Treba reći da su mogućnosti eksponencijalnih izraza, pogotovo uz mogućnost izbora vrednosti za n i C_n , takve da mogu da izraze ono što je stvarno opaženo. Sliku 97–1 trebalo bi stoga shvatiti kao iskazivanje da su mogućnosti eksponencijalnih izraza iste kao i mogućnosti logaritamskih izraza (gde je takođe moguće menjanje konstanti) da bi se izrazilo ono što je u datom slučaju stvarno opaženo. Treba zapaziti da se eksponencijalna zakonitost, prikazana sa (2) ili (3) na sl. 97–1, dobro slaže sa logaritamskom zakonitošću (linija 1), za deo sloja bliže zidu, a da se za udaljeniji deo sloja linije osetno razdvajaju. To bi se, međutim, moglo čak shvatiti kao prednost eksponencijalne zakonitosti, ako se dovede u vezu sa izlaganjima u Odeljku IV Poglavlja 94, gde se uvodi izraz „udaljeni deo sloja”, za koga se napušta logaritamska zakonitost, koja se zadržava samo u „prizidnom delu sloja” (što je prikazano slikom 94–4). Linije (2) i (3) na sl. 97–1 upravo to i izražavaju.

Svi praktični primeri za glatke cevi ulaze u prilično uske granice za n i C_n , $n = 1/10$ do $1/7$, a C_n između 8 i 11. To je i razumljivo, jer velikih odstupanja između rezultata opažanja ne može ni da bude.

* * *

Mogu se napisati i izrazi za raspored brzina koje nameću *hrapavi zidovi*. Izraz (97–1), kako je objašnjeno važi i za glatke i za hrapave zidove, samo se izrazi za hrapave zidove, umesto u (95–18), moraju uklopiti u funkciju (95–19). Tako se dobija:

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = C_n \left(\frac{x_2}{k} \right)^n \quad (97-6)$$

$$\frac{\bar{u}_m}{\sqrt{\tau/\rho}} = C_n \left(\frac{h}{k} \right)^n \quad (97-7)$$

Prva jednačina, sa $x_2 = k$ i $\bar{u} = u_k$, i sa korišćenjem (94–28), svodi se na:

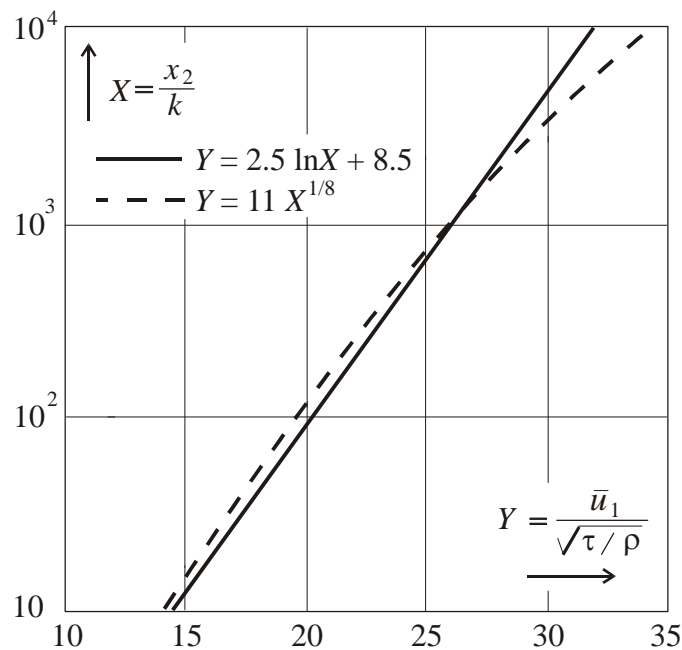
$$C_n = \frac{\bar{u}_k}{\sqrt{\tau/\rho}} = C_{\text{III}} = \text{const} \quad (97-8)$$

* * *

Ovo ukazuje da bi C_n trebalo da bude konstanta, nezavisna od vrednosti za n . Vrednost konstante C_n nadalje je jednaka C_{III} , a za ovu se ranije, za pisanje (94–30), uzelo $C_{III} = 8,5$. Međutim, ne uzima se svuda $C_n = 8,5$ jer je malopre objašnjeno da nije merodavna formula podudarnosti ovako izabranih graničnih uslova, nego što bolje slaganje kroz ceo sloj. Tako, na primer, zavisnost:

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau/\rho}} = 11 \left(\frac{x_2}{k} \right)^{1/8} \quad (97-9)$$

prikazana na slici 97–2 pokazuje veoma dobro slaganje sa logaritamskom zakonitošću sa $C_I = 2,5$ i $C_{III} = 8,5$, upravo sa izrazom (94–30) i uz ovo se može postaviti pitanje podudaranja eksperimentalnih podataka sa logaritamskom zavisnošću i iza toga o odgovarajućim konstantama koje to prilagođavanje najbolje sprovode. Mogu se obrazovati eksponencijalne zavisnosti sa n od $1/8$ do $1/6$ i sa C_n između otprilike 9 i 12, koje se mogu prilagoditi datom pojedinom slučaju. U tim granicama



Slika 97–2 Upoređenje eksponencijalne (97–9) i logaritamske funkcije (94–30) rasporeda brzina za hrapave zidove

za n i C_n naći će se i dobre aproksimacije i za drukčije vrednosti konstanti C_I i C_{III} u logaritamskim zakonitostima.

Na kraju, i ovom prilikom treba primetiti, da se sve prethodno o eksponencijalnim izrazima za rasporede brzina odnosi ne samo na ravansko strujanje, sa debljinom struje $2h$, nego i na strujanje u cevi kružnog preseka, za koju bi samo trebalo zameniti h sa r (poluprečnik).

II OTPORI TRENJA

Razmatraće se samo otpor trenja za cevi kružnog poprečnog preseka, upravo određivaće se koeficijent trenja λ za taj slučaj, jer je to redovni praktični zadatak. Struja između ploča će se izostaviti, a za nju, ako se želi, može se odrediti koeficijent C_τ napona trenja τ na isti način kao kod logaritamske zakonitosti, u početku Poglavlja 96 (samo bi se sada uzela eksponencijalna zakonitost).

Za koeficijent trenja λ dobiće se eksponencijalni izraz, ako se za raspored brzina uzme eksponencijalni izraz jer su te dve zakonitosti (za λ i za raspored brzina) međusobno povezane.

Srednja brzina v za eksponencijalni raspored brzina dobiće se na isti način kao kod logaritamskog rasporeda: u izrazu (96–8) za proticaj, umesto logaritamskog, treba uvrstiti raspored brzina, napisan sa (97–1), uz zamenu h sa r (jer se isti raspored brzina prenosi na cev). Dobija se:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^r \bar{u} 2\pi(r - x_2) dx_2 = 2\pi r^2 \int_0^1 \bar{u} \left(1 - \frac{x_2}{r}\right) d\left(\frac{x_2}{r}\right) = \\ &= 2\pi r^2 \bar{u}_m \int_0^1 \left[\left(\frac{x_2}{r}\right)^n - \left(\frac{x_2}{r}\right)^{1+n} \right] d\left(\frac{x_2}{r}\right) \end{aligned}$$

Izjednačenje ovako izraženog proticaja sa $v\pi r^2$ daje odnos između maksimalne \bar{u}_m i srednje brzine v :

$$\frac{\bar{u}_m}{v} = \frac{(1+n)(2+n)}{2} \quad (97-10)$$

Prethodni izraz važi za glatku i za hrapavu cev, a u nastavku će se raspraviti glatka, a potom hrapava cev.

* * *

Za glatku cev primeniće se izraz (97-3) za maksimalnu brzinu u_m (uz zamenu h sa r). Množenjem toga izraza sa v/\bar{u}_m , a uz dodatna preuređenja, dobija se:

$$\frac{v}{\sqrt{\tau/\rho}} = \frac{v}{\bar{u}_m} C_n \left(\frac{r\sqrt{\tau/\rho}}{\nu} \right)^n = \frac{v}{\bar{u}_m} C_n \left(\frac{1}{2} \frac{Dv}{\nu} \right)^n \left(\frac{\sqrt{\tau/\rho}}{v} \right)^n$$

Preuređenje je imalo svrhu da se pojave $Re = Dv/\nu$ ($D = 2r =$ prečnik) i λ . Naime, prema (96-25), $v/\sqrt{\tau/\rho}$ je jednako $\sqrt{8/\lambda}$. Prethodno se tako svodi na:

$$\left(\sqrt{\frac{8}{\lambda}} \right)^{1+n} = \frac{v}{\bar{u}_m} C_n \left(\frac{Re}{2} \right)^n$$

pa se konačno, dobija izraz za koeficijent trenja:

$$\lambda = 8 \cdot 2^{\frac{2n}{1+n}} \left(\frac{\bar{u}_m}{C_n v} \right)^{\frac{2}{1+n}} Re^{\frac{-2n}{1+n}} \quad (97-11)$$

Na slici 97-1 prikazani su, a uz to i obrazloženi kao pogodni, rasporedi brzina sa $n = 1/7$ i sa $C_{1/7}$ jednako 8,3 i 8,7. Uzeće se navedena vrednost za n i sredina između navedenih vrednosti za C_n tj.

$$n = \frac{1}{7} \quad C_{1/7} = 8,5$$

Prema (97-10) za $n = 1/7$ dobija se:

$$\frac{\bar{u}_m}{v} = \frac{60}{49}$$

pa se, sa ovim navedenim podacima, primenom (97-11) dobija:

$$\lambda = 0,32 Re^{-1/4} \quad (97-12)$$

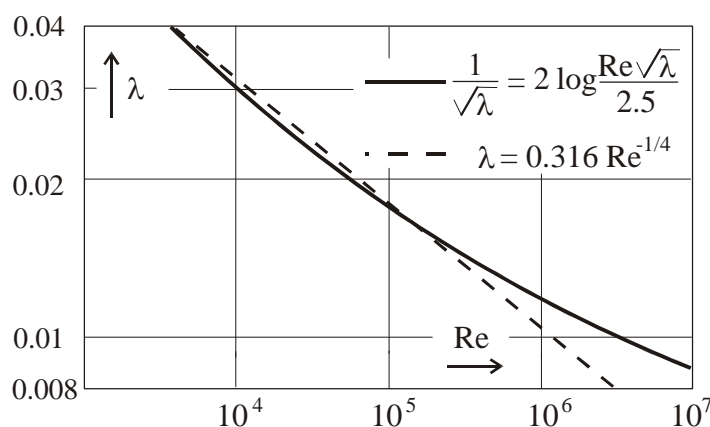
Sa vrednostima $C_{1/7} = 8,3$ odnosno 8,7, faktor ispred $Re^{1/4}$ iznosi 0,33, odnosno 0,31.

Za glatke cevi, još pre Nikuradzeovih opita, pojavila se *Blazijusova formula* (BLASIUS):

$$\lambda = 0,316 Re^{-1/4} \quad (97-13)$$

koja se podudara sa napisanim sa (97-12).

Iz sl. 97-3 uviđa se da je obrazac (97-13) veoma dobra aproksimacija za logaritamski izraz (96-16) za $Re < 3 \cdot 10^5$, a iza toga dolazi do odstupanja. Obrazac (97-13) već za $Re = 10^6$ daje 15% manje vrednosti od (96-16). Međutim, u pretežnom delu praktično ostvarljivih hrapavosti, cev će prestati da bude glatka pre dostizanja $Re = 10^5$. To se zaključuje iz slike 96-1, iz koje se vidi da se „odlepljivanje” od linije (III) – prelaz u oblast (IV) – događa pri $Re < 10^5$, ako je relativna hrapavost k/D veća od otprilike 10^{-4} , a time su obuhvaćene skoro sve cevi u praktičnoj upotrebi.



Slika 97-3 Upoređenje koeficijenta trenja λ prema logaritamskoj (96-16) i eksponencijalnoj zakonitosti (97-13) za glatku cev

Određena eksponencijalna zavisnost za raspored brzina nameće potpuno određenu zavisnost za koeficijent trenja λ , takođe eksponencijalnu. Izraz (97-11) može se napisati u obliku:

$$\lambda = \text{const } Re^{-N} \quad N = \frac{2n}{1+n} \quad (97-14)$$

const i N u ovom izrazu, kako iskazuje (97-11), zavise od n i C_n (dakle od usvojenog rasporeda brzina).

U razmatranom primeru bilo je $n = 1/7$, $C_n = C_{1/7} = 8,5$, i to je dovelo do (97-12), koji se uklapa u (97-14) sa const = 0,32 i $N = 1/4$.

Ako bi se želela napraviti eksponencijalna zavisnost za λ za glatke cevi, a koja bi se bolje slagala za logaritamskom, a za Re veće od $3 \cdot 10^5$,

trebalo bi uzeti za N manju vrednost od $1/4$. Ovo se uviđa iz slike 97-3, jer bi manjem nagibu linije odgovarala manja vrednost za N , a onda bi, shodno (97-11), trebalo uzeti manju vrednost za n (manju od $1/7$).

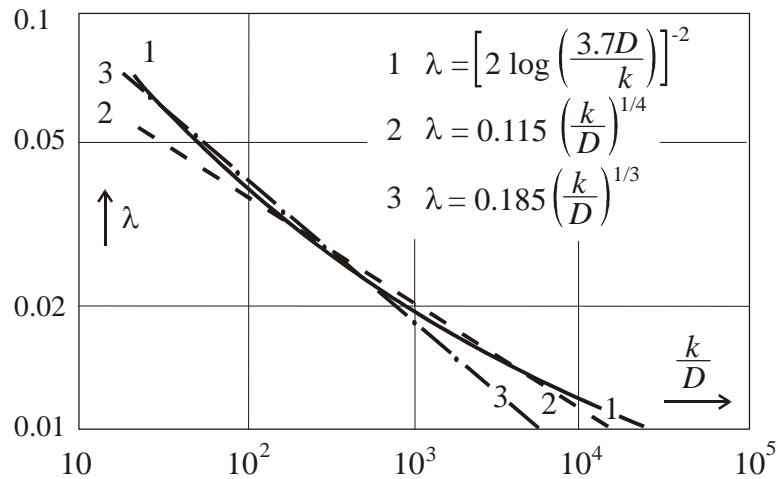
* * *

Za hrapave cevi mogu da posluže sledeći eksponencijalni obrasci:

$$\lambda = 0,115 \left(\frac{k}{D} \right)^{1/4} \quad (97-15)$$

$$\lambda = 0,185 \left(\frac{k}{D} \right)^{1/3} \quad (97-16)$$

čiji su grafički prikazi dati na slici 97-4, uporedo sa prikazom logaritamskog izraza (96-19). Uviđa se da se prvi napisani obrazac dobro prilagođava logaritamskom izrazu za $10^2 < D/k < 10^4$, a drugi za $20 < D/k < 1000$.



Slika 97-4 Upoređenje koeficijenta trenja λ prema logaritamskoj i dve eksponencijalne zakonitosti za hrapavu cev – izraženog sa (96-19), (97-15) i (97-16)

Obrasci (97–15) i (97–16) namerno su uzeti u razmatranje, jer su oni, u Poglavlju 91, već navedeni „na poverenje”, kao obrasci preporučljivi za praktičnu upotrebu – tamo su napisani sa (91–25) i (91–26). Tamo su napisane i granice za k/D u kojima se preporučuje prvi, odnosno drugi obrazac. Iste granice ovde se mogu opravdati uvidom u sliku 97–4. Treba posebno naglasiti da izraz (91–26), koji je malo pre napisan kao (97–16), daje iste rezultate kao u praksi veoma raširena Manningova formula (91–32), ako se povežu apsolutna hrapavost k i Manningov koeficijent hrapavosti n , onako kako iskazuje njihova međusobna veza (91–35).

U nastavku će se raspravljati kakvi rasporedi brzina dovode do izraza (97–15) i (97–16). Za hrapave cevi, treba napisati odgovarajući izraz za λ , kao što je za glatke cevi napisan (97–11). Maksimalnu brzinu \bar{u}_m izražava (97–7), uz zamenu $h = r = D/2$, što se odmah množi sa v/\bar{u}_m , pa se dobija:

$$\frac{v}{\sqrt{\tau/\rho}} = \frac{v}{\bar{u}_m} C_n \left(\frac{D}{2k} \right)^n$$

što, s obzirom da je leva strana jednaka $\sqrt{8/\lambda}$, daje

$$\lambda = 8 \left(\frac{\bar{u}_m}{C_n v} \right)^2 2^{2n} \left(\frac{k}{D} \right)^{2n} \quad (97-17)$$

Ovaj izraz pokazuje da se koeficijent trenja λ , za hrapave cevi, izražava sa:

$$\lambda = \text{const} \left(\frac{k}{D} \right)^{2n} \quad (97-18)$$

gde vrednost za const, kako iskazuje (97–17), određuju n i C_n iz obrasca (97–3), a to znači da zakonitost za raspored brzina određuje λ . U (97–17) pojavljuje se i \bar{u}_m/v , ali je taj odnos, shodno (97–10), određen izborom eksponenta n . Dakle i kod hrapavih cevi je nađeno isto kao kod glatkih cevi: određena zakonitost za raspored brzina nameće potpuno određenu zakonitost za koeficijent trenja λ .

Ako se uzme, primera radi, raspored brzina sa slike 97–2, gde je $n = 1/8$, a $C_n = C_{1/8} = 11$, izraz (97–17) daje:

$$\lambda = 0,112 \left(\frac{k}{D} \right)^{1/4} \quad (97-19)$$

Pri ovom računu korišćeno je:

$$\frac{\bar{u}_m}{v} = \frac{153}{128}$$

sračunato izrazom (97–10), za $n = 1/8$.

Dobijeno sa (97–19) neznatno se razlikuje od (97–15). Ako se želi da se dobije baš tačno izraz (97–15) odgovarajući raspored brzina bio bi dat sa istim izložiteljem ($n = 1/8$), ali bi C_n trebalo neznatno smanjiti sa 11 na 10,9.

Obrazac (97–16) dobija se sa $n = 1/6$ i $C_n = C_{1/6} = 9,3$.

Iz slike 97–4 lako se zaključuje da se bolje prilagođavanje logaritamskoj zakonitosti postigne sa većom vrednosti za n ako je obrazac namenjen relativno hrapavijim cevima.

* * *

Umesno je skrenuti pažnju na sledeće: Smanjivanjem vrednosti za n dobija se ravnomerniji raspored brzina (za $n = 0$ brzina po celoj struji bila bi ista). Odnos maksimalne i srednje brzine, \bar{u}_m/v , dat sa (97–10), pokazatelj je neravnomernosti i on se približava jedinici kada n opada – za $n = 1/6$, on iznosi 1,26, dok je za $n = 1/10$ jednak 1,15. Ovo upoređeno sa izrazom (96–45) i sa prikazom na slici 96–6, pokazuje da se navedeni pokazatelj neravnomernosti dobija skoro u istim granicama i primenom logaritamskog rasporeda brzina, uz napomenu da je on izrazitiji ako je tamo koeficijent λ veći, a ovde ako je izložitelj n veći.

* * *

Dosadašnja razmatranja u ovom poglavlju (97) mogla bi se shvatiti kao da eksponencijalnu zakonitost za raspored brzina treba isključivo shvatiti kao aproksimaciju za logaritamsku zakonitost, a onda prihvaćeni raspored brzine u vidu eksponencijalnog izraza nameće svoj izraz (takođe eksponencijalnog oblika) za koeficijent trenja λ . No, može se kao zadatak postaviti i neposredno uslovljavanje eksponencijalnog izraza za λ , koji se dobro prilagođava logaritamskom izrazu (za λ), a da se pri tome ne razmatra raspored brzina. Tako se eksponencijalni izrazi mogu shvatiti kao aproksimacije za logaritamske (prostiji izrazi mogu da posluže kao zamene za složenije). To bi značilo da je logaritamska zakonitost za raspored brzina neprikosnovena, da je proizašla

iz potpuno određenih uslova, i postupkom kome se ne može staviti nikakva primedba. Drugim rečima: ne bi bilo uopšte osnove da se razložno razmišlja o nekakvoj drugačijoj zakonitosti za raspored brzina (ako je to tako, onda isto važi i za ono što iz toga, kao neminovno izlazi, a to je logaritamska zakonitost za λ). Ako bi se takvo shvatanje prihvatilo, onda eksponencijalnim zakonitostima ne bi bilo ni mesta, jer čemu aproksimacija jedne već dosta jednostavne zakonitosti – logaritamske.

Međutim, navedena shvatanja ne bi bila u potpunom skladu sa završnim izlaganjima u Poglavlju 95, gde je rečeno, a na osnovu razmatranja u poglavljima 94 i 95, da se logaritamska zakonitost za raspored brzina ne može prihvatiti kao neprikosnovena i kao jedino moguća. Ona se prihvatila, između ostaloga, zbog jednostavnosti izraza za nju, dok izrazi složeniji od nje nisu, uprkos svoje složenosti, davali veće pouzdanje za tačnost rezultata. Iz toga je proizašao i nagoveštaj da bi imalo smisla primeniti još prostije izraze i tako su najavljeni eksponencijalni izrazi (uz pominjanje da će biti izloženi u Poglavlju 97).

Prema tome, mogu se eksponencijalni izrazi shvatiti kao izrazi koji obuhvataju eksperimentalne rezultate, tj. oni su neposredno izražavanje opisanih rasporeda brzina. Prihvatanje eksponencijalnih eksperimentalnih izraza za raspored brzina nameće eksponencijalni izraz i za λ . Ali ne mora se uopšte ulaziti u raspored brzina ako se želi neposredno naći izraz za λ , koji odgovara eksperimentalnim podacima.

Ova dopunska razmatranja mogu da posluže da se upoređivanje linija na slikama 97–1 do 97–4 protumače, ne samo kao iskazivanje da eksponencijalne zakonitosti mogu biti dobre aproksimacije za logaritamske, nego i kao prilog shvatanju da eksponencijalna zakonitost može dobro da posluži kao neposredan izraz opaženih rasporeda brzina, i koeficijenta λ .

* * *

Kao što su se logaritamski izrazi za glatku i hrapavu cev ujedinili u jedinstven izraz za turbulentno strujanje u Kolbrukovoj formuli (96–36), to će se učiniti i kod eksponencijalnih izraza. Izrazi (97–12) i (97–15) mogu se objediniti u:

$$\lambda = 0,115 \left(\frac{k}{D} + \frac{60}{Re} \right)^{1/4} \quad (97-20)$$

Zanemarenjem jednog od sabiraka u zagradi, u odnosu na drugi, dobijaju se zakonitosti za glatku, odnosno za hrapavu cev, a kada su uticaji oba člana takvi da jedan nije zanemarljiv u odnosu na drugi, dobije se zakonitost za prelaznu oblast (između glatkih i hrapavih cevi). Izrazi (97–12) i (97–15) su dobre aproksimacije za logaritamske zakonitosti za glatku (96–16), odnosno hrapavu cev (96–19) (razume se u granicama uočljivim na slikama 97–3 i 97–4), a onda i povezani u izraz (97–20), dobro aproksimiraju ono što je dobijeno povezivanjem (96–16) i (96–19), u (96–36), a to je Kolbrukova formula. Treba još primetiti da ni za obrazac (97–20), isto kao i za Kolbrukovu formulu (96–36), nije određen raspored brzina, koji do nje dovodi. Za (97–12) eksponent u (97–1) je bio $n = 1/7$, a za (97–15) je $n = 1/8$, pa bi za prelaznu oblast (između glatkih i hrapavih cevi) bio negde između te dve vrednosti.

* * *

Formula (97–20) može poslužiti da se veoma lako oceni granica hrapavih cevi. Ako se u njoj zameni Re sa vD/ν dobija se:

$$\lambda = 0,115 \left(\frac{k}{D} \right)^{1/4} \left(1 + \frac{60}{\frac{k\nu}{\nu}} \right)^{1/4} = \lambda_{hr} \left(1 + \frac{60}{\frac{k\nu}{\nu}} \right)^{1/4} \quad (97-21)$$

λ_{hr} je koeficijent trenja ako se cev sračuna kao da je hrapava. Napominje se da je prethodna jednačina već ranije napisana, sa (91–38), bez potrebnog obrazloženja, „na poverenje”. Obrazloženje je dato sada, ono je u razmatranjima koja su dovela do prethodne jednačine (97–21).

Za $vk/\nu = 750$ dobija se $\lambda/\lambda_{hr} = 1,02$, pa se može napisati ono isto što je napisano sa (96–39), i još ranije sa (91–39).

98
ENERGETSKE PROMENE
U JEDNOLIKOJ STRUJI

I

ENERGETSKE PROMENE U ZAPREMINI
IZMEĐU DVA POPREČNA PRESEKA STRUJE,
POSMATRANOJ KAO CELINA

Primena jednačine (85–27) na jednoliku struju između dva njena poprečna preseka, u kojima je strujanje potpuno istovetno svodi se na:

$$E_{izg} = \bar{\Pi}_I - \bar{\Pi}_{II} = \frac{def_{gl}^d}{\gamma Q} + \frac{def^t}{\gamma Q} \quad (98-1)$$

jer su veličine v i α u oba preseka iste. Pored toga, otpada poslednji član u (85–27), koji je posledica aproksimacija navedenih po ispisivanju (85–27), jer odstupanja usled usvajanja navedenih približnosti i ne postoje, ako je strujanje jednoliko, istovetno u oba preseka, jer su i turbulentne karakteristike u oba preseka istovetne. Tamošnja primedba pod 3 otpada, jer se ovde neće razmatrati struja sa slobodnom površinom vode.

Jednačina (98–1) iskazuje gubitak energije po jedinici težine, pa gubitak za zapreminu između dva preseka, u jedinici vremena, dobija se množenjem sa težinom u jedinici vremena (tj. sa γQ):

$$\gamma Q E_{izg} = def_{gl}^d + def^t \quad (98-2)$$

Prvi sabirak je deformacioni rad devijatorskih napona u glavnom strujanju, izražen ranije desnom stranom (85–16). On viskoznim trenjem mehaničku energiju preobrate u toplotu.

Drugi sabirak izražen je desnom stranom jednačina (85–23), odnosno (85–24):

$$def^t = \int_V \sigma_{ij}^t \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} dV = \int_V -\overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} dV \quad (98-3)$$

Vidi se da se radi o deformacionom „radu napona” turbulencije kojim se obračunava prelaz mehaničke energije iz glavnog strujanja u fluktuacije.

Kao i u dosadašnjim izlaganjima i ovde je reč „napon” pisana u navodnicima, a takođe i njegov „rad”. Treba se priseliti da „napon” turbulencije nije pravi napon u fizičkom smislu, niti je „rad” toga „napona” rad stvarne sile (po jedinici površine). Navedeni deformacioni „rad” je u stvari iznos kinetičke energije koji se obračunski oduzima glavnom strujanju a dodaje fluktuacijama gde se pojavljuje kao dobitak i naziva se „produkcija” turbulentne energije. Ako se struja obračunski ne razdvaja, nego se posmatrao kao jedinstveno strujanje, što zapravo i jeste, toga „rada” i nema, jer se ono što se obračuna kao manjak, na drugom mestu dodaje se kao višak. U stvari „naponi” turbulencije fizički i ne postoje, oni su samo posrednici u obračunskom razdvajanju jedinstvenog strujanja na glavno strujanje i fluktuacije.

U Odeljku VII Poglavlja 85 raspravljane su energetske izmene u fluktuacijama, i za sada razmatrani slučaj (jednoliko tečenje) u (85–31) treba staviti $\psi = 0$ (jer je stanje u dva preseka istovetno), pa se dobija da se, bez ikakvih zanemarenja cela produkcija (ono što je prešlo iz glavnog strujanja) troši na deformacioni rad fluktuirajućih devijatorskih napona kojima se posredstvom viskoznosti mehanička energija preobra- ti u toplotu. Dakle, u struji kao celini, sve što je za mehaničku energiju izgubljeno otuđeno je u toplotu. To je i šematski prikazano na sl. 98–1.

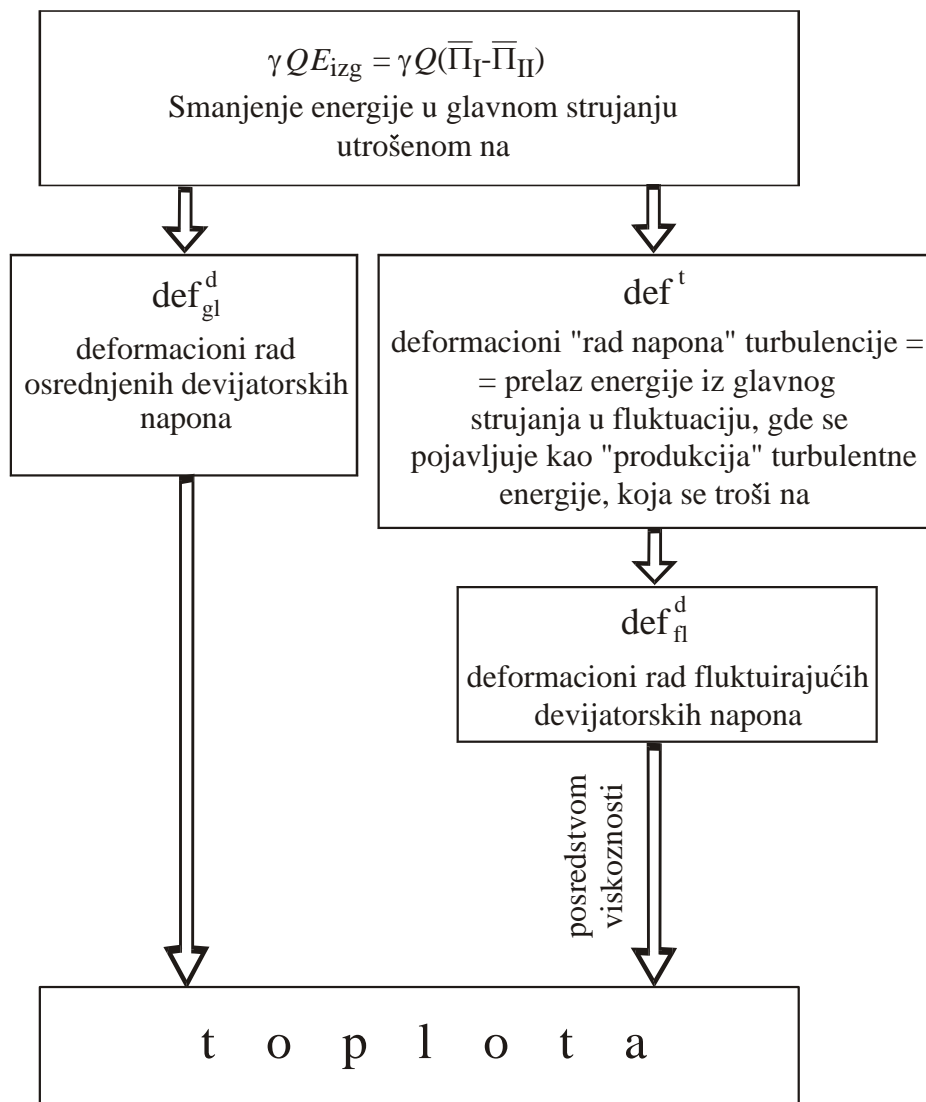
* * *

Ako je prvi član desne strane u (98–1), odnosno (98–2), zanemarljiv u odnosu na drugi, skoro celu izgubljenu energiju za glavno strujanje predstavlja prelazak mehaničke energije u fluktuacije, i onda se u izrazu za izgubljenu energiju neće pojavljivati viskoznost, ili ako se izrazi bezdimenzionalno neće se pojavljivati *Re*-broj. To se ostvaruje kod hrapavih cevi (ili hrapavih provodnika uopšte), kako se pokazalo u izrazima za koeficijent trenja λ (96–19), (97–15) i (97–16).

II

RASPORED „RADA NAPONA” TURBULENCIJE PO POPREČNOM PRESEKU STRUJE

U ovom odeljku raspravljat će se motorni i deformacioni „rad napona” turbulencije, upravo njihov raspored po poprečnom preseku struje.



Slika 98–1 Šematski prikaz energetskih promena za zapreminu struje između dva preseka, u jedinici vremena

Posmatraće se ravansko (u ravni 1,2), paralelno i pravolinijsko strujanje (u pravcu 1) između dve paralelne poče postavljene normalno na ravan 2.

Prihvatiće se do sada redovno prihvaćena pretpostavka o zanemarenju u turbulentnom sloju osrednjenih devijatorskih napona u odnosu

na „napone” turbulencije ($\overline{\sigma_{ij}^d} \ll \sigma_{ij}^t$).

Motorni „rad napona” turbulencije, u jedinici vremena, za jednu tačku, a sveden na jedinicu zapremine, ušao je u jednačinu (53–25) kao poslednji član. Za posmatrani primer izraz za motorni „rad napona” turbulencije $\overline{u_j} \partial \sigma_{ij}^t / \partial x_i$ svodi se na $\overline{u} d\sigma_{21}^t / dx_2$, jer dolaze u obzir samo brzine u pravcu 1 (u tome pravcu je usmereno osrednjeno strujanje), pa je osrednjena brzina $\overline{u_1} = \overline{u}$ (jer je $\overline{u_2} = 0$), a od izvoda samo oni po x_2 , pa je onda to totalni izvod (pravac 2 je upravljn normalno na osrednjeno strujanje). Slično se može napisati i za deformacioni „rad” od σ_{ij}^t po jedinici zapremine, i u jedinici vremena, on se, za posmatrani primer, svodi na $\sigma_{21}^t d\overline{u} / dx_2$.

* * *

Motorni „rad” po jedinici zapremine, i u jedinici vremena, za posmatrani primer, iznosi:

$$\overline{u} \frac{d\sigma_{21}^t}{dx_2} = \overline{u} \left(-\frac{\tau}{h} \right) \quad (98-4)$$

Pri pisanju ovoga koristilo se da je $d\sigma_{21}^t / dx_2$ jednako $-\tau/h$, što se zaključilo iz (94–7).

Dobijeni izraz, zbog množenja brzine \overline{u} sa konstantom za pojedini primer, pokazuje da je „motorni rad napona” turbulencije raspoređen isto kao i brzina – uz zid je jednak nuli, a maksimalnu vrednost postiže u sredini struje ($x_2 = h$), gde je maksimalna vrednost brzine \overline{u}_m . Deljenjem (98–4) sa $-\overline{u}_m \tau / h$ dobija se bezdimenzionalna zamena za „motorni rad napona” turbulencije, po jedinici zapremine, i u jedinici vremena:

$$M^t = \frac{\overline{u} \frac{d\sigma_{21}^t}{dx_2}}{\overline{u}_m \frac{\tau}{h}} = \frac{\overline{u} \left(-\frac{\tau}{h} \right)}{\overline{u}_m \frac{\tau}{h}} = \frac{-\overline{u}}{\overline{u}_m} \quad (98-5)$$

Za grafički prikaz M^t u zavisnosti od relativnog rastojanja x_2/h od zida treba znati raspored brzina. Slika (98–2) prikazuje kako otprilike izgleda taj raspored (i brzina, i motornog „rada napona” turbulencije) ako se primeni neka od uobičajenih zakonitosti za raspored brzina – logaritamska ili eksponencijalna, koje su izložene u poglavljima 94 (Odeljak IV) i 97 (Odeljak I).

Integrisanje M^t u granicama od nule do jedinice daje:

$$\int_0^1 M^t d\left(\frac{x_2}{h}\right) = \int_0^1 -\frac{\bar{u}}{\bar{u}_m} d\left(\frac{x_2}{h}\right) = -\frac{v}{u_m} \quad (98-6)$$

U ovom izrazu korišćena je zamena:

$$\frac{1}{h} \int_0^1 \bar{u} dx_2 = v = \text{prosečna brzina za presek} \quad (98-7)$$

* * *

Deformacioni „rad napona” turbulencije po jedinici zapremine i u jedinici vremena, za pokazani primer, svodi se na:

$$\sigma_{21}^t \frac{d\bar{u}}{dx_2} = \tau \left(1 - \frac{x_2}{h}\right) \frac{d\bar{u}}{dx_2} \quad (98-8)$$

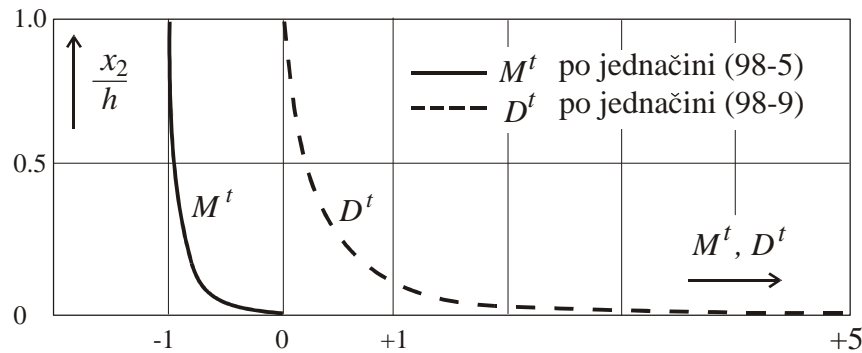
I ova jednačina je napisana izražavanjem napona σ_{21}^t prema (94-7). On je jednak nuli za sredinu struje, za $x_2 = h$, a najveću vrednost ne dobija na zidu, gde nema turbulencije, nego veoma blizu zida, gde počinje turbulencija, i gde je $x_2 \ll h$, pa se računa da je $\sigma_{21} = \tau$, tj. prenešen je napon trenja sa zida.

Kako i izvod brzine $d\bar{u}/dx_2$ opada sa udaljavanjem od zida, posmatrani „rad” je sve manji što je delić bliže središtu struje (u središtu je nula), a na početku sloja, gde je napon najveći, a porast brzine najna-
glijji, posmatrani „rad” ima najveću vrednost.

Bezdimenzionalna zamena za deformacioni rad dobiće se na isti na-
čin koji je primenjen kod motornog rada – deljenjem (98-8) sa $\bar{u}_m \tau / h$:

$$D^t = \frac{\sigma_{21}^t \frac{d\bar{u}}{dx_2}}{u_m \frac{\tau}{h}} = \frac{\tau \left(1 - \frac{x_2}{h}\right) \frac{d\bar{u}}{dx_2}}{u_m \frac{\tau}{h}} = \frac{\left(1 - \frac{x_2}{h}\right) d\left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_m}\right)}{d\left(\frac{x_2}{h}\right)} \quad (98-9)$$

Grafički prikaz D^t od x_2/h izgleda otprilike kako je prikazano na slici 98-2. U sredini struje ($x_2 = h$), iz (98-9) se može očitati da je $D^t = 0$ dok ka zidovima naglo raste, jer naglo raste $d\bar{u}/dx_2$, a uz to raste i $1 - x_2/h$. Napominje se da ne bi bilo osetne razlike u grafičkom prikazu $D^t = D^t(x_2/h)$ ako bi se za raspored brzina uzela logaritamska, ili neka od eksponencijalnih zakonitosti: smanjivanjem x_2/h od jedinice ka nuli, veličina D^t vrlo sporo raste sve do blizine zida, gde počinje naglo



Slika 98–2 Raspored motornog i deformacionog 'rada napona' turbulencije po poprečnom preseku ravanske struje debljine

da raste, da bi za $x_2 = 0$ trebalo da bude beskonačna vrednost. Međutim, na samom zidu toga rada nema, pa zakonitost ne važi baš do samoga zida, ali integrisanje D^t na x_2/h u granicama x_2/h od nule do jedinice daje konačnu vrednost što se vidi iz sledećega izvođenja.

Integrisanje D^t po x_2/h , u granicama x_2/h od nule do jedinici daje:

$$\begin{aligned} \int_0^1 D^t d\left(\frac{x_2}{h}\right) &= \int_0^1 \left(1 - \frac{x_2}{h}\right) d\left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_m}\right) = \\ &= \int_0^1 d\left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_m}\right) - \int_0^1 d\left(\frac{x_2}{h} \frac{\bar{u}}{\bar{u}_m}\right) + \int_0^1 \frac{\bar{u}}{\bar{u}_m} d\left(\frac{x_2}{h}\right) \end{aligned}$$

Ovde je primenjeno pravilo o integrisanju proizvoda.

Nadalje se može pisati:

$$\int_0^1 D^t d\left(\frac{x_2}{h}\right) = \frac{\bar{u}}{\bar{u}_m} \Big|_0^1 - \frac{x_2}{h} \frac{\bar{u}}{\bar{u}_m} \Big|_0^1 + \frac{v}{\bar{u}_m}$$

Ovde je iskorišćena zamena prema (98–7).

Kako je brzina \bar{u} uz zid (za $x_2 = 0$) jednaka nuli, a u sredini struje ($x_2 = h$) je $\bar{u} = \bar{u}_m$, prvi sabirak u prethodnom izrazu je jednak 1. Drugi sabirak oduzima jedinicu, jer je $x_2 \bar{u} = 0$ za $x_2 = 0$), a $x_2 \bar{u} = h \bar{u}_m$ (za $x_2 = h$), pa se onda prva dva sabirka međusobno potiru i ostaje samo treći. Stoga je:

$$\int_0^1 D^t d\left(\frac{x_2}{h}\right) = \frac{v}{\bar{u}_m} \quad (98-10)$$

Sabiranje ove jednačine sa (98–6) kazuje da je:

$$\int_0^1 M^t d\left(\frac{x_2}{h}\right) + \int_0^1 D^t d\left(\frac{x_2}{h}\right) = 0 \quad (98-11)$$

tj. da se, za ceo presek, motorni i deformaconi „rad napona” turbulencije međusobno uravnotežuju. Ovo se i moralo dobiti, jer se za zapreminu između dva poprečna preseka navedeni radovi uravnotežuje, što je ranije objašnjeno i napisano sa (85–23), odnosno (85–24). Jasno je da granični preseki moraju da zadovolje uslov da je glavno (osrednjeno) strujanje kroz njih paralelno i pravolinijsko, normalno na presek (dok između njih taj uslov ne mora da bude zadovoljen).

Taj uslov je, međutim, zadovoljen za sve preseke jednolike struje, koja se ovde razmatra, jer je stanje potpuno istovetno u svim presecima, pa se može posmatrati deo struje između dva preseka, koji su na neizmerno malenom međusobnom rastojanju dx_1 , tako da obuhvate deliće na jednom poprečnom preseku, i učinci navedenih „radova” za sve te deliće, uzeto zbirno, takođe se međusobno uravnotežuju, što je malo pre i dokazano.

* * *

Analogija prikazanog na sl. 98–2 sa prikazanim na sl. 93–2 je očigledna. Tako, na sl. 93–2, prikazani su motorni i deformacioni rad devijatorskih napona (pravih napona, koji deluju posredstvom viskoznosti) u laminarnoj struji. Tako je M^d jednak u/u_m , i tamo se oba rada međusobno uravnotežuju (za struju kao celinu) i tamo, udaljavanjem od zida motorni rad raste, a deformacioni opada. Iako „rad napona” turbulencije nije rad sila u fizičkom smislu reči, kao što je to rad devijatorskih napona koji deluju posredstvom viskoznosti, postupak da se sa „naponima” turbulencije formalno postupa kao sa pravim naponima veoma je pogodan i koristan, jer se svodi na uobičajene postupke koji se primenjuju za prave napone, što se pokazalo pogodnim i u prethodnim objašnjenjima.

Ono što se glavnom strujanju obračunski oduzima biva sve veće udaljavanjem od zida i to se formalno shvata kao motorni „rad napona” turbulencije, a sve se to za struju kao celinu pojavljuje u istom iznosu kao dobitak u fluktuacijama („produkcija”) a to se formalno shvata kao deformacioni „rad napona” turbulencije, mada se radi o izmeni

kinetičke energije. To pokazuje zamena σ_{21}^t sa $-\overline{\rho u'_1 u'_2}$ u (98-5) i (98-9):

$$M^t = \frac{\bar{u} \frac{d}{dx_2} (-\overline{\rho u'_1 u'_2})}{u_m \frac{\tau}{\rho}} \quad (98-12)$$

$$D^t = \frac{-\overline{\rho u'_1 u'_2} \frac{d\bar{u}}{dx_2}}{u_m \frac{\tau}{\rho}} \quad (98-13)$$

Brojitelj u drugom izrazu će se pojaviti u fluktuacijama kao dobitak – kao „produkcija”.

* * *

Na kraju, korisno je primetiti da bi raspored oba „rada napona” turbulencije i za kružnu cev bio načelno isti kao što prikazuje sl. 98-2, samo što bi se M^t i D^t prikazivalo u zavisnosti od relativnog rastojanja x_2/r od zida, gde je r = poluprečnik cevi.

III

IZMENA ENERGIJE U FLUKTUACIJAMA PO POPREČNOM PRESEKU STRUJE

Izmena energije u fluktuacijama po poprečnom preseku struje može se razmatrati na osnovu jednačine energije u fluktuacijama, napisane za tačku – to je jednačina (53-31). Napominje se da je do sada podosta korišćena jednačina energije u fluktuacijama, ali za konačnu zapreminu (posmatranu kao celinu) – to je jednačina (53-32). Međutim, u narednim izlaganjima, kako je rečeno, mora se preći na razmatranje zbivanja u tački, uz primenu odgovarajuće jednačine (53-31).

Razmatraće se jednolika ustaljena struja između dve paralelne ploče. To je najjednostavniji prikaz struje, a njegova rešenja mogu se primeniti i na struju u cevi kružnog preseka. Taj primer se redovno razmatrao, a uz usputnu napomenu da se načelno dešava i kod svih jednolikih struja.

Strujanje je između dve paralelne ploče, postavljene normalno na osu 2, dok se osrednjeno strujanje odvija u pravcu ose 1. Strujanje je ustaljeno, ravansko i jednoliko, a ove osobine treba shvatiti uslovno, kako se to shvata kod turbulentnog tečenja: osrednjena brzina i svi osrednjeni proizvodi fluktuacionih brzina menjaju se samo sa promenom x_2 , što znači da su im parcijalni izvodi po vremenu, po x_1 i po x_3 ,

jednaki nuli. To znatno pojednostavljuje primenu jednačine (53–31). U njoj je prvi član sa leve strane jednak nuli, zbog ustaljenosti. Drugi član se svodi samo na izvod po x_2 (on je onda totalni), u obzir dolaze samo sabirci gde je $i = 2$, a uz to je $\bar{u}_2 = 0$. Prema tome, za posmatrani slučaj cela leva strana jednačine (53–31) je jednaka:

$$\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dx_2}(\overline{u'_2u'_ju'_j}) \quad (98-14)$$

Prvi član desne strane otpada, jer se pretpostavlja da je zapreminska sila težina, a ona ne fluktuise. Član iza toga je motorni rad fluktuacionog pritiska, a on se može prikazati kao ukupni rad umanjen za deformacioni:

$$-\overline{u'_j\frac{\partial p'}{\partial x_j}} = -\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u'_jp'}) + \overline{p'\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}}$$

Drugi član (deformacioni rad) jednak je nuli za nestišljiv fluid kakav se razmatra, jer nema promene zapremine delića, odnosno $\partial u'_j/\partial x_j$ je jednako nuli. Prvi član se svodi, za posmatrani primer jednolikoga osrednjenog strujanja, u pravcu 1, a ravanskog, u ravni (1, 2), samo na izvod po x_2 (a onda je on totalni), jer su izvodi po x_1 i x_3 (za posmatrano strujanje) jednaki nuli. Stoga se konačno piše:

$$-\overline{u'_j\frac{\partial p'}{\partial x_j}} = -\frac{d}{dx_2}(\overline{u'_jp'}) \quad (98-15)$$

Naredni član (treći član desne strane) unosi motorni rad fluktuirajućih devijatorskih napona, u jedinici vremena, i po jedinici zapremine. U jednom trenutku za njega se može napisati:

$$u'_j\frac{\partial \sigma_{ij}^{d'}}{\partial x_i} = u'_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right) \quad (98-16)$$

Pri pisanju ovoga izraza, $\partial \sigma_{ij}^{d'}/\partial x_i$ je zamenjeno na osnovu jednačine (41–8), gde je najpre izostavljen drugi član desne strane, jer je kod nestišljivog fluida $\partial u_i/\partial x_i$ jednako nuli, a potom je izraz prilagođen fluktuacionim veličinama.

Može se prethodni izraz preobličiti tako što se koristi sledeće:

$$u'_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u'_j\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \quad (98-17)$$

gde se primenilo pravilo o diferenciranju proizvoda.

Ako se u (98–16) obavi zamena prema prethodnom izrazu (98–17) i sve se osrednji, dobija se za razmatrani član jednačine (53–31):

$$\overline{u'_j \frac{\partial \sigma_{ij}^{d'}}{\partial x_i}} = \mu \frac{d^2}{dx_2^2} \left(\frac{\overline{u'_j u'_j}}{2} \right) - \mu \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} \quad (98-18)$$

Kako se prvi član desne strane u (98–17) svodi samo na izvod po x_2 (kao i kod ranije raspravljenih članova), to je u (98–18) upisan totalni izvod, gde se još obavilo preobličavanje, koristeći jedno od osnovnih pravila diferenciranja. Drugi član desne strane u poslednje napisanom izrazu (98–18) ne može se, na žalost, svesti na totalni izvod iz sledećih razloga. U sva tri koordinatna pravca postoje fluktuacione brzine i izvodi svake od njih u sva tri pravca. Posmatraće se jedan od tih 9 izvoda (na primer $\partial u'_2 / \partial x_1$) i može se za jedan trenutak napisati:

$$\frac{\partial u'_2}{\partial x_1} \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial u'_2}{\partial x_1} \right)^2 \geq 0 \quad (98-19)$$

jer kvadrat ima uvek pozitivnu vrednost bez obzira da li je izvod pozitivan ili negativan. Samo u pojedinim vremenskim trenucima taj izvod može da bude jednak nuli, ali ne može da bude tokom celog vremena.

Za svih 9 izvoda može se zaključiti isto, što znači da se nijedan izvod ne može izostaviti u zbiru koji se piše sa:

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}$$

a osrednjena vrednost ovoga zbira proizvoda pomnožena sa μ čini razmatrani drugi deo desne strane izraza (98–18), koji ima pozitivnu vrednost, jer su svi sabirci, kako je malo pre objašnjeno, pozitivne vrednosti.

Ostaje još poslednji član u (53–31), a u njemu otpadaju svi sabirci izuzev onoga gde je $j = 1$, a $i = 2$, jer je osrednjena brzina upravljena u pravcu 1, a menja se samo u pravcu 2, pa se može napisati:

$$\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} (-\rho \overline{u'_i u'_j}) = \frac{d \overline{u_1}}{dx_2} (-\rho \overline{u'_1 u'_2}) \quad (98-20)$$

Desnu stranu jednačine (53–31), primenjenu na razmatrani slučaj strujanja, čini zbir (98–15), (98–18) i (98–20), a leva strana se svodi na (98–14), što dovodi do pisanja jednačine:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dx_2}(\overline{u'_2u'_ju'_j})}_{(Ki)} = \underbrace{\frac{d}{dx_2}(-\overline{p'u'_2})}_{(Po)} + \underbrace{\mu\left(\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx_2^2}\overline{u'_ju'_j} - \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)}_{(Vis)} + \underbrace{\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_2}(-\rho\overline{u'_1u'_2})}_{(Pr)} = 0 \quad (98-21)$$

U ovoj jednačini *Ki* predstavlja prenošenje difuzijom kinetičke energije, *Po* je prenošenje potencijalne energije difuzijom (ili rad fluktuirajućeg pritiska), *Vis* je rad devijatorskih fluktuirajućih napona (posredstvom viskoznosti) i to motorni rad, a *Pr* je „produkcija” turbulentne energije – sve po jedinici zapremine, i u jedinici vremena.

Sada će se raspraviti učinak pojedinih članova jednačine (98–21) po celom preseku – integrisaće se po x_2 , u granicama $x_2 = 0$ do $x_2 = 2h$, tj. od zida do zida, pošto je debljina struje jednaka $2h$.

Za prvi član (*Ki*) u jednačini (98–21) navedena integracija daje:

$$\int_0^{2h} \frac{1}{2}\rho\frac{d}{dx_2}(\overline{u'_2u'_ju'_j})dx_2 = \frac{1}{2}\rho\overline{u'_2u'_ju'_j}\Big|_0^{2h} = 0$$

jer je na granicama (na zidovima) $\overline{u'_2u'_ju'_j} = 0$.

Integracija drugog člana (*Po*) takođe daje nulu jer je na granicama $\overline{u'_2p'} = 0$.

Za prvi deo izraza (*Vis*) integrisanjem će se takođe dobiti nula, jer ono dovodi do:

$$\int_0^{2h} \frac{d^2}{dx_2^2}(\overline{u'_ju'_j})dx_2 = \frac{d}{dx_2}(\overline{u'_ju'_j})\Big|_0^{2h} = 0$$

pošto je $d(\overline{u'_ju'_j})/dx_2$ na zidovima iste apsolutne vrednosti a suprotnoga predznaka.

Prethodna izjednačavanja sa nulom učinka razmatranih uticaja po poprečnom preseku znače da se pozitivan uticaj na delu poprečnog preseka potire sa negativnim na drugom delu.

Ako se posmatra izmena energije u zapremini V između dva poprečna preseka struje ($V = 2hL_3L_1$, gde je L_3 širina struje, L_1 rastojanje između ta dva preseka, a obe dužine mogu se uzeti proizvoljno), uticaj članova za koje je učinak po poprečnom preseku nula takođe je nula i za celu zapreminu, pa ostaje samo učinak drugog dela člana označenog sa (Vis) i člana (Pr) , a to iznosi:

$$\int_V \mu \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} dV = \int_V \frac{d\bar{u}_1}{dx_2} (-\rho \overline{u'_1 u'_2}) dV \quad (98-22)$$

Upoređivanjem ovoga izraza sa (85–31), u kome je za jednoliku struju $\psi = 0$ (zbog istovetnog stanja u oba preseka), uviđa se da je disipacija u fluktuacijama (prelazak mehaničke energije u toplotu deformacionim radom fluktuirajućih devijatorskih napona), jer se može napisati:

$$def_{fl}^d = \int_V \mu \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} dV \quad (98-23)$$

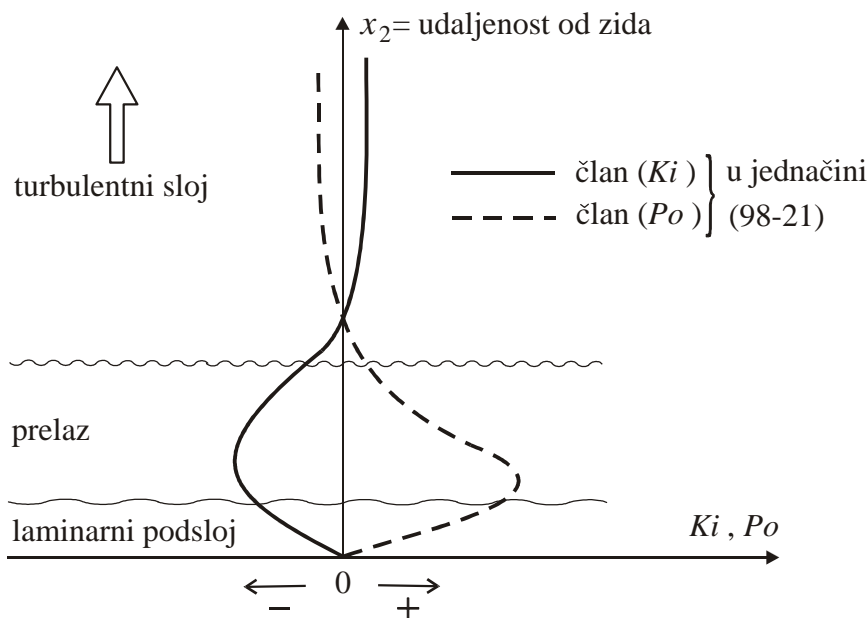
a to se prema (98–22) naknađuje „produkcijom” turbulentne energije, što je objašnjeno u Odeljku VII Poglavlja 85, a i pomenuto u Odeljku I ovoga poglavlja.

U nastavku će se raspravljati o rasporedu po poprečnom preseku učinka onih članova u (98–21) koji za presek kao celinu daju nulu – negde je taj učinak pozitivan, negde negativan, upravo ovi članovi negde dodaju energiju, negde onda moraju da je oduzmu, a to znači poprečni prenos energije.

Za jedan presek od zida ka sredini struje između dve ploče (ili ka centru preseka ako je struja u cevi kružnog preseka), difuzije kinetičke i potencijalne energije (Ki, Po) ponašaju se otprilike kako je prikazano na sl. 98–3.

Pozitivna vrednost za (Ki) znači povećanje kinetičke energije u fluktuacijama difuzijom. Uz zid, gde je $Ki < 0$ (vidi sliku 93–3), kinetička energija se smanjuje, dok se u preostalom delu sloja povećava. Kroz ceo presek ovo se mora uravnotežiti, jer zbor smanjenja i povećanja za ceo presek mora da se uravnoteži – tako je malo pre dokazano.

(Po) u jednačini eq:98-21 predstavlja rad fluktuirajućih pritisaka, ili povećanje potencijalne energije difuzijom. To isto predstavlja i odgovarajući član u (53–21), na osnovu koga je, prema (98–15) napisano (Po) .



Slika 98–3 Raspored difuzije kinetičke (K_i) i potencijalne (P_o) energije po poprečnom preseku struje – vidi se da je prva negativna u podsloju i u prelazu u sloj, a u sloju (sve do sredine struje) je pozitivna; kod druge je obrnuto

U blizina zida, gde je $P_o > 0$ (vidi sliku 93–3), difuzijom se potencijalna energija povećava, dok se u preostalom delu sloja smanjuje. Za ceo presek to se uravnotežava – isto kao i kod (K_i).

Jasno je da se navedena prenošenja energije ne obavljaju prenosom mase, jer je nemoguće da se masa po poprečnom preseku u prizidnom delu kreće od zida ka sredini struje, a u drugom delu suprotnim smerom, jer masa ne može isprazniti jedan deo prostora da bi se nagomilala na drugom delu. Korisno je podsetiti se objašnjenja u Poglavlju 52, iza jednačine (52–21), da termin „difuzija”, kako je u našim izlaganjima prihvaćeno, znači prenošenje (na primer energije) iako prenošenja mase nema, ako se ono posmatra osrednjeno kroz vreme. U slučaju koji se sada razmatra poprečna fluktuaciona trenutna brzina u'_2 unosi energiju, a osrednjena kroz vreme je $\overline{u'_2} = 0$, jer ta brzina alternativno menja smer tako da osrednjeno ne prenosi masu. Međutim, prenos energije u oba smera nije isti i odatle $\overline{u'_2 u'_j u'_j}$ nije nula – to je učinak difuzije.

Za kasnija raspravljanja dobro će doći zaključak da su difuzija kinetičke i potencijalne energije svuda suprotnoga predznaka i da se skoro potiru, što znači da se može kao približnost reći da se povećanje kinetičke energije difuzijom pothranjuje uglavnom smanjivanjem potencijalne energije difuzijom, i obrnuto.

Prvi deo člana (Vis) u jednačini (98–21) po celom preseku, kako je zaključeno, daje učinak jednak nuli, pa to, i kod ovog člana ukazuje na poprečno prenošenje energije (posredstvom viskoznosti), jer je taj član na jednom delu preseka pozitivan, a na drugom negativan. Treba primetiti da se ovo prenošenje obavlja u laminarnom podsloju i u prelazu iz toga podsloja u turbulentan sloj, dok ga u sloju nema.

Već je rečeno da drugi deo člana (Vis) ne daje po celom preseku učinak jednak nuli, tako je na osnovu (98–19) zaključeno, jer je on zbir kvadrata, pa je po celom preseku istoga znaka. On u jednačini (98–21) daje negativnu vrednost (usled predznaka „minus”), dok je član (Pr) svuda pozitivna vrednost, jer on predstavlja dobitak za fluktuacije, a to se oduzima glavnom strujanju kao „deformacioni rad napona” turbulencije, pa je raspored (Pr) isti kao raspored (D^t) na slici 98–2.

Malo pre je rečeno da se (Ki) i (Po) u pojedinim tačkama međusobno skoro potiru, a da prvi deo člana (Vis) ne deluje u sloju, pa deluje samo u neznatnom delu preseka, pa se kao približnost može prihvatiti da se drugi deo člana (Vis) i član (Pr) u pojedinoj tački međusobno uravnotežuju. Ovo bi značilo da se lokalna „produkcija” turbulentne energije u pojedinoj tački tu i troši na disipaciju, na otuđenje mehaničke energije posredstvom viskoznosti u toplotu. Prema tome, ono što se sa (98–22) napisalo za struju kao celinu kao potpuno tačno, može se napisati i za pojedinu tačku, doduše kao približno izjednačavanje:

$$\mu \frac{\overline{\partial u'_j}}{\partial x_i} \frac{\overline{\partial u'_j}}{\partial x_i} \approx \frac{d\overline{u_1}}{dx_2} (-\overline{\rho u'_1 u'_2}) \quad (98-24)$$

* * *

Na kraju, mogu se i ovde zaključci sa ravanske struje preneti na osnosimetričnu (struju u cevi kružnog preseka) jer sve je načelno bilo isto u obe struje.

IV
**RASPORED PO POPREČNOM PRESEKU
 STRUJE VELIČINA KOJE UKAZUJU
 NA RAZVIJENOST TURBULENCIJE**

Izraz (94-7) omogućava da se proceni osrednjeni proizvod fluktuacionih brzina $\overline{u'_1 u'_2}$, u turbulentnom sloju u ravanskoj struji između ploča, ili u cevi kružnog preseka, čak i bez poznavanja rasporeda osrednjenih brzina, dovoljno je poznavati samo napon trenja τ o zid. Iz (94-7) može se napisati za ravansku struju između ploča, odnosno za struju u cevi kružnog preseka:

$$\frac{-\overline{u'_1 u'_2}}{\tau/\rho} = 1 - \frac{x_2}{h} \quad (98-25)$$

$$\frac{-\overline{u'_1 u'_2}}{\tau/\rho} = 1 - \frac{x_2}{r} \quad (98-26)$$

I ovde, kao i svuda, razmak između ploča iznosi $2h$, a poluprečnik cevi je r .

Treba naglasiti da napisane jednačine ne važe za sam zid, za $x_2 = 0$, jer tamo nema fluktuacija, ali počinju da važe veoma blizu zida.

Zamenom τ sa $C_\tau \rho v^2 / 2$ može se dobiti odnos između $\overline{u'_1 u'_2}$ i srednje brzine v u preseku ($v =$ proticaj / površina preseka):

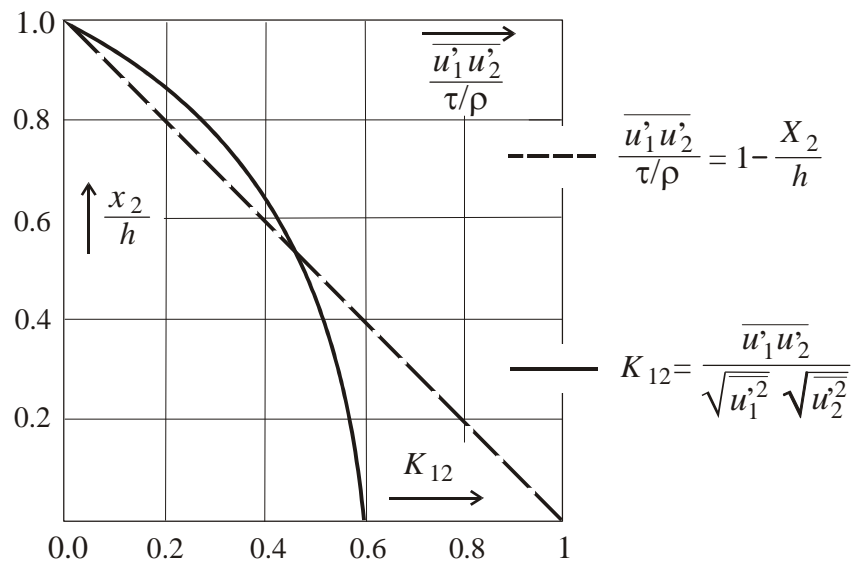
$$\frac{-\overline{u'_1 u'_2}}{v^2} = \frac{C_\tau}{2} \left(1 - \frac{x_2}{h} \right) \quad (98-27)$$

Za struju u cevi kružnog preseka, umesto koeficijenta trenja C_τ uzima se koeficijent trenja λ , gde je $\lambda = 4C_\tau$, pa se piše:

$$\frac{-\overline{u'_1 u'_2}}{v^2} = \frac{\lambda}{8} \left(1 - \frac{x_2}{r} \right) \quad (98-28)$$

Eksperimentalni rezultati pokazuju da se navedene zakonitosti o stvaruju sa neznatnim odstupanjima i jednostavna zakonitost (98-26) grafički je prikazana na sl. 98-4. (Uz nju na slici je još jedna zakonitost o kojoj će biti reči kasnije.)

U praktičnim zadacima λ se kreće od 0,01 do 0,06, pa izraz (98-28) kazuje da je red vrednosti za $-\overline{u'_1 u'_2}/v^2$ između 0,001 i 0,01, što kazuje da je osrednjeni proizvod fluktuacionih brzina veoma malen prema



Slika 98–4 Raspored osrednjenog proizvoda fluktuacionih brzina $\overline{u_1' u_2'}$ (datog bezdimenzionalno) i koeficijenta korelacije K_{12} duž jednog (bilo koga) prečnika kružne cevi (x_2 = udaljenost od zida, r = poluprečnik cevi)

kvadratu srednje brzine za presek. Napominje se da je procena učinjena za $x_2 = 0$ (gde je navedeni odnos najveći), a rečeno je da navedene zavisnosti ne važe za zid (za $x_2 = 0$), gde nema fluktuacija, ali početak sloja, gde zavisnosti važe, je na veoma malenom rastojanju od zida (x_2 je veoma maleno), pa se moglo postupiti kako je urađeno.

* * *

U Poglavlju 54, kao jedan od pokazatelja za razvijenost ili jačinu („intenzitet“) turbulencije, navodi se „srednje kvadratno odstupanje“ fluktuacione veličine, napisano uopšteno sa (54–5). Srednje kvadratno odstupanje za brzinu u_i' iznosi $(\overline{u_i'^2})^{1/2}$, ono je tamo pomenuto kao najznačajniji pokazatelj „intenziteta turbulencije“ i upisano u (54–6).

Pod pretpostavkom da srednje kvadratno odstupanje fluktuacione brzine zavisi od rastojanja x_2 od zida, a da svaki pojedinačni primer unosi još i parametarske veličine (τ, ρ, r), može se napisati:

$$(\overline{u_i'^2})^{1/2} = f(x_2, \tau, \rho, r)$$

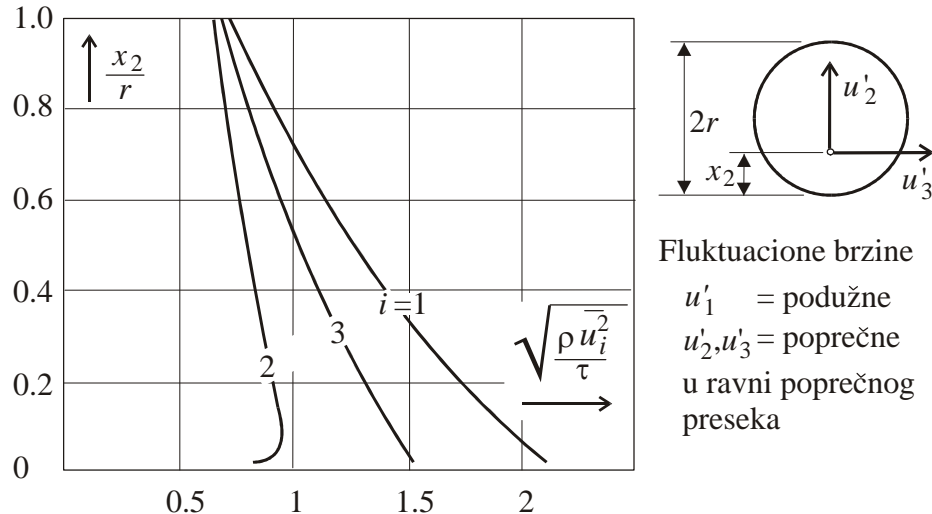
Pretpostavka, i iz nje napisana funkcija, proizlaze iz shvatanja da je u turbulentnom sloju uticaj viskoznosti beznačajan, i da napon trenja τ između zida i fluida unosi sve uticaje sa granice. Napisana funkcija povezuje 5 dimenzionalnih veličina, pa se promenom dimenzionalne analize, može zameniti sa vezom 2 bezdimenzionalne veličine.

$$\frac{\rho}{\tau} (\overline{u_i'^2})^{1/2} = f\left(\frac{x_2}{r}\right)$$

Na slici 98–5 nacrtani su grafikoni za funkcije napisane prethodnim izrazom. Ako se ostvaruju prihvaćene pretpostavke, ti grafikoni važili bi za sva osnosimetrička strujanja (pa i za ravanska, ako se r zameni sa h). Tačnije rečeno, barem bi mogli da se prihvate kao približnost ako je pretpostavka suviše pojednostavila zadatak.

Na slici 98–5 treba zapaziti da se turbulencija smanjuje udaljavanjem od zida, što je lako objašnjivo. Udaljavanjem od zida porast osrednjene brzine sve je ublaženiji, vrednost $d\bar{u}/dx_2$ opada, pa poprečno mešanje delića unosi sve manje promene brzine, sve manje fluktuacije.

Uočava se i da su fluktuacije brzina u podužnom pravcu osrednjelog strujanja (pravac 1) nešto izrazitije od fluktuacija u poprečnim



Slika 98–5 Bezdimezionalni prikaz “intenziteta turbulencije” (srednjeg kvadratnog odstupanja fluktuacionih brzina) duž jednoga (bilo koga) prečnika kružne cevi (τ = napon trenja između zida cevi i fluida, ρ = gustina)

pravcima (2 i 3). I uz sl. 98–5 treba primetiti da prikazane zavisnosti ne važe za zid (za $x_2 = 0$), ali počinju da važe na veoma malenom rastojanju od zida.

Fluktuaciona komponenta brzine u'_2 upravljena je po prečniku cevi, a x_2 meri rastojanje od zida, dok je komponenta u'_3 upravljena u pravcu normalnom na prečnik, a takođe i taj pravac leži u ravni poprečnog preseka (u_2 i u_3 su poprečne brzine – vidi sl. 98–5).

I ovom prilikom se primećuje da shvatanje struje kao ravanske, ili osnosimetrične, ne znači da ne postoji brzina u'_3 (u pravcu normalnom na ravan proučavanja ravanskog zadatka, odnosno za kružnu cev kako je malo pre navedeno). Osrednjena vrednost od u'_3 je nula (kao svaka osrednjena vrednost fluktuacije), ali trenutna nije neprekidno nula (nula je samo slučajno). Postojanje u'_3 znači da $\overline{u_3'^2}$ ne može da bude nula (jer je to srednja vrednost kvadrata). Slika 98–5 pokazuje da je $\overline{u_3'^2}$ čak veće od $\overline{u_2'^2}$.

Ako se $\overline{u_1'^2}$, koji ukazuje na intenzitet podužne fluktuacije brzine, odnosno izrazi $\overline{u_2'^2}$ i $\overline{u_3'^2}$ za poprečnu fluktuaciju, žele izraziti u odnosu na v^2 (na kvadrat srednje brzine za presek), dobijaju se odnosi kakav je, primera radi, za $\overline{u_1'^2}$, sledeći odnos:

$$\frac{\overline{u_1'^2}}{v^2} = \frac{\overline{u_1'^2}}{\tau/\rho} \frac{\tau/\rho}{v^2} = \frac{\overline{u_1'^2}}{\tau/\rho} \frac{\lambda}{8} \quad (98-29)$$

(i ovde je korišćeno $\tau/\rho v^2 = C_\tau/2 = \lambda/8$).

Ovo ukazuje da se $\overline{u_1'^2}/v^2$ dobija množenjem $\lambda/8$ sa kvadratima vrednosti koje se mogu očitati sa sl. 98–5. Kako vrednosti na ovoj slici za $(\rho \overline{u_1'^2}/\tau)^{1/2}$ uglavnom ne prelaze 2 (kvadrat ne prelazi 4), a λ izuzetno dostiže 0,06, odnos (98–29) ima za gornju granicu otprilike 0,03.

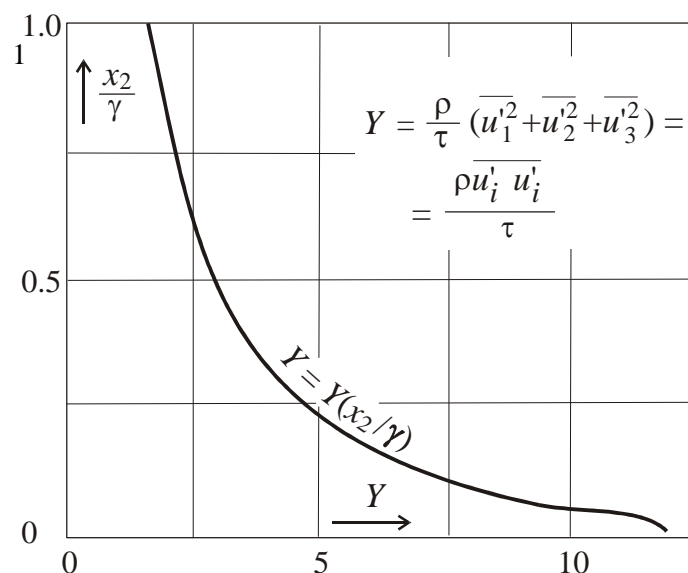
Minimalna vrednost za $\overline{u_1'^2}/v^2$ ostvaruje se za $x_2 = r$, gde je, prema sl. 98–5, $\sqrt{\rho \overline{u_1'^2}/\tau} = 0,7$, pa bi se za $\lambda = 0,06$, dobilo da je $\overline{u_1'^2}/v^2$ nešto manje od 0,004 (za $\lambda = 0,02$ bilo bi manje čak od 0,002).

Za koeficijent trenja $\lambda = 0,01$, prethodne procene odnosa (98–29) treba podeliti sa 6, pa se dobija 0,005, odnosno nešto manje od 0,001.

Poznavanjem bezdimenzionalnih veličina prikazanih na sl. 98–5, poznati su i kvadrati tih veličina, pa je poznat i zbir tih kvadrata:

$$\frac{\rho(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2})}{\tau} = \frac{\rho \overline{u_i' u_i'}}{\tau} \quad (98-30)$$

Ovaj odnos, u zavisnosti od relativnog rastojanja x_2/r od zida, prikazuje slika 98–6.



Slika 98–6 Raspored – po preseku struje u kružnoj cevi – kinetičke energije fluktuacija, prikazan bezdimenzionalno

Treba se podsetiti da je $\rho \overline{u_i' u_i'}/2$ kinetička energija fluktuacija, po jedinici zapremine, a ista se može izraziti u odnosu na $\rho v^2/2$ (za kinetičku energiju po jedinici zapremine koju daje srednja brzina u preseku). To je odnos napisan sa (54–7). Taj odnos se dobija množenjem prethodnoga izraza sa $\tau/\rho v^2$:

$$\frac{\overline{u_i' u_i'}}{v^2} = \frac{\rho \overline{u_i' u_i'}}{\tau} \frac{\tau}{\rho v^2} = \frac{\lambda}{8} \frac{\rho \overline{u_i' u_i'}}{\tau} \quad (98-31)$$

Dakle, vrednosti koje se očitavaju na sl. 98–6 treba množiti sa $\lambda/8$ i sabrati i dobiće se (98–31).

* * *

Može se $\overline{u_1'^2}$ (ili $\overline{u_2'^2}$, ili $\overline{u_3'^2}$, ili njihov zbir $\overline{u_i' u_i'}$), izražavati u odnosu na osrednjenu brzinu $\bar{u} = \bar{u}_1$ u istoj tački. To ima smisla, jer je to lokalni pokazatelj kinetičke energije u fluktuacijama i lokalne kinetičke energije

u glavnoj struji (u istoj tački), pa je to takođe jedan od smišljenih pokazatelja razvijenosti turbulencije. Ti odnosi ($\overline{u_i'^2}/\overline{u^2}$ ili $\overline{u_i' u_i'}/\overline{u^2}$) pokazali bi izrazitiju neravnomernost po preseku od onih koji daju $\overline{u_i'^2}/v^2$ (odnosno $\overline{u_i' u_i'}/v^2$).

* * *

Između trenutnih istovremenih fluktuacionih komponenti brzina u_1' i u_2' u jednoj tački postoji međusobna veza („korelacija“). Pre svega, treba se podsetiti da je iza izraza (94-7) objašnjena pravilnost da su trenutne fluktuacione brzine u_1' i u_2' suprotnoga znaka (kada je jedna pozitivna, druga je negativna). Ovo važi za polovinu struje ($x_2 \leq h$), a važi i za drugu polovinu ako se osovina x_2 uvek postavi da meri rastojanje od bližega zida i da joj je pozitivan smer od toga zida, ka sredini struje. Sem toga, verovatno će se u pretežnom delu vremena ostvariti da veća (po apsolutnoj vrednosti) poprečna fluktuaciona brzina u_2' daje i veću podužnu u_1' (jer veće poprečno strujanje utiče na promenu podužne brzine).

Korelacije između vrednosti dve fluktuacione veličine načelno su prikazane u Poglavlju 54. Korelacija fluktuacionih komponenti brzina u_1' i u_2' u jednoj tački, što se želi razmotriti, je primer (III) sa slici 54-2. Za taj slučaj opšti izraz za korelacije fluktuacionih brzina (54-13) se svodi na:

$$K_{12} = \frac{\overline{u_1' u_2'}}{\sqrt{\overline{u_1'^2}} \sqrt{\overline{u_2'^2}}} \quad (98-32)$$

Nisu pisane koordinate tačaka na koje se odnose brzine, jer se ovde podrazumeva da se radi o istoj tački.

Može se reći da je „korelacija čvršća“ ako je K_{12} bliže -1 . Naime, najizrazitija međusobna veza između u_1' i u_2' bila bi kada bi se za istovremene fluktuacione brzine ostvarivalo $u_2' = \text{const} u_1'$ (ovde je $\text{const} < 0$), jer bi to značilo $\overline{u_1'^2} = \text{const}^2 \overline{u_2'^2}$, pa bi koeficijent korelacije bio $K_{12} = -1$. Međutim, takva pravilnost se ne može očekivati, jer je turbulencija, po svojoj prirodi, pojava koju karakteriše slučajnost, a ne potpuno pokoravanje nekakvim strogim i jednostavnim zakonitostima. Sa druge strane, nije za očekivati da K_{12} bude blizak nuli, jer bi to značilo da između u_1' i u_2' „nema nikakve korelacije“ – tada bi jedna od tih veličina morala biti malene vrednosti, kada je druga velika. Iz

malopredašnjih izlaganja to se zaista ne može očekivati, barem ne uvek, i ne svuda.

Da bi se ocenile vrednosti koeficijenta, napisanoga izrazom (98–32), taj izraz će se preobličiti, zamenom koju daje (98–26) – dobija se:

$$K_{12} = \frac{-\left(1 - \frac{x_2}{r}\right)}{\sqrt{\frac{u_1'^2}{\tau/\rho}} \sqrt{\frac{u_2'^2}{\tau/\rho}}} \quad (98-33)$$

Tako je K_{12} izražen preko veličina prikazanih na sl. 98–5, jer je imenitelj u prethodnom izrazu proizvod vrednosti koje daju krive linije (1) i (2) na navedenoj slici. Sa tim vrednostima zavisnost K_{12} od relativnog rastojanja od zida x_2/r grafički je prikazana slikom (98–4).

Iz navedene slike se uviđa da se K_{12} kreće od $-0,6$ za vrednosti x_2/r bliske nuli (za početak sloja) do $-0,4$ za $x_2/r = 0,6$, što ukazuje na postojanje prilično dobre korelacije. Međutim, za središnji deo struje, za x_2/r od $0,6$ do $1,0$ (što čini 16% preseka), korelacija naglo slabi, približavanjem središtu. U samom središtu ($x_2 = r$), koeficijent $K_{12} = 0$.

Napomena. U Poglavlju 84, izrazima (84–11) i (84–12) i (84–18) napisani su odnosi ε_{11} , ε_{12} i ε_{22} , koji se uopšteno mogu napisati sa:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\int_A \overline{u_i' u_j'} dA}{v^2 A} \quad (98-34)$$

Tamo je navedeno da su oni reda vrednosti $0,01$, uz obećanje da će se ti navodi obrazložiti na kraju Poglavlja 98 (tj. ovde).

Napominje se da je navedena ocena, iako tamo još neobrazložena, imala za posledicu zanemarenje izvesnih uticaja fluktuacija u odnosu na ostale uticaje.

To zanemarenje je korišćeno i u Poglavlju 85, gde se ε_{11} pojavljuje u izrazu (85–22).

Vrednost za ε_{ij} se odnosi na prosečnu vrednost od $\overline{u_i'^2}/v^2$ za presek. Za $\overline{u_1'^2}/v^2$ navedeno je da, za $\lambda = 0,06$, iznosi od $0,004$ do $0,03$, pa onda ε_{11} kao prosek prelazi $0,01$ (negde je oko $0,015$). Međutim, u praktičnim slučajevima relativna hrapavost k/D veoma retko je veća od $0,01$, a za tu vrednost λ je otprilike $0,04$ (što se vidi iz slike 96–3, a sa tom vrednošću za λ pokazatelj ε_{11} iznosi $2/3$ vrednosti od one

za $\lambda = 0,06$ – dakle, ε_{11} je otprilike 0,01. Treba dodati da su prime-ri sa λ približno 0,04 veoma retki, jer je koeficijent λ obično manji. Za $\lambda = 0,01$, vrednost odnosa ε_{11} bila bi znatno manja od 0,01 (jer je 4 puta manja od vrednosti upisane za $\lambda = 0,04$).

Vrednosti odnosa ε_{22} su manje od ε_{11} jer je $\overline{u_2'^2}$ manje od $\overline{u_1'^2}$ – tako pokazuje slika 98–5.

Odnos ε_{12} je jednak nuli za osnosimetričnu (i ravansku) struju, jer $\overline{u_1' u_2'}$ ima pozitivne vrednosti na jednoj polovini preseka, a negativne na drugoj, što se vidi iz (98–26), odnosno (98–25), i to tako raspoređene da za sve tačke simetrično raspoređene u odnosu na sredinu struje, $\overline{u_1' u_2'}$ ima istu apsolutnu vrednost, a različiti predznak. Za poprečne preseke koji nemaju središnju simetralu ne mora da bude jednak nuli, ali ε_{12} nije svuda istog znaka (nego im se dejstvo barem donekle potire), pa se može očekivati da je ε_{12} manji od ε_{11} , jer je svuda $u'^2 > 0$, a $\overline{u_1'^2}$ je istoga reda vrednosti kao $\overline{u_1' u_2'}$.

Kao zaključak može se reći da su procene odnosa $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{21}$ u Poglavljju 84, odnosno 85, opravdane: ne prelaze 0,01.

**GLAVNA PITANJA PRI ODREĐIVANJU
OTPORA TRENJA U HIDROTEHNIČKOJ
PRAKSI, SA POSEBNIM OSVRTOM
NA UTICAJ HRAPAVOSTI**

I

**TRI GLAVNA PITANJA PRI ODREĐIVANJU
OTPORA TRENJA U HIDROTEHNIČKOJ PRAKSI**

Sa praktičnog stanovišta trebalo bi, na osnovu razmatranja u prethodnim poglavljima, raspraviti sledeća pitanja:

1. Pretežan deo saznanja o otporima trenja u provodnicima fluida odnosi se na cevi kružnog preseka, pa su se i prethodna izlaganja uglavnom odnosila na njih. Iz njih, upravo iz ispisanih obrazaca, mogu se procenjivati otpori trenja u kružnim cevima. Postavlja se pitanje kako ta saznanja preneti i na provodnike drugačijeg poprečnog preseka, na provodnike pod pritiskom nekružnog preseka, a pre svega, na kanale. Ili, možda bi trebalo za te slučajeve davati posebne obrasce.
2. Ako posmatrani primer ulazi u oblast hrapavih cevi (ili, uopšteno, u provodnike gde se zidovi ponašaju kao hrapavi), onda se ostvaruje zakonitost za otpor trenja u koju ne ulazi viskoznost fluida (ili, u bezdimenzionalnom obrascu, ne ulazi *Re*-broj). Za isti presek su onda nagib linije energije i nagib trenja srazmerni sa kvadratom brzine – ostvaruje se, kako je ranije nazvana „kvadratna zakonitost otpora”. Nameće se pitanje granice ostvarivanja te zakonitosti, upravo važenja obrazaca namenjenih toj zakonitosti, koji su obično veoma jednostavni i pogodni za praksu.
3. Ako se, barem za praktične zadatke iz hidrotehničkog građevinarstva, ukaže da se pretežan deo zadatka rešava uz pretpostavku da ulaze u hrapave provodnike, onda je veoma važno da se raspravi šta treba u datom slučaju uzeti za hrapavost.

Odgovori sa obrazloženjima na postavljena pitanja su sledeći:

1. Najjednostavnije rešavanje postavljenog pitanja svodi se da se zakonitosti za cevi kružnog preseka prenesu na ostale provodnike uz zamenu:

$$\boxed{\begin{array}{c} \underbrace{D} \\ \left[\begin{array}{c} \text{prečnik} \\ \text{cevi} \end{array} \right] \end{array}} = \begin{array}{c} \underbrace{4R} \\ \left[\begin{array}{c} \text{četvorostruki} \\ \text{hidraulički} \\ \text{radijus} \end{array} \right] \end{array} \quad (99-1)$$

Ovo proizilazi iz toga što je kod cevi hidraulički radijus R jednak $D/4$, pa bi isti otpor davali provodnik nekružnog preseka sa hidrauličkim radijusom R i cev kod koje je D jednako četvorostrukom hidrauličkom radijusu odnosno provodnika. Ovo važi, razume se, ako se prihvati da je napon trenja τ ravnomerno raspoređen po celom okvašenom obimu provodnika, što nije baš tako, ali se prihvata kao približnost. Ta se približnost može opravdati, jer se mnogo veće greške unose u procenu hrapavosti, nego u prihvatanju te približnosti.

Hidraulički radijus uveden je u Poglavlju 91, obrascem (91-9), i tamo su praktični obrasci za cevi preneti na ostale provodnike, korišćenjem zamene $D = 4R$.

2. Granica kvadratne zakonitosti odakle se cev može računati kao hrapava napisana je u tri navrata: prvi put sa (91-39), bez potrebnih obrazloženja, može se reći „na poverenje”, drugi put sa (96-39) na osnovu „logaritamskog zakona otpora”, a treći put sa (97-21) kao posledica prihvaćenog „eksponencijalnog zakona otpora”. Sva tri puta napisan je istovetan izraz:

$$\frac{vk}{\nu} > 750 \quad (99-2)$$

Ako se primena ograniči na tečenje vode prethodno se svodi na napisano sa (96-40), a za to vrede objašnjenja napisana iza tih izraza. Prema njima praktični primeri hidrotehničke prakse uglavnom ulaze u kvadratnu zakonitost otpora.

Ako teče fluid veće viskoznosti koja se obračunava većom vrednošću koeficijenta ν u izrazu (99-2), taj izraz pokazuje da je za istu apsolutnu

hrapavost ($k = \text{const}$), potrebna veća brzina da se uđe u oblast hrapavih cevi. Drugim rečima, cevi iste apsolutne hrapavosti ne moraju se ponašati kao hrapave (ne moraju ulaziti u oblast hrapavih cevi), ako teče fluid veće viskoznosti, iako se ponašaju kao hrapave pri istoj brzini ako kroz njih teče voda.

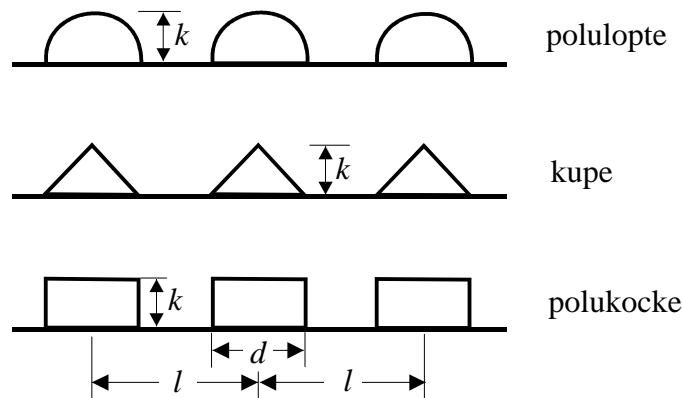
Do istog zaključka može se doći i pogledom na sl. 96–3 gde se uviđa da jedna cev (sa određenom vrednošću relativne hrapavosti k/D) ulazi u oblast hrapavih cevi pošto Re -broj pređe određenu vrednost. Ako je fluid viskoziji (veća vrednost za ν), treba veća brzina da se postigne zahtevana vrednost Re broja za ulazak u oblast hrapavih cevi.

3. U svim dosadašnjim razmatranjima hrapavost je predstavljena jednim jedinim podatkom – apsolutnom hrapavošću k , koja predstavlja visinu izbočina na zidu. Već pri uvođenju pojma „apsolutna hrapavost” u Odeljku III Poglavlja 94. rečeno je da je stvarna hrapavost složena iz izbočina razne visine, oblika i rasporeda po površini, a da su eksperimentalni radovi iz kojih su proizašli obrasci za otpore trenja, izloženi u Poglavlju 96, rađeni sa jednolikom peščanom hrapavosti, gde je hrapavost moguće odrediti jednim podatkom. Rečeno je da će se svaki slučaj hrapavosti izražavati „*ekvivalentnom peščanom hrapavosti*”, koja daje iste otpore kao pojedini praktični primer. Data je i kritika takvog shvatanja, jer je načelno pitanje da li se po strogoj primeni zakona sličnosti to može tako jednostavno prenositi.

Određivanje hrapavosti nije nimalo jednostavno ako se želi tačan njen geometrijski opis. Radi lakšeg i ubedljivijeg objašnjenja uzeće se primeri čiji je geometrijski opis prilično jednostavan (sl. 99–1). Svi primeri na slici imaju istu visinu izbočina, a onda i istu apsolutnu hrapavost, a daju različite otpore, ako su različitog oblika (polulopta, kupa, polukocka), a uz to mogu biti i različitoga rasporeda po površini (vidi sl. 99–2).

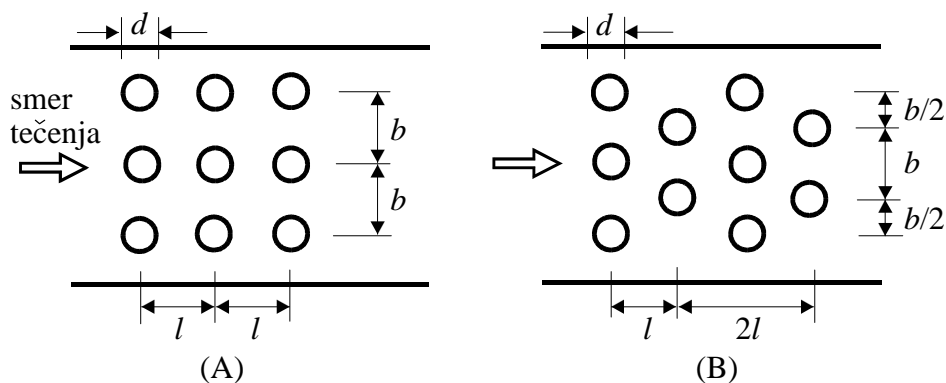
Mada na prvi pogled izgleda da primeri nisu iz praktične primene (nego su dati radi lakšeg objašnjavanja), to nije baš tako, jer su ispitivanja takvih primera poslužila da se razjasne otpori ploča na kojima su izbočine u vidu zakivaka. (To se odnosilo na površine brodova i pontona u dodiru sa vodom.)

Otpori trenja za istu visinu izbočina i ista međusobna rastojanja pojedinih elemenata (iste vrednosti za k , l i b), kao i isti raspored po



Slika 99–1 Hrapavost koja se lako opisuje, jer je sastavljena od jednostavnih geometrijskih tela; sve tri hrapavosti su iste visine izbočina, ali ne daju iste otpore (nije ista ekvivalentna peščana hrapavost)

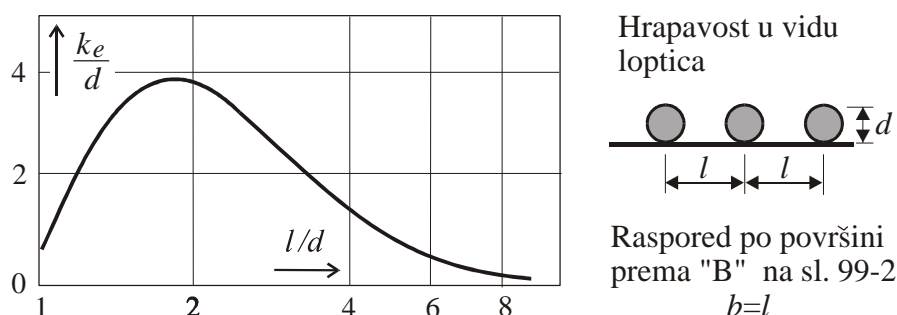
površini („A” ili „B” na sl. 99–2), najmanji je za polulopte, veći je za kupe, a najveći za polulocke, jer tim redom rastu otpori tih tela. Naime, ovde je napon trenja τ zapravo zbir otpora tela smeštenih na jedinicu površine, i to je ovde veoma ubedljivo. Već na kraju Odeljka II Poglavlja 96 rečeno da se „otpor hrapavog zida” može shvatiti kao zbir velikog broja „otpora tela”, i da se to obračuna po jedinici površine, kao „otpor trenja”. Jasno je da je otpor trenja veći za raspored „B”,



Slika 99–2 Dva rasporeda hrapavosti po površini, sastavljeni od istih elemenata, a istim njihovim brojem po jedinici površine, ne daju isti otpor trenja – u (B) je veći nego u (A), jer je suprostavljanje tečenju veće

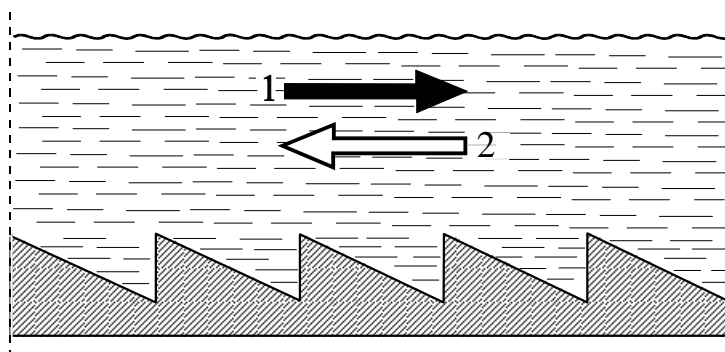
nego za „A”, sa sl. 99–2, jer se u prvom slučaju jače ometa strujanje. Lako je shvatljivo da je otpor manji ako su izbočine jedna do druge ($l = b = d$), nego kada su malo razmaknute. Povećanjem razmaka otpor se povećava do izvesnog razmaka, a iza toga otpor se smanjuje povećanjem razmaka. Ovo je objašnjivo, jer treba određeni razmak da se razviju vrtlozi oko izbočina, a u vrtlozima je glavni gubitak energije, odnosno glavni uzrok otpora. Oni se ne mogu razviti ako je razmak premalen, jer nema prostora za njihovo razvijanje. Za velike razmake broj vrtloga po jedinici površine je manji, pa stoga i manji otpor.

Za potvrdu navedenoga poslužiće slika 99–3, gde je prikazano kolike su ekvivalentne peščane hrapavosti (k_e) za određene razmake između pojedinih loptica, koje ovde predstavljaju hrapavost. Za posmatrani primer slika 99–3 ukazuje da je otpor najveći (ekvivalentna peščana hrapavost čak je 4 puta veća od visine izbočina, od prečnika loptice) za rastojanje izraženo sa l jednako otprilike $2d$. Smanjivanjem rastojanja l ispod te vrednosti smanjuje se otpor, a i povećavanjem rastojanja takođe se smanjuje otpor – a to je potpuno u skladu sa malopredašnjim objašnjenjem.



Slika 99–3 Ekvivalentna peščana hrapavost k_e daje iste otpore kao stvarna hrapavost koju predstavlja prečnik lopte d ; slika prikazuje odnos te dve hrapavosti k_e/d u zavisnosti od relativnog međusobnog rastojanja loptica l/d (opiti rađeni sa lopticama prečnika $d = 2$ i 4 mm)

Slika 99–4 prikazuje primer koji se može shvatiti kao ravanski: dno pravougaonog kanala znatne širine izgleda kako je nacrtano, a bokovi su veoma glatki, tako da je trenje o njih zanemarljivo u odnosu na trenje o dno. Za smer tečenja (1) ekvivalentna peščana hrapavost (koja daje iste otpore kao prikazano dno) može da bude i nekoliko puta veća



Slika 99–4 Dno kanala pravougaonog poprečnog preseka, sa glatkim bokovima ima veštačku hrapavost prema slici; za potpuno istu hrapavost ekvivalentna peščana hrapavost za smer tečenja 1 može da bude i 10 puta veća od one za smer tečenja 2

nego za smer tečenja (2) – uzrok je u mnogo jačem suprotstavljanju strujanju pri smeru (1).

Zanimljivo je da se primeti da su eksperimentalna istraživanja u kanalima sa dnom od peščanih zrna iste krupnoće (jednake d), tj. jednolikih izbočina, pokazala da je ekvivalentna peščana hrapavost otprilike jednaka krupnoći zrna, što je i razumljivo, jer su i Nikuradzeovi opiti, opisani u poglavljima 94 i 96 rađeni baš sa peščanom hrapavošću, a iz njih su proizašli i obrasci sa kojima se računaju otpori za određenu hrapavost, odnosno za određenu ekvivalentnu hrapavost.

U stvarnim uslovima, u iskopanim kanalima sa peščanim dnom, ili u rečnim tokovima, krupnoća peska (ili šljunka) je nejednolika, pa se postavlja pitanje šta uzeti za apsolutnu hrapavost (koja jednolika, ili ekvivalentna peščana hrapavost daje isti otpor). U praksi se obično uzima krupnoća (prečnik zrna) d_{90} , što znači da je 90% mase peska manjeg prečnika od d_{90} . Ovo se opravdava stečenim iskustvom, jer najkrupnija zrna imaju premoćan uticaj na otpor, pošto ona stvaraju najveće lokalno vrtloženje, upravo ona najviše štrče iz dna. Ako se želi hrapavost izraziti Manningovim koeficijentom n , u izrazu (91–35) zamenjuje se apsolutna hrapavost k sa d_{90} , pa se piše:

$$n = \sqrt{\frac{0,029}{2g}} d_{90}^{1/6}$$

Kod prirodnih tokova ekvivalentna peščana hrapavost ne mora se vezati za krupnoću peska ako su izbočine u dnu u vidu nabora (slika 99–5). Visina tih nabora je mnogo veća od krupnoće peska, pa se govori o „makrohrapavosti” (čine je nabori) i „mikrohrapavosti” (čine je zrna peska), a uticaj prve je premoćan.



Slika 99–5 Kod naboranog rečnog dna apsolutnu hrapavost ne određuje krupnoća pešćanih zrna nego visina ispupčenja k dna

U otpore trenja u cevovodima uračunati su i lokalni otpori koje stvaraju spojevi pojedinih komada cevi, a koji nisu zanemarljivi, pa i to mora ući u obračunsku ekvivalentnu hrapavost. Često se deonica cevovoda, iz koje se odvajaju (račvama) priključci, računa kao da je hrapavija od one gde priključaka nema, i tako se uračunaju lokalni uticaji na račvanju.

Unošenje uticaja lokalnih poremećaja u ekvivalentnu hrapavost nalazi se u preporuci da se krivudavi tokovi računaju kao da su hrapaviji od pravolinijskih. To se vidi iz Priloga 1, gde se, pod 26, za krivudave tokove uzima veća vrednost koeficijenta n , nego za pravolinijske (25), iako je sama hrapavost ista.

Nije lako odrediti otpore trenja u neobloženim provodnicima (kanal ili tunel usečen u stenu, kanal iskopan u zemljištu, tok kroz obrasle granične površine i sl.).

Treba voditi računa da se hrapavost menja vremenom, rđanjem, oštećenjem površina, lepljenjem taloga, ispupčenjem i ugibanjem granične površine i sl.

Ako je cev iste ugladenosti obloge, trebala bi da pruži otpor trenja, uz račun sa istom apsolutnom hrapavošću k , bez obzira na prečnik cevi. Međutim, ekvivalentna peščana hrapavost može da bude veća, ako je prečnik cevi veći, iz sledećih razloga: veći je srazmerno uticaj spojeva, jer su oni za veći prečnik srazmerno učestaniji (ne može se komad cevi prečnika 1 m napraviti da bude deset puta duži nego komad one prečnika 10 cm, a to bi zahtevala srazmernost – ti su komadi ili iste dužine, ili su čak kraći za cevi većega prečnika. Uz to, teže je postići

da cev većega prečnika bude tačno kružnog preseka, na spojevima se ne moraju tačno poklapati poprečni preseki koji se spajaju (a to stvara dopunski otpor), za cev većega prečnika teže je postići da sve izvodnice budu idealno prave linije (a izbočavanja i ulegnuća stvaraju dopunske otpore).

Izložene okolnosti kazuju šta sve treba da uđe u procenu za određene ekvivalentne jednolike hrapavosti da bi se za dati primer hrapavost izrazila samo jednim podatkom.

* * *

Još u Odeljku III Poglavlja 94, prilikom uvođenja pojma „apsolutna hrapavost” nagoveštene su teškoće oko određivanja hrapavosti, koje su i uslovile pojavu brojnih empirijskih obrazaca u kojima se hrapavost unosi sa određenim „koeficijentom hrapavosti” vezanim samo za određeni obrazac, a vrednosti koeficijenta upisane su u spisak u kome su granične površine razvrstane prema materijalu od koga su napravljene. Takav spisak uz primenu Maningovog obrasca je Prilog 1. Skreće se pažnja na „Primedbe” uz taj prilog, gde se ukazuje na ograničenost primene Maningovog obrasca i na prilično veliki raspon u vrednosti koeficijenta hrapavosti za granične površine od istog materijala.

U Odeljku 2 prikazaće se kratak pregled kako se razvijalo istraživanje otpora trenja i određivanje uticaja hrapavosti.

Napomene:

1. Objašnjenje nemogućnosti potpuno tačnog određenja apsolutne ekvivalentne hrapavosti (ili Maningovog koeficijenta) dovodi u praksi do određivanja donje i gornje granice za očekivanu hrapavost u zadatom primeru. Usvajanjem kao merodavne gornje granice za očekivanu hrapavost (najveća očekivana hrapavost) dolazi se do rešenja koje je, kako se to obično kaže „na strani sigurnosti”: za raspoloživi nagib linije energije može da teče samo veći proticaj od sračunatog, ili za zadati proticaj biće manji nagib linije energije. Međutim ima primera kada se mora, pored gornje, računati i sa donjom granicom hrapavosti (najmanja očekivana hrapavost), jer treba obezbediti da brzina (ili proticaj) ne pređe nedozvoljenu vrednost. Slikama 104–10, 104–11 i 104–12 prikazani su primeri

koji su na kraju Poglavlja 104 (u „Napomeni”) obrazloženi zahtevom da se računa sa gornjom i donjom granicom hrapavosti.

2. Otpori trenja (tačnije rečeno, nagib linije energije) određeni su odgovarajućim formulama za jednoliko tečenje (gde se poprečni proticajni presek ne menja duž struje. Za isti presek i isti proticaj računa se sa istim nagibom i ako je tečenje nejednoliko (poprečni presek se duž struje menja, sli se uslovljava postepenost), mada to nije potpuno tačno. Tako je i navedeno iza jednačine (92–8). Sa nagibom za ustaljeno tečenje računa se i neustaljeno, što je navedeno iza jednačine (92–37).

II

PREGLED ISKUSTVENIH FORMULA ZA ODREĐIVANJE OTPORA TRENJA

Jednu od prvih zakonitosti za otpor trenja u kanalima, koja potiče sa kraja 18-og veka, dao je Šezi (CHÉZY). Ona je glasila da za dva kanala, pri jednolikom tečenju, postoji veza:

$$\left(\frac{AI}{Ov^2}\right)_1 = \left(\frac{AI}{Ov^2}\right)_2 \quad (99-3)$$

Leva strana se odnosi na jedan od kanala (1), a desna na bilo koji drugi kanal (2). Ovde su primenjene oznake koje su uvedene još u Poglavlju 91. To su:

A = poprečni proticajni presek,

O = okvašeni obim,

v = prosečna brzina = Q/A (Q = proticaj),

I = nagib dna kanala = nagib piježometarske linije = nagib linije energije; ranije su ta tri nagiba nosili oznake I_D , I_{II} , I_E , a sada, pošto se raspravlja isključivo jednoliko tečenje, piše se I bez indeksa.

Kako se prethodni izraz (99–3) odnosi na sve kanale, jer se odnosi na bilo koja dva kanala, ispada da je:

$$\frac{AI}{Ov^2} = \text{const} \quad (99-4)$$

Iz ovoga se dobija da je brzina:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\text{const}}} \sqrt{\frac{A}{O}} I$$

Uvođenjem hidrauličkog radijusa R , što je učinjeno obrascem (91–9), zamenjuje se A/O sa R . Ako se uz to još $\sqrt{1/\text{const}}$ zameni sa novom konstantom (označiće se za C_{Ch}) dolazi se do izraza poznatog kao:

Šezijeva jednačina (CHÉZY)

$$v = C_{\text{Ch}} \sqrt{RI} \quad (99-5)$$

C_{Ch} = Šezijev koeficijent

Skreće se pažnja da je ovaj izraz dimenzionalno nesređen; C_{Ch} ima dimenziju $[L^{1/2}T^{-1}]$, a obično se navodi samo sa numeričkom vrednošću, što prisiljava da se mora računati sa jedinicama [m, s].

Mada je Šezi svoju zakonitost izrazio tako da je napisana sa (99–3), iz nje se, kako je malo pre izvedeno može doći do jednačine koja je prozvana „Šezijeva”. Mora da se naglasi da bi C_{Ch} trebalo da bude opšta konstanta – tako je prethodno objašnjeno, ako se prihvate Šezijeva rasuđivanja. Međutim, kasnijim istraživanjima je utvrđeno da C_{Ch} nije konstanta (što će se malo kasnije i ovde iskazati), ali je formula ostala, sa namenom da se utvrđuje od čega „navodna konstanta” C_{Ch} zavisi. Uz takvo odstupanje od prvobitne zamisli, formula je preživela više od dva veka, pa se i danas navodi u svakom udžbeniku „Hidraulike” i pod tim imenom se koristi u hidrauličkoj praksi.

Da C_{Ch} , s obzirom na današnja saznanja, nije konstanta, lako se pokazuje sledećim izvođenjem.

Izražavanje nagiba I prema utvrđenom u Poglavlju 91 sa (91–19) i prema Šezijevoj jednačini (99–5) daje:

$$I = C_{\tau} \frac{v^2}{2gR} = \frac{v^2}{C_{\text{Ch}}^2 R}$$

pa se mogu povezati koeficijenti trenja C_{τ} i Šezijev C_{Ch} :

$$C_{\text{Ch}} = \sqrt{\frac{2g}{C_{\tau}}} \quad \text{odnosno} \quad C_{\tau} = \frac{2g}{C_{\text{Ch}}^2} \quad (99-6)$$

Šezijeva jednačina važi i za cevi kružnog preseka gde se obično upotrebljava koeficijent trenja λ jednak $4C_\tau$, što je napisano sa (91–22), pa je veza između C_{Ch} i λ sledeća:

$$C_{Ch} = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \quad \text{odnosno} \quad \lambda = \frac{8g}{C_{Ch}^2} \quad (99-7)$$

Kako je λ funkcija od relativne hrapavosti k/D i Re -broja, što se zaključilo u Poglavlju 96, i napisalo sa (96–24), mora i C_{Ch} biti funkcija istih bezdimenzionalnih veličina, uz napomenu da se umesto k/D može uzeti k/R , pa se piše:

$$C_{Ch} = C_{Ch} \left(\frac{k}{R}, Re \right) \quad (99-8)$$

* * *

Rasuđivanje koje je dovelo do (99–3) zasniva se na ravnoteži između komponente sile težine u pravcu strujanja (G_x), kojoj se suprotstavlja sila trenja (T). Nadalje, sila G_x je srazmerna sa AI , jer ta sila po jedinici dužine kanala iznosi γAI (γ = specifična težina), pa zaista postoji navedena srazmernost. Za silu T pretpostavlja da je srazmerna sa Ov^2 , jer ta sila deluje po površini koja po jedinici dužine provodnika iznosi O , a srazmernost sa kvadratom brzine ukazuje da se radi o kvadratnoj zakonitosti otpora. Svakako da ova pretpostavka izaziva sumnju, jer bi odnos između sile trenja T i Ov^2 bio za sve slučajeve isti (faktor srazmernosti je konstanta). Međutim, trenje mora da zavisi od hrapavosti, a ona nije u svim primerima ista. Prvi istraživači otpora trenja, na žalost, mislili su da na otpor trenja ne utiče hrapavost zidova. Pored toga, ima provodnika koji ne ulaze u kvadratni zakon otpora, pa onda T nije srazmerno ni sa v^2 .

Ako se prihvate izložene srazmernosti, a ne vodi se računa o datim primedbama, jer one potiču iz saznanja stečenih kasnije (po objavljivanju Šezijevog stava), može se pisati:

Navedene dve sile (G_x i T) stoje u ravnoteži u svakom pojedinačnom slučaju pa i za slučajeve (1) i (2):

$$G_{x1} = T_1 \quad G_{x2} = T_2$$

iz čega sledi

$$\frac{G_{x1}}{G_{x2}} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{i} \quad \frac{G_{x1}}{T_1} = \frac{G_{x2}}{T_2}$$

što uz navedene srazmernosti dovodi do

$$\left(\frac{AI}{Ov^2} \right)_1 = \left(\frac{AI}{Ov^2} \right)_2$$

a to je baš napisano sa (99–3).

Navedena sumnja u ispravnost pretpostavki o sili trenja pokazala je već svoju opravdanost, jer je sa (99–8) pokazano da C_{Ch} nije konstanta i da se ne može prihvatiti stav (99–3).

Opravdanje za Šezijev stav prema kome bi ono što se danas naziva koeficijentom sa njegovim imenom trebalo da bude opšta konstanta (u svim primerima) verovatno je u tome što su njegova rasuđivanja proizlazila iz posmatranja dovodnih kanala za pariski vodovod, gde je svuda bila skoro ista hrapavost, a ni hidraulički radijusi se nisu mnogo razlikovali.

* * *

Među prvim formulama koje se odnose na tečenje u kanalima bila je *Ajtelvajnova* (EYTELWEIN), koja je glasila:

$$v = 50,9\sqrt{RI}$$

što upoređujući sa Šezijevom jednačinom (99–5) pokazuje da je

$$C_{ch} = 50,9 \tag{99–9}$$

Ova jednačina je potpuno u skladu sa Šezijevom jednačinom uz tvrđenje da je $C_{Ch} = \text{const}$ tj. ne pojavljuje se u njoj uticaj hrapavosti.

Razume se da vrednost konstante (50,9) važi samo ako se R izrazi u metrima, pa će se v dobiti u [m/s], jer je C_{Ch} , kako je već naglašeno (iza izraza (99–5)), dimenzionalna veličina. Treba primetiti da želja da formula izgleda tačnom dovela do tačno određene vrednosti (baš 50,9), što je osobina gotovo svih formula u prošlom i početkom ovoga veka.

Izraz (99–9) uz (99–7) ukazuje da je onda:

$$\lambda = 0,03 \tag{99–10}$$

a to je negde gornja granica za vodovodne cevi ako se računaju po novijim zakonitostima.

Nagovešteno je da su se istraživači iza Šezija, tokom 19-og veka, bavili tačnijim određivanjem vrednosti Šezijevog koeficijenta, jer nije konstanta. Sadašnje izražavanje svelo bi se na vezu (99–8), a za kvadratnu zakonitost, gde C_{Ch} (isto kao i λ) ne zavisi od Re -broja nego samo od relativne hrapavosti k/D (to je oblast hrapavih zidova), C_{Ch} se izražava sa

$$C_{Ch} = C_{Ch}(\text{koeficijent hrapavosti}, R) \quad (99-11)$$

Ovaj koeficijent hrapavosti izražava apsolutnu hrapavost i svaka formula ima svoj koeficijent hrapavosti, a njegove vrednosti daju se u „spisku materijala” koji prati formulu. Taj koeficijent uz hidraulički radijus R zamenjuje k/R u izrazu (99–8). Jedna od takvih formula je i Maningova (91–32), gde se apsolutna hrapavost izražava koeficijentom n , čije su vrednosti date u Prilogu 1. Taj prilog je prateći „spisak materijala” za tu formulu. U Poglavlju 94, Odeljak III, objašnjene su teškoće oko određivanja hrapavosti, i zašto su iskustvene formule bile sačinjene da opis materijala zidova nameće vrednost nekakvog koeficijenta hrapavosti sa kojim se računa, a čija numerička vrednost ne predstavlja ništa u fizičkom smislu reči.

Ako bi se ušlo u oblast nekvadratne zakonitosti (oblast prelaza iz glatke u hrapavu cev), ne bi se u (99–8) izostavljao Re -broj. Tada bi u (99–11) trebalo još dodati ili brzinu v , ili nagib linije energije I , tj.

$$C_{Ch} = C_{Ch}(\text{koeficijent hrapavosti}, R, v \text{ ili } I) \quad (99-12)$$

Naime, u nekvadratnoj zakonitosti trenje nije srazmerno sa v^2 , pa se to onda mora izraziti stavljajući v u izraz (99–12). Ili, ako se ne ostvaruje srazmernost v sa \sqrt{I} , kako daje kvadratna zakonitost, mora se to ispoljiti kroz ubacivanje I u vezu (99–12).

Jedan od veoma primenjivanih obrazaca bio je i *Gangje-Kuterov* (GANGUILLET-KUTTER):

$$C_{Ch} = \frac{23 + \frac{0,00155}{I} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{I}\right) \frac{n}{\sqrt{R}}} \quad (99-13)$$

Ovaj obrazac, čiji su autori navedeni švajcarski inženjeri, navodi se ne samo zato što je imao široku primenu od sedamdesetih godina

19-og veka, nego i zbog toga što se u njemu vide sve bitne osobine tadašnjih obrazaca proizašlih iz iskustva. Prvo, složenost obrasca i preciznost konstanti u njemu valjda služe kao preporuka za tačnost. Drugo, uvođenje nekakvog koeficijenta hrapavosti – ovde je to n – čije su vrednosti ispisane u opisu zidova provodnika. Može se odmah reći da ovde važe iste vrednosti za n kao kod Maningove formule. Treba naglasiti da se Maningova formula pojavila krajem 19-og veka, odnosno posle Gangje-Kuterove, a Maning je svoju formulu obrazovao tako da koristi iste koeficijente hrapavosti kao i Gangje-Kuterova formula.

Vidi se da je (99–13) jedan od vidova izraza (99–12), odnosno da ne izražava kvadratnu zakonitost, jer C_{Ch} zavisi i od nagiba I . U pretežnom delu praktičnih zadataka zanemarljiv je uticaj nagiba I , pa se ostvaruje kvadratna zakonitost (za iste vrednosti n i R , Šezijev koeficijent C_{Ch} je konstanta).

Izostavljanjem sabiraka (u brojiocu i imeniocu) gde se pojavljuje I , dobija se kvadratna zakonitost koju izražava tzv. skraćena formula Gangje-Kutera:

$$C_{Ch} = \frac{23 + \frac{1}{n}}{1 + 23 \frac{n}{\sqrt{R}}} \quad (99-14)$$

Ona je jedan od vidova veze (99–11).

Da li je moguće (i kada) skratiti formulu sa (99–13) na (99–14)? Odgovor na to pitanje daje procena uticaja članova koje unosi nagib I . Ako je I veće od 0,001 članovi imaju zanemarljiv uticaj (a to je kod skoro svih vodovodnih cevi pri maksimalno predviđenom proticaju). Ako je I manje, upravo znatno manje, oseća se uticaj tih članova, a to znači menjanje vrednosti za C_{Ch} i pri istim vrednostima za n i R .

Zašto je primenjivana formula (99–13), a ne mnogo jednostavnija (99–14)? Razlog je izgleda u tome što se izmereni podaci na reci Misisipi nisu mogli uklopiti u kvadratnu zakonitost, verovatno zbog izuzetno malenih padova, odnosno malenih brzina. Uz to treba uočiti i da su odstupanja između (99–13) i (99–14) primetnija za veće vrednosti hidrauličkog radijusa, što ukazuje da je (99–13) namenjen toku većeg poprečnog preseka.

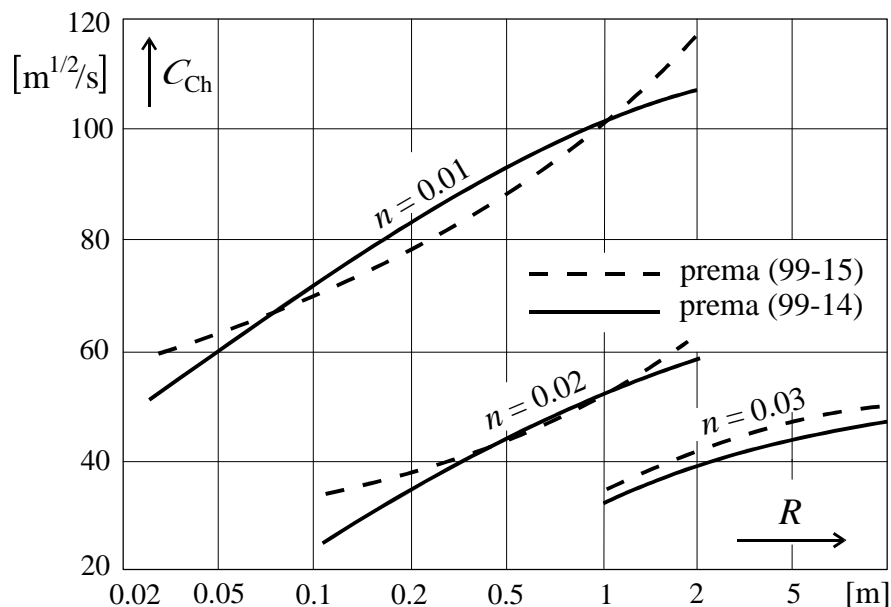
Skoro iste rezultate kao skraćena formula (99–13), sa istim vrednostima za koeficijent hrapavosti n , daje i Maningova formula, već nekoliko puta pominjana (pa i malo pre), počevši sa Poglavljem 91, gde

je prvi put napisana sa (91–32). Upoređenje toga izraza sa Šezijevom jednačinom (99–5) daje:

$$C_{Ch} = \frac{1}{n} R^{1/6} \quad (99-15)$$

Dokaz da (99–14) i (99–15), uz iste vrednosti za n , daju približno iste rezultate daje sl. 99–6, što ukazuje da jedna veoma prosta zavisnost (99–15) daje iste rezultate kao i složenija (99–14), pa je onda očigledna prednost na strani jednostavnije. Na sl. 99–6 ucrtane su zavisnosti u realnim granicama u kojima se mogu naći vrednosti za n u zavisnosti od R . Svakako da nije razumno, na primer, razmatranje $n = 0,03$ za R manje od 1 m, jer toj vrednosti za n odgovara, shodno (91–35) apsolutnu hrapavost od 23 cm.

Maningova formula stekla je veoma široku primenu, od svih formula ima najduži vek, još i danas se primenjuje. Svakako da je njenoj rasprostranjenosti najviše doprineo veoma prost izraz. Ona je dokaz da jednu zakonitost, koja inače ne može biti potpuno tačno određivanje onoga što se zbiva u prirodnim uslovima, i gde se veoma teško tačno procenjuje



Slika 99–6 Vrednosti Šezijevog koeficijenta C_{Ch} koje daju skraćena Kuterova formula (99–14) i Maningova formula (99–15) za upisane vrednosti koeficijenta hrapavosti n

ono što je najbitnije, a to je hrapavost, ne treba izražavati složenim izrazima, sa numeričkim vrednostima koje stvaraju iluziju tačnosti, ako se ista procena može obaviti sa veoma prostim obrascem. Treba se prisjetiti da su se u vreme pre današnjih računara inženjeri služili tzv. logaritamskim računalom gde se veoma lako očitavalo $R^{2/3}$ (kvadrat, a potom kubni koren), a to se nalazi u Maningovoj formuli. To je praktično odvlačilo od složenijih formula, a privlačilo Maningovoj, koja je postala i najraširenija.

Još u Poglavlju 91 naglašeno je da dimenzionalno usklađivanje dovodi do toga da Maningov koeficijent n ima dimenziju $[L^{-1/3}T]$, što se može izraziti sa $[m^{-1/3}s]$. Čudno je da jedna geometrijska veličina (apsolutna hrapavost) ima takvu dimenziju, ali praktičari nisu bili na to osetljivi (a možda nisu ni danas), važno je da se sa formulom postupa onako kako je propisano, i da se tako dođe do rezultata. Ranije se to (dimenzionalna nesređenost) prećutkivalo i davani su samo numerički podaci (na primer, $n = 0,012$), ali je to bilo uslovljeno da se mora računati sa jedinicama $[m^{-1/3}s]$. Maningovi koeficijenti, sa istom numeričkom vrednošću, ako se primene na anglosaksonski sistem jedinica (stopa, umesto metra), dovode do obrasca:

$$v = \frac{1,49}{n} R^{2/3} I^{1/2}$$

i sada se R izražava u stopama, pa se dobija brzina u stopama u sekundi.

Ovo pokazuje da je Maning, kao Irac, formulu namenio evropskoj jedinici – metru, a ne stopi, koja je tada bila u isključivoj upotrebi u Engleskoj. Možda se iz toga može izvući nekakav zaključak, koji ne spada u predmet ovih razmatranja. Veoma je zanimljivo da je Maning napisao novu formulu, dimenzionalno ispravnu, čime je valjda hteo da otkloni dimenzionalnu nesređenost prve formule. Slobodnije rečeno, on se odrekao prve formule, ali to mu nije pomoglo, nova formula nije prihvaćena (ni ovde je nije nužno navoditi), jer je složenija od prve, i stoga za praktičare neprihvatljivija od prve, a prva se, zbog svoje jednostavnosti, sve više i više primenjivala, i tako se prva Maningova formula, kakva se i danas koristi, u stvari primenjuje protivno želji i preporuci autora.

Velika rasprostranjenost Maningove formule, navela je Francuze da se formula pokuša nazvati *Goklerovom (GAUCKLER)*, jer je on navodno prvi tvrdio da je brzina srazmerna sa $R^{2/3}$, za isti nagib I i za istu

hrapavost. Pored toga, neki put se nailazi i na naziv Šezi-Maningova formula, čime treba da se kaže da je Maning samo dopunio Šezijevu formulu. Maningovi koeficijenti su malene vrednosti, negde od 0,01 do 0,04, pa se učinilo zgodnije da se uzmu njihove recipročne vrednosti – tako je napisana *Štriklerova formula* (STRICKLER), koja potiče iz Švajcarske. Ona glasi:

$$v = kR^{2/3}I^{1/2}$$

gde $k = \text{Štriklerov koeficijent} = 1/n$.

Sve to otimanje o Maningovu formulu govori o njenoj prikladnosti, svi se otimaju o nešto što je široko prihvaćeno, a sam autor sa tim, na žalost, nije bio zadovoljan.

Bilo je još formula tipa:

$$C_{Ch} = \frac{1}{n}R^Y \quad (99-16)$$

koje su davale različite vrednosti za Y , a ne samo $1/6$ (koliko je kod Maningove formule).

Koeficijent trenja λ u izrazu (99-7) izraziće se prema (97-15) i (97-16), gde će se i D zameniti sa $4R$, pa će dobiti izrazi, koji se mogu svesti na:

$$C_{Ch} = \text{const}_I \left(\frac{R}{k}\right)^{1/8} \quad \text{i} \quad C_{Ch} = \text{const}_{II} \left(\frac{R}{k}\right)^{1/6}$$

Ovo pokazuje da korišćenje prvoga obrasca (97-15) dovodi u jednačini (99-15) do $Y = 1/8$ i do srazmernosti koeficijenta n sa $k^{1/8}$, dok korišćenje (97-16) dovodi do $Y = 1/6$ i n srazmernog sa $k^{1/6}$. Drugi izraz, kao što je ranijim izlaganjima u više navrata objašnjavano, može se zameniti Maningovom formulom, a srazmernost n sa $k^{1/6}$ još je ustanovljena sa (91-35).

Iz sl. 97-4 uviđa se da prvi obrazac, kome odgovara $Y = 1/8$, daje rezultate koji se bolje prilagođavaju logaritamskoj zakonitosti od drugoga (gde je $Y = 1/6$) ako je relativna hrapavost manja. To se može uopštiti pa zaključiti da bi povećanje vrednosti za Y odgovaralo proizvodnicima sa većom relativnom hrapavosti. To je već zaključeno u Poglavlju 97 baš na osnovu slike 97-4.

Istraživači koji su davali neke druge vrednosti za n u (99-15) očigledno su imali podatke za određenu oblast relativne hrapavosti.

Navodi se da su ruski hidrauličari voleli da primenjuju svoju formulu – formulu Pavlovskoga koja je napisana baš sa (99–16), a za Y daje vrednosti koje se kreću otprilike od $1,3\sqrt{n}$ do $1,5\sqrt{n}$ (n je iste vrednosti kao i Maningov koeficijent), pa se za $n = 0,01$ do $0,03$, Y kreće od $0,13$ do $0,22$, i raste kako je cev hrapavija, što je saglasno sa malo pre iskazanim.

Zanimljivo je primetiti da su zanemarljiva odstupanja za sračunate vrednosti koeficijenta λ prema logaritamskoj zakonitosti i prema (97–16), za relativnu hrapavost k/D između $1/20$ i $1/1000$, što se uviđa iz sl. 97–4. Kako Maningova formula daje iste rezultate kao i (97–16), ako se primeni (91–35) kao veza između Maningovog koeficijenta n i apsolutne hrapavosti k , ovo znači da će se dobiti skoro isti rezultati primenom Maningove formule i obrasca (96–19), odnosno Kolbrukove formule (96–36) primenjene na hrapavu cev – razume se za navedene granice relativne hrapavosti, a za njih se može reći da obuhvataju veliki deo primera hidrotehničke prakse. To se može shvatiti i kao još jedna preporuka za korišćenje Maningove formule.

* * *

Nešto ranije od prethodno navedenih formula, pojavila se i dosta široko prihvaćena (i kod nas sve do novijeg vremena) *Bazenova formula* (BAZIN):

$$C_{Ch} = \frac{87}{1 + \frac{\gamma_B}{\sqrt{R}}} \quad (99-17)$$

γ_B = koeficijent hrapavosti po Bazenu.

Bazen je dao šest klasa hrapavosti: od prve klase u koju po njemu ulaze „veoma glatki zidovi” – rendisane daske, uglađen cementni premaz, gde je $\gamma_B = 0,06$, do šeste klase gde ulaze „neobložene i zatravljene padine kanala, ili krupan šljunak”, gde je $\gamma_B = 1,75$. Ako zidovi nisu baš veoma glatki, onda iz prve ulaze u drugu klasu sa $\gamma_B = 0,16$, a opet ako su padine i dno kanala „u običnom stanju”, prelazi se iz šeste u petu klasu sa $\gamma_B = 1,30$. Između druge i pete klase nalaze treća i četvrta kategorija, svrstane po Bazenu, sa $\gamma_B = 0,46$, odnosno $0,85$.

Za Kutera, pored (99–14) i (99–13), povezuje se i sledeća formula napravljena po ugledu na Bazenu:

$$C_{Ch} = \frac{100}{1 + \frac{m}{\sqrt{R}}} \quad (99-18)$$

koja je 87 zamenila sa okruglom vrednošću (100) i uvela svoj koeficijent hrapavosti m , čije se vrednosti, zbog promene formule, razlikuju od Bazenovog koeficijenta.

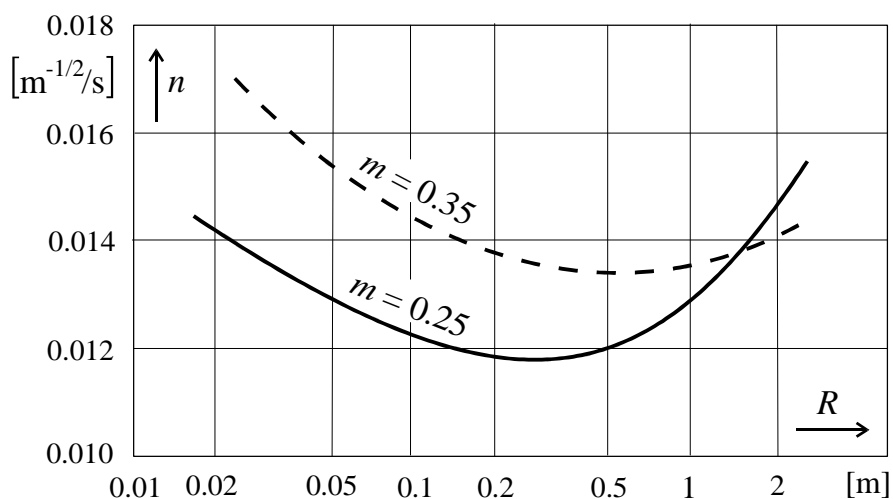
Kuterova formula dosta se primenjivala (sa njom su se služili i naši stručnjaci), naročito za vodovodne i kanalizacione cevi: za prve sa $m = 0,25$, a za druge sa $m = 0,35$.

Slika 99–7 pokazuje da se sa $m = 0,25$, za vrednosti hidrauličkog radijusa R između 0,1 i 0,7 (prečnik između 0,4 i 2,8 m) dobija uz malena odstupanja, $n = 0,012$, a ta vrednost se može primeniti za vodovodne cevi. Za prečnike manje od 0,4 m odgovarajuća vrednost za n raste sa opadanjem prečnika da bi se za prečnik od 0,1 m podigla na 0,0135.

Za $m = 0,35$ odgovarajuća vrednost za n se kreće između 0,0135 i 0,0145 za vrednosti hidrauličkog radijusa R veće od 0,1 m (prečnik veći od 0,4 m) a sa $n = 0,014$ se obično računaju kanalizacione cevi.

Zaključak koji se iz ovoga može izvesti je da se rezultati po različitim formulama mogu dobro slagati u izvesnom području, ali mogu davati rezultate sa znatnim razlikama van toga područja.

Ista slika pokazuje da između koeficijenata hrapavosti po dve razmatrane formule ne postoji jednoznačna veza: jednoj određenoj vre-



Slika 99–7 Vrednosti Manningovog koeficijenta n u obrascu (99–15) koji daje vrednost Šezijeveg koeficijenta C_{Ch} koju daje Kuterova formula (99–18) za $m = 0,35$ i $0,25$, a u zavisnosti od hidrauličkog radijusa R

dnosti za m ne odgovara određena vrednost za n , nego se to menja sa promenom hidrauličkog radijusa. To stvara teškoće oko upoređenja rezultata koje daje primena bilo koje dve formule. Razlog je različita struktura formula, različite zakonitosti.

Ako bi se koeficijent hrapavosti u nekoj od formula hteo povezati sa odgovarajućom apsolutnom hrapavosti k u Kolbrukovoj formuli (da se dobije isti otpor trenja), veza takođe ne bi bila jednoznačna. Rezultati koje daje račun po Manningovoj formuli, i oni koje daje Kolbrukova formula, neznatno se razlikuju, ali za relativne hrapavosti od $1/1000$ do $1/20$, što se zaključuje iz slike 97–4, gde se linije (1) i (3) skoro poklapaju za navedeni raspon relativne hrapavosti, a prva predstavlja Kolbrukovu formulu, primenjenu na hrapavu cev, a druga daje iste rezultate kao Manningova formula. Navedenim granicama hrapavosti obuhvaćen je dobar deo praktičnih primera.

* * *

Pored Šezijeve formule, pojavljivali su se i izrazi, namenjeni cevima, i koji su tvrdili da je:

$$\frac{DI}{v^2} = \text{const} \quad (99-19)$$

gde je D = prečnik cevi = $4R = 4A/O$.

Ako se D zameni sa $4A/O$, ovaj izraz kazivaće isto što i (99–4), samo je u njemu const 4 puta veća od one u (99–4).

Upoređivanjem (99–19) sa izrazom (91–23), uviđa se da je:

$$\text{const (u (99-19))} = \frac{DI}{v^2} = \frac{\lambda}{2g}$$

Ovo znači da je koeficijent trenja λ opšta konstanta, i da ne zavisi ni od prečnika ni od hrapavosti. U skladu sa tim je ranije napisano, sa (99–10), da je $\lambda = \text{const} = 0,03$.

Darsi (DARCY) je uočio da DI/v^2 nije konstanta, tj. da se ne ostvaruje iskazano sa (99–19). Od njega potiče izraz:

$$\frac{DI}{v^2} = 0,001014 + \frac{0,0000259}{D} \quad (99-20)$$

u kome su konstante isuviše precizno određene (rečeno je već da su autori tako hteli da kod korisnika stvore iluziju tačnosti).

Ako se, shodno (91–23), λ izrazi sa $2gDI/v^2$, može se na osnovu prethodnog izraza napisati:

$$\lambda = 0,0199 + \frac{0,00051}{D}$$

ili, zaokruženo

$$\lambda = 0,02 \left(1 + \frac{1}{40D} \right) \quad (99-21)$$

gde se D mora meriti u metrima.

U ovoj formuli nema hrapavosti. Rečeno je već da starija shvatanja nisu uočavala uticaj hrapavosti, pa je to slučaj i ovde. Međutim, i uticaj prečnika nije značajan. Ako se D promeni čak 10 puta, od 1 m do 0,1 m, λ će se povećati sa 0,0205 na 0,025 (odnos 1,22). Međutim, ako se primeni formula (97–16), za istu apsolutnu hrapavost k , u dva slučaja gde je u drugom prečnik 10 puta manji od prvoga, navedeni odnos biće znatno veći, iznosiće 2,15 (umesto 1,22).

Darsijeva formula davala je izgleda znatno manje otpore trenja od onih koji su primećeni u praksi, pa je preporučeno da formula važi za nove cevi, a za stare cevi treba uzeti 2 puta veću vrednost za λ . Treba zapaziti da se na taj način posredno uneo uticaj hrapavosti (jer je stara cev hrapavija). Zaista jednostavan postupak, a on preporučuje da se računa tako, jer će svaka cev postati stara. U sredini rezultata za nove i stare cevi, a s obzirom da uticaj prečnika nije značajan, dobiće se otprilike $\lambda = 0,03$, a to je navedeno sa (99–10).

Darsijeva istraživanja obavljena sredinom 19-og veka u Francuskoj nastavio je Bazan čija su prva istraživanja dovela do tzv. „Prve Bazanove formule”, koja Šezijev koeficijent izražava sa:

$$C_{Ch} = \frac{1}{\sqrt{a + b/R}}$$

gde a i b nisu opšte važeće konstante, nego zavise od hrapavosti i hidrauličkog radijusa R .

Ako se C_{Ch} zameni sa v/\sqrt{RI} , što dozvoljava Šezijeva formula (99–5), prethodni izraz može se preobličiti u:

$$\frac{RI}{v^2} = a + \frac{b}{R}$$

Upoređenjem ovoga izraza sa (99–20) uviđa se da je ovde upisan hidraulički radijus R , umesto prečnika D , što je posledica namere da formula važi ne samo za cevi kružnog preseka, nego i za sve provodnike različitog poprečnog preseka (pre svega, za kanale). Treba uočiti da ovde a i b nisu opšte važeće konstante, kao u (99–20), nego u pojedinom primeru zavisi, kako je malo pre objašnjeno, od hidrauličkog radijusa i hrapavosti. Time se otklanja neopravdana pojednostavljenost koja je izražena sa (99–20).

Bazen nije bio zadovoljan svojom „prvom formulom”, malo pre napisanom, pa je napisao drugu u obliku:

$$C_{Ch} = \frac{1}{\alpha + \beta/\sqrt{R}}$$

Ova formula sa $\alpha = 1/87$ i $\beta/\alpha = \gamma_B$ svodi se na već sa (99–17) napisanu Bazenu formulu.

* * *

Treba još dodati da su istraživači odavno (već od prvih obrazaca za trenje u cevima) uočavali da se kvadratna zakonitost otpora ne ostvaruje za manje brzine. Smanjenjem brzine cev napušta kvadratnu zakonitost za hrapave cevi i, na kraju, ako se brzina svede na veoma malene vrednosti, strujanje postaje laminarno, gde se ostvaruje linearna zakonitost, što je objašnjeno u Poglavlju 96 iza izraza (96–28).

U skladu sa izloženim bilo je izraza koji se svode na:

$$\frac{DI}{v^2} = a + \frac{b}{v} \quad (99-22)$$

gde su a i b konstante.

Ovaj izraz kazuje da za veoma malene brzine postaje premoćan drugi član desne strane, pa prvi može postati zanemarljiv (u odnosu na drugi) i tada je zakon linearan:

$$\frac{DI}{v} = b = \text{const}$$

Ovaj izraz se danas ne može opravdati, jer iz izraza koji je napisan iza (96–28) sledi:

$$\frac{DI}{v} = \frac{32\nu}{gD}$$

tj. da b nije konstanta, jer i za isti koeficijent viskoznosti ν desna strana u prethodnom izrazu zavisi od prečnika D .

Ako je pak u (99–22) drugi član zanemarljiv u odnosu na prvi (brzine veće vrednosti), onda se izraz svodi na (99–19) sa $\text{const} = a$.

Izraz (99–22) veže se za ime *Proni* (PRONY).

Kasnije je ispisano dosta iskustvenih obrazaca sa nekvadratnom zakonitošću – o njima će biti reči u nastavku.

* * *

Široku primenu imali su (a još i sada ponegde imaju) eksponencijalni monomni obrasci koji ne izražavaju kvadratnu zakonitost otpora, jer je praksa pokazala da se dobar deo praktičnih zadataka ne može uklopiti u kvadratnu zakonitost, jer ne ulaze u oblast provodnika sa hrapavim zidovima. Pojedini obrazac iz ove grupe može se svesti na oblik:

$$I = a \frac{v^b}{D^c} \quad (99-23)$$

Isti rezultat za nagib I dalo bi računanje obrascem (91–23) sa koeficijentom trenja:

$$\lambda = \frac{2ga}{v^{2-b} D^{c-1}} \quad (99-24)$$

što se dobilo izjednačenjem desnih strana jednačina (99–24) i (91–23).

Veličina a određuje vrstu zida provodnika, za istu vrstu ista je vrednost za a , što znači da ta veličina unosi apsolutnu hrapavost, to je „koeficijent hrapavosti” u istom smislu kao u nizu do sada ispisanih formula.

Izložitelj b u (99–23) daje se u granicama:

$$1,75 \leq b < 2 \quad (99-25)$$

Zakonitost za jednu određenu cev predstavlja kriva linija koja odgovara relativnoj hrapavosti k/D za tu cev. U oblasti IV na sl. (96–3) ta kriva linija ima manji nagib od linije III za glatku cev, a još nije prešla u horizontalnu pravu (u oblast V – hrapave cevi). Za glatku cev zakonitost (97–13) ukazuje da je koeficijent λ srazmeran sa $Re^{-1/4}$, a to bi za istu cev i istu viskoznost značilo srazmernost sa $v^{-1/4}$, a to bi u izrazu (99–24) značilo da je $2 - b$ jednako $1/4$, pa je $b = 7/4$. To je

donja vrednost za b , dok je gornja (kvadratna zakonitost) jednaka 2. Ovo rasuđivanje je omogućilo pisanje (99–25).

Za izložitelj c u (99–23) vrednost u različitim formulama kreće se u granicama:

$$1,10 \leq c \leq 1,25 \quad (99-26)$$

Ovo pokazuje da će koeficijent trenja λ za istu brzinu v i za istu apsolutnu hrapavost (ista vrednost koeficijenta hrapavosti a), sa porastom prečnika D opadati – to se zaključuje iz (99–24), uz primenu (99–26). Ovo je prihvatljivo, jer sa porastom prečnika D uz istu apsolutnu hrapavost k , opada relativna hrapavost k/D , a sa njom i koeficijent trenja λ , što je uočljivo iz grafikona na sl. 96–3.

Koeficijentu hrapavosti a daje se red vrednosti otprilike od 0,0006 do 0,0015 ako se primene na vodovodne cevi. Treba naglasiti dimenzionalnu nesređenost obrasca (99–23), pa se uz preporučene vrednosti za a , mora računati sa jedinicama [m, s].

Nekvadratna zakonitost zapravo unosi uticaj viskoznosti, pa bi onda trebalo to iskazati, a to formule ne iskazuju, one onda mogu da važe samo za određenu viskoznost, podrazumeva se da su namenjene vodi pri uobičajenim temperaturama (kada je viskoznost približno konstantna).

Jedna dosta korišćena formula iz oblasti koja se razmatra je *Flamantova* (FLAMANT) – pojavila se krajem 19-og veka (nekako u vreme pojave i Manningove formula) i dugo se koristila, možda zahvaljujući činjenici da je bila u dugotrajnoj upotrebi u pariskom vodovodu. Ona glasi:

$$DI = 0,000704 \sqrt[4]{\frac{v^7}{D}} \quad (99-27)$$

što važi za nove vodovodne cevi, dok stare (posle duže upotrebe) treba računati sa 0,00092 umesto 0,000704.

Upoređivanje (99–27) sa (99–23) daje:

$$a = 0,000704 \quad b = 1,75 \quad c = 1,25 \quad (99-28)$$

Vrednost 0,000704 namenjena je novim cevima, a za stare cevi je $a = 0,00092$.

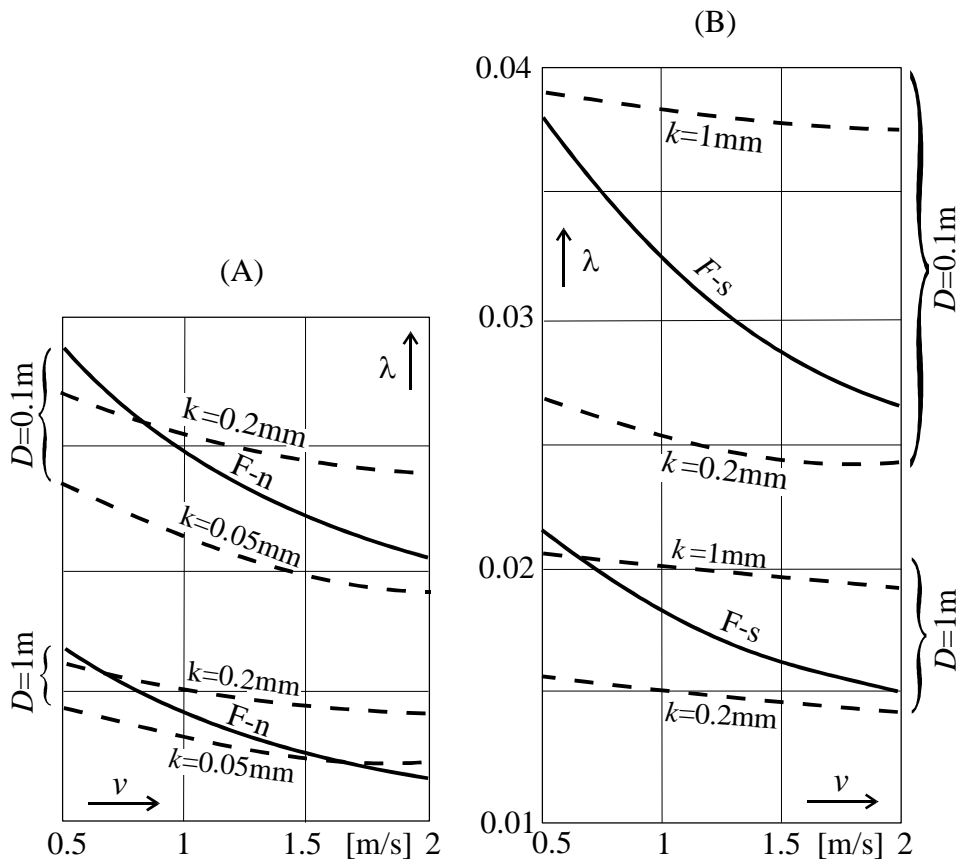
Vrednosti napisane u (99–28) uvrštene u (99–24) daju za nove cevi:

$$\lambda = \frac{0,0138}{v^{0,25} D^{0,25}} \quad (99-29)$$

dok se za stare dobija

$$\lambda = \frac{0,0180}{v^{0,25} D^{0,25}} \quad (99-30)$$

Na osnovu sračunatih vrednosti za λ po (99-29) i (99-30) na slici 99-8 grafički su prikazane zavisnost koeficijenta trenja λ od brzine v (za brzine od 0,5 do 2 m/s), a za prečnike $D = 0,1$ i 1 m. Zanimljivo je uporediti te vrednosti sa onima koje daje Kolbrukova formula (96-36),



Slika 99-8 Koeficijenti trenja λ koje daje računanje po Flamanovoj formuli za nove cevi (prvi grafikon) i za stare cevi (drugi grafikon) – što je sračunato po jednačinama (99-29) i (99-30) – upoređeni sa vrednostima koje daje Kolbrukova formula (96-36) za upisane vrednosti apsolutne hrapavosti k , uz koeficijent viskoznosti određen sa (99-31), za prečnike $D = 1$ m i 0,1 m, i za brzine od 0,5 do 2 m/s

i svrha slike 99–8 je baš to upoređenje. Za primenu Kolbrukove formule daju se sledeće napomene:

- U Kolbrukovoj formuli pojavljuje se *Re*-broj jednak vD/ν , gde je ν = kinematički koeficijent viskoznosti, pa vrednost za ν utiče na vrednost za λ , što se i ostvaruje u nekvadratnoj zakonitosti. Malo pre je rečeno da je taj uticaj u iskustvenim formulama tipa (99–23) sakriven, pa one važe samo sa određenu konstantnu viskoznost vode, za onu viskoznost koju ima voda pri uobičajenim temperaturama. Razume se da autori iskustvenih formula to u ranija vremena nisu tako opisivali, a podrazumevali su da je formula namenjena vodi, prvenstveno u vodovodnim cevima.
- Koeficijent viskoznosti ν menja se sa temperaturom vode, i opada sa porastom temperature i za porast temperature od 5 do 20° vrednost koeficijenta ν se spušta od otprilike 0,015 na 0,011 cm²s⁻¹. Kao prosečnu vrednost za taj uobičajeni raspon temperature vode u vodovodnim cevima uzeće se:

$$\nu = 0,0125 \text{ cm}^2\text{s}^{-1} \quad (99-31)$$

- Deo (B) na sl. 99–8 ukazuje da račun po formuli Flamana za stare cevi, upravo po jednačini (99–30) daje iste rezultate kao i račun po Kolbrukovoj formuli (96–36) ako se računa sa apsolutnom hrapavošću k jednakom otprilike 1 mm za brzinu od 0,5 ms⁻¹ i sa $k = 0,2$ mm za brzinu od 2 ms⁻¹, i da se otprilike isto dobija i za prečnik $D = 0,1$ m, i za $D = 1$ m.

Prihvatan je deo zaključka da Flamanova formula daje rezultate koje bi dala Kolbukova za odgovarajuću vrednost apsolutne hrapavosti koja se mnogo ne menja sa prečnikom cevi, ali nije lako obrazložiti zašto se promenom brzine dobija sve manja odgovarajuća apsolutna hrapavost, iako se ona ne menja.

Opadanje koeficijenta trenja λ sa porastom brzine v , a za isti prečnik D , je shvatljivo, jer u prelaznoj oblasti od glatkih u hrapave cevi λ opada sa porastom *Re*-broja (vidi sl. 96–3), a *Re*-broj raste sa porastom brzine, a za isti prečnik. Međutim, ovo opadanje koeficijenta λ sa porastom brzine mnogo je naglije ako se primeni Flamanova formula, nego ako se primeni Kolbrukova. Može

se reći da i Kolbrukova formula nije neprikosnovena, jer ni ona ne obezbeđuje potpunu tačnost, ona smatra da se bilo kakva hrapavost može obračunati sa ekvivalentnom jednolikom peščanom hrapavosti iako za to povezivanje nije obazbeđena geometrijska sličnost, ali tu se ne može naći isključivi razlog za izraženo neslaganje formula. Mora se ipak primetiti da je Flamanova formula preterala u uticaju brzine na koeficijent trenja, jer su kasnije formule istoga tipa to ublažile. To će se videti u sledećoj formuli.

- Deo (A) na sl. 99–8 prikazuje upoređenje rezultata po Flamanovoj formuli za nove cevi, upravo po (99–29), i po Kolburkovoju formuli (96–36). Ovde je odgovarajuća apsolutna hrapavost k u Kolbrukovoj formuli koja daje iste rezultate kao Flamanova između 0,05 i 0,2 mm, i to za oba prečnika. Upoređenje grafikona (A) i (B) pokazuje da je kod novih cevi opadanje koeficijenta λ sa porastom brzine manje izrazito nego kod starih cevi, manja je razlika između toga opadanja koje daje Flamanova formula i opadanja koje daje Kolbrukova.

* * *

Formula *Hazen-Vilijamsa* (HAZEN-WILLIAMS), pojavila se početkom 20-og veka, bila je veoma primenjivana, koristili su je podosta i naši inženjeri (verovatno se još ponegde koristi). Ona se, svedena na jedinice [m, s], ispisuje sa:

$$v = 0,85C_{HW}R^{0,63}I^{0,54} \quad (99-32)$$

pa se brzina v računa u zavisnosti od hidrauličkog radijusa R i nagiba I linije energije (koji je ujedno i nagib pijezometarske linije), uz prethodno utvrđivanje vrednosti za:

C_{HW} = koeficijent uz Hazen-Vilijamsovu formulu

Taj koeficijent zavisi od vrste obloge cevi i njegove vrednosti daju se u „spisku materijala”, koji prati ovu formulu, kako je to bilo i kod svih do sada navedenih iskustvenih formula. Zavisno od vrste obloge (materijala od koga je provodnik napravljen), i od godina upotrebe (starosti) provodnika, preporučene vrednosti se kreću od $C_{HW} = 50$

(jako zapuštene cevi, sa skamenjenim hrapavim talogom na zidovima) do $C_{HW} = 150$ (za izuzetno glatke cevi). Jasno je da se i ovde podrazumeva da formula sa preporučivane vrednosti koeficijenta C_{HW} važi za konstantnu viskoznost (za vodu pri uobičajenim temperaturama) i da se brzina izražava u [m/s], a hidraulički radijus u [m].

Iz (99–32), uz prethodnu zamenu R sa $D/4$, dobija se:

$$I = \frac{6,84}{C_{HW}^{1,85}} \frac{v^{1,85}}{D^{1,17}} \quad (99-33)$$

Upoređenje ovoga izraza sa izrazom (99–23) ukazuje da su u (99–33):

$$a = \frac{6,84}{C_{HW}^{1,85}} \quad b = 1,85 \quad c = 1,17$$

Sa tim vrednostima izraz (99–24) daje koeficijent trenja:

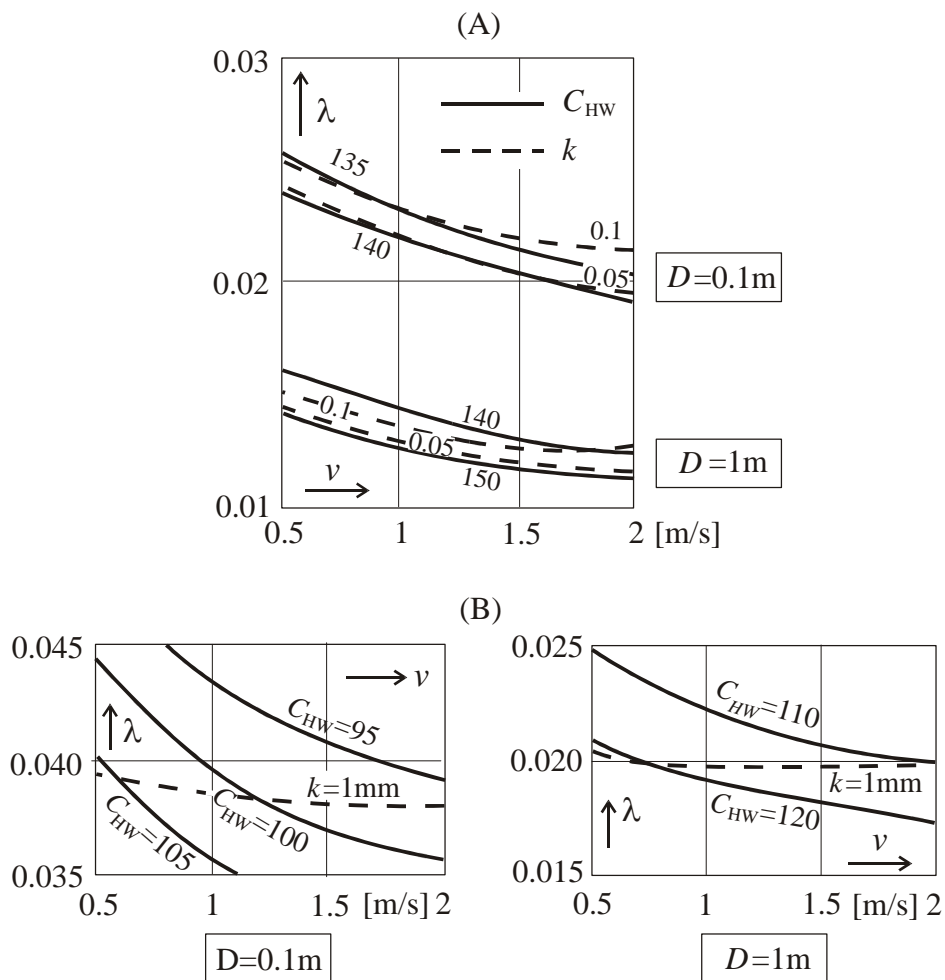
$$\lambda = \frac{134}{C_{HW}^{1,85} v^{0,15} D^{0,17}} \quad (99-34)$$

Slika 99–9 ima za svrhu upoređenje vrednosti koeficijenta trenja λ koje daju računanja po Hazen-Vilijamsovoj formuli, upravo po izrazu (99–34), i po Kolbrukovoj formuli (96–36), za određene vrednosti koeficijenta C_{HW} u prvoj, odnosno apsolutne hrapavosti k po drugoj, a za prečnike $D = 0,1$ i 1 m i brzine v od $0,5$ do 2 m/s. Pri primeni Kolbrukove formule vrednost koeficijenta viskoznosti uzeta je prema (99–31).

Kao prvo, pokušaće se da se objasni šta se može zaključiti iz prvog dela slike 99–9, označenog sa (A). Zaključuje se:

- Krive linije za pojedine konstantne vrednosti za C_{HW} (135, 140, 145) opadaju sa brzinom v , a za isti prečnik D , otprilike isto kao linije za konstantne vrednosti za k (0,01 i 0,05 mm). Ovde, dakle, otpada zamerka učinjena Flamanovoj formuli da kod nje preterano naglo opada koeficijent trenja λ sa porastom brzine, a za isti prečnik. Ovde je zakonitost načelno ista kao kod Kolbrukove u prelaznoj oblasti iz glatke u hrapavu cev – razume se, u zahvaćenom području.
- Da bi se dobila ista vrednost koeficijenta trenja λ , jednoj određenoj vrednosti za C_{HW} trebalo bi da odgovara jedna određena vrednost za k , jer se radi o istoj cevi (zidovi iste ugladenosti), ali se

to ne ostvaruje. Račun po Hazen-Vilijamsovoj formuli za jednu određenu vrednost za C_{HW} daće za λ istu vrednost kao Kolbrukova formula ako se uzme veća (ne ista) apsolutna hrapavost ako je prečnik veći. Iz sl. 99–9A to se uviđa za sve prikazane vrednosti za C_{HW} , a primera radi, navodi se da se račun sa $C_{HW} = 140$ poklapa sa računom za $k = 0,05$ mm za $D = 0,1$ m, dok je za $D = 1$ m odgovarajuće k veće od 0,1 mm. Kod Flamanove for-



Slika 99–9 Upoređenje vrednosti koeficijenta trenja koje daje račun po Hazen-Vilijamsovoj formuli, po obrascu (99–34), i račun po Kolbrukovoj formuli (96–36) za upisane koeficijente C_{HW} i apsolutne hrapavosti k

mule zaključeno je da apsolutna hrapavost k , koja po Kolbrukovoj formuli daje iste rezultate kao Flamanova formula, za određenu vrstu cevi ne zavisi od prečnika i to je usvojeno kao prihvatljivo. Kakvo opravdanje onda naći na zapaženo kod Hazen-Vilijamsove formule? Opravdanja uvek ima, a ovde bi se našlo u objašnjenju pri kraju Odeljka I ovoga poglavlja, gde se primetilo da, za cev od istog materijala, veći prečnik može da nameće veću odgovarajuću obračunsku apsolutnu hrapavost k , a svako opravdanje je prihvatljivo ako je potvrđeno iskustvom.

Iz dela (B) slike 99–9 saznaje se da sa apsolutnom hrapavosti $k = 1$ mm cev se približila hrapavoj cevi (linije su skoro horizontalne), pa je tu ubedljivo neslaganje sa krivim linijama za određene vrednosti za C_{HW} , koje imaju isti osetni pad sa porastom brzine. Iz ovoga se može zaključiti da pogotovo za manje vrednosti za C_{HW} od ovih obuhvaćenih slikom, Hazen-Vilijamsova formula sigurno nije primenljiva. Kod mnogih iskustvenih formula želja da primena bude što šira može da dovede do proširenja van područja u kome formula daje rezultate bliske stvarnosti, i ovde se verovatno radi o tome. Mogu se naći čak navođenja i tako hrapavih provodnika kao „tunel usečen u stenu” u „spisku materijala” za primenu Hazen-Vilijamsove formule, što bi trebalo računati sa $C_{HW} = 40$. Međutim, van svake sumnje je da tunel u steni ulazi u oblast hrapavih zidova, pri uobičajenim brzinama, a primena formule ne daje otpor po kvadratnoj zakonitosti.

Treba još dodati da se i na sl. 99–9B primećuje već zapaženo da sa porastom prečnika istom C_{HW} odgovara veća vrednost za k .

* * *

Razmatrane su jedna od prvih i šire prihvaćenih formula (Flamanova) i jedna koja je imala isto široku primenu, pa i u našoj hidrotehničkoj praksi (Hazen-Vilijamsova). Nije potrebno navoditi i razmatrati čitav niz formula sa nekvadratnim zakonitostima za otpor trenja, u obliku eksponencijalnog izraza, jer sve imaju skoro iste osobine. Vrednost eksponenta b u izrazu (99–23) je između 1,8 i 1,9 a eksponenta c između 1,1 i 1,2, dok je koeficijent hrapavosti a negde između 0,0006 i 0,001. Navedena vrednost za b može da rezultate po ovim formulama uskladi sa Kolbrukovom, kao što je to bilo kod Hazen-Vilijamsove formule, gde

je $b = 1,85$. Kod Flamanove formule prenapli pad koeficijenta trenja sa porastom brzine (za isti prečnik) posledica je toga što je vrednost za eksponent b niža ($b = 1,75$). Treba naglasiti da je usklađivanje Hazen-Vilijamsove formule ostvareno pri primeni na glade cevi, čija apsolutna hrapavost ne prelazi osetno $k = 0,1$ mm. Ne treba da se primenjuje za hrapavije cevi za koje je rečeno da je Hazen-Vilijamsova formula nepodesna.

Većina primenjivanih eksponencijalnih formula sa nekvadratnom zakonitošću, koje su se pojavljivale posle Hazen-Vilijamsove formule, obično su bile namenjene ugađenim cevima. Posebno su bile prihvaćene za račun azbest-cementnih cevi i onda je uz njih i navedeno da su njima namenjene.

Primećeno je da i ovi eksponencijalni obrasci sa nekvadratnom zakonitošću otpora imaju istu osobinu kao i oni raniji koji izražavaju kvadratnu zakonitost, a to je da se daju sa isuviše preciznim numeričkim vrednostima – valjda da pruže iluziju tačnosti. I svi oni nameću pitanje ograničenosti primene, jer bi ona bila opravdana samo u granicama brzina i prečnika, ili hidrauličkog radijusa, u kojima je stečeno iskustvo (opitima), a te se granice obično ne navode, a želja da formula ima što širu primenu može dovesti do toga da uđe u područje gde ne daje dobre rezultate. Kod formule sa nekvadratnom zakonitošću nameću se još dve primedbe: to je oblast u kojoj na otpor trenja utiče viskoznost, a to se iz formule ne vidi, pa se podrazumeva da je namenjena vodi pri uobičajenoj temperaturi, i drugo, postavlja se pitanje granice primene, jer cev može ući u kvadratnu zakonitost, gde je koeficijent trenja $\lambda = \text{const}$, a svakako se toj zakonitosti približava pri porastu Re -broja, a formula to ne iskazuje (po njoj se osetno opadanje sa porastom brzine nigde ne zaustavlja). Ove osobine primećene su i protumačene kod razmatranih formula.

* * *

Na kraju ovoga, Devetoga dela knjige, pokušaće se da se pregledno i ukratko izloži ono što je bitno u razmatranjima u ovom delu, i što se može shvatiti kao „zaključak”. Glavni problem rešavanja bilo je određivanje otpora (ili gubitka energije) usled kretanja, a za to služe obrasci koji se zasnivaju na iskustvenim (empirijskim) saznanjima, stečenim u eksperimentalnom radu. Nema zaista prostijih zadataka od rešavanja

tečenja kroz cevi i kanale, a bez lokalnih poremećaja, a najprostiji svakako tečenje kroz cev konstantnog kružnog preseka. Međutim i za te zadatke nema teorijskog (analitičkog) rešenja, bez unošenja empirijskih saznanja a i cela je Hidraulika, semiempirijska nauka.

Pokušaće se da se izvedu neki opšti zaključci iz do sada napisanoga, a oni se mogu uobličiti otprilike u sledećim navodima.

Skoro dva veka inženjeri su morali nekako da procenjuju otpore trenja, jer su morali da projektuju i grade cevovode i kanale. Zanimljivo je da se razmotri kako se došlo do današnjih saznanja. Može se, doduše, postaviti pitanje: Da li je to potrebno, da li ima smisla da se ispituju obrasci koji danas više nisu u upotrebi? Ako se zastupa shvatanje da se treba baviti isključivo onim što se danas neposredno koristi, besmisleno je baviti se istorijatom. Ako se pak želi da se dođe do saznanja kako se do današnjeg stanja došlo, i da bi se dobro razumelo ono što se danas preporuča, bavljenje istorijatom nije ni besmisleno, ni beskorisno. Istorija baš i služi da bi se shvatila sadašnjica kao posledica prethodnih zbivanja.

Kratki istorijski pregled do sada izloženoga iskazuje da su inženjeri još od kraja 18-og veka pokušavali da dođu do zakonitosti za otpore trenja u cevima i kanalima, pa i rekama. U početku se o hrapavosti nije vodilo računa, a kasnije se opisivala i za određenu vrstu graničnih čvrstih površina davani su određeni „koeficijenti hrapavosti”, sređeni u spisku koji je pratio obrazac koji se preporučuje. Korisnik treba da je uveren da će dobiti krajnji rezultat ako uzme odgovarajući „koeficijent hrapavosti”, a pri tome koeficijent u fizičkom smislu ništa ne znači, a ulazi u obrazac dimenzionalno nesređen, tako da koeficijent ima neku „čudnu” dimenziju.

Nudio se veoma veliki broj obrazaca, pa problem nije bio u tome što obrazaca nema, već u tome što ih ima previše, pa je problem u izboru kome obrascu treba najviše verovati. Neki autori su u obrasce unosili isuviše precizne (sa mnogo decimala) numeričke vrednosti, što je trebalo da bude preporuka za obrazac, iako je prevelika preciznost u izradi obrasca neprimerena zadatku koji se rešava. Neki daju prilično dobre rezultate u određenim granicama za prečnik (ili hidraulički radijus), a greske nastaju ako se primene van tih granica, a to se i čini, jer se uz obrazac obično nikakva upozorenja ne daju. Neki obrasci su prihvatani iz „patriotskih razloga” jer su ponikli u zemlji upotrebe, a oni treba da

budu bolji od „tuđih”. Bez obzira na kritike sa današnjih stanovišta mora se priznati da su ti obrasci dobro poslužili hidrotehničkoj praksi.

Preokret je nastao tridesetih godina 20-og veka kada se uveo pojam „apsolutne hrapavosti” kojim se meri visina izbočina na zidu provodnika. Dakle, hrapavost se izražava odgovarajućom veličinom, sa ispravnom dimenzijom (dužinom). Eksperimentalnim putem se došlo do zakonitosti za otpor trenja, ali za „jednoliku peščanu hrapavost”, koja je veštački napravljena. Kod nje je hrapavost određena jednim podatkom i stoga je podobna za utvrđivanje zakonitosti za trenje. Međutim, u praktičnim primerima hrapavost nije jednolika, niti ima oblik zrnaca peska, ona je nejednolika (izbočine nisu jednake), a razlikuju se po obliku, a različito su raspoređene po površini zida provodnika. Zato se pribegava da se hrapavost u nekom praktičnom primeru izrazi sa „ekvivalentnom jednolikom peščanom hrapavosti”, koja daje isti otpor trenja kao primer koji se rešava. U svakom primeru može se oceniti koliko ta ekvivalentna hrapavost treba otprilike da bude. Na primer, ne može da bude nekoliko milimetara za tunel usečen u steni (bez doterivanja), ni nekoliko desimetara za ugađenu betonsku oblogu. Sa druge strane, za izbor „koeficijenta hrapavosti” u starijim obrascima nema nikakve mogućnosti da se oceni njegova podobnost, sem poverenja u obrazac.

Navođenja iza izraza (91–27) upućuju na apsolutne hrapavosti sa kojima se obično računa.

Mora se primetiti da se prenošenje rezultata dobijenih sa jednolikom peščanom hrapavošću na bilo kakvu hrapavost ne može prihvatiti bez ozbiljne kritike, jer se rezultat prenosi bez zadovoljenja zakona sličnosti. No, uprkos tome, danas najprimenljivija formula, Kolbrukova, je zasnovana na ekvivalentnoj peščanoj hrapavosti. To je, van svake sumnje, veoma pogodno, za primenu, jer se u račun unosi samo jedan podatak o hrapavosti (ekvivalentna hrapavost), dok je tačan geometrijski opis hrapavosti za jedan primer iz prakse, toliko složen, da se može reći da je to, praktično uzevši, nesavladivo.

Sem obrazaca sa logaritamskom zakonitošću (kakva je Kolbrukova), mogu se upotrebljavati i obrasci sa eksponencijalnom zakonitošću. Jedni i drugi su posledica odgovarajućih rasporeda brzina. Jedna od formula koja prihvata eksponencijalnu zakonitost je i Maningova. Ne treba kriti (naprotiv, treba naglasiti) da je u ovoj knjizi učinjen pokušaj da se opravda primena Maningove formule koja je odolela vremenu, i

danas se često upotrebljava. Naime, sem prostog izraza, treba joj pripisati i prednost što daje skoro iste rezultate kao i Kolbrukova za hrapave provodnike (uz određenu vezu između Maningovog koeficijenta i apsolutne hrapavosti).

Niko razborit danas neće više izmišljati i predlagati nove obrasce za račun trenja u cevima i kanalima. Jasno je da se nešto načelno novo ne može predložiti, iscrpljene su mogućnosti za to. Treba se pomiriti sa time da se ne može doći do tačne zakonitosti za praktične primere, ali se u svakom primeru može dobro proceniti uticaj trenja, sa čime će se hidrotehnička praksa zadovoljiti.

Kao zaključak može se navesti da je najprihvatljivije hrapavost izraziti samo sa jednim podatkom, sa ekvivalentnom jednolikom hrapavosti, i onda primeniti Kolbrukovu formulu, ili neku eksponencijalnu formulu. Može se od starijih primenjivati Maningova formula – razume se za hrapave provodnike. Pregled formula koja se mogu preporučiti dat je u Prilogu 2.

* * *

U novije vreme u Hidraulici se istražuje zakonitosti za složenije procese u strujanju (pre svega, u turbulentnom strujanju), a pri tome se načelno isto rasuđuje kao kod izvođenja zakona za otpor trenja u cevima. Unose se neke veze empirijskog porekla, uz niz pretpostavki, koriste se izvesne konstante (koje su navodno proverene, ili će to biti). Nameće se stoga velika opreznost pri usvajanju pretpostavki, jer na to upozoravaju sva ona dovijanja, i podešavanja, koja su preko rasporeda brzina dovela do zakonitosti za otpor trenja u cevima, a to je, kako je naglašeno najprostiji hidraulički zadatak. Koliko tek onda treba dovijanja i podešavanja da se dođe do zakonitosti za neki složeniji proces?

deo deseti
**KRATKI OBJEKTI – LOKALNE
PROMENE U STRUJANJU**

DRAFT verzija 2001.

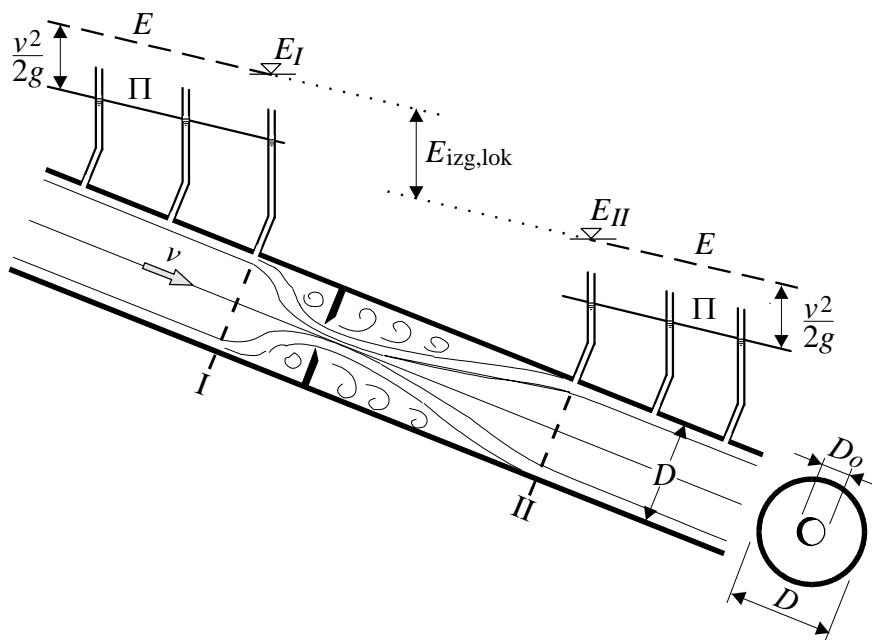
Prethodni, Deveti deo knjige odnosio se na tokove pod isključivim uticajem trenja, a bez lokalnih poremećaja – tako je naslovljen. U praktičnim primerima nema toka bez lokalnih uticaja. Pre svega, u cev, ili kanal, mora negde postojati ulaz, a negde izlaz. Sem toga, provodnik može da menja poprečni presek, može da menja pravac, što dovodi do lokalne promene u struji. Ovaj, Deseti deo knjige, raspravljaće lokalne promene koje se moraju uklopiti u struju u cevi, ili kanalu, upravo u one deonice gde je struja pod isključivim dejstvom trenja. Lokalna promena može se shvatiti kao kratak objekat u dugačkom objektu. Ima i praktičnih primera gde se ceo zadatak sastoji u rešavanju jednog kratkog objekta – na primer, preliv preko brane.

O LOKALNIM GUBICIMA ENERGIJE U CEVIMA – OPŠTA RAZMATRANJA

I

IZRAŽAVANJE GUBITAKA ENERGIJE U LOKALNOM POREMEĆAJU STRUJE U CEVI – UKLJUČIVANJE TOGA GUBITKA U ENERGETSKI OBRAČUN STRUJE

Jednoliko strujanje u cevi kružnog poprečnog preseka poremećeno je uticajem neke prepreke – neka to bude, primera radi, tanka ploča, položena u poprečni presek cevi, a na ploči u njenoj sredini je kružni otvor, kroz koji se struja prisiljava da prođe – sl. 101–1. Takva prepreka naziva se „dijafragma” (doslovno se može prevesti „tanka pregrada” ili „prečaga”). Ona će se u Poglavlju 103 razmatrati kao merni uređaj za određivanje proticaja na osnovu izmerene piježometarske razlike, a sada će poslužiti kao pogodan primer koji izaziva *lokalni gubitak energije*. To je opšti naziv za koncentrisani gubitak energije na manjem prostoru (u mestu) izazvan *lokalnim poremećajem* strujanja. Sa praktičnog stanovišta treba pre svega oceniti iznos toga gubitka, koji ulazi u energetski obračun struje, upravo u jednačinu energije (83–9), primenljivu za struju između dva njena preseka. Desna strana te jednačine izražava izgublenu energiju E_{izg} – to je gubitak energije (po jedinici težine) između preseka (I) i (II) u koji će ući i lokalni gubitak energije ako ima lokalnih poremećaja između dva preseka. Korisno je ponoviti, da bi se naglasilo, da primena navedene jednačine (83-9) zahteva da u preseku (I), kao i u preseku (II), strujanje bude pravolinijsko i paralelno, normalno na presek. Na samom početku razmatranja o proučavanju struja, u početku Poglavlja 81, naveden je uslov da se tečne struje mogu proučavati upoređenjem struja u dva tako uslovljena poprečna preseka, a u tim presecima uzimaju se veličine vezane za presek (ne ulazeći u raspoređivanje po preseku), a te veličine su piježometarska kota Π i prosečna brzina v za presek. Pod navedenim uslovom (paralelno i pravolinijsko strujanje, normalno na presek) izvedena je i malo pre



Slika 101–1 Dijafragma kao primer lokalnog gubitka energije; $E_{izg,lok}$ je dodatni gubitak energije, prouzrokovan ugrađivanjem dijafragme

pomenuta jednačina (83–9). Taj uslov se namerno ovde ponavlja, jer on stvara izvesne teškoće određivanja lokalnog gubitka što će se uvideti u nastavku, razmatrajući dijafragmu kao primer, a sve što će se izložiti može se primeniti na bilo koji lokalni gubitak.

Strujanje u blizini dijafragme nije ni približno paralelno i pravolinijsko – naprotiv, ono je krivolinijsko, sa odvajanjem velikih vrtloga od osnovne struje. Stoga se za preseke neposredno ispred i iza dijafragme ne može tvrditi da je piježometarska kota ista za ceo jedan presek. Nadalje, u tim presecima brzina nije ni približno ravnomerno raspoređena po preseku (brzina nije po celom preseku ni približna prosečnoj za presek), uz zidove strujanje je čak i povratno. Preseci neposredno ispred i iza dijafragme, dakle, nisu podobni da se za njih napiše jednačina koja povezuje energije u dva preseka, u kojoj za svaki presek ulaze samo po dva podatka (Π i v). Međutim, na izvesnim rastojanjima od dijafragme, ispred i iza nje (ili, uopšteno rečeno, negde dalje od samog uzroka lokalnog poremećaja), mogu se uzeti preseki u kojima se

ispunjavaju uslovi za postavljanje poprečnog preseka, koji može da bude unešen u jednačinu (sa svojim podacima za Π i v), jer je tu strujanje približno pravolinijsko i paralelno, normalno na presek, a brzina, u pretežnom delu preseka, ne razlikuje se mnogo od proseka za presek. To su preseci (I) i (II) na sl. 101–1.

Da nema dijafragme, gubitak energije između preseka (I) i (II) bi bio gubitak usled trenja u jednolikom tečenju u cevi, a na dužini jednakoj rastojanju između preseka (I) i (II). Dijafragmi treba pripisati samo povećanje izgubljene energije, koje je posledica njenog stavljanja u cev. To povećanje je na sl. 101–1 prikazano kao lokalni gubitak energije, a označeno sa $E_{izg,lok}$. Drukčije rečeno, da nema lokalnog poremećaja, izgubljena energija na pravoj cevi iste dužine – između (I) i (II) – bila bi manja za $E_{izg,lok}$. Isti način prikazivanja primeniće se na bilo koji lokalni poremećaj, dijafragma je poslužila samo kao primer.

Ovakvo izražavanje je veoma pogodno za praktičnu upotrebu, jer se tako izražava *povećanje izgubljene energije usled unošenja u cev lokalnog poremećaja*, a to praksu prevashodno i zanima.

Primećuje se da se E_{izg} određuje eksperimentalno, a samo u retkim izuzecima se do E_{izg} može doći analitičkim putem. Ti izuzeci su Primeri 2 i 3 Poglavlja 83, gde je određena izgubljena energija na ulazu u cev uguranu u rezervoar i u naglom proširenju (sl. 82–5, sl. 83–5).

Do eksperimentalnih podataka o izgubljenoj energiji E_{izg} lako se dolazi – na način objašnjen u Poglavlju 85. Slika 85–3 ukazuje da se meri pijezometarska razlika $\Pi_I - \Pi_{II}$ i proticaj Q pa se, na osnovu izmerenoga, jednačinom (83–9) izračuna E_{izg}^{I-II} , i od toga se oduzme gubitak usled trenja pa se dobija $E_{izg,lok}$. To je potpuno u skladu sa malopređašnjim shvatanjem lokalnog gubitka energije.

Gubitak usled trenja koji se unosi u račun za primer na sl. 83–5 je gubitak usled trenja koji bi se ostvario u cevima prečnika jednakog prečniku pre suženja, odnosno iza suženja, i na dužinama jednakim dužini od preseka (I) do promene preseka, odnosno od promene preseka do preseka (II). Taj račun gubitaka usled trenja obavlja se prema eksperimentalnim rezultatima na pravim cevima (bez lokalnih poremećaja) istih prečnika i iste hrapavosti, ili, još bolje, u produžetku cevi, gde se određuje lokalni gubitak.

Kod dijafragme ceo račun je prostiji, jer je cev od preseka (I) do (II) istoga preseka, a tu je i izgubljena energija jednaka pijezometarskoj

razlici, $E_{izg}^{I-II} = \Pi_I - \Pi_{II}$, jer su brzine u oba preseka iste, $v_I = v_{II}$.

Naglašava se da je bitno da će se na svim primerima na koja će se preneti eksperimentalna saznanja gubitak obračunavati na isti način kako su obračunati eksperimentalni podaci, a to će se i postići, jer će se postupati na opisani način. Stoga se lako otklanja zamerka sa suštinske strane da trenje nije isto u pravoj cevi bez lokalnog poremećaja i u zahvaćenom području lokalnog poremećaja, jer je strujanje drukčije, drukčiji je, pre svega, raspored brzine, jer se lokalni poremećaj ispoljava kroz vrtloženja, delimično povratno strujanje uz zid cevi, i slično. Međutim, to isto se dešava i u eksperimentalnim istraživanjima i na primerima gde će se saznanja sa njih primeniti, a svi primeri računaju se na isti način, pa je krajnji rezultat računski ispravan bez obzira što, strogo uzevši, nije ono što se računa baš trenje u području lokalnog poremećaja. Zamerka se može objasniti neminovnošću uplitanja trenja u lokalni poremećaj, jer se granični preseki (I) i (II) moraju odmaknuti da bi strujanje u njima bilo pravolinijsko, paralelno i normalno na presek, pa je zbog toga podoban prihvaćeni postupak. I, na kraju, u dobrom delu praktičnih primera, ono što se računa kao trenje je beznačajno u odnosu na ukupni gubitak u području lokalnog poremećaja, pa onda primedba na način obračuna trenja postaje beznačajna.

Umesno je pitanje: Koliko treba da budu odmaknuti granični preseki (I) i (II) pa da u njima bude pravolinijsko i paralelno strujanje, normalno na presek? U eksperimentalnim istraživanjima zaključuje se da su dovoljno udaljeni ako je ispred preseka (I), i iza preseka (II), tečenje jednoliko što se ispoljava kroz konstantan nagib piježometarske linije na slikama 85-3 i 101-1 to se i pokazalo kroz tri piježometarske kote.

Pri rešavanju praktičnih primera prihvaćeni postupak ne traži da se utvrđuje odakle i dokle se prostire uticaj lokalnog poremećaja, odnosno ne upušta se u položaj preseka (I) i (II), dovoljno je da se zna da je otpočinjanje, odnosno završavanje, lokalnog poremećaja, u pravolinijskom i paralelnom strujanju, a to će biti ako se razmatrani lokalni poremećaj ne prepliće sa nekim prethodnim ili narednim. Kao gruba procena dovoljno je da su sredine područja dva lokalna gubitka odmaknute jedna od druge za otprilike 10 prečnika cevi.

* * *

Uobičajen je obrazac:

$$E_{\text{izg,lok}} = \xi_{\text{lok}} \frac{v^2}{2g}$$

Izgubljena energija usled lokalnog poremećaja

ξ_{lok} = koeficijent lokalnog gubitka

(101-1)

Umesto opšteg indeksa „lok” uz E_{izg} obično se koristi indeks koji ukazuje o kakvom se gubitku radi, na primer „dia” za dijafragmu, „ul” za ulaz u cev, „proš” za proširenje cevi itd.

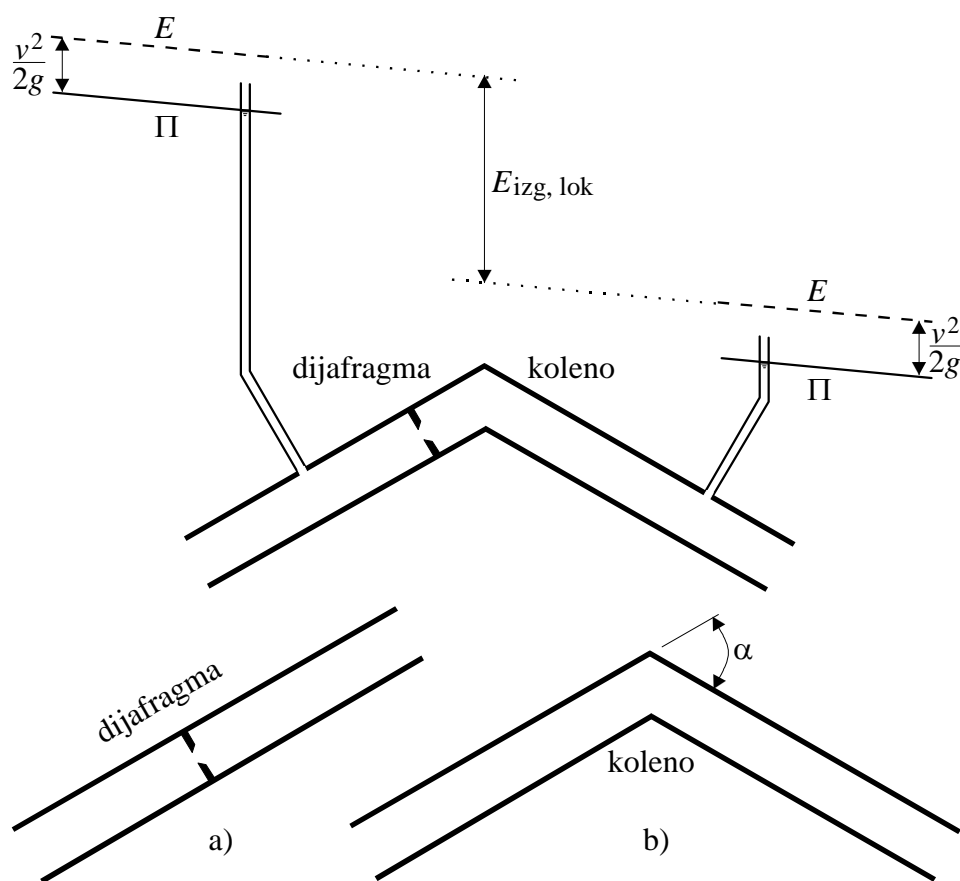
Svakako da je to za praktične potrebe veoma pogodno, ali treba upozoriti i na sledeće: Iako je iz praktičnih izlaganja posve jasno, opet nije beskorisno ponovo skrenuti pažnju da navedeno crtanje linija energija i piježometarske (ova druga je za brzinsku visinu $v^2/2g$ ispod prve) u području lokalnog poremećaja nije ispravno sa suštinske strane, jer se one i ne mogu nacrtati u području gde vlada lokalni poremećaj i gde se kote energije i piježometarska i ne mogu vezati za presek. U Odeljku III ovoga poglavlja biće učinjen pokušaj da se ukaže na potrebu uvida u to kakve praktične posledice (čak i nepoželjne) mogu imati zbivanja u području lokalnog poremećaja. Opreznost u tom smislu izražena je na slikama 101-1 i 101-2 gde se izbeglo crtanje linija (E, Π) u području lokalnog poremećaja, dok je ta opreznost napuštena na sl. 101-3, gde se postupilo onako kako je u praksi uobičajeno.

Ako ispred i iza lokalnog gubitka brzina nije ista (jer se menja presek struje), mora se naznačiti sa kojom se brzinskom visinom množi $v^2/2g$ (da li sa onom ispred ili iza lokalne promene). Ovo pitanje se odnosi, na primer, na proširenje (sl. 83-5), ili na suženje (sl. 85-3), dok otpada kod dijafragme gde je $v_I = v_{II}$.

Kod preklapanja uticaja dva lokalna poremećaja (na primer uz dijafragmu se nalazi i koleno kojim se menja pravac strujanja – slika 101-2) mora se to posmatrati kao jedinstven lokalni gubitak, koji se razmatra samo kao celina, između dva neporemećena poprečna preseka. Ne mogu se pojedinačno obračunavati, a potom sabirati pojedini elementi složenog lokalnog poremećaja, jer se za svaki element pojedinačno ne mogu postaviti jasno određeni granični uslovi, jer se ne mogu rastaviti poprečnim presekom gde je strujanje pravolinijsko i paralelno.

Dva – ili više – lokalnih uticaja stapaju se u jedan jedinstven lokalni gubitak ako pojedini elementi nisu odvojeni dovoljnom dužinom prave cevi, da bi se mogli posmatrati odvojeno.

Sa praktičnog stanovišta umesno je pitanje ostvarenja kvadratne zakonitosti, jer to znači srazmernost E_{izg} i v^2 , a onda je ξ konstanta za jedan određeni lokalni poremećaj, za jedno geometrijsko određeno područje lokalnog poremećaja, što znatno uproštava procenu vrednosti E_{izg} . Navedena srazmernost između E_{izg} i $v^2/2g$ je srazmernost



Slika 101–2 Lokalni gubitak za sadejstvo dva lokalna uticaja (za primer su uzeti dijafragma i koleno) je jedinstven gubitak a nije zbir pojedinačnih lokalnih uticaja kada su oni usamljeni – (a) i (b) – jer se u zajedništvu uticaji preklapaju, usled njihove blizine

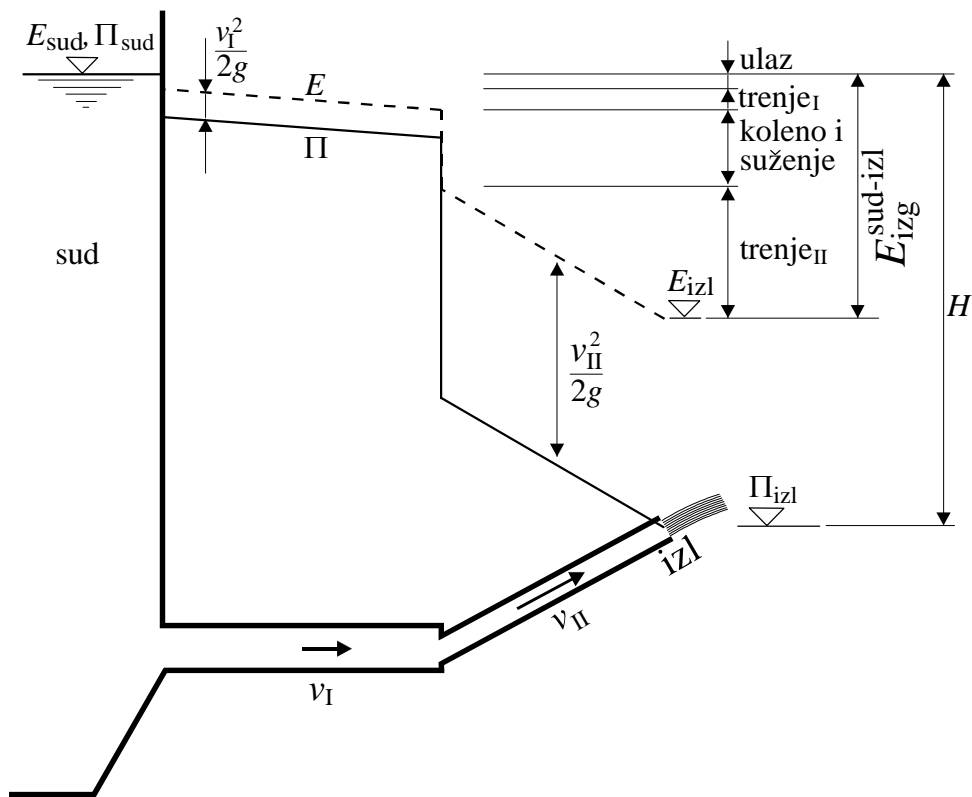
između izgubljene energije i kinetičke energije (obe po jedinici težine), što znači odnos između energije koju lokalni poremećaj oduzima i energije koju struja u tečenju poseduje.

Gubitak energije u jednolikom tečenju, koji nastaje isključivo zbog trenja (bez lokalnih poremećaja), raspravljan je u Poglavlju 91, gde je izražen sa (91–24), a za koeficijent trenja λ treba uzeti obrazac (91–25) ili (91–26) i onda se dobija kvadratna zakonitost: za istu cev E_{izg} je srazmerno sa v^2 . Ograničenje je dato sa (91–28), jer se kvadratna zakonitost neće ostvariti ako brzina i hrapavost ne pređu određene vrednosti. Ako se to ostvari za jednoliko tečenje u cevi, onda će se, van svake sumnje, ostvariti i za lokalni poremećaj, jer on povećava gubitak, što bi mogla dati samo izuzetno povećana hrapavost. U slučajevima gde se ne ostvaruje kvadratna zakonitost brzine su obično malene, pa onda ni lokalni gubitak nije značajan.

Za prikaz dijafragme pretpostavlja se da je ona tanka i da njena debljina ne utiče na obrazovanje strujanja kroz njen otvor. Upravo struja se odlepljuje od njene uzvodne oštre ivice. Sa tom ostvarljivom pretpostavkom, uz prihvatanje kvadratne zakonitosti, koeficijent lokalnog gubitka ξ zavisi samo od odnosa otvora dijafragme i preseka cevi, od A_0/A , što je jednako D_0^2/D^2 , gde je D_0 prečnik otvora dijafragme, a D prečnik cevi. U narednom poglavlju (102) razmatraće se niz lokalnih gubitaka u cevima, između ostalih i za dijafragmu – unapred se ukazuje na sl. 102–11 gde je nacrtan grafikon $\xi = \xi(A_0/A)$ za dijafragmu.

* * *

Lokalni gubitak se obično prikazuje naglim (skokovitim) spuštanjem linije energije, iako se taj gubitak ne ostvaruje u jednom preseku, nego na izvesnoj dužini, tako da nacrtane linija energije i pijezometarska linija prikazuju ono što je obračunato. Primer za to je slika 101–3. Tu se pojavljuju dva lokalna gubitka: na ulazu u cev i u kolenu u kome se, pored skretanja struje, menja i presek cevi (smanjuje se). Između njih, i iza drugoga, su dovoljne dužine prave cevi, tako da su granični uslovi za pojedine lokalne gubitke jasni. U tim presecima strujanje je neporemećeno jednoliko tečenje, bez uticaja lokalnog poremećaja. Shodno prethodnim objašnjenjima koleno sa suženjem se mora razmatrati kao jedan (i jedinstven) lokalni poremećaj (obračunava se kao jedan lokalni gubitak) jer se uticaji preklapaju.



Slika 101–3 Uklapanje lokalnih gubitaka u kontinualno prikazivanje linija energije (E) i pijeziometarske (Π)

Iz slike 101–3 se uviđa da se smatralo da je brzina u sudu zanemarljiva, a slobodno isticanje nameće izlaznu pijeziometarsku kotu u središtu izlaznog otvora cevi. Jednačina energije, data sa (83–9), izraziće (posve razumljivo) ono što je nacrtano:

$$E_{izg}^{sud-izl} = E_{sud} - E_{izl} = \Pi_{sud} - \left(\Pi_{izl} + \frac{v_{II}^2}{2g} \right) = H - \frac{v_{II}^2}{2g}$$

Gubitak se izražava zbirom pojedinačnih gubitaka (lokalnih, i na trenje):

$$E_{izg} = \left(\xi_{ul} + \lambda_I \frac{L_I}{D_I} \right) \frac{v_I^2}{2g} + \left(\xi_{kol+suž} + \lambda_{II} \frac{L_{II}}{D_{II}} \right) \frac{v_{II}^2}{2g}$$

Primećuje se da je gubitak na kolenu sa suženjem izražen preko $v_{II}^2/2g$, a moglo bi i preko $v_I^2/2g$ (jer se tu sem skretanja prelazi sa brzine v_I na v_{II}), ali bi onda bila drukčija vrednost koeficijenta $\xi_{kol+suž}$. Uticaj trenja je izražen prema obrascu (91–24), a indeksi I, odnosno II, uz λ , L i D se odnose na prvi, odnosno drugi deo cevi.

Kako je proticaj $Q = v_I A_I = v_{II} A_{II}$ (gde su A_I i A_{II} preseki cevi), na osnovu napisanih jednačina piše se sledeća veza između proticaja Q i visinske razlike H :

$$H = \frac{Q^2}{2g} \left[\frac{1}{A_I^2} \left(\xi_{ul} + \lambda_I \frac{L_I}{D_I} \right) + \frac{1}{A_{II}^2} \left(1 + \xi_{kol,suž} + \lambda_{II} \frac{L_{II}}{D_{II}} \right) \right]$$

pa se na osnovu jedne od veličina Q ili H – određuje druga.

Ako se ostvaruje kvadratna zakonitost, koeficijenti λ i ξ su konstante, pa se uspostavlja veza $H = \text{const}Q^2$.

Za svaki zadatak strujanja vode u cevi može se, poštujući date granične uslove, napisati odgovarajuća jednačina i nacrtati E i Π -linije, načelno na isti način kao za razmatrani primer.

* * *

U praktičnim primerima lokalni gubitak se redovno prikazuje naglim (skokovitim, stepeničastim) spuštanjem linije energije, kao što je to učinjeno na sl. 101–3. Taj postupak proizilazi iz odgovarajućeg računa, a pogodan je jer ne zahteva određivanje dužine na kojoj se oseća lokalni poremećaj, a prikazivanjem učinka lokalnog poremećaja na jednom preseku uklapa se u prihvaćeno obračunavanje lokalnog gubitka kao viška gubitka energije iznad onoga koje bi dalo trenje na istoj dužini cevi pošto se linija energije produžava celom dužinom cevi sa nagibom koji daje trenje – kao na sl. 101–3.

II
PRIMENA DIMENZIONALNE ANALIZE NA
ODREĐIVANJE LOKALNOG GUBITKA U CEVI

U Poglavlju 62 veličina Φ u izrazu (62–10) zamenjuje se bezdimenzionalnom veličinom C_Φ u (62–11), a pri tom se za osnovne veličine uzimaju: gustina ρ i karakteristična dužina L_0 i brzina u_0 (karakteristične za pojavu u kojoj se određuje Φ). Pri određivanju lokalnih gubitaka u cevi za karakteristične veličine nameću se prečnik cevi D i brzina v u jednom od preseka – ako su preseci istovetni onda se odnose na oba preseka – (I) i (II). Ovde treba uočiti da E_{izg} ima dimenziju dužine, pa bi bezdimenzionalna zamena bila E_{izg}/D (jer bi dimenzionalna analiza za C_Φ dala $E_{izg}/\rho^0 D^1 v^0$). Do ovoga nesklada dolazi zbog toga što se energija formalno izražava sa dužinom, upravo sa energijom po jedinici težine, a taj nesklad se može otkloniti tako da se ispolji da je energija dinamička, a ne geometrijska veličina. U tu svrhu se može uzeti izgubljena energija po jedinici zapremine – označava se sa e_{izg} , a dimenzija joj je [sila/dužina²]. Ako je e_{izg} na levoj strani izraza (62–10), na istoj strani u (62–11) biće $e_{izg}/\rho^1 D^0 v^2$ pa se može napisati:

$$\frac{e_{izg}}{\rho v^2} = f(Re, Ko) \quad (101-2)$$

Kako je E_{izg} ukupna energija podeljena sa težinom ($= \gamma V$), a e_{izg} je ukupna energija podeljena sa zapreminom ($= V$), onda je $e_{izg} = \gamma E_{izg}$ ($\gamma =$ specifična težina), pa se umesto prethodnog izraza piše :

$$\frac{gE_{izg}}{v^2} = f(Re, Ko) \quad (101-3)$$

Pošto je, shodno (101–1), $\xi = 2gE_{izg}/v^2$, to znači da je:

$$\xi = \xi(Re, Ko) \quad (101-4)$$

Mora se dati objašnjenje zašto su u prethodnom izrazu izostavljeni Košijev, Frudov i Veberov broj (Ca, Fr, We), koji su uvršteni u (62–11). Objašnjenje je sledeće: Pošto se radi o nestišljivom fluidu, u razmatranju ne učestvuje Ca -broj jer on unosi stišljivost, a ni We -broj jer on unosi površinski napon, a ovde nema slobodne površine vode. Rečeno

je ispred i iza jednačine (62–18) da Fr -broj ne utiče na pojavu ako je bitan zbirni uticaj težine i pritiska, a nije bitno kako su ta dva uticaja raspoređeni. Navedeni zbirni uticaj izražava piježometarska kota i kod tečenja pod pritiskom bitna je samo piježometarska razlika za dva preseka, a nije bitno koliko u tim kotama učestvuje položajna kota Z , a koliko unosi pritisak sa p/γ . Tako su i na slikama 101–1 do 101–3 upisane samo piježometarske kote.

Recipročna vrednost leve strane u (101–3) može se shvatiti kao Fr -broj, ako se E_{izg} shvati kao karakteristična dužina, što bi značilo da je bitan uticaj sile težine. Međutim, malo pre je objašnjeno da to nije tako pa je izostavljen Fr -broj. Može se reći da leva strana u (101–3), koja podseća na Fr -broj, ukazuje da se E_{izg} meri odgovarajućim radom sile težine (spuštanjem za visinu jednaku E_{izg}), da tu rad sile težine služi za upoređenje (za merenje), a ne znači da baš sila težine mora da svojim radom nadoknadi energiju koja se gubi. Mogu to, umesto nje, uraditi i rad sila pritiska i smanjenje kinetičke energije.

U Ko treba, pre svega, obuhvatiti geometrijsko određenje (bezdimezionalnim veličinama) uzroka lokalnog poremećaja. Na primer, kod dijafragme (sl. 101–1) to je odnos prečnika D_0 otvora dijafragme i prečnika D cevi, tj. D_0/D . Ako utiče i debljina dijafragme (δ), onda treba dodati i δ/D . Međutim, dijafragma je obično tanka i oštroična pa se ovo može izostaviti. Kod kolena – sl. 101–2 – pod b), u Ko ulazi ugao α (ucrtan na slici).

U Ko ulaze i bezdimezionalno izraženi rasporedi brzina u presecima (I) i (II), jer to ulazi u granične uslove.

Odnos brzine \bar{u} u pojedinoj tački i srednje brzine v u preseku izražen je sa (96-44), u zavisnosti od rastojanja x_2 od zida, izraženog bezdimezionalno, sa x_2/r (gde je r poluprečnik cevi) i koeficijenta trenja λ , a λ , shodno (96-24) zavisi od Re -broja i od relativne hrapavosti k/D . Prema tome, može se napisati:

$$\frac{u}{v} = f \left[\frac{x_2}{r} \left(Re, \frac{k}{D} \right) \right] \quad (101-5)$$

Prethodno je napisano namerno tako da se iskaže da, za jedan određeni slučaj (za jedan određeni proticaj u jednoj određenoj cevi), brzina u zavisi od rastojanja x_2 od zida cevi – ili bezdimezionalno izraženo u/v zavisi od x_2/r – dok Re i k/D imaju parametarski ka-

rakter tj. za jedan određeni slučaj su konstante, a menjaju se od jednog primera do drugog (drugi proticaj, druga cev).

Re-broj je već ušao u vezu (101–4), pa se postavlja samo pitanje da li k/D treba da uđe u *Ko* (u granične uslove). Strogo uzevši treba, a sa praktičnog stanovišta može k/D da se izostavi ako su posledice toga izostavljanja beznačajne. Za procenu izgubljene energije naime, neophodan je uslov, i već naglašen, da je u graničnim presecima između kojih se obračunava lokalni gubitak strujanje neporemećeno upravo onakvo kakvo je u području gde lokalnog poremećaja nema, pa se rasporedi brzina (dati bezdimenzionalno) za različite vrednosti k/D veoma malo razlikuju, tako da ta razlika ne može osetno uticati na promenu strujne slike koju stvara lokalni poremećaj u području ovoga uticaja. Razume se da nije dozvoljeno da se za granični presek uzme presek koji je još pod uticajem prethodnog, ili već pod uticajem narednog lokalnog poremećaja, jer baš poremećeni raspored brzina u njima utiče na strujnu sliku u lokalnom poremećaju koji se posmatra. Iz tog razloga preklapanje uticaja dva (ili više) lokalna poremećaja mora se razmatrati kao jedinstveni lokalni gubitak, i to je već rečeno, i objašnjenja radi, prikazano primerima na sl. 101–2 i 101–3. Prvi prikaz je zajednički gubitak na dijafragmi i kolenu, a drugi na kolenu sa suženjem.

Treba napomenuti da hrapavost, sem opisanog uticaja na raspored brzina u graničnim presecima, može uticati i na zbivanja u području lokalnog poremećaja. Hrapavost trenjem može da utiče na to gde će se struja odvojiti od zida, i otpočeti vrtloženje, a onda i na rasprostiranje vrtložne oblasti, koja troši energiju, a to je pretežni deo onoga što se obračunava kao izgubljena energija. U Poglavlju 51, slikom 51–3, i pratećim objašnjenjima, ukazano je da je energija koju uzmu prvostvoreni vrtlozi za struju nepovratno izgubljena. Međutim, u pretežnom delu primera na iznos lokalnog gubitka uticaj hrapavosti je beznačajan. Istini za volju mora se ipak primetiti da ima primera gde hrapavost može da utiče na obrazovanje vrtložne oblasti. U Odeljku II narednog poglavlja (102) biće razmatran lokalni uticaj krivine, gde će se skrenuti pažnja na navedeni uticaj hrapavosti.

* * *

Izostavljanje *Re*-broja u (101–4) znatno bi uprostilo određivanje koeficijenta lokalnog gubitka, jer bi se svelo na vezu:

$$\xi = \xi(Ko) \quad (101-6)$$

što dovodi do

$$\xi = \text{const} \quad \text{za} \quad Ko = \text{idem} \quad (101-7)$$

Izraz *idem* (= isto) uveden je sa (63-3) uz objašnjenje da je to pogodan izraz za istovetnost graničnih uslova, napisanih bezdimenzionalno, u svim slučajevima koji su međusobno slični. Prema tome, prethodni izraz (101-7) kazuje da koeficijent lokalnog gubitka ξ ima konstantnu vrednost za sve slučajeve gde su isti granični uslovi, napisani u bezdimenzionalnim veličinama. Ako se izostavi, shodno malo-pređašnjim objašnjenjima, uticaj hrapavosti, napisano sa (101-7) značilo bi $\xi = \text{const}$ za sve dijafragme kod kojih je ista vrednost za A_0/A (odnos površine otvora prema površini preseka cevi). Ili, za sve dijafragme ξ je funkcija isključivo od A_0/A . To je već zaključeno u prethodnom odeljku (I) ovoga poglavlja i biće prikazano na sl. 102-11 u sledećem poglavlju (102). Za koleno, ako je usamljeno (slučaj b) na sl. 101-2), ξ je funkcija isključivo od ugla α .

Nepojavljivanje *Re*-broja u izrazima za gubitak energije, pa i u (101-6), načelno je raspravljeno na kraju Odeljka V Poglavlja 85 gde je objašnjeno da to znači da je ono što se računa kao gubitak energije za glavno strujanje u stvari prelazak mehaničke energije u fluktuacije i rečeno je da se tada kaže da se radi o „razvijenoj turbulenciji”. Međutim, ne mora u svim slučajevima da bude turbulencija toliko razvijena da viskoznost ne utiče na osrednjene veličine, pa i na E_{izg} . Uticaj viskoznosti će se ispoljiti kroz zavisnost ξ i od *Re*-broja. Uostalom, kako obračunati lokalni gubitak u laminarnom strujanju gde su baš premoćni uticaji viskoznosti?

Za laminarno tečenje kroz područje lokalnog gubitka može se pretpostaviti da su inercijalni uticaji (a to su uticaji gustine) zanemarljivi u odnosu na uticaje viskoznosti, jer su ubrzanja delića beznačajna, a ovo znači da se gustina ρ može izostaviti u funkciji (62-10), a onda se za osnovne veličine mogu uzeti koeficijent viskoznosti μ , prečnik D i brzina v , tj. bezdimenzionalna zamena za e_{izg} je $e_{izg}/\mu v D^{-1}$. Sa tom bezdimenzionalnom veličinom umesto funkcije (101-2) piše se:

$$\frac{e_{izg}}{\mu v / D} = f(Ko) \quad (101-8)$$

Ranije je objašnjeno da za posmatranu pojavu lokalnog poremećaja u cevima u vezi bezdimenzionalnih veličina ne učestvuju Ca , Fr , We , a sada je izostao i Re -broj, jer njega unosi viskoznost, a ona je već ušla (u levu stranu izraza). Izraz (101–8) je veza samo jedne bezdimenzionalne veličine (napisane na levoj strani izraza) sa bezdimenzionalno izraženim graničnim uslovima Ko , dok je (101–2) veza dve bezdimenzionalne veličine (leva strana i Re) sa Ko . Smanjivanje za jednu bezdimenzionalnu veličinu je posledica što je u vezi dimenzionalnih veličina koja je dovela do (101–8) izostala jedna veličina – gustina ρ .

Neposredno iza pisanja (101–2) pokazano je da $e_{izg} = \gamma E_{izg}$, a E_{izg} je jednako $\xi v^2/2g$, pa se može leva strana u (101–8) zameniti sa $\gamma \xi v D/2g\mu$, u čemu se opet može γ/g zameniti sa ρ , a $\rho v D/\mu$ sa Re -brojem. Tako se, umesto (101–8) piše:

$$\xi Re = f(Ko) \quad (101-9)$$

Za jedne određene bezdimenzionalno opisane granične uslove onda je:

$$\xi Re = \text{const} \quad \text{za} \quad Ko = \text{idem} \quad (101-10)$$

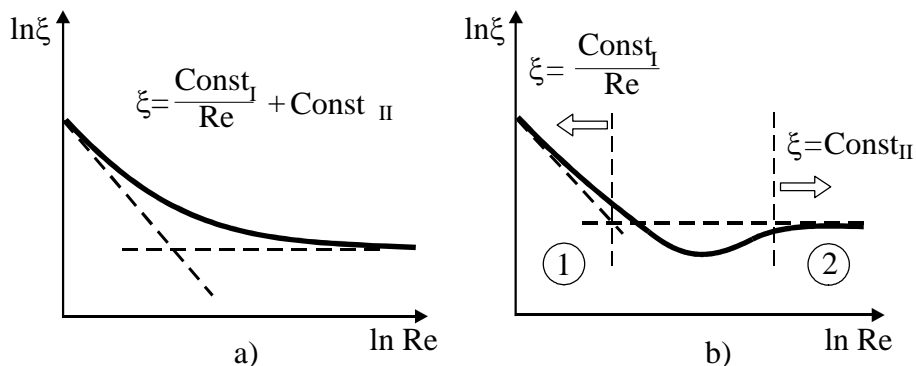
Tečenje kroz jedno određeno područje koje izaziva lokalni gubitak može da bude laminarno ako je brzina dovoljno malena, pa povećanjem brzine postaje turbulentno uz postepeno smanjenje uticaja viskoznosti da bi, kada brzina dovoljno poraste, turbulencija bila toliko razvijena da viskoznost prestaje da ima uticaja na E_{izg} . Za jedan tip lokalne promene koja se bezdimenzionalno izražava sa $Ko = \text{idem}$, prethodno iskazano znači da će se porastom Re -broja od zavisnosti (101–10) preći na (101–7), sa napomenom da taj prelaz nije određen.

Taj prelaz može da bude kako je načelno prikazano sa (a) na slici 101–4, ili prema (b) na istoj slici.

Za slučaj (a) celokupna oblast se može prikazati sa:

$$\xi = \frac{\text{const}_I}{Re} + \text{const}_{II} \quad (101-11)$$

const_I i const_{II} su konstante napisane u (101–10), odnosno (101–7). Za malene vrednosti Re -broja prvi član desne strane prethodnog izraza je premoćan u odnosu na drugi, pa se izraz svodi približno na (101–10), a za velike vrednosti Re -broja, prvi član je zanemarljiv pa se izraz svodi na (101–7).

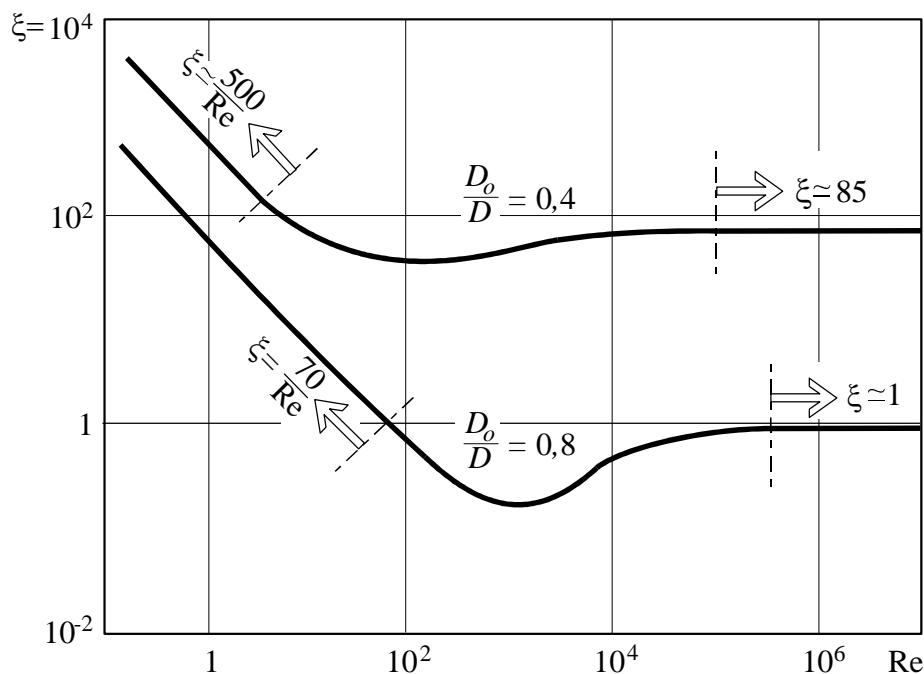


Slika 101–4 Dve mogućnosti zavisnosti koeficijenta ξ za lokalni gubitak od Re -broja – pri istim graničnim uslovima, datim u bezdimenzionalnim veličinama ($Ko = idem$)

Kod zavisnosti prema grafikonu (b) na sl. 101–4, ξ ne opada sa porastom Re -broja u celom području, kao što je bilo kod (a). Vrednost za ξ se spusti ispod vrednosti $const_{II}$ i onda raste pa se sa donje strane asimptotski približi pravoj liniji izraženoj sa $\xi = const_{II}$. Jedinstvena zakonitost (101–11) ne može se prilagoditi ovom slučaju, jer se prelaz iz oblasti (1) u oblast (2) na slici ne može uklopiti u tu zavisnost.

Na prvi pogled na sl. 101–4 izgledalo bi da su u turbulentnom strujanju gubici manji od onih u laminarnom, jer je ξ manje. Međutim, da se laminarno strujanje nastavilo, nastavila bi se na grafikonima linija $\xi = const_I/Re$ koja bi sišla ispod vrednosti za ξ koja daje turbulentno tečenje.

Za primer grafičkog prikazivanja zavisnosti $\xi = \xi(Re)$ uzeta je i ovde dijafragma, za koju se prema ranijim objašnjenjima bezdimenzionalno izraženi granični uslovi Ko svode samo na D_0/D (odnos prečnika otvora dijafragme i prečnika cevi), pa jedna zavisnost $\xi = \xi(Re)$ važi za sve dijafragme kod kojih je odnos D_0/D isti – na slici 101–5 su date zavisnosti za D_0/D jednako 0,8 i 0,4. Uočava se oblast kvadratne zakonitosti, za Re -brojeve veće od izvesne vrednosti, ξ postaje konstanta za određeno D_0/D . To se uklapa u izraz (101–7) i sliku 101–4. Kasnije, u Poglavlju 102, već pomenutom slikom 102–11 biće prikazana zavisnost ξ za različite odnose A_0/A , ali samo za oblast kvadratne zakonitosti.



Slika 101–5 Koeficijenti ξ lokalnog gubitka energije u zavisnosti od Re -broja za dijafragme pri $D_o/D =$ prečnik otvora dijafragme/prečnik cevi = 0,4 i 0,8

III

OSVRT NA PROMENE PRITISAKA I BRZINA U PODRUČJU LOKALNOG POREMEĆAJA

Na kraju Odeljka I nagovešteno je da će pokušati da se napravi osvrt na praktične posledice zbivanja u području lokalnog poremećaja, što se ne može videti iz nacrtanih linija energije i piježometarske ako se one povuku kontinualno kao na sl. 101–3 (a tako se u praksi i postupa).

Ako rasporedi brzina i pritiska u području lokalnog gubitka ne dovode do posledica koje su nepoželjne i neprihvatljive sa praktičnog stanovišta, navedenim zamerka na crtanje kontinualnih linija energije i piježometarske ne mora se pridavati značaj, jer je za praktičare važno da cev propušta određeni proticaj uz određenu visinsku razliku, a da pri tome ne dolazi ni do kakvih neželjenih posledica. Međutim, lokalni poremećaj može da se ispolji kroz izrazito povećanje lokalne brzine, koje prati lokalno sniženje pritiska, ili se pak pojavljuju lokalni

povećani pritisci, a može doći i do pojave jakog vrtloženja, mogu se stvoriti i uslovi za pobudu vibracija, ili nekakva druga nepoželjna pojava. To može dovesti u sumnju prihvatljivost rešenja i onda se mora prići i posebnom proučavanju lokalnog poremećaja – to je onda poseban zadatak. Tu, pre svega, treba utvrditi raspored brzina i pritisaka.

Za primer ukazivanja na promene brzine i pritiska u području lokalnog poremećaja neka i ovde posluži uticaj dijafragme.

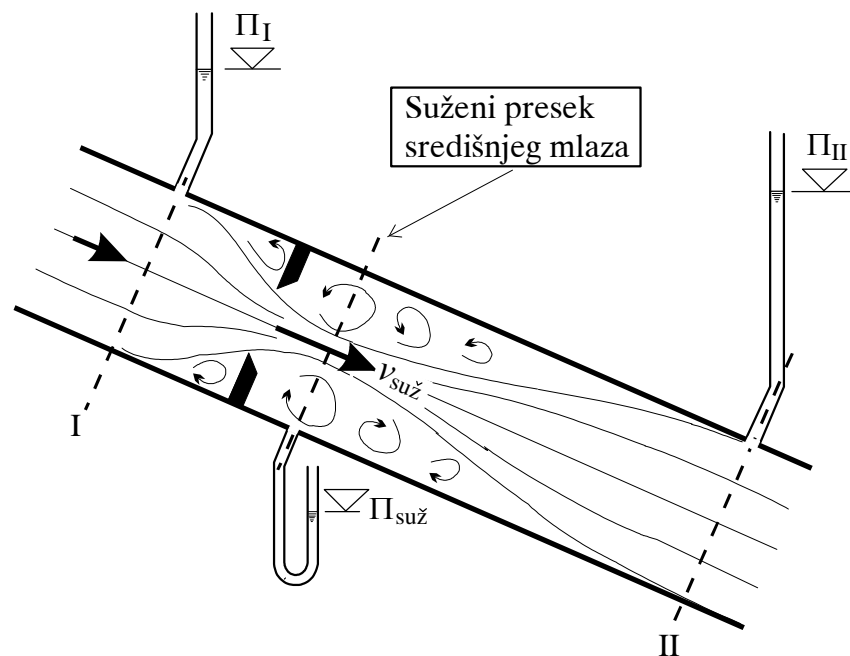
Za dijafragmu se može lako utvrditi da neposredno iza nje dolazi do izrazitog povećanja brzine, a onda i smanjenja pritiska. Mlaz koji prodire kroz otvor dijafragme nazvaće se „središnji mlaz”, on je „aktivni” deo preseka jer se njime tečnost prenosi nizvodno, a njega opkoljava vrtložna oblast, koja je „pasivni” deo preseka (ili „mrtvi” deo) koji ne učestvuje u prenošenju tečnosti nizvodno, jer delići krenu niz struju kada se odvoje od središnjeg mlaza, ali se to prenošenje poništi, jer delići krenu kasnije u povratno strujanje. Naime, središnji mlaz nastoji da pokrene „mrtvi” deo, a ovaj se tome suprostavlja, i tako se u tom međusobnom dejstvu „zamotavaju” vrtlozi.

Središnji mlaz ima minimalni presek, nazvan „suženi” (vidi sliku 101–6), jer je on sužen čak i u odnosu na otvor dijafragme. Od toga preseka središnji mlaz se širi dok u preseku (II) ne ispuni ceo presek cevi, a pri tome je strujanje u mlazu približno pravolinijsko i paralelno, jer se mlaz postepeno (blago, a ne naglo) širi, pa je pijezometarska kota u suženom preseku niža (čak osetno niža) od pijezometarske kote u preseku (II), jer znatno smanjivanje brzine (upravo smanjivanje $v^2/2g$) nameće znatno povećanje pijezometarske kote.

Iskustvo je pokazalo da se može prihvatiti stav da se pijezometarska kota iz središnjeg mlaza skoro nepromenjena pronosi kroz ceo jedan presek, i kroz vrtložnu oblast sve do zida. To se podrazumeva i za $\Pi_{\text{suž}}$ na sl. 101–6.

Na istoj slici se uviđa da je $\Pi_I > \Pi_{II} > \Pi_{\text{suž}}$. Namerno se na slici htelo istaći da sniženje pijezometarske kote na $\Pi_{\text{suž}}$ može da se spusti toliko da ta kota bude ispod cevi, tako da se ostvaruje potpritisak tj. apsolutni pritisak manji od atmosferskog. Ovo nameće rasuđivanje opšteg značaja – za sve lokalne poremećaje.

O lokalnom snižavanju pritiska mora se voditi računa jer to može da bude presudno za ocenu ispravnosti rešenja. Ako bi zadati proticaj zahtevao toliko veliko sniženje pritiska, da je ono neostvarljivo, onda



Slika 101–6 Kod strujanja poremećenog dijafragmom u presecima iza dijafragme piježometarska kota je niža od kote u preseku (II)

bi to proticanje bilo neostvarljivo. Naime, apsolutni pritisak može da se spušta samo do nule, pa se najniža piježometarska kota ne može spuštati ispod položajne za više od p_{atm}/γ_{vode} što je za vodu oko 10 m pri normalnom atmosferskom pritisku. O tome je bilo reči u Poglavlju 83 (tekst neposredno ispred „Primer”), gde je skrenuta pažnja da su i apsolutni pritisci koji se približavaju nuli nepoželjni, jer na njima voda isparava i pri uobičajenim temperaturama (pojava nazvana „kavitacija”). Za područje lokalnog poremećaja trebalo bi raspolagati sa pouzdanim dokazom da je u svim tačkama apsolutni pritisak nešto veći od nule.

Sem sniženih pritisaka zanimljivi su i povećani. Nadalje u potpunijem razmatranju lokalnih uticaja treba steći uvid u raspored brzina, sa posebnim ukazivanjem na maksimalne, i na povratne brzine. Vrtlozi, njihovo rasprostiranje i pojave periodičnosti u njima, takođe mogu da budu predmet proučavanja.

PRIMEDBA

Predmet proučavanja može da bude i tačniji uvid šta se obračunava sa E_{izg} – to se načelno raspravljalo u Poglavlju 85. U jednačini (85–27) desna strana iskazuje ono što se obračunava sa E_{izg} . Vidi se da na to ima uticaj neravnomernost brzina po preseku, što se izražava koeficijentom neravnomernosti α , koji u oba preseka ne mora biti isti, ako preseki nisu istovetni. Mnogo su, međutim, uticajni sledeća dva člana, pa se može istraživati raspored po zapremini sabiraka koji zbirno za zapreminu (između dva poprečna preseka) daju integrale napisane na desnoj strani izraza (85–16) i (85–23). To bi bio veoma težak zadatak, ali se barem može oceniti nije li def_{gl}^d zanemarljivo u odnosu na def^t , a to se lako utvrđuje – to je tako ako se ostvaruje kvadratna zakonitost, što znači zanemarljiv uticaj člana koji unosi viskoznost, odnosno izostavljanje Re -broja iz funkcije ξ , što je protumačeno u Odeljku II ovoga poglavlja.

Valja primetiti da se u dosadašnjem izlaganju podrazumevalo da se misli na osrednjene vrednosti pijezometarskih kota, pritisaka, brzina i svih ostalih veličina. Međutim, one fluktuišu, pa se u nekim zadacima izučavanja lokalnih pojava mora prići i izučavanju fluktuacionih veličina, upravo njihovih statističkih pokazatelja (navedeni su u Poglavlju 54).

Prema izlaganjima u Odeljku VII Poglavlja 85 može se zaključiti da se u području lokalnog gubitka ne mora sva „produkcija” turbulentne energije (a lokalni gubitak je baš značajan „proizvođač” te energije) biti preobražena u toplotu. U tom slučaju će turbulencija iza lokalnog gubitka biti razvijenija nego pre njega, upravo biće kinetička energija u fluktuacijama veća. To može da bude zaključak za istraživanje, ali to ne mora da bude merodavno za praktične zaključke, jer se ono što su fluktuacije uzele neće vratiti mehaničkoj energiji i biće kad-tad, odnosno negde nizvodnije, preobraćeno u toplotu i stoga se odmah otpisuje – kao gubitak.

IV
ODREĐIVANJE SILE
KOJOM ČVRSTA GRANICA DELUJE NA FLUID
U PODRUČJU LOKALNOG POREMEĆAJA STRUJE

Pri kraju Odeljka II Poglavlja 83, u zaključcima, koji su proizašli iz tumačenja prethodno navedenih primera, pod (b) se naglašava da poznavanje izgubljene energije omogućava da se primeni jednačina uravnoteženja sila kojom se može odrediti sila K kojom čvrsta granica deluje na masu između dva poprečna preseka struje (suprotno usmerena je sila kojom fluid opterećuje čvrstu granicu).

Primena jednačine uravnoteženja sila, gde je uključena i inercijalna „sila” objašnjeno je u Poglavlju 82. Naime, uz poznati proticaj poznate su komponente inercijalne „sile” u presecima (I) i (II), a uz poznatu izgubljenu energiju E_{izg} poznata je i pijezometarska razlika $\Pi_I - \Pi_{II}$, pa je na osnovu jedne zadate pijezometarske kote poznata i druga, čime su određene sile pritiska (P_I, P_{II}) na presecima, dok je sila težine uvek poznata, jer se zna na koju se zapreminu jednačina primenjuje. Tako ostaje samo nepoznata sila K koju jednačina onda sračunava. Uostalom, to je primenjivano i na primerima uz poglavlja 82 i 83.

Navedeni postupak primeniće se i na dijafragmu. Razmotriće se, kao prvo, sile koje deluju u pravcu strujanja (x -pravac) – to su (vidi sliku 101–7) komponenta sile težine G_x , sile pritiska u presecima (I) i (II), označene sa P_I i P_{II} , kao i komponenta K_x sile K kojom čvrsta granica deluje u tom pravcu. Tu komponentu čine sila kojom dijafragma deluje na fluid (K_{dia}) i sila trenja (K_{tr}).

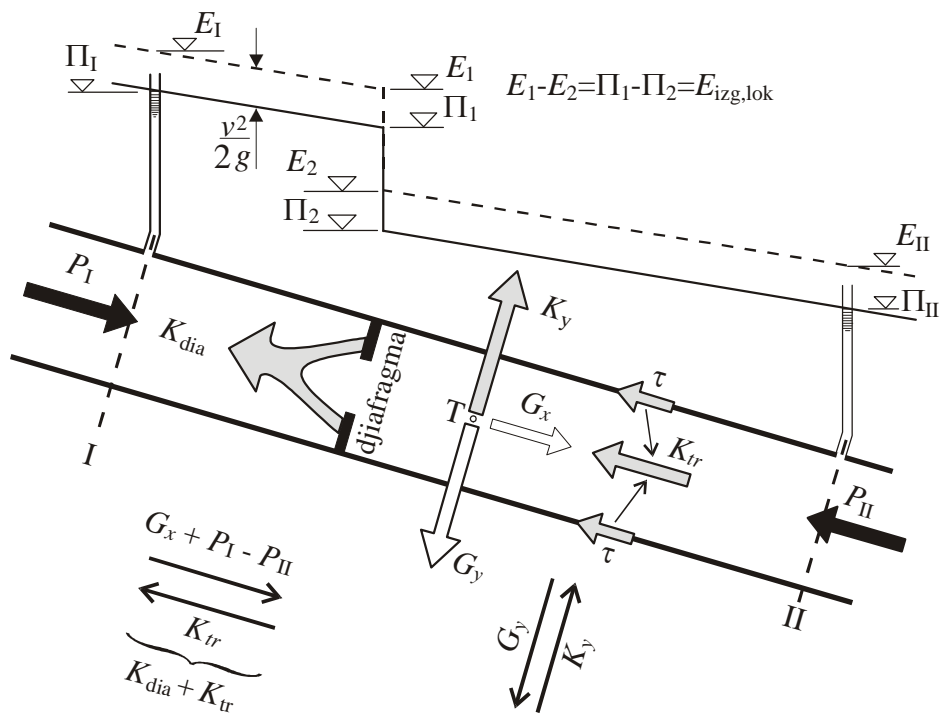
Jednačina ravnoteže za pomenute sile glasi:

$$G_x + P_I - P_{II} = K_x = K_{dia} + K_{tr} \quad (101-12)$$

U prethodnoj jednačini može se obaviti zamena:

$$G_x + P_I - P_{II} = \gamma A (\Pi_I - \Pi_{II}) \quad (101-13)$$

Ovo je napisano po ugledu na jednačinu (91–4), gde leva strana izražava $G_x + P_I - P_{II}$, a vidi se da je to jednako $\gamma A (\Pi_I - \Pi_{II})$, i to se i tamo, u (91–4), i ovde, (101–12) izjednačava sa silom K_x .



Slika 101–7 Sile koje deluju na masu fluida između preseka (I) i (II); dijafragma deluje silom K_{dia}

Prema objašnjenjima u Odeljku I ovoga poglavlja, trenje se obračunava isto kao na pravoj deonici, pa se za posmatrani slučaj, na osnovu sl. 101–7, može napisati:

$$K_{tr} = A\gamma [(\Pi_I - \Pi_1) + (\Pi_2 - \Pi_{II})] \quad (101-14)$$

gde su pijeziometarske kote Π_1 i Π_2 ucrtane na slici 101–7 kao prikaz računa. U jednačini (101–12) obaviće se zamene prema (101–13) i (101–14), pa se dobija:

$$K_{dia} = \gamma A (\Pi_I - \Pi_2) \quad (101-15)$$

Iz slike 101–7 se vidi da je pijeziometarska razlika $\Pi_I - \Pi_{II}$ jednaka $E_{izg,lok}$, pa je onda uspostavljena veza između lokalnog gubitka energije i sile kojom deluje dijafragma na fluid:

$$K_{dia} = \gamma A E_{izg,lok} \quad (101-16)$$

Treba uočiti da se za određivanje sile ne treba upuštati u dužine ispred i iza dijafragme, gde se mogu postaviti preseći (I) i (II), da u njima bude strujanje pravolinijsko i paralelno. Tako je bilo i kod određivanja lokalnog gubitka, što je, posve razumljivo, ocenjeno kao veoma pogodno za praktičnu primenu. I ovde se, kao i kod razmatranja izgubljene energije, može staviti suštinska primedba da trenje nije isto u području lokalnog poremećaja kao na istoj dužini prave cevi (a tako se računa), ali je ta primedba bespredmetna ako je trenje zanemarljivo u odnosu na dodatni lokalni gubitak, a tako i jeste ako je lokalni gubitak značajnijeg iznosa. Ako pak nije tako, onda uticaj lokalnog gubitka nije zanimljiv za praktična razmatranja. U vezi sa navedenom primedbom treba primetiti da pijezometarske kote Π_1 i Π_2 nisu kote za ceo jedan poprečni presek, jer tu strujanje nije pravolinijsko i paralelno, normalno na presek. One su samo, kako je rečeno, prikaz obračuna.

Vrednost sile K_{dia} kojom dijafragma deluje na fluid (a suprotno usmerenom silom fluid napada dijafragmu, što praksu u prvom redu i zanima) određena je sa (101–16), ali se ne zna njena napadna tačka ako se ne koristi dopunsko saznanje da je strujanje izazvano dijafragmom osnosimetrično, pa onda sila deluje po središnjoj osnovi cevi – tako je i prikazano na slici 101–7.

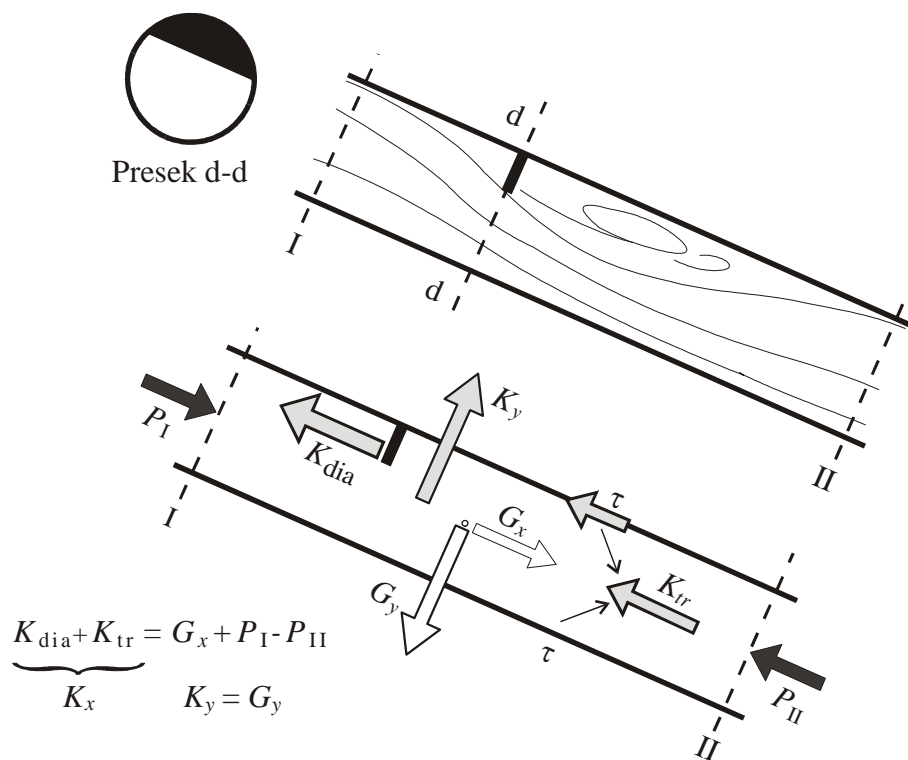
Da je zbir momenata svih sila koje deluju u pravcu strujanja (x -pravac) jednak nuli nije teško dokazati. Za obrtnu osovinu uzeće se horizontalna osovina, normalno upravljena na crtež na slici 101–7, a prolazi kroz težište zapremine struje između preseka (I) i (II), upravo kroz tačku obeleženu sa „T” na pomenutoj slici. Komponenta G_x sile težine prolazi kroz težište (T), a sile pritiska (P_I, P_{II}) na graničnim presecima međusobno potiru momente oko navedene osovine, jer je moment svake od njih jednak γI , gde je I težišni moment inercije preseka, a on je isti za oba granična preseka (jer su preseći isti). Da je moment sile pritiska jednak γI vidi se iz jednačine (72–20), u kojoj za jedan presek $A p_0$ predstavlja silu P , a PL_P je njen moment. Sila trenja, koja je zbirno dejstvo osnosimetrično raspoređenih napona trenja po oмотаču cevi, deluje po osovini cevi. Stoga je jednak nuli njen moment u odnosu na obrtnu osovinu za koju su računati momenti do sada razmatranih sila. Rečeno je malo pre da i sila K_{dia} kojom dijafragma deluje na fluid, zbog osnosimetričnog stujanja, deluje po osovini cevi pa je i njen moment, u odnosu na izabranu osovinu obrtanja, jednak nuli.

Međutim, ovim razmatranje sila i momenata nije završeno, jer sile deluju i u y -pravcu. Koordinatna osa y leži u ravni crteža i u ravni poprečnog preseka. Treća osa je malo pre izabrana za osovinu obrtanja (pri razmatranju momenta). Ona je normalna na ravan crteža, a prilazi kroz tačku T i horizontalna je. U njenom pravcu ne deluje komponenta sile težine (jer je pravac horizontalan), a sile pritiska kojima deluje zid cevi na fluid sa jedne polovine obima potiru se onim sa druge polovine (zbog simetričnosti strujanja). Prema tome, ostaju samo komponente težine G_y i sile pritiska K_y u y -pravcu. Ove dve komponente sile međusobno se uravnotežuju ($G_y = K_y$), tako je na slici 101–7 i prikazano. Na slici je prikazano da obe prolaze kroz istu tačku T što se lako dokazuje. Kada bi bio hidrostatički raspored pritisaka po poprečnom preseku, za elementarnu zapreminu između dva bliska poprečna preseka (na međusobnom rastojanju dx) uravnotežila bi se elementarna sila G_y sa elementarnom silom K_y (tj. $G_y = K_y$), pa onda zbir momenata svih tih elementarnih sila bi davao nulu. Međutim, u području uticaja dijafragme ne vlada hidrostatički raspored pritisaka po preseku, pa se može posebno razmatrati razlika između stvarnog pritiska i pritiska koji bi dao hidrostatički pritisak. Ta razlika, zbog osnosimetričnog strujanja, takođe je raspoređena osnosimetrično, pa se njen uticaj po celom obimu, uzet zbirno, svodi na nulu, stoga je ispravno postupljeno što su sile na sl. 101–7 nacrtane da prolaze kroz istu tačku. Zaključeno je dakle da sile u oba pravca (x , y) ne stvaraju moment, tako i mora da bude.

* * *

Na slici 101–8 prikazana je tzv. „segmentna dijafragma” koja se, umesto razmatrane osnosimetrične, može takođe upotrebiti kao merni uređaj. Međutim, to za sadašnja razmatranja nije bitno, jer se sada pokazuje kako se određuje sila kojom prepreka deluje na fluid, odnosno sila kojom fluid nju napada.

I u ovom primeru, kao i u prethodnom, mogu se sračunati komponente K_x i K_y sile K kojom čvrsta granica deluje na fluid, ali se ne mogu odrediti njihove napadne tačke. Naime, u slučaju „segmentne dijafragme” strujanje nije osnosimetrično i odatle komponenta K_x ne deluje po središnjoj osovini, njen pravac delovanja ne prolazi kroz težište zapremine, pa onda daje moment u odnosu na horizontalnu osovinu,



Slika 101–8 Sile koje deluju na masu fluida između preseka (I) i (II); silu K_{dia} prima segmentna dijafragma

normalnu na crtež (sl. 101–8), a koja prolazi kroz težište zapremine („T” na slici), dok komponenta G_x težine i sile pritiska (P_I , P_{II}) u graničnim presecima, uzete zbirno, ne daju momenat u odnosu na pomenutu osovinu (isto kao kod osnosimetrične dijafragme). Pošto sve sile koje deluju na masu između preseka (I) i (II) moraju zbirno dati momenat jednak nuli, moraju komponente K_y i G_y (koje imaju istu vrednost, a suprotno su usmerene) dati momenat koji se suprotavlja momentu sile K_x . Ovo znači da sile G_y i K_y ne deluju po istoj pravoj liniji, a pošto sila G_y prolazi kroz težište zapremine, sila K_y mora biti pomenuta od težišta. Da je to zaista tako objašnjava se u nastavku.

Raspored pritiska po omotaču cevi (ti pritisci integralno daju silu K_y) nije osnosimetričan (kao što je u prethodnom primeru), pa razlika između stvarnih pritisaka i onih koje bi dao hidrostatički raspored

nije osnosimetrično raspoređena, pa se ta razlika po celom obimu, u zbiru, ne potire. Prema tome, nisu u ravnoteži elementarne sile dG_y i dK_y za deo struje između dva bliska poprečna preseka, a to znači da delovanje koje zbirno daje sila K_y nije ravnomerno raspoređeno, pa je sila K_y pomerena u odnosu na težište zapremine između preseka (I) i (II).

Rečeno je da sile G_y i K_y moraju dati momenat koji se suprostavlja momentu sile K_x , a kako G_y prolazi kroz težište, znači da se momenti sile K_y i K_x međusobno uravnotežavaju (u odnosu na osovinu kroz težište). Prema tome, ukupna sila K (čije su komponente K_x i K_y) prolazi kroz težište zapremine između preseka (I) i (II), jer dve njene komponente, uzete zbirno, daju momenat jednak nuli. Razumljivo je da primenjeni postupak određivanja sila mora dati ukupnu silu K (njen iznos i napadnu tačku), ali ne i napadne tačke komponenti.

Skreće se pažnja da su na slici 101–8 sve navedene sile, odnosno njihove komponente, prikazane u skladu sa prethodnim tumačenjima.

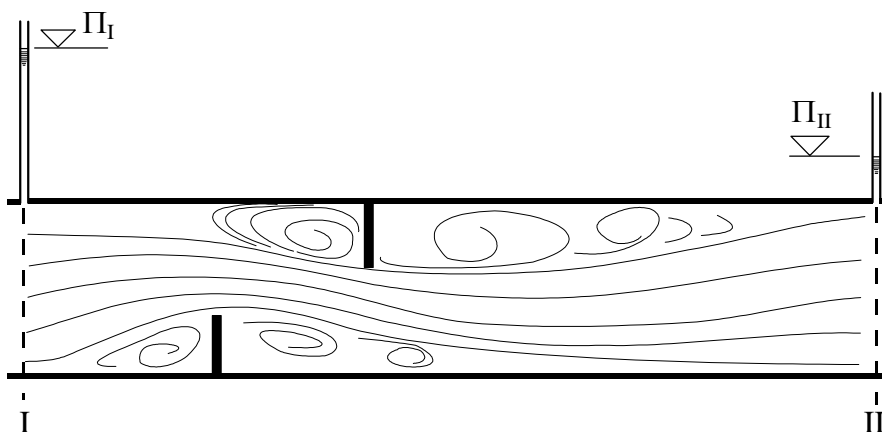
U ovom zadatku za praksu je manje zanimljiva ukupna sila K od njene komponente K_x , jer pretežan deo komponente je sila K_{dia} kojom segmentna dijafragma deluje na fluid, a ona se i ovde može odrediti jednačinom (101–16), uz pretpostavku da je poznat lokalni gubitak energije. Međutim, napadna tačka te sile (K_x) ne može se, na žalost, odrediti, ali se zna da deluje iznad težišta isturene površine, jer se razlika pritisaka (sa prednje i stražnje strane te površine), koja daje opterećenje, smanjuje približavanjem otvoru, pošto na donjoj ivici dijafragme ta razlika postaje nula.

* * *

U oba prethodna primera primenjeni postupak, utvrđen u Poglavlju 82, uz poznavanje lokalnog gubitka energije, ne može dati raspored pritisaka koji daju opterećenja, a u drugom slučaju čak ni napadnu tačku sile zanimljive za praktična razmatranja. Za praktične potrebe, može se kao približnost uzeti ravnomeran raspored opterećenja, ali to je ipak „gruba procena”.

* * *

Na sl. 101–9 prikazane su dve segmentne dijafragme, od kojih prva zauzima donji, a druga gornji deo preseka cevi. Takva ugradnja ima za



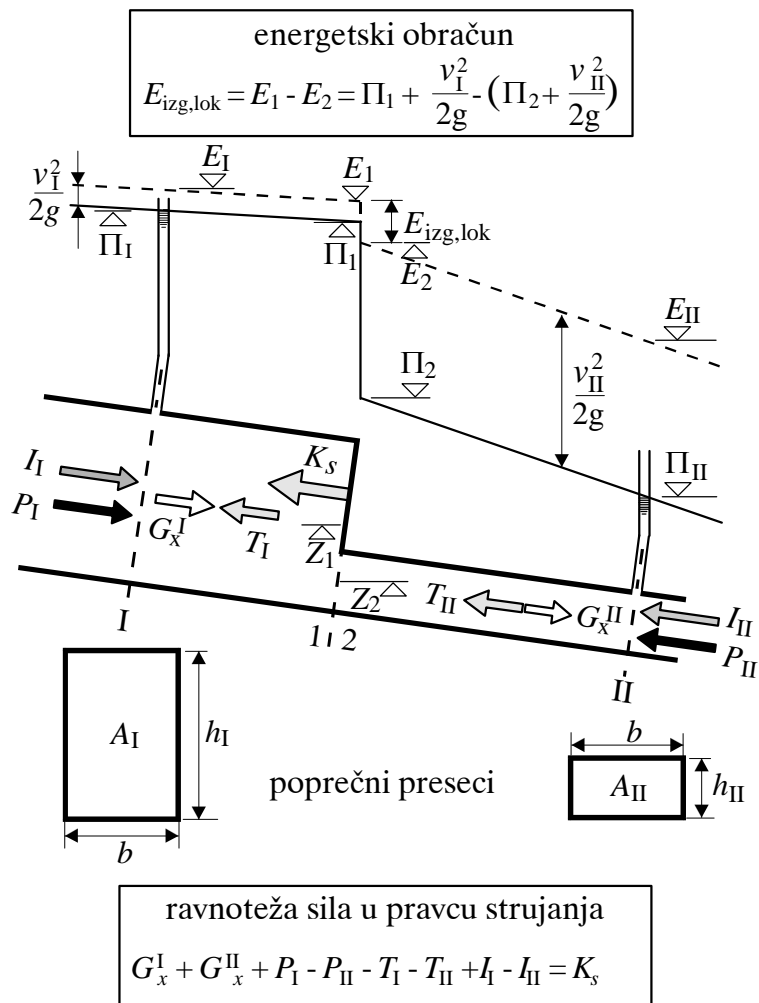
Slika 101–9 Na osnovi poznavanja piježometarskih kota u preseccima (I) i (II) može se odrediti zbirna sila koje primaju obe pregrade, ali ne i sila na svaku pregradu posebno, jer su na premalenom međusobnom rastojanju, pa se između njih ne može uspostaviti pravolinijsko i paralelno strujanje po celom preseku cevi

svrhu jako mešanje tečnosti koje zahtevaju praktični razlozi. Iako se, na osnovu poznate izgubljene energije, znaju piježometarske kote u preseccima (I) i (II), u kojima je strujanje pravolinijsko i paralelno, ne može se utvrditi koliko opterećenje prima prva, a koliko druga dijafragma – može se sračunati samo ukupna sila za obe, a praktični razlozi traže određivanje sila za svaku dijafragmu posebno. Razlog za ovu nemogućnost je što se između dijafragma ni u jednom preseku ne uspostavlja paralelno i pravolinijsko strujanje, pa se zadatak ne može razdvojiti.

* * *

Cev pravougaonog preseka naglo smanjuje visinu (sl. 101–10) pa se presek smanjuje sa A_I na A_{II} .

Sile koje deluju u x -pravcu (u pravcu strujanja) su komponente težine od preseka (I) do promene preseka, odnosno od promene preseka do preseka (II), označene sa G_x^I i G_x^{II} , sile pritiska (P_I , P_{II}) u preseccima (I) i (II), komponente inercijalne „sile” u istim preseccima (I_I , I_{II}), kao i sile trenja (T_I , T_{II}) za deo cevi do i od promene preseka. I, na kraju, deluje i sila K_s kojim na fluid deluje čeona površina kojom se prelazi iz većeg preseka u manji. Sve sile su upisane na sl. 101–10, a njihovu ravnotežu



Slika 101–10 Uz određivanje sile K_s kojom na fluid deluje čelna površina kojom se iz cevi veće visine prelazi u manju

izražava jednačina:

$$\gamma A_I (Z_I - Z_1) + \gamma A_{II} (Z_2 - Z_{II}) + p_I A_I - p_{II} A_{II} + \rho Q v_I - \rho Q v_{II} -$$

$$-\gamma (\Pi_I - \Pi_1) A_I - \gamma (\Pi_2 - \Pi_{II}) A_{II} - K_s = 0$$

Sile su napisane redosledom: G_x^I , G_x^{II} , P_I , P_{II} , I_I , I_{II} , T_I , T_{II} , K_s , uz napomenu da se položajne kote (Z) odnose na težište odgovarajućeg

preseka, a napisani pritisci (p) su takođe pritisci u težištu.

Sređivanjem napisane jednačine ravnoteže dobija se:

$$\begin{aligned} \gamma A_I \left(Z_I + \frac{p_I}{\gamma} - \Pi_I + \Pi_1 - Z_1 \right) - \gamma A_{II} \left(Z_{II} + \frac{p_{II}}{\gamma} - \Pi_{II} + \Pi_2 - Z_2 \right) + \\ + \rho A_I v_I^2 - \rho A_{II} v_{II}^2 - K_s = 0 \end{aligned}$$

U prethodnom postupku proticaj Q je zamenjen sa $A_I v_I$, odnosno sa $A_{II} v_{II}$. Nadalje će se koristiti zamene $Z + p/\gamma$ sa Π za preseke (I) i (II), a $\Pi - Z$ sa p/γ za preseke (1) i (2) – tako se dobija:

$$K_s = p_1 A_I - p_2 A_{II} + \rho \left(A_I v_I^2 - A_{II} v_{II}^2 \right) = A_I \left(p_1 + \rho v_I^2 \right) - A_{II} \left(p_2 + \rho v_{II}^2 \right) \quad (101-17)$$

I ovde, kao i kod segmentne dijafragme, ne može se doći do napadne tačke sile, a pogotovo do rasporeda opterećenja. Ali, i podatak o vrednosti sile može korisno da posluži.

Pritisci p_1 i p_2 koji ulaze u jednačinu (101-17), koja određuje silu K_s , poznati su ako se obavi energetski obračun – iz sl. 101-10 se vidi da je:

$$\Pi_1 + \frac{v_I^2}{2g} = \Pi_2 + \frac{v_{II}^2}{2g} + E_{izg,lok} \quad (101-18)$$

pa se poznavanjem piježometarskih kota Π_1 i Π_2 (što, razume se, pretpostavlja da je poznata izgubljena energija $E_{izg,lok}$) određuju pritisci $p_1 = \gamma(\Pi_1 - Z_1)$ i $p_2 = \gamma(\Pi_2 - Z_2)$, i na osnovu (101-17) sračuna se sila K_s .

Treba istaći da je sprovedeni račun pokazao da se do sile K_s došlo bez upuštanja u dužine cevi od preseka (I) do promene preseka, i od promene preseka do preseka (II), što je sa praktičnog stanovišta veoma pogodno.

* * *

Za naglo proširenje cevi (Primer 3 iz Poglavlja 83, slika 83-5), do sile koju prima prstenasta površina $A_{II} - A_I$, kojom se iz uže cevi prelazi u širu, može se doći iz same pretpostavke koja je dovela do određene izgubljene energije. Naime, u tom primeru, uravnoteženje sile nije uslovljeno prethodnim poznavanjem izgubljene energije, nego, naprotiv, tu se moglo poći od svih poznatih sila, pa se došlo do izraza za

izgubljenu energiju (što je izuzetna okolnost, kako je objašnjeno na kraju Poglavlja 83 i ponovljeno na početku Odeljka I Poglavlja 101).

Pri ranijem razmatranju naglog proširenja pretpostavilo se da je u preseku neposredno po ulasku u širu cev hidrostatička raspodela pritiska sa pritiskom u težištu preseka jednakim pritisku neposredno pre proširenja, i označenom sa p_0^I . Ako se ta raspodela prenese i na zid, uz koga je navedeni presek, onda je sila K_s kojom prstenasta površina $A_{II} - A_I$ deluje na fluid jednaka:

$$K_s = p_0^I (A_{II} - A_I) = p_0^I \frac{\pi}{4} (D_{II}^2 - D_I^2) \quad (101-19)$$

Njena napadna tačka, shodno jednačini (72-20), je ispod težišta, a na rastojanju (od težišta):

$$L_P = \frac{\gamma I}{K_s} \quad (101-20)$$

gde je težišni momenat I kružnog prstena:

$$I = \frac{\pi}{64} (D_{II}^4 - D_I^4) \quad (101-21)$$

Za primere gde je lokalni poremećaj u menjanju pravca strujanja (krivina) neumesno je raspravljati o sili kojom čvrsta granica deluje na fluid u pravcu strujanja jer se taj pravac menja. Jasno je da i za takve primere (promena pravca), kao i kod svakog lokalnog poremećaja, poznavanja izgubljene energije omogućava da se dođe do sile kojom čvrsta granica deluje na fluid između dva preseka struje. Sila je određena iznosom, pravcem, smerom i napadnom tačkom. Pravac, dabome, nije pravac strujanja ni kroz presek (I), ni kroz (II). Iako je sila K u potpunosti određena, ona se ne može deliti na sile za pojedine delove čvrste površine – na pr. za krivinu u kanalu (sl. 81-7) se ne zna čak ni koliko posebice primaju spoljna i unutrašnja strana, nego samo koliko primaju obe zajedno (to je sila K).

Na kraju, umesto nekakvog zaključivanja, može se naglasiti da je izgubljena energija E_{izg} , svojim uvođenjem (Poglavlje 83) kao pojam vezana za zapreminu struje između dva njena preseka, i to za tu zapreminu posmatranu kao celinu, a na to se primenjuje i uravnoteženje sila, kojim se (postupkom iz Poglavlja 82) dolazi do sile kojim čvrsta

granica deluje na fluid, i to do njenog potpunog određenja, do njene vrednosti, pravca, smeru i napadne tačke. To je veliki doprinos u rešavanju praktičnih zadataka, ali od navedenoga postupka ne treba očekivati više nego što on može da pruži. Ne može se doći do rasporeda napona po graničnoj površini koji integralno čine silu kojom čvrsta granica deluje na fluid, ne može se ni raspoređivati opterećenje po delovima površine. Ima i primera gde se čak ne mogu u potpunosti odrediti ni komponente te sile (ne znaju se ni napadne tačke).

Ako praktični razlozi traže više obaveštenja od ukupne sile između čvrste granične površine i fluida, mora se prići istraživanju rasporeda pritisaka.

NAPOMENE

1. Valja se podsetiti da se, u svim prethodnim razmatranjima, podrazumevalo da se piježometarske kote i pritisci (i sve druge veličine) odnose na osrednjene vrednosti, ali da sve veličine u turbulentnom strujanju fluktuišu, pa i proučavanje fluktuacije može da bude ne samo zanimljivo, nego – u nekim primerima – i nužno, jer fluktuirajuće opterećenje može da ima presudan uticaj po stabilnost cevi, u području lokalnog poremećaja u struji.
2. U razmatranjima neustaljenog tečenja mogu se koristiti vrednosti za lokalni gubitak energije i silu na čvrstu graničnu površinu usled lokalne promene, uz opravdanje da se veličine obračunavaju u jednom preseku kao dodatak na delovanje trenja koje se računa celom dužinom lokalnog uticaja. U slučaju neustaljenog tečenja trenje će biti obračunato jednačinom za ustaljeno tečenje.

**LOKALNI GUBICI U CEVIMA
PRI PROMENI PRESEKA,
PRI PROMENI PRAVCA TEČENJA,
NA SPAJANJU I RAZDVAJANJU CEVI
I NA ZATVARAČIMA**

I

PROMENA POPREČNOG PRESEKA CEVI

Naglo proširenje je razmatrano u Poglavlju 83, kao jedan od primera kod koga se može računskim putem doći do izgubljene energije, kao posledice iz rešene jednačine uravnoteženja sila. To je bio Primer 3 uz Poglavlje 83, sa pratećom slikom 83-5, gde je izgubljena energija na kraju prikazivanja primera izražena sa:

$$E_{izg} = \frac{(v_I - v_{II})^2}{2g}$$

što se može napisati sa

$$\left. \begin{aligned} E_{izg} &= \frac{v_I^2}{2g} \left(1 - \frac{v_{II}}{v_I}\right)^2 \\ \text{ili } E_{izg} &= \frac{v_{II}^2}{2g} \left(\frac{v_I}{v_{II}} - 1\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (102-1)$$

Deljenjem prethodnih izraza sa $v_I^2/2g$, odnosno sa $v_{II}^2/2g$, dobijaju se koeficijenti lokalnog gubitka:

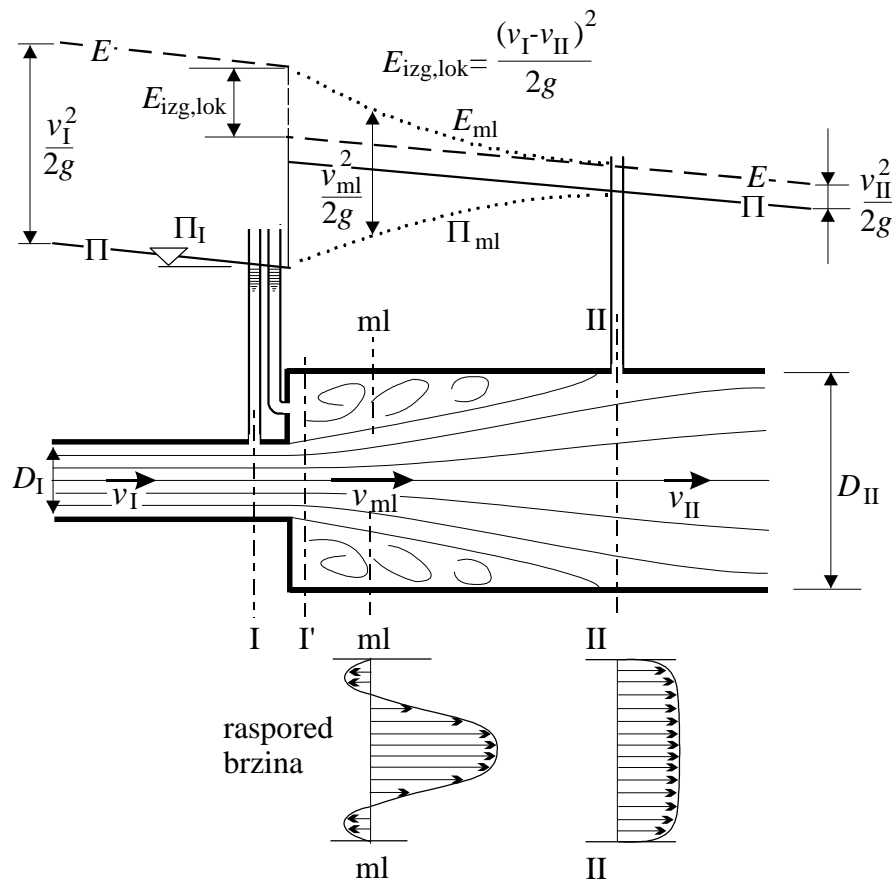
$$\left. \begin{aligned} \xi_{proš}^I &= \frac{E_{izg}}{v_I^2/2g} = \left(1 - \frac{A_I}{A_{II}}\right)^2 \\ \text{ili } \xi_{proš}^{II} &= \frac{E_{izg}}{v_{II}^2/2g} = \left(\frac{A_{II}}{A_I} - 1\right)^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{za naglo} \\ \text{proširenje} \end{array} \quad (102-2)$$

U prethodnom su v_I i v_{II} brzine, a A_I i A_{II} poprečni preseki cevi ispred i iza proširenja, a korišćena je i istovetnost proticaja u oba preseka ($A_I v_I = A_{II} v_{II}$). Ovde brzine ispred i iza lokalnog gubitka nisu iste i stoga su se mogla obrazovati i dva koeficijenta lokalnog gubitka. Pri uvođenju pojma „koeficijent lokalnog gubitka”, iza jednačine (101–1) skrenuta je pažnja da se uz koeficijent lokalnog gubitka mora naznačiti brzinska visina $v^2/2g$ uz koju se on piše pri obračunu izgubljene energije, ako brzina ispred i iza lokalnog gubitka nije ista.

U navedenom Primeru 3 iz Poglavlja 83, pri uspostavljanju ravnoteže zanemarena je sila trenja između zida cevi i fluida, pa je onda i u izgubljenoj energiji, koja je proizašla iz takvog postupka, izostao uticaj trenja. To se može na neki način opravdati ako se napisano sa (102–1) shvati kao izgubljena energija usled lokalnog poremećaja, na koju treba dodati gubitak energije usled trenja. Takvo shvatanje je u skladu sa završnim izlaganjima u Odeljku I Poglavlja 101. Tako je postupljeno i pri crtanju slike 102–1, gde je lokalni gubitak energije prikazan naglim (stepeničastim) padom linije energije, a ispred i iza toga linija energije je u nagibima koji odgovaraju trenju. Ova linija energije prikazana je isprekidanom linijom (E) na slici. Ispod nje za odgovarajuću brzinsku visinu $v_I^2/2g$, odnosno $v_{II}^2/2g$, nacrtana je punom linijom piježometarska linija (Π). Sve se to može shvatiti kao grafički prikaz sračunatoga, uz napomenu da te linije u području uticaja lokalnog poremećaja ne prikazuju ono što bi trebalo, njihove kote ne mogu se vezati za poprečne preseke, jer tu kroz njih nije strujanje pravolinijsko i paralelno, normalno upravljeno na presek, niti se brzine malo razlikuju od prosečne za presek, uz zid su čak povratno usmerene (vidi presek „ml” na slici 102–1).

Na istoj slici je ipak učinjen pokušaj da se tačkasto nacrtanim linijama prikažu linije energije i piježometarska, ali samo za središnji mlaz, koji je opkoljen vrtložnom oblašću.

Kod dijafragme, u Odeljku III Poglavlja 101, opisano je da je središnji deo preseka „aktivni deo” preseka kojim se tečnost prenosi, dok je on opkoljen „pasivnim” delom koji ne doprinosi tečenju, jer se u tom delu, u vrtložnoj oblasti, onoliko proticanja koje središnji mlaz povuče nizvodno vrati unatrag povratnim strujanjem uz zid. Tako je i kod naglog proširenja. U središnjem mlazu strujanje je blisko pravolinijskom i paralelnom, jer se mlaz blago (postepeno) širi, pa se onda



Slika 102–1 Naglo proširenje cevi: obračunati lokalni gubitak je prikazan na uobičajeni način skokovitim spuštanjem linije energije (isprekidana linija – E); za središnji mlaz tačkasto nacrtane su linija energije i pijeziometarska (E_{ml} , Π_{ml}), dok se te linije ne mogu odnositi na vrtložnu oblast koja opkoljava mlaz

mogu uspostaviti barem približne linije energije i pijeziometarska (te su pomenute linije nacrtane tačkasto na slici 102–1). U pomenutom opisu strujanja iza dijafragme navodi se da se pijeziometarska kota za jedan presek nepromenjena prenosi iz središnjeg mlaza kroz vrtložnu oblast, sve do zida (gde je i nacrtana kota $\Pi_{suž}$ na slici 101–6). Treba se podsetiti da je isti stav korišćen i pri prvom razmatranju naglog proširenja (Primer 3 u Poglavlju 85) na kome se zasnivaju i ovdašnja razmatranja naglog proširenja cevi.

Vrtložna oblast u ovom primeru, i kod svih lokalnih poremećaja gde se obrazuje, troši za održavanje vrtloženja mehaničku energiju koja čini pretežni deo onoga što se računa kao izgubljena energija. Vrtloge treba stalno „pothranjivati” energijom (koja se u njima trenjem gubi) i oni tu energiju „crpu” iz središnjeg mlaza, pa kroz njega energija opada.

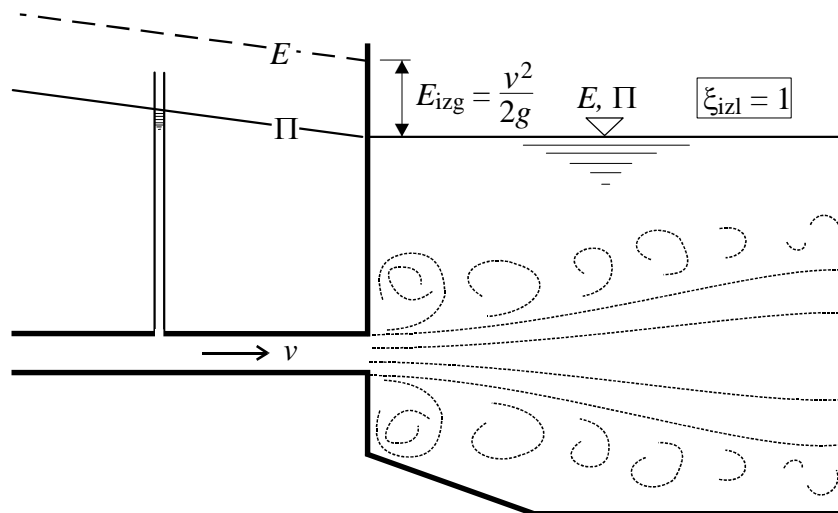
Dužina na kojoj se obavlja proširenje mlaza iznosi 4 do 6 puta $D_{II} - D_I$. Ako se uzme $5(D_{II} - D_I)$, to bi značilo da se središnji mlaz širi uz prosečni nagib granične strujnice (prema središnjoj osovini) jednak 0,1. Ako se ta strujnica aproksimira pravom linijom ona sa središnjom osovinom zaklapa ugao α , gde je $\operatorname{tg}\alpha = 0,1$.

Sila kojom kružni prsten što spaja užu i širu cev deluje na fluid već je određena u Odeljku III Poglavlja 101 i njena vrednost i položaj određeni su sa izrazima (101-19) i (101-20).

* * *

Poseban slučaj naglog proširenja je *izlaz iz cevi* u sud velike zapremine (slika 102-2). Za taj slučaj je A_I/A_{II} blisko nuli, pa prvi izraz u (102-2) daje:

$$\text{za izlaz iz cevi} \quad \xi_{izl} = \frac{E_{izg}}{v^2/2g} = 1 \quad (102-3)$$



Slika 102-2 Izlazni gubitak (iz cevi u sud velike zapremine) jednak je brzinskoj visini, celokupna kinetička energija iz cevi raspe se u sudu

gde je v brzina u cevi. Ovo znači da se celokupna kinetička energija koju unosi struja u sud raspe u njemu, jer postoji dovoljno prostora za obrazovanje vrtloženja u kome će se to rasipanje obaviti (gde će se mehanička energija izgubiti).

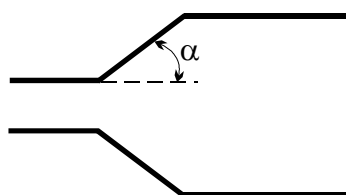
* * *

Gubitak energije se može smanjiti ako se umesto nagloga primeni *postepeno proširenje* – slika 102–3 – gde se koeficijent lokalnog gubitka, umesto sa (102–2), računa sa:

$$\xi_I = \eta \left(1 - \frac{A_I}{A_{II}}\right)^2 \quad (102-4)$$

gde je faktor η prikazan kao $\eta = \eta(\alpha)$ na slici 102–3 gde je α ugao koji zatvaraju izvodnice proširenja sa onima na pravoj cevi. Upoređenje (102–4) sa (101–2) pokazuje da je:

$$\eta = \frac{\text{izgubljena energija pri postepenom proširenju}}{\text{izgubljena energija za naglo proširenje}}$$



A_I poprečni presezi A_{II}

$\text{tg } \alpha < 0,1$	$\eta=0$
$0,1 < \text{tg } \alpha < 0,6$	$\eta = \frac{\text{tg } \alpha - 0,1}{0,5}$
$\text{tg } \alpha > 0,6$	$\eta=1$

Slika 102–3 Za postepeno proširenje izgubljena energija se računa množenjem izgubljene energije za naglo suženje (za isto A_{II}/A_I) sa koeficijentom smanjenja η , gde je $\eta = \eta(\alpha)$

Iz slike 102–3 zaključuje se da lokalni gubitak ne treba dodavati trenju ako je α manji od 6° ($\text{tg } \alpha < 0,1$). Ovo je shvatljivo ako se dovede u vezu sa malopredašnjim navodom da se kod naglog proširenja središnji mlaz širi uz prosečni nagib granične njegove strujnice (prema središnjoj osovini) jednak 0,1. Ako se čvrsta granica postavi umesto obima središnjeg mlaza, treba da bude $\text{tg } \alpha$ otprilike jednak 0,1 (ili manje) i onda ne bi trebalo da dodje do obrazovanja vrtložne oblasti i

do lokalnog gubitka. Ovo, na prvi pogled, izgleda paradoksalno, jer se smanjivanjem zapremine odstranjuju gubici energije. Međutim, energija će se manje gubiti ako se tečnosti oduzme prostor u kome se obrazuje snažno vrtloženje, a ono je glavni oduzimač mehaničke energije.

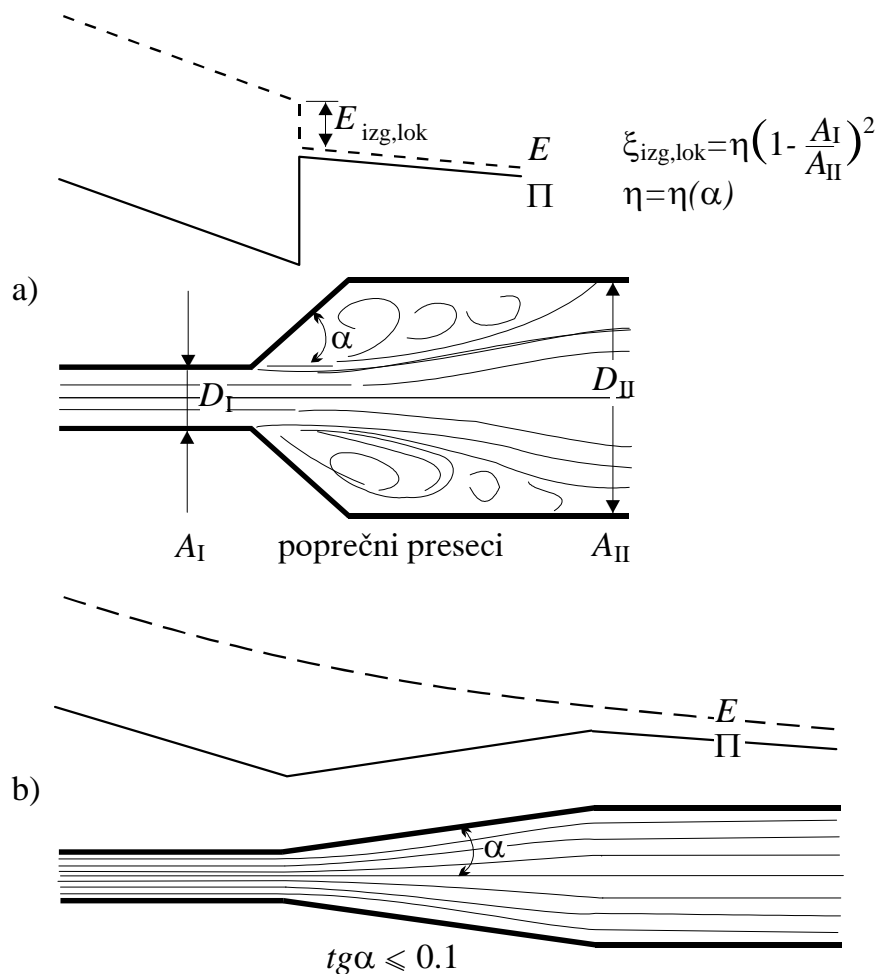
Takođe, iz slike 102–3 uviđa se da postepenost u proširivanju za $\alpha > 30^\circ$, odnosno $\text{tg } \alpha > 0,6$, ne doprinosi smanjenju gubitka energije ($\eta = 1$), što je objašnjivo: za takva proširivanja obrazuje se vrtložna oblast koja ima dovoljno prostora da oni najkrupniji vrtlozi uzmu isti zamah kao kod naglog proširenja, pa odatle i skoro isti gubici energije. Međutim, već za $\text{tg } \alpha = 0,25$, a to je proširivanje na dužini jednakoј svega $2(D_{\text{II}} - D_{\text{I}})$, lokalni gubitak se smanjuje na otprilike 30% onoga koje bi dalo naglo proširenje. Na sl. 102–4a nacrtano je kako se uklapa lokalni gubitak u linije energije i pjezometarsku: do polovine proširenja produžavaju se nagibi usled trenja za užu, a od polovine za širu cev, i tu (na polovini proširenja) se ucrtava lokalni gubitak. Trenje se računa sa:

$$E_{\text{izg}}^{\text{tr}} = \frac{L}{2} \left(\lambda_{\text{I}} \frac{v_{\text{I}}^2}{2gD_{\text{I}}} + \lambda_{\text{II}} \frac{v_{\text{II}}^2}{2gD_{\text{II}}} \right) \quad (102-5)$$

gde se brzina v , prečnik D i koeficijent trenja λ odnose na užu cev (indeks „I”), odnosno širu („II”). Prethodno je napisano prema osnovnom obrazcu za trenje u cevima (91–24). Sa L je označena dužina na kojoj se cev proširuje.

Može se proširivanje shvatiti kao zamena završnog dela uže cevi sa prvom polovinom proširivanja, a početni deo šire cevi sa drugom polovinom. Tako shvatanje je u skladu sa računom trenja prema prethodnom izrazu (102–5) i sa crtanjem energetske linije sa stepeničastim padom za E_{izg} na polovini proširenja, kako je prikazano na slici 102–4a. Sa praktičnog stanovišta prethodno je prihvatljivo, jer se pokazuje za koliko se poveća izgubljena energija ako se obavi navedena zamena – poveća se za $E_{\text{izg,lok}}$. Ako je proširenje naglo, navedene zamene nema.

Trenje je obično beznačajno ako je proširenje kratko, pa se opisani postupak može prihvatiti. Međutim, ako je proširenje takvo da do lokalnog gubitka ne dolazi (slika 102–4.b), a pogotovo ako je $\text{tg } \alpha$ čak manji od 0,1, opisanom postupku mogu se staviti ozbiljne primedbe, jer precenjuje trenje, što se obrazlaže u produžetku.



Slika 102–4 a) Za $tg\alpha > 0.1$ treba računati sa lokalnim gubitkom prema napisanom na sl. 102–3; b) za $tg\alpha < 0.1$ gubitak čini samo trenje

Gubitak usled trenja tačnije se izražava sa:

$$E_{izg} = \int_0^L \lambda \frac{v^2}{2gD} dx = \lambda_1 \frac{v_1^2 L}{2gD_1} \int_0^L \frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{v^2 D_1}{v_1^2 D} \frac{dx}{L} = \lambda_1 \frac{v_1^2 L}{2gD_1} \Psi \quad (102-6)$$

Dužina proširenja od prečnika D_I do D_{II} označena je sa L , a njen elementarni deo sa dx . Bezdimenzionalna veličina Ψ je odnos gubitka na proširenju prema gubitku kada bi na celoj dužini L bila cev prečnika D_I . Jasno je da je $\Psi < 1$.

Nepromenjenost proticaja duž proširenja nameće da je v/v_I jednako $(D_I/D)^2$, a primenom obrasca (91–25), za istu apsolutnu hrpa-vost k , dobija se da je λ/λ_I jednako $(D_I/D)^{1/3}$. Geometrijski odnosi ukazuju da je:

$$\frac{dx}{L} = \frac{dD}{D_{II} - D_I}$$

Ako se sve napisano iskoristi za izražavanje odnosa Ψ dobija se:

$$\begin{aligned}\Psi &= \int_0^L \frac{\lambda}{\lambda_I} \frac{v^2}{v_I} \frac{D_I}{D} \frac{dx}{L} = \int_{D_I}^{D_{II}} \left(\frac{D_I}{D}\right)^{21/4} \frac{dD}{D_{II} - D_I} \\ \Psi &= \frac{D_I}{D_{II} - D_I} \int_1^{D_{II}/D_I} \left(\frac{D_I}{D}\right)^{21/4} d\left(\frac{D}{D_I}\right) \\ \Psi &= \frac{4}{17} \frac{D_I}{D_{II} - D_I} \left[1 - \left(\frac{D_I}{D_{II}}\right)^{17/4}\right]\end{aligned}$$

Prethodni izraz za $D_{II}/D_I = 1,5$, odnosno 2, odnosno 3, daje vrednosti $\Psi = 0,39$, odnosno 0,22, odnosno 0,12. Ako se primeni jednačina (102–5), dobija se:

$$E_{izg} = \lambda_I \frac{v_I^2}{2gD_I} L \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{D_I}{D_{II}}\right)^{21/4} \right]$$

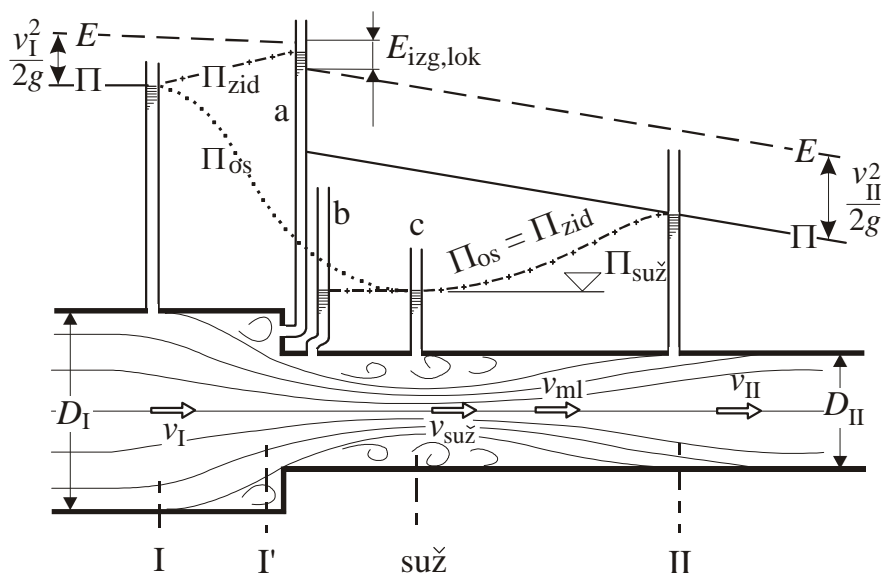
pa je

$$\Psi = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{D_I}{D_{II}}\right)^{21/4} \right]$$

Primenom prethodnog izraza, upravo primenom (102–5), za $D_{II}/D_I = 1,5$ dobija se $\Psi = 0,56$, umesto 0,39 koliko se dobija, kako je navedeno, primenom (102–6). Za $D_{II}/D_I = 2$ dobija se $\Psi = 0,51$, umesto 0,22, a za $D_{II}/D_I = 3$ dobija se $\Psi = 0,50$, umesto 0,12. Dakle, izraz (102–5) daje 1,5 do 4 puta veće gubitke od onih koji se dobijaju primenom postupka koji je doveo do (102–6), a to zaista nije beznačajno.

* * *

Naglo suženje poprečnog preseka cevi (sl. 102–5) ne dozvoljava da se ceo presek cevi iskoristi za prenošenje fluida nizvodnim smerom, jer se odvajaju vrtložne oblasti pri kraju šire i početku uže cevi. One



Slika 102-5 Naglo suženje cevi: obračunati lokalni gubitak energije prikazan je skokovitim spuštanjem linije energije (E)

opkoljavaju „aktivni deo” preseka, koji se i ovde, kao i kod proširenja cevi, može nazvati „središnji mlaz” kojim se ostvaruje proticanje, dok tome ne doprinose vrtložne oblasti. Središnji mlaz se odvajaju od zida cevi i počinje svoje sužavanje nešto ispred promene preseka cevi, a po ulasku u užu cev suzi se čak više nego uža cev.

Pojava sužavanja strujanja više od raspoloživog preseka unutar čvrstih granica naziva se „kontrakcija” (struje ili mlaza), a to doslovno znači „skupljanje” ili „stezanje”. Središnji mlaz, opkoljen vrtložnom oblast, ima prosečnu brzinu v_{ml} u preseku A_{ml} . Tamo gde je struja najuža piše se za presek $A_{suž}$ (tj. $A_{suž}$ je $A_{ml,min}$), a za brzinu $v_{suž} = Q/A_{suž}$. Tako je upisano i na sl. 102-5. Može se uvesti:

$$\text{koeficijent kontrakcije (suženja)} \quad C_A = \frac{A_{suž}}{A_{II}} \quad (102-7)$$

Napisani odnos $A_{suž}/A_{II}$ ne sme se pobrkati sa odnosom A_{II}/A_I poprečnog preseka cevi iza i ispred suženja.

Lokalni gubitak u suženju jednim delom je na stvarnom suženju središnjeg mlaza, a drugim delom je gubitak na proširenju (od suženog

preseka do preseka cele cevi). Ovo navodi na pisanje:

$$E_{izg,lok} = \varphi \frac{v_{suž}^2}{2g} + \frac{(v_{suž} - v_{II})^2}{2g} \quad (102-8)$$

gde se prvi deo odnosi na sužavanje mlaza, a drugi na proširenje „presuženog mlaza”. Drugi deo je napisan prema obrascu (102-1), namenjenog proširenju.

Jednačinom (102-8) zadatak se rastavio na dva dela što je značilo da je prihvaćena pretpostavka da je u suženom preseku strujanje pravolinijsko i paralelno. Ovo razdvajanje je posledica želje da se olakša objašnjenje lokalnog gubitka na naglom suženju cevi. Strogo uzevši morala bi se jednačina energije primeniti za struju između preseka (I) i (II), sa jedinstvenim gubitkom energije između ta dva preseka, jer je u tim presecima ispunjen uslov za primenu jednačine (pravolinijsko i paralelno strujanje, normalno na presek, po celom preseku cevi). To međutim, nije ispunjeno u umetnutom preseku „suž”, ali i u tom preseku, u središnjem mlazu to je približno ispunjeno, a jednačina (102-8) se odnosi na središnji mlaz, a ne i na vrtložnu oblast koja ga opkoljava (u toj oblasti strujanje nije pravolinijsko, nego je zakrivljeno, čak sa povratno usmerenim brzinama uz zid). Međutim, ta vrtložna oblast ne pronosi tečnost, ne utiče na proticaj, ceo proticaj ide kroz središnji mlaz. Ovim objašnjenjima može se opravdati primena jednačine (102-8), upravo unošenje suženog preseka.

Izgubljena energija, napisana sa (102-8) izražena u odnosu na brzinsku visinu daje:

$$\xi_{suž} = \frac{E_{izg,lok}}{v_{II}^2/2g} = \varphi \left(\frac{v_{suž}}{v_{II}} \right)^2 + \left(\frac{v_{suž}}{v_{II}} - 1 \right)^2 \quad (102-9)$$

Skreće se pažnja da je prvi deo desne strane u (102-8) napisan kao proizvod koeficijenta φ i $v_{suž}/2g$, pa se φ može shvatiti kao koeficijent lokalnog gubitka uz $v_{suž}/2g$. Naglašava se da namerno nije za koeficijent uzeta oznaka ξ , jer se ξ uvek povezuje sa izgubljenom energijom između dva preseka cevi sa paralelnim i pravolinijskim strujanjem, normalnim na presek, gde su brzine potpuno određene (deli se proticaj sa presekom cevi), pa se ξ , u posmatranom slučaju odnosi na izgubljenu energiju između preseka (I) i (II) i množi se sa $v_{II}^2/2g$ ili $v_I^2/2g$. U (102-9) to je

učinjeno izražavanjem E_{izg} kao $\xi_{suž} v_{II}^2/2g$. Tako se ne mora poznavati koliko iznosi $v_{suž}$ – razume se ako iskustveni podaci prikazuju $\xi_{suž}$.

Na osnovu (102-7) i uz korišćenje jednačine održanja mase $v_{suž} A_{suž} = v_{II} A_{II}$, dobija se da je $v_{suž}/v$ jednako $1/C_A$, pa se prethodna jednačina može napisati i na ovaj način:

$$\xi_{suž} = \frac{\varphi}{C_A^2} + \left(\frac{1}{C_A} - 1 \right)^2 \quad (102-10)$$

Za presek cevi ispred suženja koji je veoma velik u odnosu na presek iza suženja tj. za $A_I \gg A_{II}$, ili A_{II}/A_I blisko nuli (a to je najizrazitije suženje), iskustvo kaže da je C_A oko 0,62. Od te vrednosti (0,62) sa porastom A_{II}/A_I raste C_A , i to u početku blago, a zatim sve naglije da bi za $A_{II}/A_I = 1$ dostigao $C_A = 1$, jer za taj granični slučaj nema sužavanja cevi, pa onda ni sužavanja mlaza.

Sve pobrojano dozvoljava da se C_A približno izrazi sa:

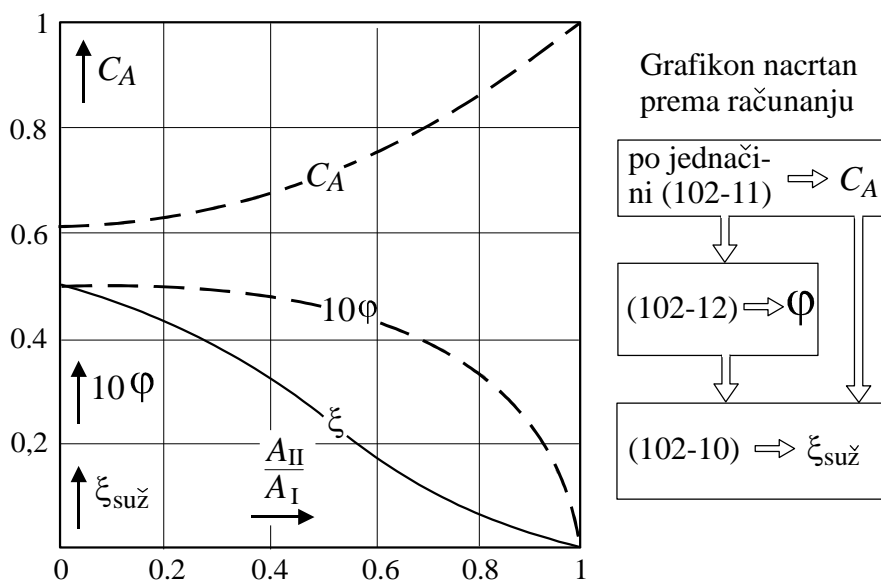
$$C_A = 0,62 + 0,38 \left(\frac{A_{II}}{A_I} \right)^2 \quad (102-11)$$

Za koeficijent suženja struje φ procene su da za najizrazitije suženje, $A_{II}/A_I = 0$, iznosi oko 0,05, a za $A_{II}/A_I = 1$ (suženja nema), koeficijent φ mora da bude jednak nuli. Uz to neka φ počinje naglo da opada kada se A_{II}/A_I približi jedinici. Navedenom može da odgovara izraz:

$$\varphi = \frac{\sqrt{1 - C_A}}{12} \quad (102-12)$$

Za zadati odnos A_{II}/A_I najpre se obrascem (102-11) odredi C_A , a potom se primenom (102-12) odredi φ na osnovu prethodno sračunatoga C_A . Na kraju se C_A i φ uvrste i (102-10) i dobija se koeficijent lokalnog gubitka $\xi_{suž}$. Grafički prikazi sva tri koeficijenta (C_A , φ , $\xi_{suž}$), u zavisnosti od A_{II}/A_I , nacrtani su na slici 102-6.

Može se primetiti, da je izuzev malo izraženih suženja ($A_{II} > 0,7A_I$ tj. $D_{II}/D_I > 0,85$) prvi deo desne strane jednačine (102-10) manji od drugoga, što znači da je gubitak do suženog preseka (sužavanje mlaza) manji od onoga na proširivanju mlaza, jer je vrtložna oblast na kraju šire cevi manje razvijena (troši manje energije za svoje održavanje) od oblasti na početku uže cevi. Za izrazito suženje $A_{II} = 0,1A_I$ prvi



Slika 102-6 Uz postupak za određivanje koeficijenta lokalnog gubitka ($\xi_{suž}$) pri naglom suženju cevi (sl. 102-5)

deo u (102-10), prema računu po (102-11) i (102-12), iznosi 0,13, a drugi 0,36 (njihov zbir je $\xi_{suž} = 0,49$).

Pošto se u praktičnim procenama ne traži „knjigovodstvena tačnost”, a nekakvu jako veliku i neprikosnovenu tačnost hidraulički obrasci ne obezbeđuju, može se na osnovu grafičkog prikaza na sl. 102-6 prihvatiti kao približnost:

$$\xi_{suž} = \frac{E_{izg,lok}}{v_{II}^2/2g} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{A_{II}}{A_I} \right) \quad \text{za naglo suženje cevi} \quad (102-13)$$

Napisano sa (102-8) iz čega se došlo do (102-10) i (102-13) je lokalni gubitak energije koga i ovde treba shvatiti kao razliku ukupnog gubitka koji se ostvaruje između preseka (I) i (II) i gubitka usled trenja na istim dužinama pravih cevi. Tako je postupljeno i kod naglog proširenja cevi, a i ovde će se lokalni gubitak prikazati naglim (skokovitim, stepeničastim) spuštanjem linija energije (E) na slici 102-5, čime se nacrtalo ono što se računa.

Na slici 102-5 tačkasto je ucrtana pijeometarska linija koja se odnosi na deliće u osovini cevi. Ta linija iskazuje da porast brzine

u središnjem izlazu (smanjivanjem preseka mlaza) izaziva pad pijezo-
metarske kote (jer povećanje kinetičke energije ide na račun smanjenja
potencijalne), pa pijezo-
metarska linija opada do preseka gde se postiže
maksimalna brzina $v_{\text{suž}}$ u središnjem mlazu. Iza toga pijezo-
metarska linija raste, jer brzina opada (mlaz se širi).

Na istoj slici (102–5) ucrtana je i pijezo-
metarska linija za zid cevi,
koja se podudara sa linijom za osovinu samo za deo od suženog preseka.
Ovako podudaranje prihvaćeno je i pri raspravljanju naglog proširenja,
jer se i ovde središnji mlaz širi kao i tamo. Isto objašnjenje, međutim,
ne važi za strujanje do suženoga preseka, tu se pijezo-
metarske kote za osovinu cevi i zid razlikuju, što ubedljivo pokazuje da u području lo-
kalnog poremećaja pijezo-
metarska kota ne mora biti ista za ceo jedan
presek. Kota Π_a , uz zid, je viša od kote Π_I , jer je tu (uz zid) struja
zaustavljena, pa smanjenje brzine povećava pijezo-
metarsku kotu.

Za potpuno zaustavljeni delić, pod pretpostavkom da je pre početka
zaustavljanja imao brzinu jednaku prosečnoj brzini v_I u široj cevi, nave-
deno povećanje pijezo-
metarske kote $\Pi_a - \Pi_I$ iznosilo bi $v_I^2/2g$, jer se za
toliko smanjila kinetička energija, a onda se za isto toliko poveća po-
tencijalna energija. Primećuje se da pijezo-
metarska kota nije ista za ceo završni presek šire cevi jer se odmicanjem od zida, a približavanjem
osovini cevi, povećava brzina, pa se pijezo-
metarska kota snižava.

Na početku uže cevi pijezo-
metarska kota uz zid (Π_b) je niža od kote
za središnji mlaz u istom preseku, jer to nameće zakrivljenost strujanja
u središnjem mlazu. Na unutrašnjoj strani krivine, pijezo-
metarska kota je niža (tako je to objašnjeno u Poglavlju 81, i prikazano primerima
na sl. 81–3), a unutrašnja strana krivine kod zakrivljenosti središnjeg
mlaza je njegov obim. Na obimu mlaza pijezo-
metarska kota je, dakle,
niža nego u njegovoj osovini, a tu (na početku uže cevi) obim mlaza je uz
sam zid (iza toga mlaz se odvajaju). Na slici 102–5 je tako i prikazano:
kota Π_b je ispod kote koja odgovara osovini mlaza u istom preseku.
Može se kao približnost uzeti, i neće se mnogo pogrešiti, da se kota Π_b
izjednači sa kotom $\Pi_c = \Pi_{\text{suž}}$ koja se odnosi na suženi presek.

Ranije su razmatrane sile koje deluju kod nagle promene preseka
cevi pravougaonog preseka – slika 101–10 – i određena je sila K_s kojom
na fluid deluje čelna površina koja spaja cev većeg prečnika sa onom
manjeg. U slučaju naglog suženja kojom se iz šire prelazi u užu cev
kružnog preseka – što se sada razmatra (sl. 102–5), zanimljiva je tako –

de sila K_s kojom na fluid deluje kružni prsten koji spaja širu sa užom cevi. I ovde se ta sila određuje na isti način kao i tamo, i izražena je sa jednačinom (101–17). Tamo je rečeno da se nije mogla odrediti napadna tačka sile K_s , a ovde će se moći, jer tu mogućnost pruža osnosimetričnost strujanja.

Na pomenutom kružnom prstenu pritisci nisu raspoređeni po hidrostatičkoj zakonitosti, ali osnosimetričnost strujanja ima za posledicu da su razlike između pritisaka koji dejstvuju i onih koje bi dala hidrostatička zakonitost raspoređene osnosimetrično. Ovo znači da učinak svih tih razlika po celoj površini zbirno daje momenat jednak nuli u odnosu na osovину cevi, pa za momenat ostaje samo ono što bi dala hidrostatička zakonitost. Isto je bilo i kod razmatranja sile na dijafragmu, u Poglavlju 101, pa je sila na slici 101–7 nacrtana da deluje po osovini cevi. Prema tome, napadna tačka sile K_s na navedenu prstenastu površinu se određuje po hidrostatičkoj zakonitosti, a to je već urađeno za prstenastu površinu kod naglog proširenja, pa se može zaključiti da sila K_s deluje ispod težišta na rastojanju (od njega) L_P napisanom sa (101–20), uz prihvatanje izraza (101–21) za momenat inercije prstenaste površine.

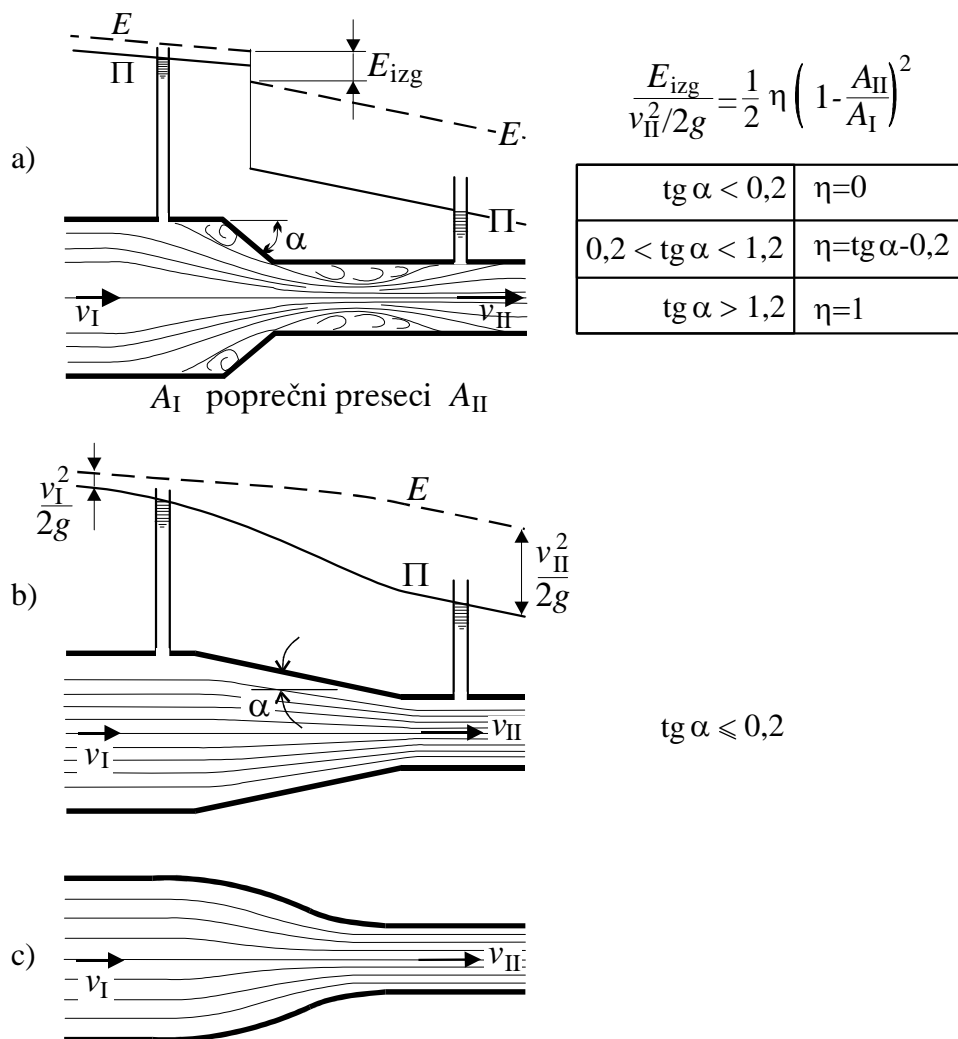
Mada je iz prethodnih izlaganja jasno, nije beskorisno naglasiti da se napadna tačka sile K_s može sračunati kao da raspored pritisaka (koji zbirno čine silu K_s) sledi hidrostatičku zakonitost, iako on nije takav, ali je osnosimetričnost dozvolila da se tako postupi.

* * *

Za *postepeno suženje* (sl. 102–7), slično kao kod postepenog proširenja (sl. 102–4) može se gubitak računati sa „koeficijentom umanjenja”, koji se, po ugledu na izraz (102–4), piše sa:

$$\eta = \frac{E_{izg}(\text{postepeno suženje})}{E_{izg}(\text{naglo suženje})}$$

Uz sliku 102–7a upisane su vrednosti za η u zavisnosti od ugla α koji izvodnice u suženju zatvaraju se osovinom cevi. Napisano ukazuje da za $\text{tg}\alpha > 1,2$ postepenost nema uticaj na smanjenje gubitka, a da za $\text{tg}\alpha < 0,2$ ne treba dodavati lokalni gubitak na gubitak usled trenja, jer nema odvajanja strujanja u vrtložnu oblast (sl. 102–7b). Upoređenje



Slika 102–7 a) Lokalni gubitak dodaje se gubitku na trenje, b) ne dodaje se, c) umesto koničnog (b) može se primeniti i zaobljeno suženje

sa postepenim proširenjem dovodi do zaključka da je ovde (kod suženja) potrebna dva puta manja dužina sužavanja pa da se lokalni gubitak svede na zanemarljivu meru (tamo $\text{tg } \alpha < 0,1$, ovde $\text{tg } \alpha < 0,2$).

Lokalni gubitak se ucrtava stepeničastim spuštanjem linije energije na polovini sužavanja – vidi sliku 102–7a. Na isti način se postupalo i kod postepenog proširenja. I ovde se, kao i tamo, gubitak usled trenja

procenjuje primenom izraza (102-5). Ako se lokalni gubitak ne računa, može se i ovde primeniti postupak koji je doveo do (102-6).

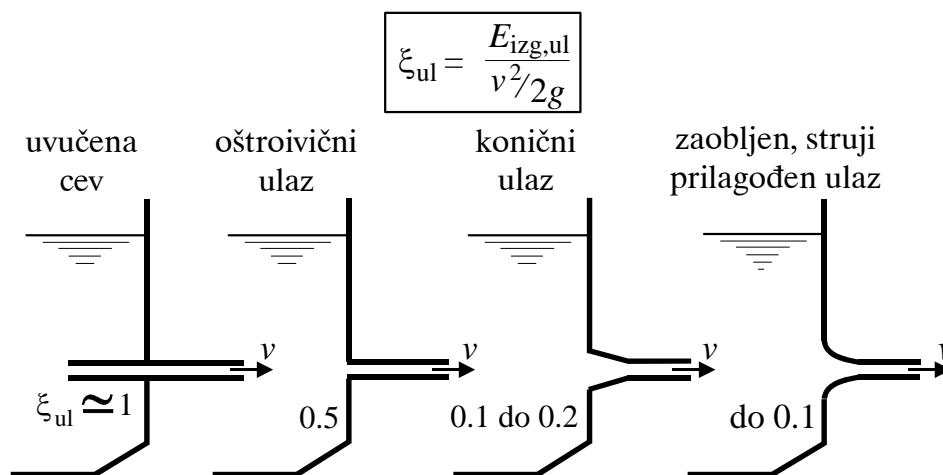
* * *

Poseban slučaj suženja preseka je *ulaz u cev* iz suda velike zapremine (sl. 102-8).

Prvi crtež na slici odnosi se na cev uvučenu u sud, a to je bio jedan od primera gde se došlo do izgubljene energije bez korišćenja iskustvenih podataka, korišćenjem jednačine uravnoteženja sila (Treći primer uz Poglavlje 82, sl. 82-5) čije je rešenje kasnije nametnuto jednačini energije da sračuna izgubljenu energiju (Primer 3 uz Poglavlje 83). Rezultat je: koeficijent lokalnog gubitka na ulazu $\xi_{ul} = 1$.

Drugi crtež na sl. 102-8 je oštroični ulaz u cev, koji se može shvatiti kao naglo suženje cevi sa veoma velikoga preseka na drugi neuporedivo manji tj. da je A_{II}/A_I jednako nuli, pa jednačina (102-13) daje $\xi = 0,5$.

Na istoj slici (102-8) prikazani su i konični i zaobljeni ulaz u cev. Kod koničnog ulaza ulazna brzina je manja pa je gubitak energije znatno manji: dovoljno je uzeti $\xi = 0,1$ do $0,2$. Za zaobljeni ulaz treba zapaziti da on može da se toliko prilagodi strujanju da ne dođe do sužavanja ulaza unutar preseka cevi, pa neće onda biti ni proširivanja

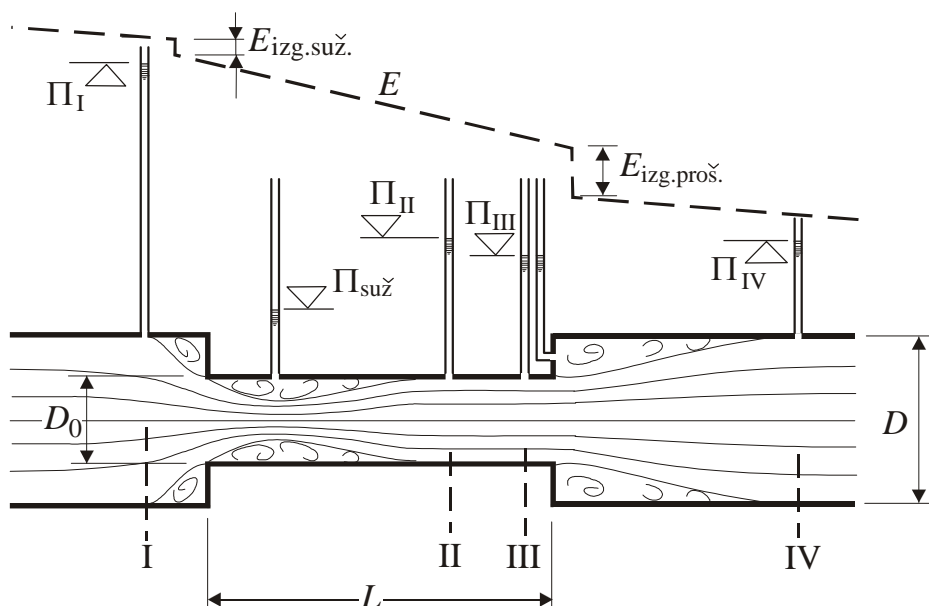


Slika 102-8 Koeficijenti gubitka na ulazu u cev

mlaza, a time je otklonjen glavni razlog za otuđenje energije, pa je gubitak energije veoma malen (ξ oko 0,05) tj. skoro zanemarljiv.

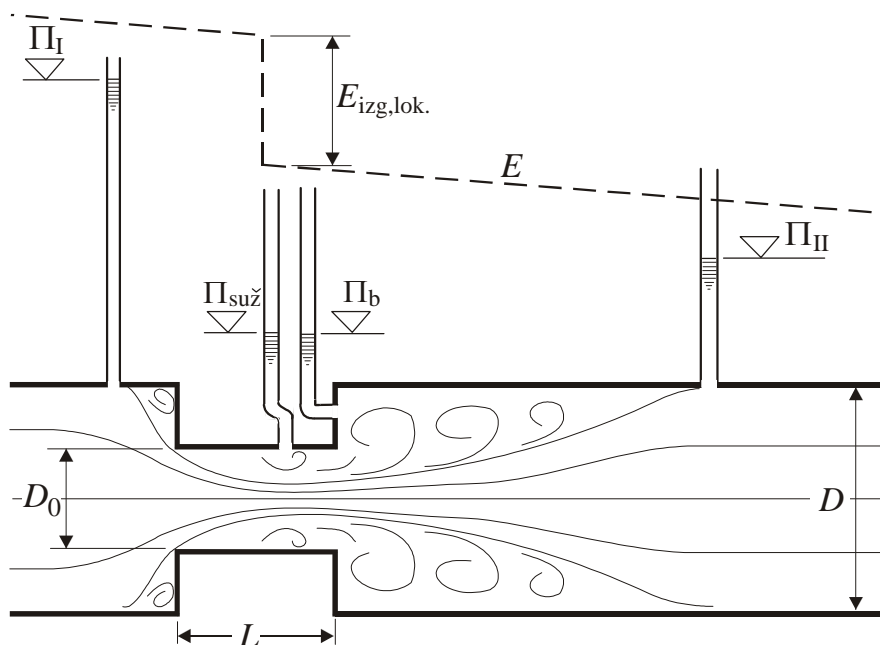
* * *

Slikama 102–9 i 102–10 prikazano je naglo suženje iza koga sledi naglo proširenje na presek pre suženja, upravo jedan komad cevi zamenjen je sa cevi manjega prečnika, i tako se stvorila prepreka strujanju. Namera je da se ukaže na razliku između prikazanog na te dve slike.



Slika 102–9 Suženje i potom proširenje na presek pre suženja – sužena deonica je dugačka pa se zadatak može rastaviti na naglo suženje (od I do II) i na naglo proširenje (III do IV), jer se struja, odbijena od zida na početku sužene cevi, proširi na ceo poprečni presek sužene cevi, pre njenoga kraja

U slučaju sa sl. 102–9 na jednom delu sužene cevi uspostavlja se pravolinijsko i paralelno strujanje – to je deo između preseka (II) i (III), jer je vrtložna oblast sa početka suženja završena do preseka (II). Bitno je da se ona završi pre kraja sužene cevi, jer to omogućava da se posebno posmatra suženje – od (I) do (II) – a posebno proširenje cevi – od (III) do (IV).



Slika 102–10 Suženje i potom proširenje na presek – sužena deonica je kratka, pa se suženi mlaz, odvojen od zida na početku sužene cevi ne može proširiti na dužini (L) sužene deonice da pre njenog kraja zauzme ceo presek;

U slučaju sa sl. 102–10 sužena deonica je prekratka da se u njoj središnji deo struje, odbijen od zidova na početku suženja, može proširiti na ceo presek sužene cevi pre njenoga kraja. U suženoj cevi nema preseka nezahvaćenog vrtložnom oblasti, jer je u istu vrtložnu oblast spojeno odvajanje mlaza od zida na početku suženja i „trag” iza suženja cevi. Stoga se lokalni gubitak na sl. 102–10 prikazuje jedinstveno, za deo struje od preseka (I) do preseka (II).

Za ostvarenje slučaja sa sl. 102–9 potrebno je da dužina sužene cevi bude tolika da se u njoj središnji mlaz suzi sa A_0 (presek sužene cevi) na $A_{suž}$ (minimalni presek mlaza), i da se onda proširi sa $A_{suž}$ ponovo na A_0 . Kod proširenja cevi rečeno je da se mlaz sa prečnika D_I proširi na prečnik D_{II} , na rastojanju koje se procenjuje na $L = 5(D_{II} - D_I)$. Ova procena se može koristiti i u primeru koji se sada razmatra, uz napomenu da se primenjuje na širenje mlaza od prečnika $D_{suž}$ na prečnik D_0 (od preseka $A_{suž}$ na presek A_0), pa onda potrebna dužina za proširenje

mlaza iznosi $5(D_0 - D_{\text{suž}})$. Ispred te dužine nalazi se deo sužene cevi u kojoj se mlaz sužava od prečnika D_0 na prečnik $D_{\text{suž}}$, a i tu dužinu treba obezbediti (da bi se ostvario slučaj sa sl. 102–9). Dužina na kojoj se mlaz sužava je kraća od one na kojoj se proširuje, što se uviđa iz prikazanog na sl. 102–9. Ako se uzme da su obe dužine podjednake, čime će se uneti i izvesna rezerva (da se bude, kako se to obično kaže „na strani sigurnosti”), ukupna dužina sužene cevi $L = 10(D_0 - D_{\text{suž}})$ je dovoljna da se ostvario slučaj sa sl. 102–9.

Za naglo suženje cevi, za najizrazitije suženje gde je $A_{\text{II}}/A_{\text{I}}$ blisko nuli, koeficijent skupljanja mlaza C_A iznosi 0,62. To se može pročitati iz obrasca (102–11). Stepenu sužavanja u sada posmatranom slučaju izražen je sa $A_{\text{suž}}/A_0$, ili $(D_{\text{suž}}/D_0)^2$, pa se $D_{\text{suž}}/D_0$ može izraziti sa $\sqrt{0,62}$ što približno iznosi 0,8, a onda zahtevana dužina $10(D_0 - D_{\text{suž}})$ iznosi $2D_0$. U ovoj proceni uzeta je minimalna vrednost za koeficijent C_A , a za njegove veće vrednosti dobila bi se još kraća dužina L . Iako su svi uzimani pokazatelji birani tako da ne dođe do potcenjivanja dužine L , može se, da se bude potpuno siguran, ta dužina povećati, da se mlaz „dobro zalepi na zid” na izvesnoj dužini na završetku uže cevi. Stoga se može pouzdano tvrditi da je za:

$$L \geq 3D_0 \quad (102-14)$$

obezbeđeno da se ostvari slučaj sa sl. 102–9.

U slučaju sa slike 102–9 treba odvojeno sračunati gubitak na suženju – od preseka (I) do preseka (II), a odvojeno gubitak na proširenju – od (III) do (IV) – za to mogu da posluže obrasci (102–13) i (102–2). Lokalnim gubitkom energije, kako je objašnjeno u Poglavlju 101, i tamo prikazano slikom 101–1, obračunava se dodatni obračunski gubitak usled lokalnog poremećaja (što je zapravo višak gubitka u odnosu na gubitak usled trenja na istoj dužini kada lokalnog gubitka ne bi bilo). Ako se lokalni gubici na proširenje i na suženje stepenasto prikažu na liniji energije, i to na početku i na kraju sužene cevi (tako je urađeno i na sl. 102–9), duž sužene cevi treba obračunati (i prikazati nagibom linije energije) odgovarajuće trenje. Time će biti obuhvaćena i izgubljena energija između preseka (II) i (III).

U slučaju sa sl. 102–10 izgubljena energija od (I) do (II) morala bi se iskazati jedinstveno, jer od (I) do (II) nema preseka sa paralelnim i pravolinijskim strujanjem za ceo presek cevi, svuda vrtložna oblast

opkoljava središnji mlaz. Međutim, i ovde se može primeniti jednačina (102–8) koja deli struju na deo do suženog preseka i od njega, uz ista opravdanja koja su pratila navedenu jednačinu. I ovde mlaz suzi više nego što se suzila cev, a potom se širi. Razlika je jedino u tome što se ovde ne širi mlaz samo do preseka sužene cevi, nego do preseka iza suženja. Ako se neporemećena brzina u preseku iza suženja, a takva je i u preseku iza suženja, označi jednostavno sa v , onda v zamenjuje v_{II} u (102–8) pa se piše:

$$E_{izg,lok} = \varphi \frac{v_{suž}^2}{2g} + \frac{(v_{suž} - v)^2}{2g} \quad (102-15)$$

Koristiće se oznake: A = presek cevi (ispred i iza suženja), A_0 = suženi presek cevi, $A_{suž}$ = suženi presek mlaza i C_A = koeficijent sužavanja (kontrakcije) mlaza ($C_A = A_{suž}/A_0$). One omogućuju da se $v_{suž}$ (pri proticaju Q) izrazi sa:

$$v_{suž} = \frac{Q}{A_{suž}} = \frac{Q}{C_A A_0} = \frac{vA}{C_A A_0} \quad (102-16)$$

pa se iz jednačine (102–15), uz korišćenje (102–16), dobija koeficijent lokalnog gubitka energije

$$\xi = \frac{E_{izg,lok}}{v^2/2g} = \varphi \left(\frac{A}{C_A A_0} \right)^2 + \left(\frac{A}{C_A A_0} - 1 \right)^2 \quad (102-17)$$

Kod naglog suženja cevi primećeno je da je, sem slabo izraženih suženja, gubitak na sužavanju struje manji od onoga na proširivanju, a to je za slučaj sa slike 102–10 još izraženije. Za upoređenje gubitka u slučajevima prema slikama 102–9 i 102–10 stoga može da posluži, u svrhu procene, samo upoređivanje gubitaka na proširavanju, a oni su srazmerni sa levom (za slučaj sa sl. 102–9), odnosno desnom stranom (za slučaj sa sl. 102–10) sledeće nejednačine:

$$(v_{suž} - v_0)^2 + (v_0 - v)^2 < (v_{suž} - v)^2 \quad (102-18)$$

Nejednačinom se naglasilo da je manja izgubljena energija ako se mlaz širi u dva „koraka” (od $A_{suž}$ do A_0 , a potom od A_0 do A), nego ako je to neposredno (od $A_{suž}$ do A). Ovim se tvrdi da je izgubljena

energija manja u slučaju sa sl. 102–9, nego u slučaju sa sl. 102–10. Ovo je razumljivo, jer dve uže vrtložne oblasti skromnijih zamaha manje troše od jedne jedinstvene čiji je zamah znatno veći.

Iako je prethodno izloženo shvatljivo, treba ipak proveriti da li to iskazuje napisana nejednačina (102–18), odnosno treba proveriti njenu valjanost. To je veoma lako – treba samo desnu stranu zameniti prema sledećem:

$$(v_{\text{suž}} - v)^2 = [(v_{\text{suž}} - v_0) + (v_0 - v)]^2$$

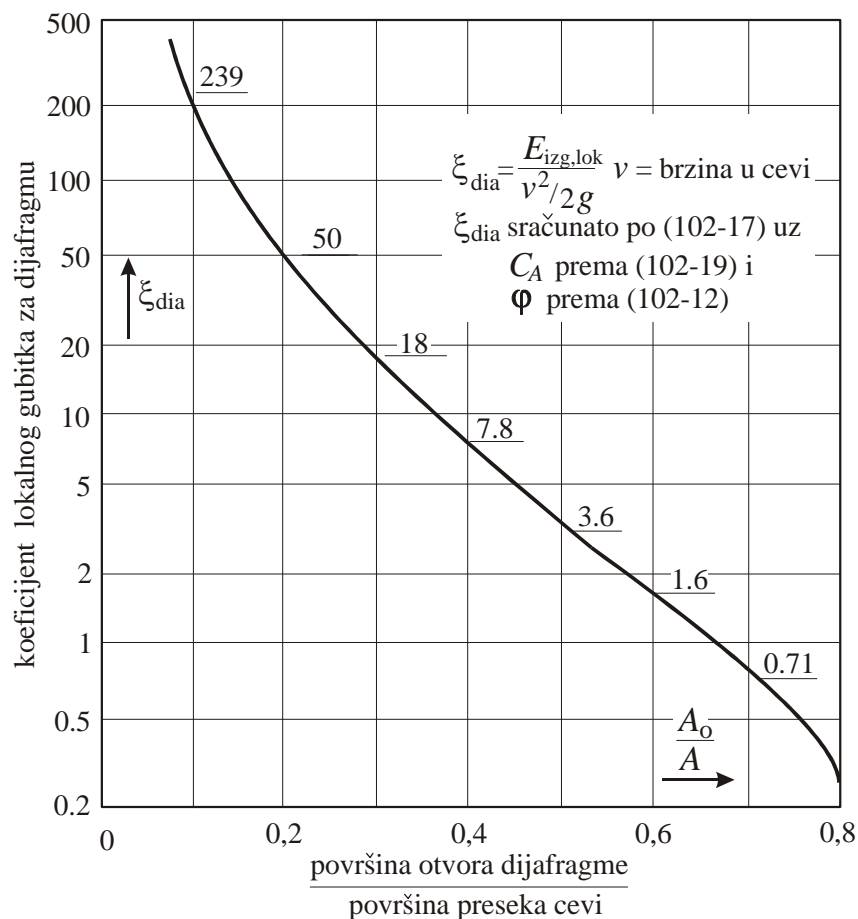
Slučaj sa sl. 102–10 postaje dijafragma, ako se dužina L uže cevi smanji na debljinu dijafragme (dijafragma je bila primer za objašnjenje lokalnog gubitka energije u Odeljku I Poglavlja 101). Međutim, ako je dužina L i nešto duža, ali ne toliko da se suženi središnji mlaz proširi po celom preseku uže cevi pre njenoga kraja, opet će gubitak energije biti približno isti kao kod dijafragme. Stoga će se nastavak razmatranja odnositi na dijafragmu.

Za koeficijent suženja C_A kod dijafragme uzeće se ista vrednost kao kod naglog suženja cevi, jer je u oba slučaja sužavanje mlaza posledica prelaska iz većeg preseka cevi u manji. Razlika je u tome što se ranije razmatrao slučaj prelaz iz preseka cevi A_I u presek cevi A_{II} , a kod dijafragme je prelaz iz preseka cevi A u otvor dijafragme površine A_0 . Prihvatanjem ovakvog stava, koeficijent suženja za dijafragmu računace se, po ugledu na izraz (102–11), sa:

$$C_A = 0,62 + 0,38 \left(\frac{A_0}{A} \right)^2 \quad (102-19)$$

Na osnovu ovako određene vrednosti za C_A , sračuna se φ po obrascu (102–12), pa se C_A i φ uvrste u (102–17) i dobija se koeficijent gubitka energije ξ_{dia} na dijafragmi za bilo koji pojedinačni primer. Grafikon na sl. 102–11 daje uvid u zavisnost ξ_{dia} od A_0/A , nacrtan na osnovu rezultata prema izloženom postupku.

Skreće se pažnja da se iz slike 102–11 uviđa da je za $A_0/A = 0,1$, koeficijent lokalnog gubitka ξ_{dia} jednak 240. Tako velika vrednost ne treba da zbunjuje, jer se izražava u odnosu na $v^2/2g$ (brzinsku visinu u cevi), a da bi ξ bio jednak približno jedinici kada bi se izražavao u odnosu na $v_{\text{suž}}^2/2g$. Dijafragma čiji je prečnik otvora D_0 jednak $0,2D$



Slika 102–11 Koeficijent lokalnog gubitka na dijafragmi

($D =$ prečnik cevi) tj. gde je odnos A_0/A jednak 0,04, prema preporučenom računanju, ima čak ξ_{dia} oko 1620.

* * *

Ako se slučajevi sa sl. 102–9 i 102–10 shvate kao prepreka, sila koju prima prepreka preko prednje čone svoje površine (kružni prsten) i iste takve stražnje površine, može se u slučaju sa sl. 102–10 dobiti samo zbirno (bez razdvajanja na prednju i stražnju površinu) dok se, za slučaj sa sl. 102–9 može dobiti razdvojeno (posebno sila na prednji, a posebno na stražnji kružni prsten). Ovo je lako shvatljivo, jer proizlazi

iz prethodnih izlaganja, gde se zadatak prema sl. 102–9 razdvajao na dva (jer je postojao presek sa paralelnim i pravolinijskim strujanjem za završetak prvog i početak drugoga odvojenog zadatka), dok se zadatak prema sl. 102–10 ne može razdvojiti (nema u suženom delu presek koji bi to omogućio).

Za slučaj sa sl. 102–9 sila koju uzima prednji kružni prsten određuje se kao kod naglog suženja cevi, a sila koju prima stražnji prsten određuje se kao kod naglog proširenja cevi.

Za slučaj sa sl. 102–10 sila koju primaju oba prstena, kako je rečeno, može se odrediti zbirno (bez razdvajanja na prednji i stražnji prsten), a primenom uobičajenog postupka uravnoteženja sila koje deluju na masu između preseka (I) i (II) – razume se, uz prethodno poznavanje izgubljene energije između ta dva preseka.

* * *

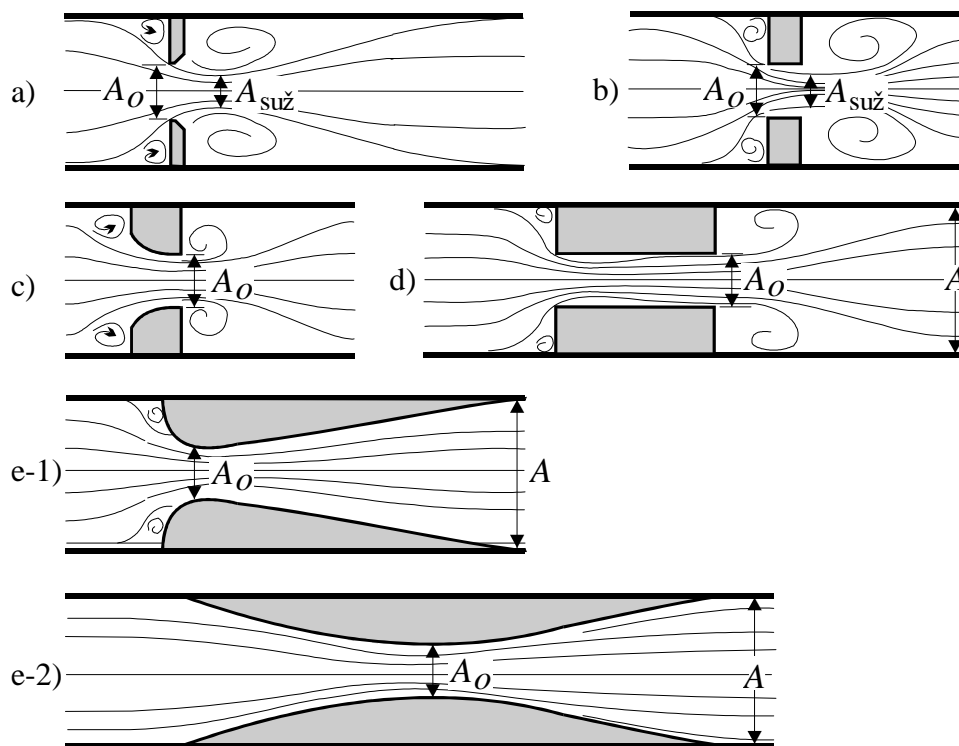
Slika 102–12 prikazuje 6 oblika kojima se presek cevi lokalno priгуsuje – sve su to suženja preseka iza čega sledi proširenje na presek ispred suženja, pa se mogu shvatiti kao lokalne prepreke struji.

U prva dva slučaja (a) i (b) suženi presek $A_{\text{suž}}$ je isti, jer se središnji mlaz, odbijen od otvora, ne proširi toliko da u slučaju (b) ispuni ceo presek sužene cevi pre njenog kraja. Pošto je suženi presek isti, gubitak energije u (a) i (b) zanemarljivo se razlikuje – u oba slučaja, kako je svojevremeno objašnjeno, E_{izg} se računa kao kod dijafragme, odnosno prema slici 102–11.

U slučaju (c) zaobljavanje ulaza sprečava sužavanje mlaza (u odnosu na otvor u sredini cevi), pa je gubitak energije znatno manji nego u (b), jer se proširivanje mlaza obavlja od preseka A_0 , a ne od suženog preseka $A_{\text{suž}}$. Računa se i ovde sa (102–17), ali sa $C_A = 1$. Gubitak energije je za (d) veći nego za (c), na proširenju se približno isti, ali je na sužavanju (usled skupljanja mlaza) veći nego u (c).

U slučaju (d) sužena cev je toliko dugačka da se suženi mlaz pre kraja sužene cevi proširi na ceo njen presek (ostvaruje se prikazano na sl. 102–9). Gubici energije računaju se odvojeno za suženje – po obrascu (102–13) – i za proširenje – po (102–2).

Slučajevi (e-1) i (e-2) oblikuju i ulaz u suženje i izlaz iz njega tako da se lokalni gubici energije mogu zanemariti – računa se samo trenje. Razlika među njima je u tome što prvi sadrži „konično” a drugi



Slika 102–12 Prepreke u cevi. Za isti proticaj i iste preseke A i A_0 redosled smanjenja izgubljene energije je: (a) = (b), (d), (c), (e)

„zaobljeno” suženje – vidi sl. 102–7.

Treba naglasiti da veći gubitak energije znači i veću piježometarsku razliku, a onda i veći otpor, veću silu K kojom prepreka deluje na fluid.

II

PROMENA PRAVCA STRUJANJA U CEVI – KRIVINA, KOLENO

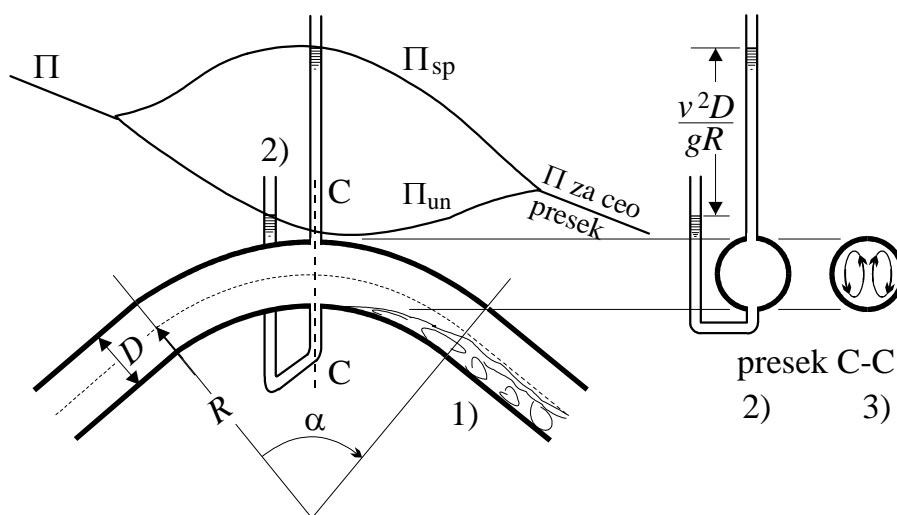
Razmatranja naglog proširenja i suženja cevi ukazala su na osnovni razlog za gubitak energije – on je u odvajanju strujanja u vrtložnu oblast, koja se neminovno obrazuje, jer se tečnost nizvodnim smerom ne može prenositi celim presekom cevi ako se on naglo menja.

I kod *krivine* postoji isti razlog. Na unutrašnjoj strani krivine dolazi do odvajanja u vrtložnu oblast, jer struja ne može tako naglo da

skrene kako joj nameću čvrste granice u krivini. Na sl. 102–13, između ostaloga, želi se prikazati obrazovanje odvojene vrtložne oblasti, što je na slici označeno sa „1”.

U uvodnim izlaganjima o strujama, u Poglavlju 81, razmatrani su uslovi za poprečni presek struje koji se može uzeti za pisanje jednačine namenjene struji kao celini. U tom preseku strujanje je paralelno i pravolinijsko, normalno na presek, i pijeziometarska kota je ista za ceo presek. Tamo je kao ubedljiv primer nepodobnog preseka uzet baš presek u krivini – sl. 81–3 – jer u njemu pijeziometarska kota pokazuje izrazitu nejednakost, raste od unutrašnje ka spoljnoj strani krivine – to je prikazano na sl. 102–13, gde je označeno sa „2”.

U krivini se uspostavlja poprečno strujanje: u ravni poprečnog preseka komponenta brzine usmerena je od unutrašnje ka spoljnoj strani krivine kroz sredinu preseka (vidi označeno pod „3” na sl. 102–13), a onda uslov neprekidnosti (održavanja mase) zahteva da je u preostalom delu preseka strujanje suprotno usmereno. Slaganje ovoga poprečnog strujanja sa podužnim (u pravcu osnovnog toka) daje, duž krivine spiralno strujanje (dve spirale). To spiralno strujanje uzima energiju, treba



Slika 102–13 Uz objašnjenje pojava u krivini: 1) obrazovanje od zida odvojene vrtložne oblasti, 2) pijeziometarska kota u jednom preseku nije ista za ceo presek: raste od unutrašnje ka spoljnoj strani krivine (od Π_{un} do Π_{sp}), 3) poprečno strujanje (sa podužnim slaže se u spiralno strujanje)

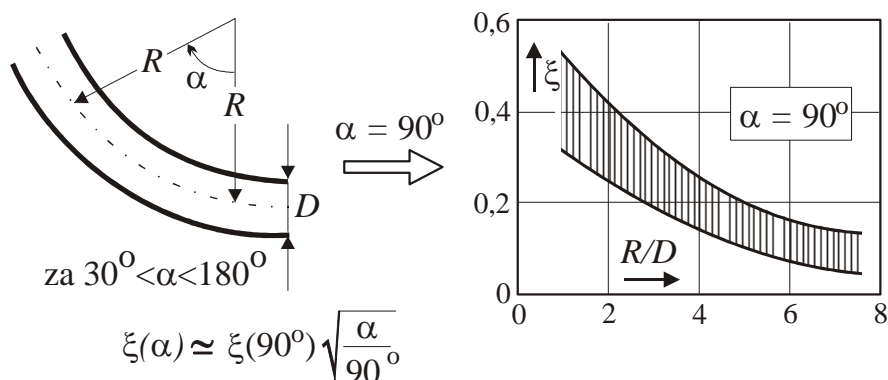
ga „pothranjivati” energijom, a i to odvajanje energije uključuje se u „izgubljenu energiju”, pored malo pre opisanog očuvanja energije u odvojenu vrtložnu oblast, prikazanu sa (1) na sl. 102–13.

* * *

Obično se koeficijent ξ lokalnog otpora krivine izražava sa:

$$\xi_{kr} = \xi_{kr} \left(\frac{R}{D}, \alpha \right) \quad (102-20)$$

gde je R/D odnos radijusa zakrivljenja prema prečniku cevi, α je ugao skretanja (vidi sl. 102–14).



Slika 102–14 Koeficijenti gubitka energije za krivinu; u osenčenom području nalazi se pretežan deo preporučivanih vrednosti za praktičnu upotrebu

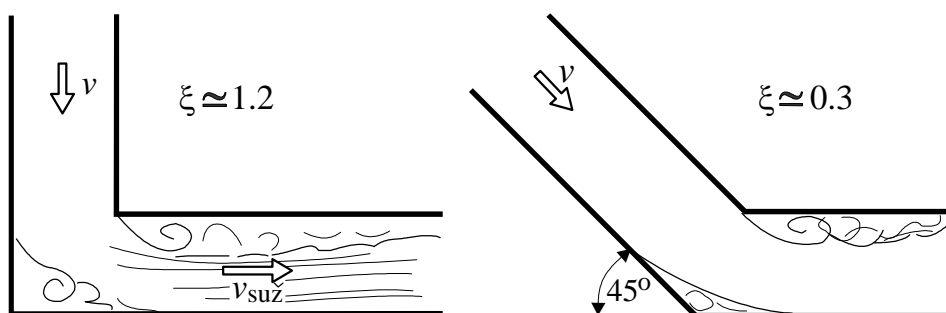
Prikazano na slici lako se objašnjava. Što je krivina naglija (oštrija), tj. što je manji odnos R/D , strujanje teže skreće, pa se obrazuje veća odvojena vrtložna oblast, u kojoj je onda veća izgubljena energija, a jače je i opisano spiralno strujanje, pa i ono troši više energije. Znači, sa opadanjem R/D raste ξ_{kr} za isti ugao skretanja α . Za isti odnos R/D , a veći ugao α , oba navedena uzroka gubljenja energije su veća, jer je krivina duža, pa koeficijent ξ_{kr} raste sa porastom ugla α . Slika 102–14 potvrđuje opisane zavisnosti. Treba primetiti da se grafikon odnosi na $\alpha = 90^\circ$, a za α između 30° i 180° na slici je napisano da se računa dobijeno sa grafikom $\xi(90^\circ)$ pomnoženo sa $\sqrt{\alpha/90^\circ}$. Ovo pokazuje da

se prikazuje da je vrednost koeficijenta ξ srazmerna sa $\sqrt{\alpha}$, a to je bliže stvarnosti, nego da se napisala srazmernost sa uglom skretanja α , jer se dejstvo uzroka gubitka energije (odvajanje u vrtložnu oblast, spiralno strujanje) ne menja u tolikoj meri da se ostvaruje srazmernost sa uglom α .

Skreće se pažnja da grafikon zavisnosti $\xi = \xi(R/D)$ nije prikazan linijom nego pojasom u koga ulazi većina preporučivanih zavisnosti. Razlike između pojedinih zavisnosti su u neodređenosti mesta odvajanja od struje vrtložne oblasti (prikazano kao „1” na slici 102–13), a onda i prostiranje te oblasti, a ona je glavni „potrošač” energije (koja se računa kao izgubljena). Gde će se vrtložna oblast odvojiti zavisi od rasporeda prizidnih brzina i od hrapavosti (i to ne prosečne, nego najkrupnijih izbočina), a to je teško obuhvatiti u nekakvu zakonitost.

Nije beskorisno podsećanje da se na procenjeni lokalni gubitak dodaje i trenje – to je opšte prihvaćeni postupak, izložen na početku Poglavlja 101. Pošto je dužina krivine L jednaka $\pi R\alpha/180^\circ$, treba dodati trenje na dužini L . Ako se to ne uradi, a računa se samo lokalni gubitak prema sl. 102–14, doći će do očigledne greške: za duže i blaže krivine obračunati lokalni gubitak prema sl. 102–14 može da bude manji nego gubitak usled trenja na istoj tolikoj dužini prave cevi.

Za naglo skretanje cevi, što se naziva „koleno” (sl. 102–15) gubici energije su veći nego kod krivine, jer je kod nje skretanje postepeno. Kod naglog skretanja dolazi do izrazitog suženja mlaza, što se htelo i prikazati slikom (102–15). Oko suženoga mlaza nastaje njegovo proširivanje na ceo presek cevi.



Slika 102–15 Koeficijenti gubitka energije u kolenu (uz $v^2/2g$)

Za ugao skretanja $\alpha = 90^\circ$ brzina u suženom preseku $v_{\text{suž}}$ ceni se da je dva puta veća od brzine v cevi (suženi presek struje dva puta manji od preseka cevi). Uz to se pretpostavlja da je koeficijent gubitka u sužavanju jednak otprilike 0,05. Po ugledu na jednačinu (102–15) može se sa $\varphi = 0,05$ napisati

$$E_{\text{izg,lok}} = 0,05 \frac{v_{\text{suž}}^2}{2g} + \frac{(v_{\text{suž}} - v)^2}{2g}$$

što sa postepenim sužavanjem mlaza, sa $v_{\text{suž}} = 2v$, daje

$$\xi_{\text{kol}} = \frac{E_{\text{izg,lok}}}{v^2/2g} = 0,05 \times 4 + 1 = 1,2 \quad (102-21)$$

Preporuke za praktičnu primenu daju ξ_{kol} između 1,0 i 1,4 (za $\alpha = 90^\circ$). Za skretanje od 45° gubitak energije je znatno manji i vrednost za ξ_{kol} je oko 0,3.

* * *

PRIMEDBA

Razlika između piježometarskih kota na spoljnoj i unutrašnjoj strani krivine, i to u poprečnom preseku na sredini krivine može se proceniti približnim računom po jednačini (81–17) u kojoj se pretpostavlja da je brzina u po celom preseku ista (uzeće se za brzinu u prosečna brzina za presek v), a za širinu preseka (mereno u pravcu normale), koja je u navedenoj jednačini označena sa d uzeće se prečnik cevi D . Sa takvim oznakama navedena jednačina za razliku piježometarskih kota na spoljnoj i unutrašnjoj strani krivine daje:

$$\Pi_{\text{sp}} - \Pi_{\text{un}} = \frac{v^2 D}{gR} \quad (102-22)$$

U Odeljku II Poglavlja 101 napisan je sa (101–3) opšti obrazac za lokalni gubitak energije, dobijen primenom dimenzionalne analize. Za krivinu u bezdimenzionalno izražavanje graničnih uslova (Ko) ulaze, pre svega odnos poluprečnika zakrivljenja R/D i ugao skretanja α – to je i upisano u funkciju (102–20).

Iza obrasca (101–3) raspravljalo se i o uticaju hrapavosti na raspored brzina u graničnim presecima (I) i (II), između kojih se ostvaruje izgubljena energija koja se određuje. Uticaj hrapavosti (izražen relativnom hrapavošću, k/D) na raspored brzina po preseku, upisan je u izraz (101–5) pored Re -broja. Međutim, sem uticaja hrapavosti na raspored brzina u graničnim presecima, skrenuta je pažnja i na mogući uticaj hrapavosti na položaj mesta početka odvajanja u vrtložnu oblast, a to znači uticanje na prostorno zahvatanje te oblasti. Što je ta oblast veća, veći su gubici energije u njoj. Kao primer za ovakvo uticanje hrapavosti navedena je baš krivina.

U krivini početak odvajanja u vrtložnu oblast nije jasno, i ubedljivo, nametnut čvrstim granicama: ne može se unapred reći gde će odvajanje otpočeti. Nasuprot tome, kod naglog proširenja, mesto odvajanja je potpuno jasno određeno samim oblikom čvrstih granica.

Kod krivine na odvajanje u vrtložnu oblast osetno utiče raspored brzina po preseku, jer za istu srednju brzinu u preseku v , mogu da budu drukčije brzine u prizidnom delu preseka, a od toga zavisi gde će doći do zaustavljanja delića u blizini zida na unutrašnjoj strani krivine i otpočinjanja njihovog kretanja unatrag, čime se i začinje vrtlog, upravo otpočinje vrtložna oblast. Raspored brzina u poprečnom preseku takođe utiče i na opisano spiralno strujanje.

Ako se iz navedenih razloga uticaj hrapavosti unosi u izraz za izgubljenu energiju u bezdimenzionalno izražene granične uslove (Ko) u funkciji (101–3) pored već navedenih bezdimenzionalnih veličina (R/D , α) ulazi i relativna hrapavost k/D , pa je:

$$\xi = \xi \left(Re, \frac{R}{D}, \alpha, \frac{k}{D} \right) \quad (102-23)$$

Unošenje uticaja hrapavosti na obrazovanje strujanja u krivini (odvajanje u vrtložnu oblast spiralno strujanje) ne bi, strogo uzevši, bilo dovoljno izraženo samo unošenjem relativne hrapavosti k/D sa kojom se računa trenje, jer k/D treba shvatiti kao obračunski pojam. Račun sa prihvaćenom apsolutnom hrapavošću daje onoliki gubitak usled trenja koliki bi dala jednolika peščana hrapavost sa visinom izbočina jednakom k .

U Odeljku I Poglavlja 99 prikazano je da stvarno stanje hrapavosti u praktičnim primerima čine izbočine različite visine, oblika i rasporeda

po površini, pa se ne može tvrditi da će se na istom mestu vrtložne oblasti odvojiti za sve slučajeve gde je ista obračunska hrapavost. Verovatno da je presudan uticaj najviših izbočina, kao i njihov oblik. Za krivine izrađene iz više međusobno zavarenih komada, položaj njihovog spajanja može uticati gde će se odvojiti vrtložna oblast.

Prethodna objašnjenja, navode na pomisao da je tačno određenje uticaja hrapavosti na zbivanja u krivini preterano složeno, pa se može shvatiti da je nedostižno. Iz praktičnih razloga stoga se obično ne unosi relativna hrapavost u obrazac kojim se određuje koeficijent lokalnog gubitka ξ jer ona verovatno ne bi dovoljno odražavala mogući uticaj hrapavosti, a složeniji obrazac bi samo stvarao iluziju veće tačnosti. Računajući da će praktični zadaci doći u kvadratnu zakonitost izostavlja se i Re -broj, kao što je to učinjeno u opštem obrazcu (101–6). Tako se umesto složenije funkcije (102–22) obično navodi prostija (102–20). Međutim, ovo uproštavanje kod krivine ima za posledicu da se preporučivane zakonitosti za koeficijent lokalnog gubitka ξ za krivinu podosta razlikuju, ali se pretežan deo iskustvenih obrazaca može uključiti u osenčenu oblast na sl. 102–14.

III

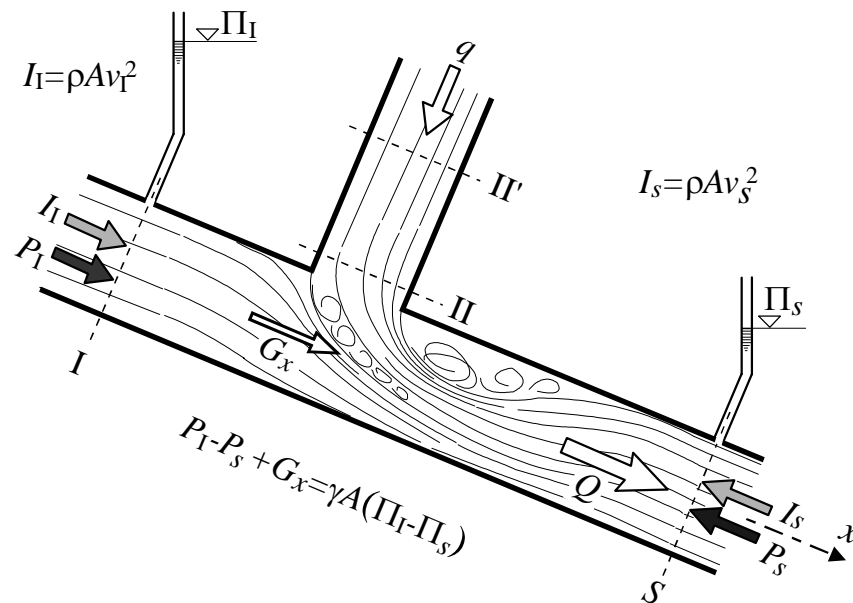
SPAJANJE I RAZDVAJANJE CEVI

Učiniće se pokušaj da se dođe do iznosa izgubljene energije usled uvođenja u cev priključka – sl. 102–16. Primeniće se isti postupak koji je doveo do izraza za izgubljenu energiju kod naglog proširenja, i kod ulaza u cev uvučenu u rezervoar (sl. 83–5 i 82–6) tj. primeniće se dinamička jednačina uravnoteženja sila i njen rezultat će se nametnuti jednačini energije da obračuna izgubljenu energiju. Priključak je pod uglom od 90° (sl. 102–16) i uravnotežuju se sile koje deluju u x -pravcu (pravac glavne cevi u koju se uvodi priključak), na masu fluida ograničenu presecima (I), (II) i (S), uz pretpostavku da je strujanje kroz te preseke pravolinijsko i paralelno, normalno na presek.

Jednačina za navedeno uravnoteženje piše se sa:

$$G_x + P_I - P_S + I_I - I_S = 0 \quad (102-24)$$

Sile su upisane na sl. 102–16 i one su komponenta težine (u x -pravcu) posmatrane mase, P_I i P_S su sile pritiska u presecima (I) i (S), dok su I_I i I_S komponente inercijalne „sile” u tim presecima.



Slika 102–16 Sile koje u pravcu pružanja glavne cevi (x -pravac) deluju na masu fluida između preseka (I), (II) i (S)

Prve tri sile u (102–24) zajedno iznose $\gamma A(\Pi_I - \Pi_S)$, što se dobija na isti način kao kod dijafragme – vidi jednačinu (101–13), dok su komponente inercijalne „sile” jednake $\rho A v_I^2$, odnosno $\rho A v_S^2$. U prethodnom pisanju A = presek cevi koji je isti u oba preseka, u (I) i (S) dok su v_I i v_S brzine u odgovarajućim presecima. Koristeći prethodna izjednačenja kao zamene u (102–24) dobija se:

$$\begin{aligned} \gamma A(\Pi_I - \Pi_S) + \rho A (v_I^2 - v_S^2) &= 0 \\ \Pi_I - \Pi_S &= \frac{v_S^2}{g} - \frac{v_I^2}{g} \end{aligned} \quad (102-25)$$

Ovako određena piježometarska razlika nametnuće se jednačini energije da obračuna izgubljenu energiju:

$$E_{izg} = \Pi_I + \frac{v_I^2}{2g} - \left(\Pi_S + \frac{v_S^2}{2g} \right) = \Pi_I - \Pi_S + \frac{v_I^2}{2g} - \frac{v_S^2}{2g} = \frac{v_S^2}{2g} - \frac{v_I^2}{2g} \quad (102-26)$$

U prethodnoj jednačini uravnoteženja sila (102–24) nije uzeta u obzir sila trenja fluida o zidove. Isto tako se postupilo i kod naglog

proširenja (Primer 3, Poglavlje 83), pa je tako dobijena izgubljena energija onda, u Odeljku I ovoga poglavlja shvaćena kao dodatna izgubljena energija izazvana lokalnim poremećajem tj. $E_{izg,lok}$. Trenje će biti obuhvaćeno ako se ono računa za cevi sve do spajanja, i saglasno sa tim crtaju se piježometarska i linija energije sa stepeničastim spuštanjem linije energije za lokalni gubitak. Deljenjem (102–26) sa $v_S^2/2g$ dobija se koeficijent lokalnog gubitka:

$$\left(\xi_I^S\right)_S = 1 - \left(\frac{v_I}{v_S}\right)^2 = 1 - \left(\frac{Q-q}{Q}\right)^2 = 2\frac{q}{Q} - \frac{q^2}{Q^2} \quad (102-27)$$

Ovo je napisano korišćenjem zamena:

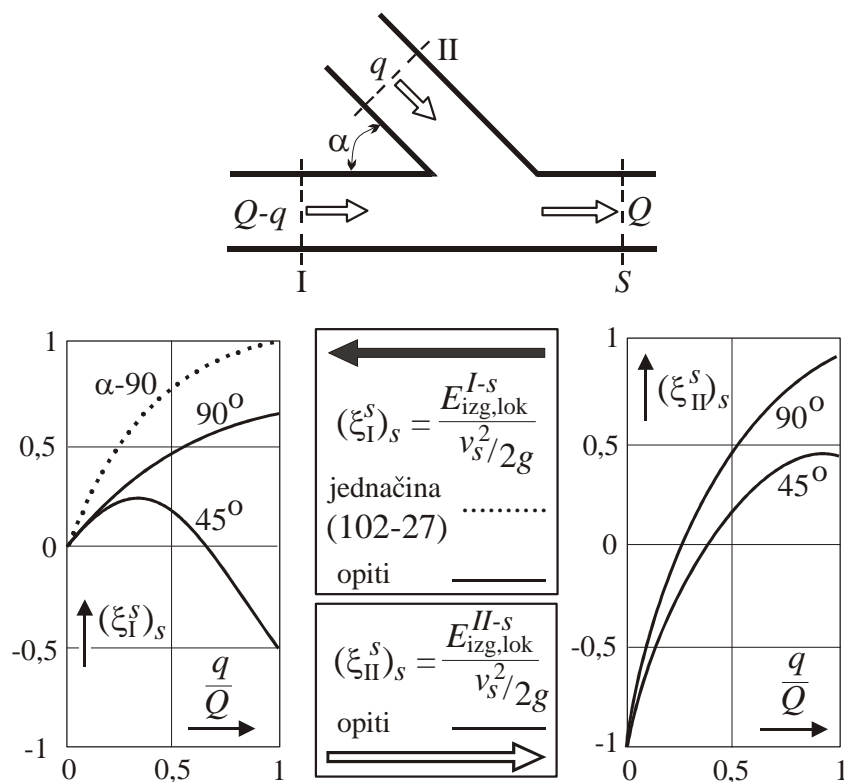
$$\frac{v_I}{v_S} = \frac{Q-q}{Q}$$

gde je q proticaj iz priključka, a Q proticaj posle spajanja.

Prethodnim obeležavanjem koeficijenta ξ ukazalo se da se odnosi na lokalni gubitak energije za struju od preseka (I) do (S), a da ξ treba množiti sa $v_S^2/2g$ (da bi se sračunao lokalni gubitak).

Opiti za $D_I = D_{II} = D_S$ pokazuju (sl. 102–17; crtež dole, levo) da je stvarni lokalni gubitak manji od onoga što daje jednačina (102–27). Razlog je u odstupanju stvarnih okolnosti od prihvaćenih pretpostavki koje su dovele do (102–27). Naime, kroz presek (II), usled skretanja struje, strujanje nije pravolinijsko i paralelno, normalno na presek, pa inercijalna „sila” za taj presek ne deluje normalno na presek (II), nego ima komponentu i u pravcu strujanja, koju je, međutim nemoguće jednostavno odrediti (trebalo bi poznavati brzine, po iznosu i pravcu, po celom preseku), ali se može tvrditi da navedena komponenta ($I_{II,x}$) deluje pozitivnim smerom (takvo je skretanje), tj. deluje istim smerom kao I_I , pa bi unošenje i te sile ($I_{II,x}$) u jednačinu (102–24), dovelo do toga da bi $\Pi_I - \Pi_S$ bilo manje od onoga što pokazuje (102–25), a onda bi E_{izg} bilo manje od napisanoga sa (102–27). To pokazuje i upoređenje linija na sl. 102–17 dole, levo.

Može se postaviti pitanje zašto se presek (II) na sl. 102–16 ne pomeri na položaj (II'), gde je strujanje normalno na presek (još nije otpočelo skretanje), pa onda otpada komponenta I_{II} u x -pravcu. Međutim, pomeranje preseka zahteva uvođenje sile K_x , kojom omotač deluje na



Slika 102–17 Koeficijenti lokalnih gubitaka (ξ) pri spajanju cevi (isti je prečnik cevi u sva tri kraka)

fluid. To je dejstvo pritiska sa omotača zahvaćenog dela priključne cevi (između preseka II i II'). Ova sila (K_x) bi se potirala sa komponentom G_x^{II} težine fluida u pravcu x u tom delu cevi, ali samo ako bi strujanje bilo skroz pravolinijsko i paralelno (tada se u normalnom pravcu uravnotežuju sile kao u hidrostatici). Međutim, ovde nije tako, pa se zadatak, prenošenjem graničnog preseka sa (II) na (II') zapetljava unošenjem sila K_x i G_x^{II} , od kojih je prva neizvesna, upravo neodređena bez poznavanja rasporeda pritisaka po omotaču priključne cevi.

Ovaj primer može da pruži pouku opštijeg značaja koja se može izraziti na sledeći način: Treba biti oprezan pri prihvatanju pretpostavki koje pojednostavljuju zadatak, i tako ga čine rešivim, jer se te pretpostavke ne moraju ostvariti ni toliko približno da bi se dobio barem približan rezultat, koji bi primena mogla prihvatiti. Primeri naglog

proširenja cevi (sl. 83–5) i ulaza u cev uvučenu u rezervoar (sl. 82–6) rešeni su sa pretpostavkama koje se uglavnom ostvaruju i stoga su i dobijena rešenja prihvatljiva. Međutim, iako se pretpostavke koje su dovele do (102–27), ne mogu prihvatiti kao pogodne da bi dovele do pouzdanog rezultata, dobijeni rezultat (102–27) je opet od koristi. Zna se da je stvarani gubitak energije manji od toga, i da je to odstupanje manje ako je q manje. Može, u nekom primeru, i gubitak prema (102–27) biti od malenoga značaja, a onda to pogotovo važi za stvarni gubitak.

Slika 102–17 (dole levo) pokazuje i koliki su gubici za energije u glavnoj cevi, izraženi sa koeficijentom $(\xi_I^S)_S$, kada je priključak pod uglom $\alpha = 45^\circ$. Ti gubici su znatno manji nego sa priključivanjem pod uglom $\alpha = 90^\circ$, što je razumljivo, jer je za $\alpha = 45^\circ$ inercijalna „sila” u preseku (II) usmerena tako da ima značajnu komponentu u pravcu strujanja u glavnoj cevi (x -pravcu). Taj uticaj znatno smanjuje razliku $\Pi_I - \Pi_S$, jer ta komponenta deluju u istom smeru kao I_I , u suprotnom od I_S , pa je manja izgubljena energija.

I za $\alpha = 90^\circ$ i za $\alpha = 45^\circ$, kada iz priključka nema proticaja ($q = 0$), koeficijent lokalnog gubitka $\xi = 0$, što znači da u struji duž glavne cevi od (I) do (S) nema gubitka lokalne energije. To, međutim, nije potpuno tačno jer je struja prolazeći pored priključka ipak malo uznemirena, stvara se vrtloženje, jer struja hoće da povuče mirnu vodu iz priključka, a ona se odupire – dakle ima lokalnog poremećaja, a onda i lokalnog gubitka energije, ali nije značajan – možda reda vrednosti $\xi = 0,05$.

Treba zapaziti da se za $\alpha = 45^\circ$, a za odnos q/Q jednak jedinici, dobija negativna vrednost za ξ , pa onda i za izgubljenu energiju. Ovo je protivrečno stavu o neminovnom smanjenju mehaničke energije niz struju. Taj stav, međutim pretpostavlja da se energija između dva preseka struje ne unosi u nju, a ovde se u struju između preseka (I) i (S) unosi energija iz priključka. Mora se naglasiti da se ovde (kod spajanja struja) sa E_{izg} izražava „obračunska izgubljena energija” pri isključivom posmatranju struje od (I) do (S), a bočna struja iz priključka može struji od (I) do (S) energiju povećati, uprkos gubitku (jer je primanje energije veće od gubitka), ali se tada u zasebnom računu za energiju, od (II) do (S) u njenoj „računskoj energiji” pojavljuje i ono što je stvarno izgubljeno i ono što je predato prvoj obračunatoj struji.

Račun, koji će otkloniti navedeni nesporazum, obuhvatiće ukupnu izgubljenu energiju u spajanju, a ona je razlika između energije koja se

unos u posmatrani čvor kroz preseke (I) i (II) i energije koja se iznosi kroz presek (S). Ukupnu energiju po jedinici težine izražava energetska kota E , a ona je zbir potencijalne i kinetičke energije $\Pi + v^2/2g$. Za svaki presek, E treba pomnožiti sa težinom koja protiče i dobija se ukupna energija (ne više po jedinici težine) koja ulazi, odnosno izlazi, kroz presek. Razlika između ulaza kroz (I) i (II) i izlaza kroz presek (S) mora da bude pozitivna (više ulazi nego izlazi) a to je onda izgubljeno. Ovaj navod se ispisuje sa:

$$\gamma(Q - q)E_I + \gamma q E_{II} > \gamma Q E_S \quad (102-28)$$

Desna strana se zamenjuje izrazom koji proticaj Q razdvaja na $Q - q$ i q , pa se, i uz deljenje sa γ , dobija:

$$(Q - q)(E_I - E_S) + q(E_{II} - E_S) > 0$$

ili

$$(Q - q)E_{izg}^{I-S} + qE_{izg}^{II-S} > 0 \quad (102-29)$$

Ova nejednačina biće uvek zadovoljena, a to onda ukazuje da se na spajanju, posmatranom kao celina, mehanička energija uvek gubi. Kasnije će se pokazati da je izraz (102-29) zaista ispravan.

Desni crtež na donjem delu slike 102-17 odnosi se na gubitak energije za struju od preseka (II) do preseka (S). I ovde se koeficijent gubitka ξ množi sa brzinskom visinom u preseku iza spajanja, sa $v_S^2/2g$.

Na pomenutom crtežu se vidi da je $(\xi_{II}^S)_S < 0$ sve dok proticaj q iz priključka ne prelazi otprilike 1/4 ukupnog proticaja Q (za $\alpha = 90^\circ$), odnosno 1/3 (za $\alpha = 45^\circ$). Za granični slučaj, $q = 0$, koeficijent $(\xi_{II}^S)_S = -1$. Ovi podaci ne treba da začuđuju, ako se prihvate prethodna objašnjenja o mogućnosti da je obračunska izgubljena energija negativna, odnosno da posmatrani deo struje od (II) do (S) primi više energije od glavne struje, nego što se u njemu izgubi.

Da je, za q/Q jednako nuli, $(\xi_{II}^S)_S = -1$ lako je objašnjivo, jer tada u pravoj cevi od (I) do (S) skoro i nema gubitaka, a brzina od (I) do (S) se ne menja, pa je približno ista pijezometarska kota u presecima (I) i (S), a ona se skoro nepromenljiva prenosi i u priključak, gde nema strujanja, pa je:

$$\Pi_{II} = \Pi_S \quad (102-30)$$

a kako je u preseku (II) pijezometarska kota Π_{II} ujedno i energetska ($E_{II} = \Pi_{II}$), prethodno napisana jednačina može se svesti na

$$E_{II} = E_S - \frac{v_S^2}{2g} \quad (102-31)$$

što ukazuje da je

$$E_{izg}^{II-S} = E_{II} - E_S = -\frac{v_S^2}{2g} \quad (102-32)$$

pa je $(\xi_{II}^S)_S = -1$.

Za $q = Q$, tj. kada voda dotiče isključivo iz priključka, koeficijent lokalnog gubitka je otprilike 1, odnosno 0,4 (za $\alpha = 90^\circ$, odnosno za $\alpha = 45^\circ$), a to je približno onoliko koliko iznosi skretanje u kolenu (sl. 102-15).

Iza jednačine (102-29) dato je obećanje da će se kasnije potvrditi njena ispravnost, i to će se sada ispuniti. Pošto se izgubljene energije upisane u navedenu jednačinu dobijaju množenjem odgovarajućeg koeficijenta lokalnog gubitka sa istom brzinskom visinom, sa $v_s^2/2g$, može se nejednačina napisati i sa:

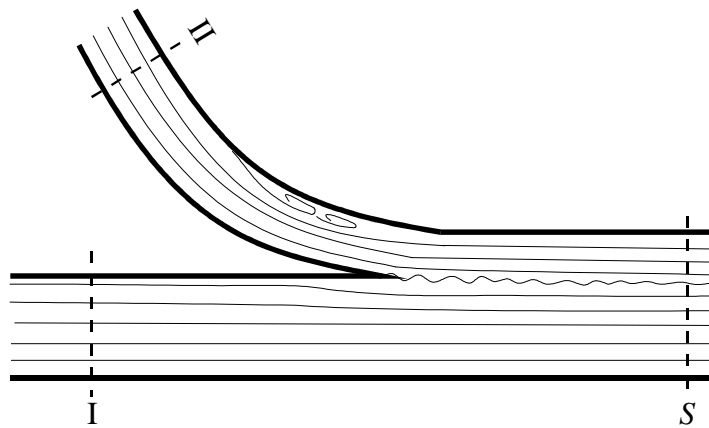
$$(Q - q)(\xi_I^s) + q(\xi_{II}^s) > 0$$

ili

$$\left(1 - \frac{q}{Q}\right) (\xi_I^s) + \frac{q}{Q} (\xi_{II}^s) > 0$$

Na grafikonima na slici 102-17 mogu se za niz vrednosti q/Q , očitati odgovarajuće vrednosti za koeficijente ξ , i sa tim vrednostima treba ući u napisanu nejednačinu i zaključiti se da je ona zadovoljena, a to je trebalo dokazati.

Izgubljena energija se može znatno smanjiti, ako se spajanje oblikuje i kada su preseki cevi podešeni prema proticajima. Slika 102-18 pokazuje kako se to može rešiti u praktičnoj primeni. Pre spajanja može se priključak krivinom skrenuti da se uvede pod manjim uglom u glavnu cev. Na slici 102-16 učinjen je pokušaj da se prikaže odbacivanje mlaza od oštne ivice i obrazovanje vrtložne oblasti iza spajanja cevi. Zaobljavanjem zidova to se znatno ublažava. Približno ista brzina u sve tri cevi poželjna je (pa tako treba podesiti prečnike), jer vrtloženje u spajanju struja utoliko je veće ukoliko je razlika brzina veća. Jasno je

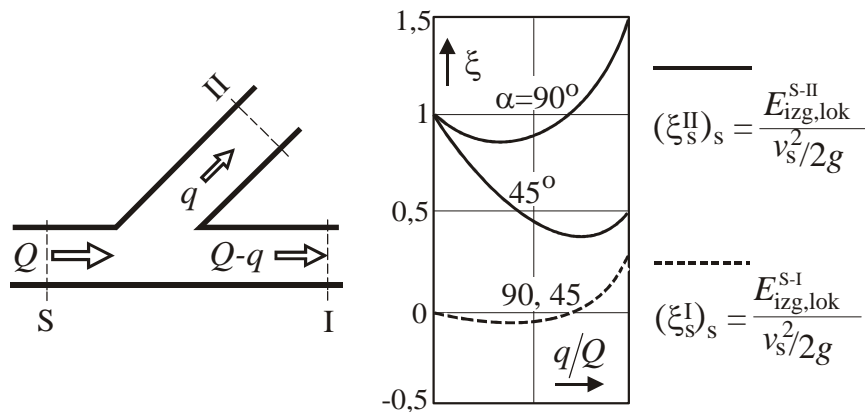


Slika 102–18 Oblikovanje priključivanja cevi (sa istom brzinom u sva tri kraka gubici energije su zanemarljivi)

da se ovo ne može podesiti za sve moguće slučajeve, ako se očekuju različiti odnosi proticaja, ali se može za one koji su najveći, ili najčešći.

* * *

Slika 102–19 pruža uvid u gubitke energije pri odvajanju struje (račvanje, grananje). Kao i na sl. 102–17 koeficijent se obračunava uz brzinsku visinu skupne struje – to je ovde presek pre razdvajanja.



Slika 102–19 Koeficijenti lokalnog gubitka (ξ) pri razdvajanju cevi (isti je prečnik cevi u sva tri kraka)

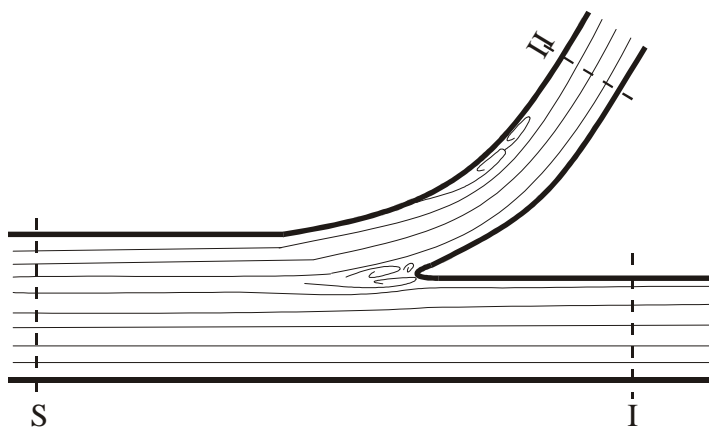
Iz isprekidane linije na grafikonu uviđa se da je gubitak u glavnoj (pravoj) cevi zanemarljiv, izuzevši slučajeve kada veći deo proticaja odlazi u odvojak. Ali, i za $q = Q$, koeficijent $(\xi_S^I)_S$ dostiže svega oko 1/4, a to znači da se pijezometarska kota od (S) do (I) popne za 3/4 od $v_S^2/2g$ – dakle, pretežni deo kinetičke energije se preobrati u potencijalnu.

Sl. 102–19, ali punim linijama, pokazuje koeficijente gubitka $(\xi_S^{II})_S$, tj. za razmatranje struje od zajedničkog toka u priključak. Vidi se da je $(\xi_S^{II})_S = 1$ za $q = 0$ što se može objasniti na isti način kao što je kod spajanja bilo zaključeno da je $(\xi_{II}^S) = -1$ za $q = 0$. Naime, isto je rasuđivanje, pa se dolazi i ovde do jednačina (102–30) i (102–31), ali je sada smer strujanja od (S) prema (II), pa se, umesto (102–32) piše:

$$E_{izg}^{S-II} = E_S - E_{II} = \frac{v^2}{2g}$$

iz čega sledi da je $(\xi_{II}^S) = 1$.

Za $\alpha = 90^\circ$, koeficijent $(\xi_S^{II})_S$ ima vrednost približno jedinici (nešto je malo veći kada se q približi Q). Ovo (vrednost jedinica) znači da je za odvojak izgubljena kinetička energija koju poseduje struja pre odvajanja tj. da treba obezbediti novu kinetičku energiju za odvojak. Za $\alpha = 45^\circ$ prethodno se ne ostvaruje u potpunosti, pa su manji gubici: ako se u odvojak odvađa više od 1/3 ukupnog proticaja, $(\xi_S^{II})_S$ je oko 0,5. Za manje uglove skretanja vrednosti su još niže: oko 0,3 (za $\alpha = 30^\circ$), oko 0,1 (za $\alpha = 15^\circ$). Zanimljivo je primetiti da, za $q = Q$ (ceo proticaj



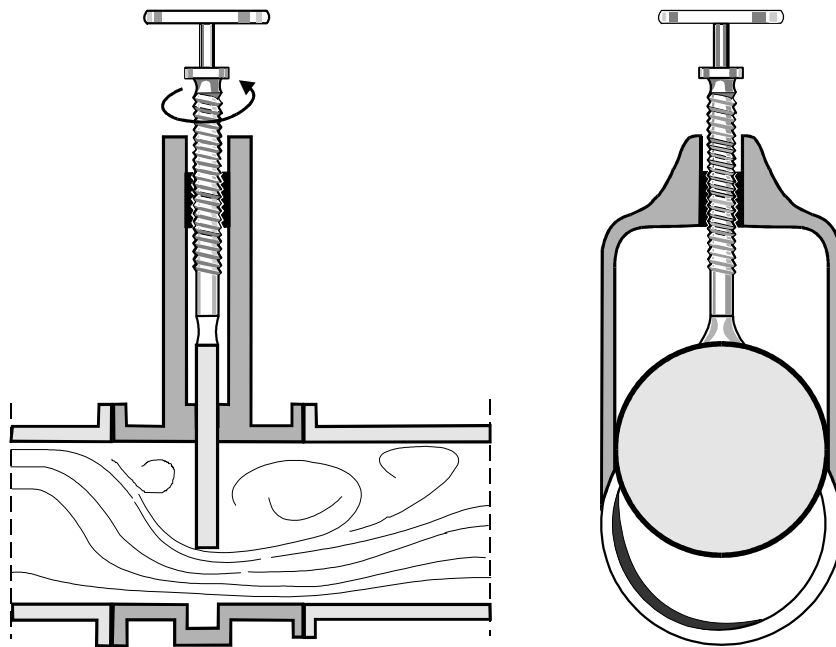
Slika 102–20 Oblikovanje račvanja cevi

dolazi u odvojak), $(\xi_S^{\text{II}})_S$ je otprilike 1,3, odnosno 0,4 (za $\alpha = 90^\circ$, odnosno 45°), a to je približno kao kod kolena (sl. 102–15).

Naglašava se da se sve navedeno odnosi na slučaj da su sve tri cevi (glavna pre i posle odvajanja, i odvojak) istoga prečnika i da su sve ivice oštre (nezaobljene). Manjim uglom skretanja, zaobljavanjem ivica i oblikovanjem spoja, uz podešavanje preseka cevi prema proticajima, može se lokalni gubitak na račvanju svesti na zanemarljiv iznos. Slika 102–20 pokazuje kako se to otprilike u praksi ostvaruje.

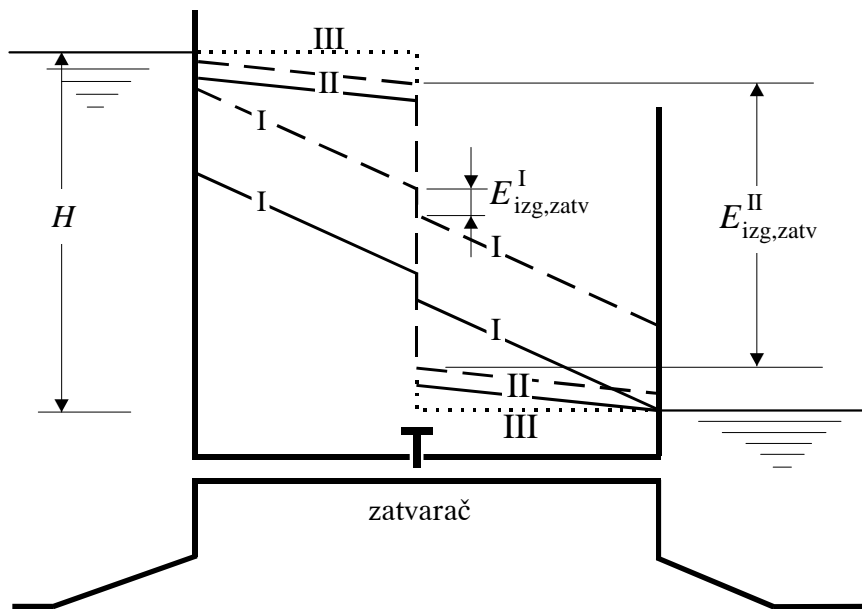
IV ZATVARAČI

Radi regulisanja proticaja u cevi se ugrađuju zatvarači – jedan od mnogobrojnih zatvarača je tzv. „tablasti zatvarač” – slika 102–21. Slobodan otvor za proticanje određuje položaj zatvarača, on se podiže, odnosno spušta na onaj položaj kojim se ostvaruje zahtevani proticaj. Na slici 102–22, sa (I), nacrtane su linije energije i pijezometarska za



Slika 102–21 Tablasti zatvarač

zatvarač potpuno otvoren (I)	} linija energije	-----
zatvarač delimično otvoren (II)		—————
zatvarač potpuno zatvoren (III)	pijezometarska linija



Slika 102–22 Regulisanje proticaja zatvaračem: za istu raspoloživu visinsku razliku H , zavisno od otvorenosti zatvarača, kroz cev teku različiti proticaji – u svakom slučaju nameće se gubitak energije potreban da se ostvari željeni proticaj

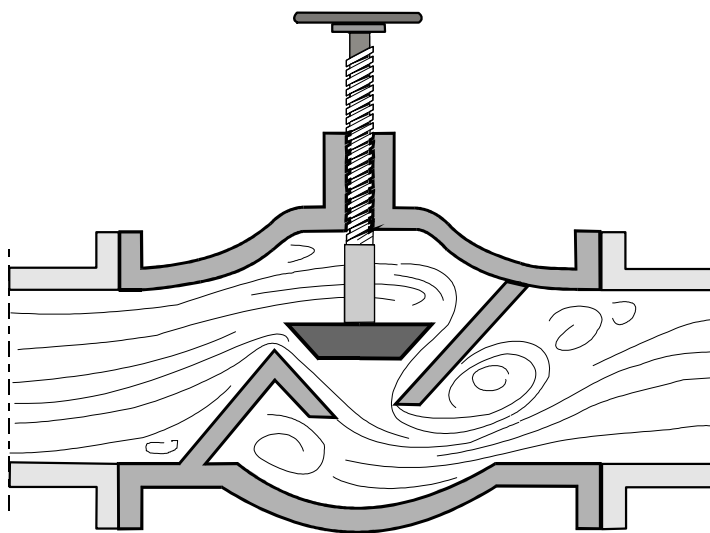
potpuno otvoren zatvarač, pri čemu je izgubljena energija minimalno moguća, a proticaj maksimalno moguć za raspoloživu visinsku razliku H između nivoa u rezervoarima. Na istoj slici, sa (II) prikazane su linije energije i pijezometarska za delimično otvoren zatvarač kojim se ostvaruje izgubljena energija baš onolika koliko zahteva proticaj koji se propušta. I, na kraju, na istoj slici tačkastom linijom prikazana je pijezometarska linija za hidrostatičko stanje pri potpuno zatvorenom zatvaraču.

Gubitak energije, isto kao i kod dijafragme, uglavnom je u proširenju mlaza iza zatvarača i, prema tome, zavisi od brzine u suženom preseku, a za to treba oceniti koeficijent kontrakcije C_A , dok je poznata

površina otvora A_0 za određeni položaj zatvarača – i razume se, i presek cevi A . Koeficijent lokalnog gubitka ξ_{zatv} koji pomnožen sa brzinskom visinom $v^2/2g$ (za brzinu v u cevi) daje izgubljenu energiju, ima vrednosti od bliske nuli (za potpuno otvoren zatvarač) do veoma velikih (isto kao kod dijafragme – vidi sl. 102–11). Kod zatvarača, kao i kod dijafragme (sl. 101–6) treba biti oprezan zbog moguće pojave izrazitih potpritisaka u suženom mlazu.

Sa praktičnog stanovišta najvažnije je da se zna gubitak energije za potpuno otvoren zatvarač, kada teče maksimalni mogući proticaj. Svaki željeni proticaj lako se postiže, pritvaranjem zatvarača. Kod tablastog zatvarača, kako je rečeno, gubitak je zanemarljiv, kada je zatvarač potpuno otvoren – gubitak energije nastaje samo zbog udubljenja po obimu cevi u koje ulazi zatvarač kada se klizanjem pomera. Za potpunu otvorenost može se, sigurnosti radi, računati sa $\xi_{zatv} = 0,1$, što se neće ni dostići.

Prethodni zaključak nameće pomisao da bi svuda trebalo primenjivati tablasti zatvarač, jer zanemarljivo smanjuje propusnu moć cevi, dok zatvarači drugih tipova daju i za potpunu otvorenost znatan gubitak energije. Zatvarač sa sl. 102–23, i njemu slični, za potpunu otvorenost daju ξ_{zatv} između 2 i 5, što je i objašnjivo velikom kontrakcijom



Slika 102–23 Zatvarač – ventil

mlaza, dvostrukim skretanjem struje, i velikim vrtloženjem. Pošto se radi o fabričkim serijskim proizvodima, pre njihove primene, treba pribaviti i podatke o gubicima energije koje oni stvaraju.

Umesno je pitanje: Zašto ne primenjivati svuda tablasti zatvarač? Odgovor nameću praktični razlozi. Kod zatvarača sa sl. 102–23 zaptivanje (potpuno zatvaranje) lako se obezbeđuje, ne postoji mogućnost taloženja materijala koji voda nosi tako da bi sprečili zaptivanje, pomeranje zatvarača nije ometano nikakvim dodirom. Kod tablastog zatvarača teškoće stvara njegovo klizanje, kao i obezbeđenje potpunog zaptivanja, a uz to i mogućnost taloženja u dnu udubljenja na koje zatvarač naleže kada potpuno zatvara. Dakle, izbor zatvarača ne spada u razmišljanja koja proizilaze iz hidrauličkih zakonitosti nego iz praktičnih razloga koja nameće prihvatljivo korišćenje zatvarača.

Prethodna razmatranja dozvoljavaju da se izvedu sledeći zaključci:

1. Zatvarač je lokalni poremećaj sa promenljivim čvrstim granicama strujanja, pa to nameće i promenljivost koeficijenta ξ lokalnog gubitka energije.
2. Za praktično rešenje zadatka merodavno je stanje potpune otvorenosti zatvarača, odgovarajući gubitak energije obezbeđuje maksimalno moguću propusnu moć.
3. Treba obratiti pažnju na to da li pritvoreni zatvarač stvarajući velike lokalne brzine ne stvara nedozvoljene snižene pritiske.

V

UČEŠĆE LOKALNIH GUBITAKA U UKUPNIM GUBICIMA U CEVIMA – ODNOS LOKALNIH GUBITAKA I GUBITAKA USLED TRENJA

U praktičnim razmatranjima lokalne gubitke energije treba ceniti prema njihovom učešću u ukupnom gubitku u cevi. Ako su lokalni gubici maleni u odnosu na gubitke usled trenja, njima ne treba obratiti veliku pažnju. Nasuprot tome, ako oni imaju značajni udeo u ukupnim gubicima, ili su čak od pretežnog uticaja, njima se mora posvetiti i odgovarajuća pažnja. U prvom slučaju račun se svodi na gubitke usled trenja, pa se zadatak uklapa u ono što se nazvalo „dugački objekti”

(a tako je naslovljen Deveti deo knjige), jer je uticaj lokalnih gubitaka beznačajan. U drugom slučaju zadatak se, ubraja u „kratke objekte”, jer se, u prvom redu, razmatra lokalni uticaj, odnosno više lokalnih uticaja, što znači više „kratkih objekata”, a trenje je od manjeg značaja.

Navedeno rasuđivanje može se iskazati na sledeći način: Ili je lokalni gubitak energije malen u odnosu na trenje duž cevi, pa se ne treba mnogo truditi oko njegovog smanjenja, pogodnim oblikovanjem, ili pak, lokalni gubitak ima značajan udeo u ukupnom gubitku energije, pa ga treba svesti na zanemarljivu meru. Iz onoga što je u više navrata napisano i prikazano u ovom poglavlju može se steći utisak kako se oblikovanjem čvrstih granica strujanja može lokalni gubitak znatno umanjiti. Primera radi, gubici usled naglog proširenja, ili suženja cevi, su značajni, a mogu se postepenim proširivanjem, ili sužavanjem, dovesti do toga da se računa samo gubitak usled trenja, dok se ne dodaje dodatni gubitak usled lokalne promene, jer je zanemarljiv.

Odnos između gubitaka energije zbog lokalnih promena i gubitka usled trenja ukazuje šta u datom primeru preovlađuje. Taj odnos se piše sa:

$$\psi = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{\lambda \frac{L}{D}} = \frac{\sum_1^n \xi_i}{\lambda \frac{L}{D}} \quad (102-33)$$

Ovo je napisano na osnovu toga što brojitelj, pomnožen sa brzinskom visinom $v^2/2g$, daje ukupni gubitak energije na svim lokalnim promenama, što se uviđa iz (101-1), dok imenitelj, takođe pomnožen sa $v^2/2g$, shodno (91-24), daje gubitak usled trenja.

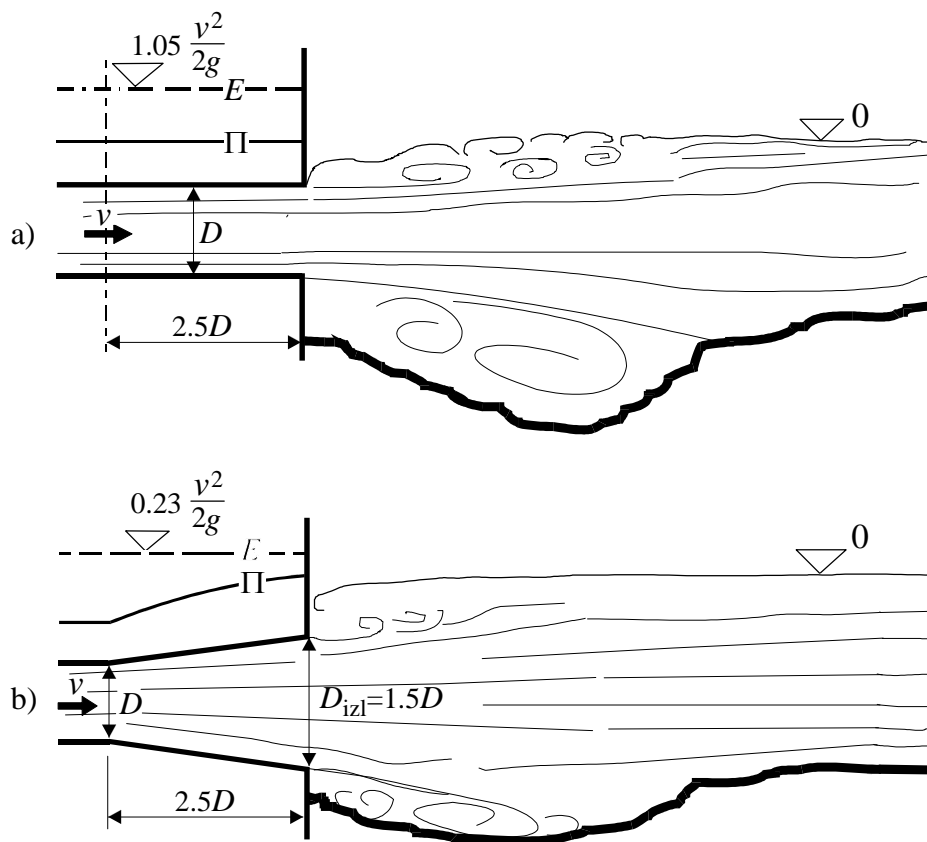
Korišćenje odnosa (102-33) pokazaće se na dva primera.

U vodovodnoj praksi često se računaju samo gubici usled trenja, pa se na to doda izvestan procenat od toga da bi se podmirili lokalni gubici – obično se doda 10%. Račun u ovom smislu je opravdan ako odnos ψ , napisan sa (102-33), ne prelazi 0,1. Ta vrednost neće biti pređena ako zbir koeficijenta lokalnih gubitaka $\sum \xi_i$ ne pređe 2 na dužini $L = 1000D$, i ako koeficijent trenja ne bude manji od 0,02.

Drugi način obuhvatanja lokalnih gubitaka je obračunsko povećanje hrapavosti: računa se sa većom hrapavošću od one koju poseduje cev, pa se dobijaju veći gubici od onih koji stvara samo trenje, i taj višak onda podmiruje lokalne gubitke. O tome je bilo reči pri razmatranju hrapavosti na kraju Odeljka I Poglavlja 99.

Bilo bi nesmotreno da se iz prethodnoga zaključi da lokalnim gubicima uopšte ne treba obraćati pažnju, jer ima primera gde su veoma uticajni – kao u sledećem primeru.

Na sl. 102–24 prikazan je izlaz iz tunela kružnog preseka i pokazaće se da je razmišljanje o oblikovanju izlaza veoma umesno. Završni deo tunela izvešće se u postepenom proširivanju sa prečnika D na izlazni prečnik $D_{izl} (= 1,5D)$ – na pomenutoj slici dato pod „b”, umesto rešenja bez proširivanja – ista slika pod „a”. Proširivanjem izlazni presek postaje $1,5^2$ veći od preseka tunela, izlazna brzina je onda $v/1,5^2$, gde je v brzina u tunelu, pa je $v_{izl}^2/2g$ (a toliko se gubi na izlazu) jednako $v^2/2g$



Slika 102–24 Proširivanjem tunela na izlazu (b) smanjuje se izgubljena energija, u odnosu na (a) za $0,82v^2/2g$ – znatno se smanjuje izlazna kinetička energija, pa se erozija dna i uznemiravanje nivoa znatno ublaženi

pomnoženo sa $1,5^{-4}$ tj. izlazni gubitak iznosi $0,20v^2/2g$, pa je koeficijent gubitka (računat uz $v^2/2g$) $\xi_{izl} = 0,20$. Dakle gubitak je sveden na petinu od gubitka za slučaj bez proširivanja, gubitak se smanjuje za $0,8v^2/2g$.

U samom proširivanju gubitak će se svesti samo na trenje ako se u strujanju ne obrazuje vrtložna oblast. To će se postići oblikovanjem prema prikazanom na slici 102-4b, tj. proširenjem izvedenim sa $\text{tg } \alpha = 0,1$. Ispunjavanje ovoga uslova zahteva da dužina proširivanja bude $L = 2,5D$, a toliko je i nacrtano na sl. 102-24b.

Treba još dodati da je i trenje manje u proširivanju nego u istoj dužini tunela prečnika D . Za slučaj „a” na sl. 102-24, gubitak na trenje, i na dužini $L = 2,5D$ i sa koeficijentom trenja $\lambda = 0,02$ iznosi:

$$E_{izg,tr}(a) = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} = 0,05 \frac{v^2}{2g}$$

Trenje u proširenju, uz korišćenje koeficijenta ψ u (102-6) iznosi:

$$E_{izg,tr}(b) = 0,02v^2/2g$$

jer je iza izraza (102-6) navedeno da je $\psi = 0,39$ za proširenje sa prečnika D_I na prečnik $D_{II} = 1,5D_I$

Smanjenje izgubljene energije usled trenja ako se primeni rešenje prema (b), umesto (a) nije značajno – svega $0,03v^2/2g$. Stoga se mogla primeniti i približna procena trenja, prema (102-5), a mogao se čak zanemariti u uticaj smanjenja trenja.

Zaključuje se da se prilikom proširenja izgubljena energija smanjuje za $0,83v^2/2g$ ($0,80 + 0,03 = 0,83$) – vidi sl. 102-24, a to je značajno, iznosi skoro $v^2/2g$, a toliko se na trenje gubi na dužini $L = 50D$ (za $\lambda = 0,02$, a kod tunelskih prečnika treba očekivati i manju vrednost za λ). Ako je tunel i nekoliko puta duži od $L = 50D$, neće smanjivanje energije na izlazu biti beznačajno. Treba dodati da se oblikovanjem može znatno smanjiti i gubitak na ulazu, sa $0,5v^2/2g$ (za neoblikovan ulaz) na $0,2v^2/2g$, pa i manje (za oblikovan) – vidi sl. 102-8.

Šta praktično znači smanjenje izgubljene energije? To znači za toliko smanjenje i visinske razlike nivoa ispred i iza tunela za isti proticaj. Ili, ako se zadrži ista visinska razlika, dobiće se veći proticaj. A, ako se zadrži i ista visinska razlika, i isti proticaj, biće manji prečnik tunela. Hidraulički računi pokazaće koliko iznose te prednosti.

Uz prethodno treba primetiti – i naglasiti – da se oblikovanje ne sme shvatiti samo kao smanjenje izgubljene energije, nego treba ceniti i njegovo uticanje na posledice koje strujanje izaziva na objekat ili njegovo okruženje. Na primeru izlaza iz tunela, bilo u bazen veće zapremine, ili bočno u rečni tok, celokupna kinetička energija se mora izgubiti po ulivanju tunela. Za oblikovani izlaz, izgradnjom završnog dela tunela u proširivanju, izlazna kinetička energija je 5 puta manja (u odnosu na slučaj gde nema proširivanja), pa će se struja koja prodire iz tunela, lakše i na manjem prostoru smiriti, uz manje uznemiravanje nivoa u bazenu, odnosno u reci, manja je i erozija dna (manje su mogućnosti potkopanja dna iza tunela), a ako se tunel izliva u reku manje se ometa njen tok (normalan na pravac izlivanja). Namera je bila da se, sem smanjivanja izgubljene energije, prikaže opisano uticanje proširenja izlaza tunela na zbivanje iza tunela.

* * *

U praktičnim razmatranjima za izražavanje uticaja lokalnog gubitka energije služi „ekvivalentna dužina” cevi (označiće se sa L_e). Naime, dodatni lokalni gubitak po iznosu jednak je gubitku usled trenja na dužini L_e . Ovo znači da je:

$$\xi = \lambda \frac{L_e}{D} \quad (102-34)$$

Strane ove jednačine pomnožene sa $v^2/2g$ daju lokalni gubitak, odnosno odgovarajući gubitak usled trenja (na dužini L_e).

Prema tome, umesto da se računaju lokalni gubici, računa se samo trenje, ali uz formalno produženje cevi za L_e .

Za učinak više lokalnih gubitaka na osnovu (102-34) piše se:

$$\Sigma \xi_i = \lambda \Sigma L_e / D \quad (102-35)$$

pa se upoređenjem ovoga izraza i izraza (102-33) dobija

$$\psi = \frac{\Sigma L_e}{L} \quad (102-36)$$

tj. odnos između zbira ekvivalentnih dužina i stvarne dužine cevi čini odnos između zbira lokalnih gubitaka i gubitaka usled trenja. Razumljivo je da je produženje cevi formalno (da bi se uključili i lokalni gubici).

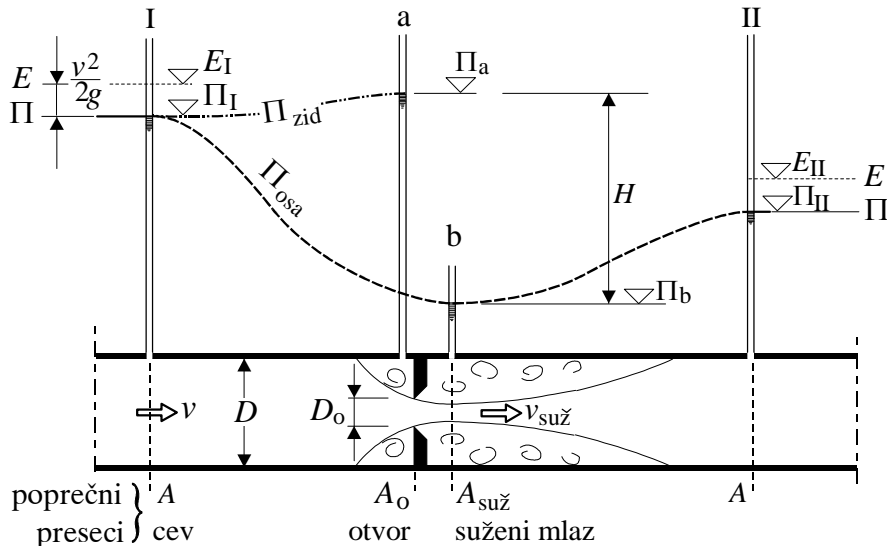
PRIMEDBA UZ POGLAVLJE 102

U celom ovom, sto drugom poglavlju, vrednosti za koeficijente lokalnog gubitka energije, koje su ispisane, ili prikazane grafikonima, odnose se na tzv. „kvadratnu zakonitost otpora”, po kojoj na te koeficijente ne utiče viskoznost, odnosno u izrazima se ne pojavljuje *Re*-broj, nego samo geometrijski opis lokalne promene. Izuzetak je samo učinjen u razmatranju gubitka u krivini („Primedbe” u Odeljku II), gde se pominje *Re*-broj. Svakako da se svaku lokalnu promenu, a za manje proticaje (za manje vrednosti *Re*-broja) mora ispoljiti zavisnost od toga broja, što je načelno objašnjeno u Odeljku II Poglavlja 101. Međutim, u objektima u hidrotehničkoj praksi za projekat objekta merodavni su najveće očekivani proticaji, a njihovo tečenje će ući u kvadratnu zakonitost, jer je turbulencija dovoljno razvijena da se to ostvari. Za malene proticaje, koji su i manje zanimljivi, gubici nisu značajni.

ODREĐIVANJE PROTICAJA MERENJEM JEDNE PIJEZOMETARSKJE RAZLIKE

I DIJAFRAGMA

Dijafragma je, u Poglavlju 101, uzeta kao primer za razjašnjenje pojma „lokalnog gubitka energije”, a narednim izlaganjima će se ona razmotriti kao merni objekat. Na njoj se meri jedna visinska razlika – to je pijeziometarska razlika ($\Pi_a - \Pi_b$ na sl. 103–1), tj. razlika pijeziometarskih kota po obodu cevi neposredno ispred i iza dijafragme – i time je određen proticaj, jer postoji utvrđena jednoznačna veza između te razlike i proticaja. Treba primetiti da se mere pijeziometarske kote na mestima gde one ne važe za ceo poprečni presek cevi, nego samo za



Slika 103–1 Dijafragma – meri se samo jedna visina (pijeziometarska razlika H) i time je određen proticaj Q , jer je poznata veza $Q = Q(H)$

obim (gde su piježometarski priključci), ali to nije nikakva zamerka. Naprotiv, to je prednost, što se može zaključiti na osnovu sledećeg objašnjenja.

Merena razlika određuje se eksperimentalno za određeni tip dijafragme, pa je onda merodavno samo obezbeđenje istih graničnih uslova na svim dijafragmama koje će se primenjivati u praksi na osnovu eksperimentalno utvrđenih zakonitosti. Ovo je olakšano baš uzimanjem mernih podataka uz samu dijafragmu, pa piježometarski priključci čine celinu sa njom, zajedno se izrađuju. Udaljeniji preseki (I) i (II), gde je strujanje pravolinijsko i paralelno, ne bi bili pogodni da se njihova piježometarska razlika $\Pi_I - \Pi_{II}$ uzme kao merena veličina, jer se tu neminovno upliće trenje, što bi stvaralo teškoće, koje su baš izbegnute uzimanjem piježometarske razlike $\Pi_a - \Pi_b$. Kod procene izgubljene energije u Poglavlju 101 (sl. 101–1) morali su se uzeti preseki (I) i (II), jer oni ispunjavaju uslov o pravolinijskom i paralelnom strujanju. Uz ovo treba dodati da procena izgubljene energije dozvoljava izvesnu približnost, kojoj ne smeta neminovno uplitanje trenja, dok merenje treba da bude znatno tačnije. Treba primetiti da je merena razlika $H = \Pi_a - \Pi_b$ veća od $E_{izg} = E_I - E_{II}$ (vidi sliku 103–1), i to je pogodno, jer merenju je pogodnije da se mere veće visine (manja je onda moguća relativna greška), a da se pri tome gubi manje visine.

Jednačina energije za presek (I) ispred dijafragme u koje je strujanje još neporemećeno dijafragmom i za presek (suž) u suženom mlazu iza dijafragme (to je minimalni presek) glasi:

$$E_I - E_{suž} = \Pi_I + \frac{v_I^2}{2g} - \left(\Pi_{suž} + \frac{v_{suž}^2}{2g} \right) = \varphi \frac{v_{suž}^2}{2g} \quad (103-1)$$

Ovaj gubitak energije je već napisan sa prvim delom desne strane jednačine (102–15), a sa φ je označen koeficijent gubitka samo do suženog preseka (a taj deo struje se ovde i razmatra).

Pretpostaviće se da se piježometarskom kotom Π_a meri zaustavna piježometarska kota tj. da je:

$$\Pi_a = \Pi_I + \frac{v_I^2}{2g} = E_I \quad (103-2)$$

Pretpostaviće se da je:

$$\Pi_b = \Pi_{suž} \quad (103-3)$$

Za objašnjenje za navedene dve pretpostavke može poslužiti razmatranje pijezometarskih kota kod naglog suženja koje prati prikazano na sl. 102–5. Uvrštavanjem iskazanog sa (103–2) i (103–3) u (103–1) dobija se:

$$(\varphi + 1) \frac{v_{\text{suž}}^2}{2g} = \Pi_a - \Pi_b = H \quad (103-4)$$

gde je H = merena visinska razlika. Iz prethodne jednačine sledi:

$$v_{\text{suž}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \varphi}} \sqrt{2gH} = C_v \sqrt{2gH} \quad (103-5)$$

Radi kraćeg pisanja ovde je uveden

$$\text{koeficijent brzine } C_v = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi}} \quad (103-6)$$

To je jedan od uobičajenih koeficijenata koji se često koristi pri rešavanju praktičnih zadataka, a on izražava odnos između stvarne brzine i brzine za idealan fluid, u kome nema gubitka energije (gde je $\varphi = 0$).

Proticaj je jednak proizvodu brzine i preseka mlaza:

$$Q = A_{\text{suž}} v_{\text{suž}} = A_0 C_A v_{\text{suž}} = A_0 C_A C_v \sqrt{2gH} \quad (103-7)$$

Ovde je upisan i „koeficijent kontrakcije” (skupljanja mlaza) C_A , koji je uveden prilikom razmatranja naglog suženja, gde je napisan sa (102–7), a ovde je:

$$C_A = \frac{A_{\text{suž}}}{A_0} \quad (103-8)$$

Uvodi se i:

$$\text{koeficijent proticaja } C_Q = C_A C_v \quad (103-9)$$

koji udružuje smanjenje preseka i smanjenje brzine, jer oba uticaja smanjuju proticaj. Uvođenjem C_Q u jednačinu (103–7), ona se piše sa:

$$Q = C_Q A_0 \sqrt{2gH} \quad (103-10)$$

Ta jednačina povezuje ono što se meri (to je pijezometarska razlika H) sa onim što je time određeno (to je proticaj Q). Površina otvora

dijafragme A_0 je poznata, pa C_Q potpuno određuje zakonitost za dijafragmu. Treba primetiti da se C_Q veoma lako eksperimentalno određuje, jer je C_Q određeno za poznato A_0 i izmereno H i Q (proticaj se meri na drugi način prilikom utvrđivanja zakonitosti za dijafragmu). Uz ovo valja naglasiti da bi koeficijente C_A i C_v , svaki pojedinačno, bilo veoma teško odrediti, dok se – kako je navedeno – njihov proizvod C_Q veoma lako određuje.

U ranijim razmatranjima, u Poglavlju 102, navedeno je da se koeficijent kontrakcije C_A može izraziti obrascem (102–11), dok je φ izražen sa (102–12). Poznavanjem vrednosti za φ , dobija se, primenom (103–6) i C_v . Na kraju množenjem C_v sa C_A dobija se C_Q . Opisani račun daje vrednost za C_Q u zavisnosti od odnosa A_0/A (odnos površine otvora dijafragme i preseka cevi) upisane u tablicu:

A_0/A	0,2	0,4	0,6	0,8
C_Q	0,62	0,66	0,74	0,85

Eksperimentalni rezultati su saglasni sa ovim računom. Međutim, treba naglasiti da se to odnosi na oblast kvadratne zakonitosti (za istu dijafragmu H srazmerno sa Q^2). Utvrđivanje granica važenja kvadratne zakonitosti biće, između ostalog, predmet narednih izlaganja.

DODATAK

Određivanje koeficijenta proticaja C_Q u jednačini (103–10) olakšaće primena dimenzionalne analize. Merena visinska razlika H ima dimenziju dužine, iako izražava smanjenje energije – načelno je isto kao sa izgubljenom energijom E_{izg} . Primena dimenzionalne analize na E_{izg} dovela je do izraza (101–4), gde dimenzionalna veličina gE_{izg}/v^2 zavisi od Re i Ko . Umesto E_{izg} sada se posmatra H , a v se može zameniti sa Q/A_0 (čime se ne remeti dimenzionalni sklad), pa se po ugledu na (101–4) piše:

$$\frac{gH}{(Q/A_0)^2} = f(Re, Ko) \quad (103-11)$$

Prema jednačini (103–10) leva strana iznosi recipročnu vrednost od $2C_Q^2$, a to znači da se ostvaruje zavisnost:

$$C_Q = C_Q(Re, Ko) \quad (103-12)$$

Granični uslovi podesiće se tako da u njihovo bezdimenzionalno određenje ulazi samo D_0/D tj. odnos prečnika otvora dijafragme i prečnika cevi pa se može napisati:

$$C_Q = C_Q(Re, D_0/D) \quad (103-13)$$

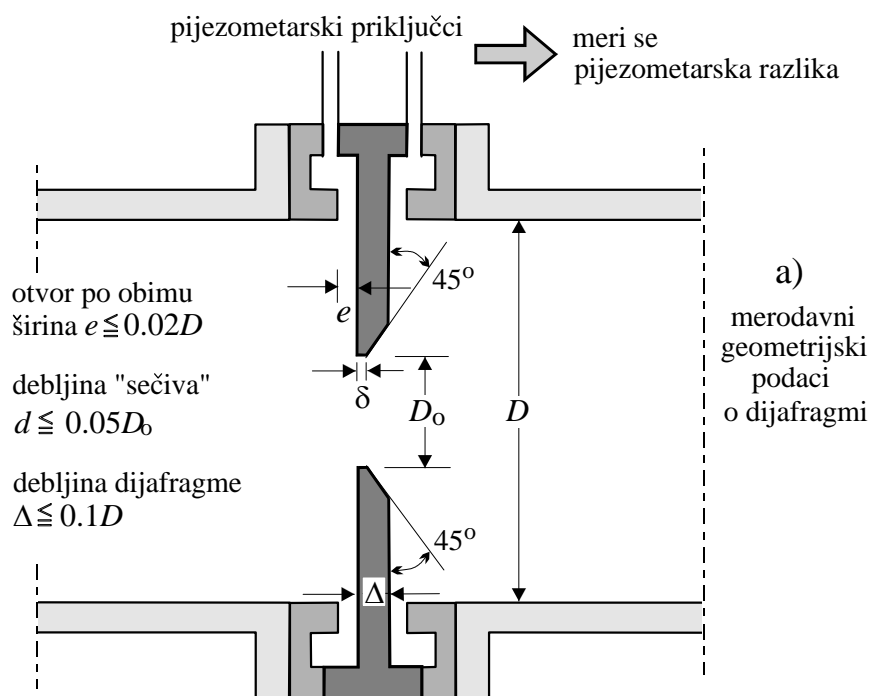
Umesto odnosa prečnika mogu se uzeti i odnosi površina tj. A_0/A jer je A_0/A jednako $(D_0/D)^2$.

Ovako uprošteni granični uslovi mogu se i obezbediti ako se postupi kako se nalaze u nastavku.

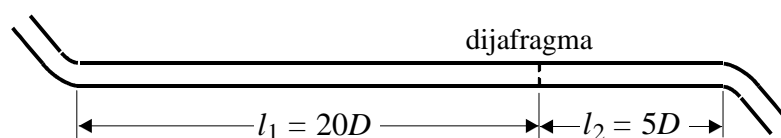
Dijafragma mora da bude dovoljno tanka: njena debljina Δ ne treba da prelazi $0,1D$ (vidi sl. 103-2a). Sem toga dijafragma mora da bude oštroična, a to znači da prednja strana njenoga otvora „kao sečivo odseca mlaz” i tako se mlaz oblikuje bez uticaja debljine dijafragme, jer se mlaz odmah „odlepi” od dijafragme, razume se, ako je ona, dovoljno tanka (što je malo pre i uslovljeno). Debljina „sečiva” δ , da bi ispunila navedenu ulogu ne treba da prelazi $0,02D_0$ (i ovo je prikazano na sl. 103-2a).

Pošto se meri razlika pijezometarskih kota, mora se tačno usloviti gde priključiti pijezometarske cevčice: one se priključuju na dva odvojena prstenasta prostora (obrazovana neposredno ispred i iza dijafragme), koji su u vezi sa cevi kroz otvor po celom obimu cevi – taj otvor je malene širine (na sl. 103-2 ta širina je označena sa e), a dobijena je tako što cev ne naleže na dijafragmu, nego se ostavljaju ti otvori. Na ovaj način moguća sitnija nepodudarnost pijezometarskog stanja po jednom obimu ne mogu uticati na rezultat merenja, jer ono što se meri, to je neka vrsta preseka za obim, a to je baš podatak koga treba uzeti. Uz malene širine otvora strujanje se ne menja zbog uticaja širine otvora, koja onda ne ulazi u opis graničnih uslova, dok bi se za veće širine otvora morala ona dodati (a uz nju i debljina zida cevi), a to bi nepotrebno proširivalo uslove zadatka.

Merenjem se određuje kroz vreme osrednjena vrednost za H (tačnije trebalo bi pisati \bar{H} , ali to nije nužno svuda iskazivati, jer se kod svih praktičnih izlaganja o strujama, ako se posebno ne naglasi drukčije, podrazumeva da se radi o osrednjenim vrednostima). Može se meriti pijezometarska kota neposredno u pijezometarskoj cevčici (u obe) ili se meri razlika pritisaka – tako je i prikazano na sl. 103-3. U prvom slučaju u cevčicama može da dođe do fluktuacija nivoa, ali znatno ublaženijim

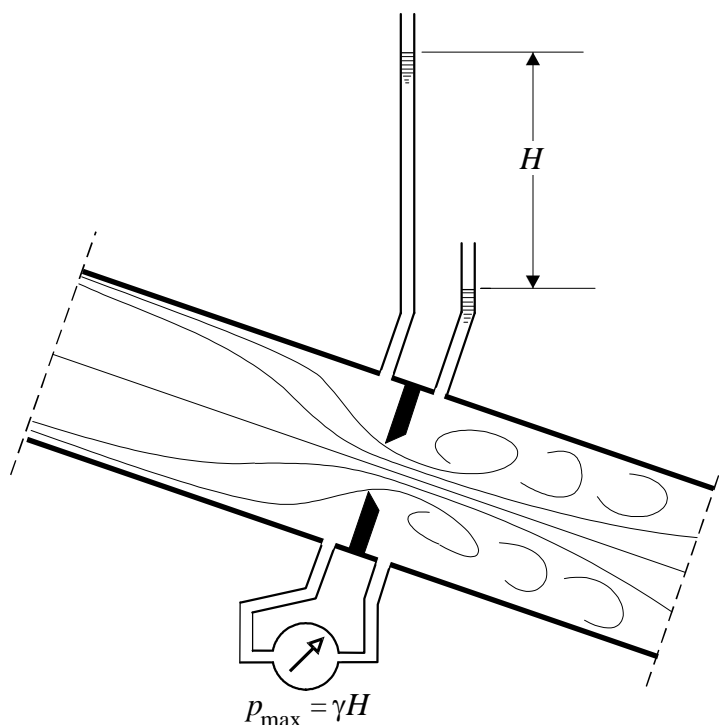


b) zahtevana pravolinijska dužina cevi ispred i iza dijafragme



Slika 103–2 Granični uslovi za dijafragmu

u odnosu na fluktuacije pritiska na obimu cevi, jer umirujuće deluje masa tečnosti u prstenu i pjezometarskoj cevi, a prigušivanjem pjezometarske cevi može se postići da je nivo smiren na osrednjennoj vrednosti. Ako se primeni manometar za merenje pritiska, on će prikazivati osrednjenu vrednost, jer obično ne može tako brzo prihvatati promenu pritiska da bi se izrazile fluktuacije pritiska. Na slici 103–3 namerno je cev koso položena da bi se naglasilo da se dijafragma može ugraditi u cev položenu u bilo kome nagibu. Tako se i cev na sl. 103–1 mogla položiti u proizvoljnom nagibu.



Slika 103–3 Određivanje pijezometarske razlike H manometrom

Površina dijafragme je glatka pa njena hrapavost zanemarljivo utiče na strujanje kroz dijafragmu. Hrapavost uopšte ne utiče na mesto odvajanja mlaza od oštre ivice dijafragme. Treba se podsetiti da je kod krivine (Poglavlje 102, Odeljak II) rečeno da hrapavost utiče na mesto odvajanja mlaza, jer to mesto tamo nije predodređeno, dok je dijafragma baš ubedljiv primer gde je mesto odvajanja jasno određeno.

Pošto su se prethodnim zahtevima granični uslovi na samoj dijafragmi sveli samo na odnos prečnika otvora dijafragme i prečnika cevi, ostaje još da se utvrdi da li raspored dolaznih brzina utiče na zakonitost za dijafragmu. U opštim razmatranjima o lokalnim poremećajima (Poglavlje 101), iza funkcije (101–5) objašnjeno je da je ovaj uticaj zanemarljiv ako je u graničnom preseku za posmatrano lokalno područje raspored brzina isti kao u pravolinijskoj cevi konstantnog prečnika, upravo ako na taj raspored ne utiče nikakav lokalni poremećaj. To će se obezbediti ako ispred i iza dijafragme na izvesnim dužinama bude

prava cev, tako da se uticaj prethodnog lokalnog poremećaja smiri pre nego što počne uticaj dijafragme, odnosno da se uticaj iza dijafragme ne preklopi sa uticajem nizvodnog lokalnog poremećaja.

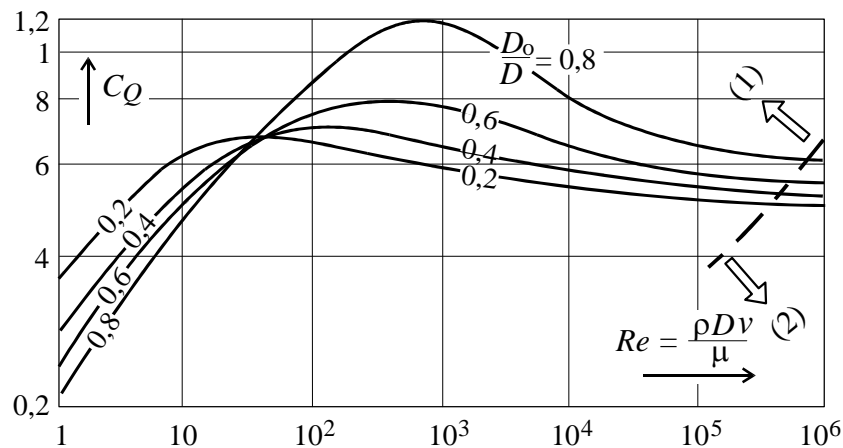
Potrebna dužina l_1 prave cevi ispred dijafragme (vidi sl. 103–2b) zavisi od toga kakav je lokalni poremećaj ispred dijafragme, da li on jače ili slabije poremeti strujanje. Veća dužina treba da bude ako je ispred dijafragme zatvarač koji znatno uznemiri strujanje, ili koleno sa velikim uglom skretanja, ili krivina sa malenim radijusom zakrivljenja, a velikim skretanjem, ili čak dvostruko ili trostruko skretanje, ili neoblikovana račva itd. Manja dužina treba da bude ako je poremećaj koji prethodi dijafragmi slabije izražen – na primer, postepeno suženje ili proširenje, ili neka druga promena oblikovana tako da što manje uznemiri strujanje. Pored toga, potrebna dužina l_1 prave cevi ispred dijafragme treba da bude manja ako je suženje dijafragmom izrazitije (manja je vrednost odnosa D_0/D), jer je onda brzina ispred dijafragme manja, u odnosu na brzinu mlaza koji prodire kroz otvor dijafragme.

Navedene okolnosti ne mogu dovesti do jedinstvene preporuke za dužinu l_1 prave cevi ispred dijafragme, jer se ne radi o istim uslovima za sve primere. Nigde se ne preporučuje da l_1 bude manje od $10D$, a većina preporuka se svodi na l_1 između $10D$ i $20D$. U želji za što većom tačnošću, i ako je ispred dijafragme lokalni poremećaj sposoban za izrazito uznemirene struje, nalaze se preporuke i da se l_1 uzima i do $40D$, što praktičari smatraju preteranim. Iza dijafragme se zahteva da prava dužina cevi bude $l_2 = 5D$. Svakako da je prihvatljiv savet da se dijafragma postavi tamo gde je znatna dužina prave cevi, uz napomenu da treba omogućiti da ispred bude što veća dužina, a iz nje barem $l_2 = 5D$.

Ako se zadovolje svi navedeni granični uslovi, tada se ostvaruje zavisnost (103–13) čije eksperimentalno određenje pokazuje sl. 103–4.

Iz navedene slike zaključuje se da svaka od dijafragmi iznad neke od vrednosti Re -broja ulazi u kvadratnu zakonitost (sličnost samo za inercijalne uticaje) – to je oblast (2) na slici. Za tu oblast otpada zavisnost od Re -broja, jer je turbulencija toliko razvijena da je uticaj viskoznosti zanemarljiv, pa se zavisnost (103–12) svodi na:

$$C_Q = C_Q(D_0/D) \quad (103-14)$$



Slika 103–4 Koeffcijent proticaja C_Q iz jednačine (103–10) za dijafragmu prema slici 103–2 (D_0 = prečnik otvora dijafragme, D = prečnik cevi, Re = Rejnoldsov broj za presek cevi). U oblasti (2), za određenu vrednost D_0/D , koeffcijent $C_Q = \text{const}$

Smanjivanjem Re -broja ulazi se u oblast (1) na sl. 103–4, gde se ostvaruje potpuna zavisnost (103–12) i tu treba zapaziti da se napuštanjem oblasti (2), smanjivanjem Re -broja, ulazi u jedno područje gde su vrednosti za C_Q veće od vrednosti iz oblasti (2) što se objašnjava činjenicom da slabije razvijena turbulencija uslovljava manje izrazito skupljanje mlaza (u odnosu na otvor dijafragme) tj. veću vrednost koeffcijenta kontrakcije C_A , što dovodi do veće vrednosti koeffcijenta proticaja C_Q , što se vidi iz izraza (103–9), pod pretpostavkom da je koeffcijent brzine C_v slabo uticajan.

Međutim, daljnjim smanjenjem Re -broja viskoznost deluje sve uticajnije, povećava unutrašnje trenje u strujanju, pa se značajno umanjuje koeffcijent brzine C_v i odatle opadanje koeffcijenta C_Q sa opadanjem Re -broja.

Ovo tumačenje može potpomoći i za objašnjenje zašto grafički prikaz koeffcijenta lokalnog gubitka energije ξ izgleda kako je nacrtano na slici 101–5. Naime, većem lokalnom gubitku energije (većoj vrednosti za ξ) odgovara manja propusna moć, pa i manja vrednost za C_Q – to se zaista i ostvaruje, a može se zaključiti upoređivanjem slika 101–5 i 103–4.

Skreće se pažnja da se za $D_0/D = 0,8$ dobija maksimalna vrednost C_Q jednaka otprilike 1,2, što na prvi pogled izgleda nemoguće, jer je $C_Q = C_v C_A$, a svaki od navedena dva koeficijenta (C_v, C_A) treba da bude manji od jedinice, jer je brzina za realan fluid manja od one za idealni (dakle, $C_v < 1$), a koeficijent kontrakcije C_A je, po prirodi svojoj, manji od jedinice.

Stoga se mora objasniti kako se onda pojavljuje, istina u retkim slučajevima, da je $C_Q > 1$. Objašnjenje je u činjenici da se ne ostvaruju pretpostavke izražene sa (103–2) i (103–3) koje su dovele do jednačine za dijafragmu, po kojoj se sračunao koeficijent C_Q , za merene podatke za proticaj Q i visinsku razliku H . Ta razlika je pijezometarska razlika $\Pi_a - \Pi_b$. Ostvaruje se kota Π_a niža od one koju daje pretpostavka napisana sa (103–2), a kota Π_b viša od one koju daje pretpostavka napisana sa (103–3) – odatle manja izmerena razlika H od one koju daju navedene pretpostavke. Ako je izmerena razlika manja od pretpostavljene, to se mora popraviti (naknaditi) povećanjem koeficijenta C_Q .

Ovo objašnjenje nije dovoljno, jer ono postavlja dopunsko pitanje: Zašto navedene izmerene pijezometarske kote odstupaju od pretpostavljenih?

Izrazom (103–2) napisano je da je kota Π_a viša od kote Π_I za $v_I^2/2g$. Pijezometarska kota Π_I i brzina v_I se odnose na presek (I) ispred dijafragme gde se još ne oseća njen uticaj. Ovo bi bilo tačno ako bi se zaustavljala brzina v_I , a međutim, zaustavlja se deo struje gde je brzina manja od v_I , i odatle je ostvarena kota Π_a niža od pretpostavljene. Kada je turbulencija slabo razvijena raspored brzina je neravnomerniji, pa je navedeno odstupanje pretpostavljene i ostvarene kote izrazitije, a to znači kod manjih vrednosti Re -brojeva. Pošto je u računanju $v_I^2/2g$ poreklo navedenog odstupanja, ono će biti izrazitije ako je odnos v_I^2 prema H veći, a to će biti ako je sužavanje dijafragme slabo izraženo (odnos D_0/D blizak jedinici). Ovakva objašnjenja su u skladu sa onim što prikazuje sl. 103–4, jer C_Q prelazi jedinicu samo za $D_0/D = 0,8$, i za niže vrednosti Re broja.

Pijezometarska merna kota iza dijafragme Π_b , izrazom (103–3) je izjednačena sa $\Pi_{suž}$, što je objašnjeno na osnovu razmatranja kod naglog sužavanja, zakrivljenošću u strujanja po izlasku u suženi presek (ili po izlasku iz dijafragme), pa je kota na zidu Π_b niža od one u

osovini mlaza, pa se približava $\Pi_{\text{suž}}$. Kod slabijeg skupljanja mlaza, a to je, kako je rečeno pri slabije razvijenoj turbulenciji, ovo zakrivljenje je blaže pa je kota Π_b nešto viša od $\Pi_{\text{suž}}$.

Treba naglasiti da je vrednost koeficijenta C_Q obračunska vrednost. Ako se sa njom računa u propisanom obrascu (103–10), dobija se dobar rezultat, ali to ne mora da znači da će on u svim slučajevima predstavljati u fizičkom smislu ono što bi trebalo. On u ponekim slučajevima to i ne predstavlja, jer se ne ostvaruju pretpostavke koje su dovele do obrasca koji se primenjuje, a to se ispoljilo u prethodnim objašnjenjima.

Za oblast (2) iz sl. 103–4, i za deo oblasti (1) uz oblast (2), a to je područje gde se u praksi dijafragma i primenjuje, preglednije je, na sl. 103–5, prikazana zavisnost C_Q od D_0/D i Re .

Napominje se da su za oblast (2), gde vlada kvadratna zakonitost (neuticanje viskoznosti, jer je turbulencija dovoljno razvijena da se kvadratna zakonitost ostvari) vrednost za C_Q otprilike iste kao u tablici napisanoj iza jednačine (103–10), što potvrđuje ispravnost procene koeficijenata C_A i C_v na osnovu kojih je sačinjena tablica, a to znači i ispravnost postupaka koji su do njih doveli u Poglavlju 102.

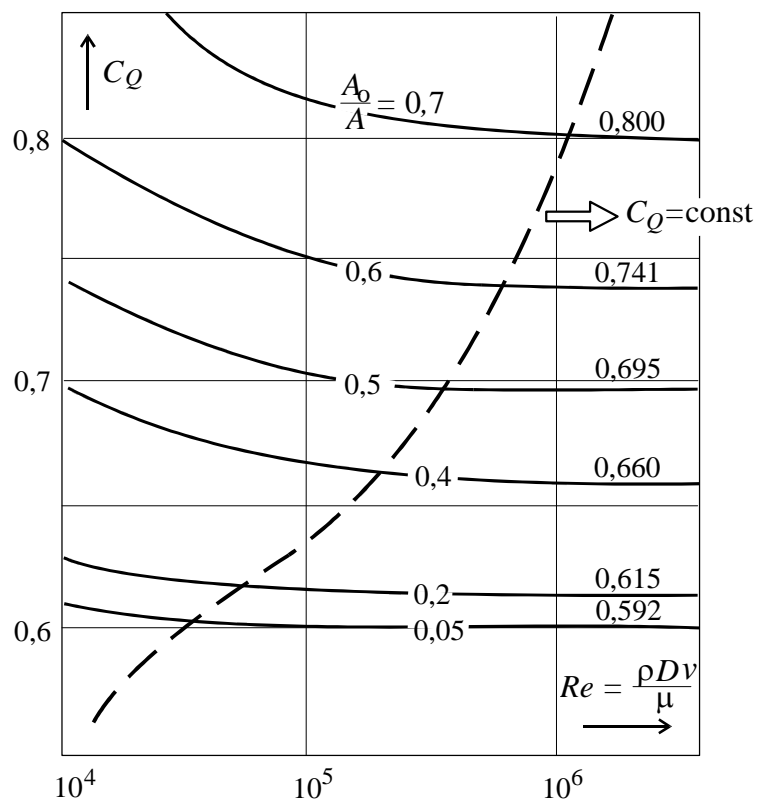
* * *

Izgubljena energija kao posledica ugrađivanja dijafragme označena sa $E_{\text{izg,lok}}$ na slici 101–1, a izraz za nju napisan je sa (102–15). Iz te jednačine proizašao je izraz (102–17) za koeficijent lokalnog gubitka na dijafragmi. Ako se iskoristi zamena φ sa $(1/C_v)^2 - 1$, što omogućava (103–6), dobija se:

$$\xi = \left(\frac{A}{C_v C_A A_0} \right)^2 - 2 \frac{A}{C_A A_0} + 1$$

Kako za C_Q postoje eksperimentalno utvrđene vrednosti, prethodni izraz će se prepraviti koristeći $C_v C_A = C_Q$ i $C_A = C_Q/C_v$, uz približnost da je C_v jednak jedinici. Tako se prethodni izraz zamenjuje sa veoma jednostavnim:

$$\xi = \left(\frac{A}{C_Q A_0} - 1 \right)^2 \quad (103-15)$$



Slika 103–5 Koeffcijent proticaja C_Q za dijafragmu (A_0 = površina otvora dijafragme, A = površina preseka cevi, Re = Rejnoldsov broj za presek cevi)

u koga ulazi samo eksperimentalno utvrđena vrednost za C_Q , što je i bio cilj prethodnog izvođenja.

Zamena C_v sa jedinicom može se opravdati primenom jednačine (103–6) uz vrednosti φ prema slici 102–6, gde se vidi da φ ne prelazi 0,05, pa je C_v veće od 0,975 (i, razume se, manje od jedinice).

Račun po jednačini (103–15) dao bi približno isti rezultat kao po postupku izloženom iza jednačine (102–19). Taj postupak je dao rezultat koji je omogućio crtanje grafičkog prikaza zavisnosti ξ od A_0/A na slici 102–11. Treba napomenuti da su se celokupna izlaganja u Poglavlju 102 odnosila na razvijenu turbulenciju (kvadratna zakonitost, neučestvovanje Re -broja), pa se u slučaju dijafragme odnose na oblast (2)

sa sl. 103–4. U jednačini (103–15) treba primeniti C_Q za ovu oblast odnosno vrednosti upisane na sl. 103–5.

Zanimljivo je utvrditi kako se odnosi lokalni gubitak energije prema merenoj visini. Taj odnos može se prikazati na sledeći način:

$$\frac{\frac{E_{izg}}{v^2/2g}}{\frac{H}{v^2/2g}} = \frac{\left(\frac{A}{C_Q A_0} - 1\right)^2}{\left(\frac{A}{A_0 C_Q}\right)^2}$$

Brojitelj u prethodnom izrazu jednak je koeficijentu ξ , koji je izražen sa (103–15), a imenitelj je dobijen na osnovu (103–10) uz zamenu Q sa vA .

Iz prethodne jednačine dobija se:

$$\frac{E_{izg}}{H} = \left(1 - \frac{C_Q A_0}{A}\right)^2 \quad (103-16)$$

Za A_0/A jednako 0,2 na slici 103–5 se čita $C_Q = 0,615$, pa prethodna jednačina (103–16) daje za odnos E_{izg}/H vrednost 0,77 (tj. preko tri četvrtine merene visine se gubi). Za vrednosti A_0/A još manje od 0,2, navedeni odnos E_{izg}/H je još veći, jer približavanjem A_0/A nuli, odnos E_{izg}/H se približava jedinici. Za slabija prigušenja dijafragmom – na primer za $A_0/A = 0,7$, gde je $C_Q = 0,80$, dobija se da E_{izg}/H svega 0,19 – dakle ni petinu merene visine ne iznosi izgubljena energija.

Treba primetiti da se za procenu izgubljene energije ne traži, niti treba tražiti, onakvu tačnost, kakva se kod merenja traži. Lokalni gubitak je samo jedan od elemenata proračuna cele struje u cevovodu i tu se traži procena (kao što se procenjuju i ostali lokalni gubici, pa i trenje). Merenje, međutim, traži da se dobije što tačniji podatak, jer je inače besmisleno. Treba napomenuti da je ovde izraženi gubitak energije samo lokalni gubitak, a to je baš onaj iznos za koga ugrađivanje dijafragme povećava gubitak energije u odnosu na stanje da nje nema, pa je sa praktičnog stanovišta prethodna procena prihvatljiva.

Podatak o izgubljenoj energiji je neophodan da bi se pjezometarske kote ispred i iza diafragme (čija razlika čini izgubljenu energiju) uskladile sa pjezometarskim stanjem u cevovodu. Određivanjem tih

kota određene su i merne piježometarske kote, označene sa Π_a i Π_b na slici 103–1.

* * *

Sila kojom se dijafragma odupire struji već je razmatrana, u Poglavlju 101, i za nju je napisan izraz (101–16) iz koga se vidi da poznavanje E_{izg} znači i poznavanje sile otpora dijafragme. Ako se ne raspolaze sa podatkom za E_{izg} a raspolaze se sa izmerenom visinskom razlikom H može se doći do približne vrednosti za silu otpora. Pretpostaviće se da je piježometarska kota za celu prednju stranu jednaka Π_a , a za celu stražnju stranu Π_b , i tada bi sila na dijafragmu bila proizvod iz razlike pritisaka jednake $\gamma(\Pi_a - \Pi_b)$ (što je jednako γH) i površine kružnog prstena jednake $A - A_0$. Ta sila označiće se sa K_H (indeks H neka ukazuje da je dobijena na osnovu izmerene visinske razlike H) – ona iznosi:

$$K_H = \gamma H (A - A_0) \quad (103-17)$$

Ovako dobijena sila je veća od stvarne sile, koja po jednačini (101–16) iznosi $\gamma A E_{izg}$ pa se može uspostaviti odnos između te dve sile:

$$\alpha = \frac{K_{dia}}{K_H} = \frac{\gamma A E_{izg}}{\gamma H (A - A_0)} = \frac{E_{izg}}{H} \frac{1}{(1 - A_0/A)} \quad (103-18)$$

Nagovešteno je da je sila K_H veća od stvarne sile otpora dijafragme, tj. da je $\alpha < 1$, a to se lako objašnjava.

Na stražnjoj strani dijafragme raspored pritiska je hidrostatički sa izmerenom piježometarskom kotom Π_b za celu površinu, jer se tu može preneti pretpostavka o hidrostatičkom rasporedu pritiska na prstenastu površinu kojom su spojene uža i šira cev kod naglog proširenja, a ta je pretpostavka prihvaćena još u Poglavlju 83 (Treći primer), pa je primenjivana kod određenja sile pri kraju odeljka III Poglavlja 101, i pri razmatranju naglog proširenja, na početku Poglavlja 102.

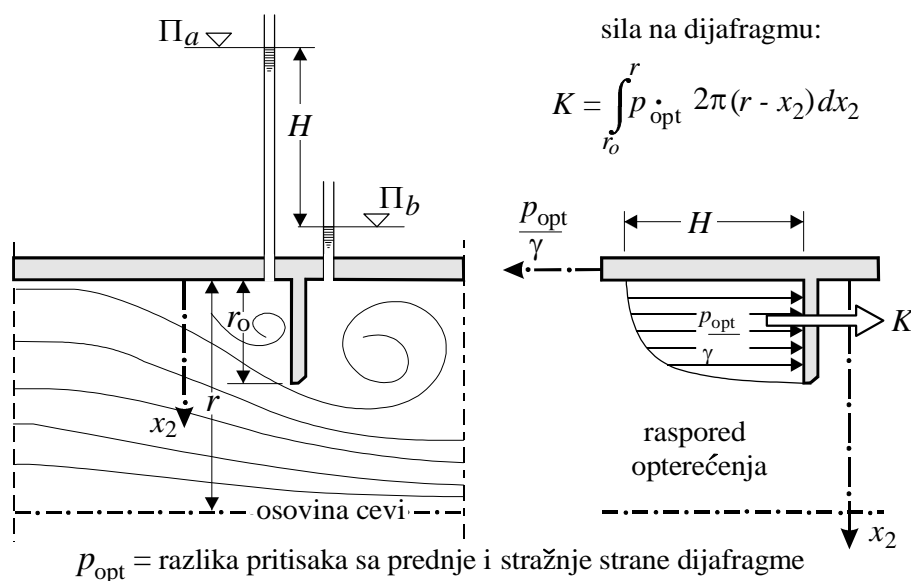
Na prednjoj strani dijafragme nije raspored pritiska hidrostatički, nije piježometarska kota za celu površinu ista, samo je uz zid to izmerena kota Π_a , a približavanjem otvoru sve je niža, da bi se na samom otvoru spustila na Π_b (jer je tu razlika pritisaka sa prednje i stražnje strane jednaka nuli).

Prema tome, razlika pritisaka sa prednje i stražnje strane dijafragme samo je uz zid jednaka $\gamma(\Pi_a - \Pi_b)$, a približavanjem otvoru dijafragme

ona opada sve do nule. Ta razlika čini opterećenje dijafragme i stoga je sila K_H , napisana sa (103–17) zaista veća od stvarne sile na dijafragmu, a u kome je odnosu to smanjenje pokazuje odnos α , napisan sa (103–18).

Na primer za $A_0/A = 0,2$ malo pre je sračunato da E_{izg}/H iznosi 0,77, pa je, prema (103–18), $\alpha = 0,96$. Za $A_0/A = 0,7$, sa takođe malo pre sračunatim $E_{izg}/H = 0,19$, dobija se $\alpha = 0,63$. Što je prigušenje dijafragmom izrazitije, što je A_0/A manje, α je sve bliže jedinici.

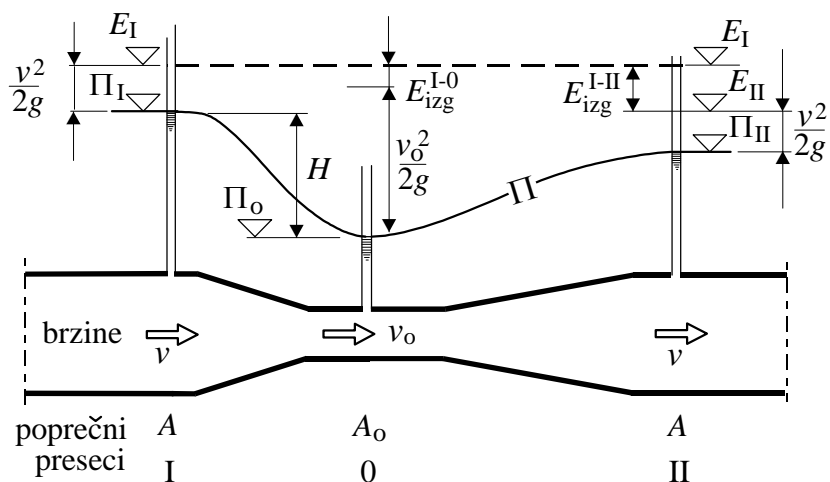
Na slici 103–6 prikazano je kako otprilike izgleda osnosimetrično opterećenje dijafragme – upravo dat je raspored razlike pritisaka koji opterećuju dijafragmu. Navedena razlika pritisaka označena je sa p_{opt} .



Slika 103–6 Otpor dijafragme

II VENTURIJEV VODOMER

Za određivanje proticaja može da poslužiti suženje u cevi – to je tzv. *Venturijev vodomer* (VENTURI). Postepenim sužavanjem cev preseka A pređe na suženi presek A_0 , koji se završava na dužini L_0 , a potom se postepenim proširivanjem cev ponovo vrati na presek A – vidi sliku 103–7. Načelna razlika između ovakvog sužavanja i proširivanja



Slika 103-7 Uz jednačinu (103-19) za Venturijev vodomer

struje, i onoga kod diafragme je u tome što ovde odstupanja od paralelnog i pravolinijskog strujanja nisu značajna kroz sve preseke, pa se nacrtana pijezometarska linija odnosi približno na ceo presek (struja se kao celina neprekidno prati).

Jednačina energije za presek ispred suženja (gde su površina i brzina A i v) i presek u suženju (gde su A_0, v_0):

$$\Pi_I + \frac{v^2}{2g} = \Pi_0 + \frac{v_0^2}{2g} + E_{izg}^{I-0} \quad (103-19)$$

Izgubljena energija će se izraziti u odnosu na $v_0^2/2g$, uvođenjem koeficijenta ψ , pa se piše:

$$E_{izg}^{I-0} = \psi \frac{v_0^2}{2g} \quad (103-20)$$

Ovaj gubitak suštinski nije lokalni nego je uglavnom trenje i stoga nije uzet uobičajeni koeficijent lokalnog gubitka, nego je data druga oznaka (ψ).

$\Pi_I - \Pi_0$ se zamenjuje sa H , i to je visinska razlika koja će se meriti, a E_{izg} se zamenjuje prema (103-20), pa se (103-19) svodi na:

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2} + \psi \right) = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 - \frac{A_0^2}{A^2} + \psi \right) \quad (103-21)$$

Ovde je obavljena i zamena v/v_0 sa A_0/A , na osnovu izjednačenja proticaja u dva preseka. Iz prethodne jednačine brzina u suženom preseku iznosi:

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{A_0^2}{A^2} + \psi}} \sqrt{2gH} \quad (103-22)$$

Za idealan fluid, kod koga je $\psi = 0$, jer nema gubitka energije, dobija se:

$$v_{0,id} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{A_0^2}{A^2}}} \sqrt{2gH} \quad (103-23)$$

Deljenjem (103-22) sa (103-23) dobija se odnos između stvarne brzine i brzine za idealan fluid, a taj se odnos naziva „koeficijent brzine”, i označić se sa:

$$C_v = \sqrt{\frac{1 - \frac{A_0^2}{A^2}}{1 - \frac{A_0^2}{A^2} + \psi}} \quad (103-24)$$

Koeficijent istoga naziva i iste suštine uveden je izrazom (103-6) kod razmatranja dijafragme.

Sa uvođenjem koeficijenta C_v , na osnovu (103-22) i (103-24), dobija se:

$$v_0 = \frac{C_v}{\sqrt{1 - \frac{A_0^2}{A^2}}} \sqrt{2gH} \quad (103-25)$$

pa je proticaj $Q = A_0 v_0$ jednak:

$$Q = \frac{C_v}{\sqrt{1 - \frac{A_0^2}{A^2}}} A_0 \sqrt{2gH} \quad (103-26)$$

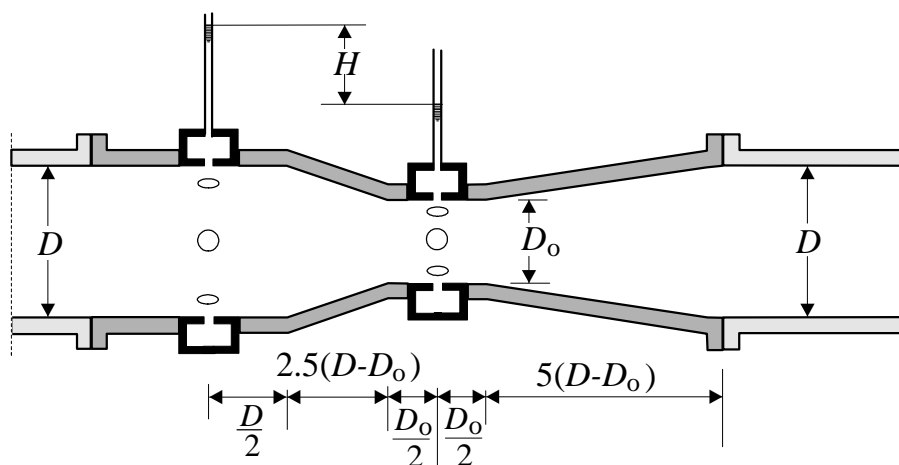
Ako se mere proticaj Q i visinska razlika H , prethodna jednačina utvrđuje vrednost za koeficijent brzine C_v . Napominje se da kod Venturijevog vodomera nema skupljanja (kontrakcije) mlaza ($C_A = 1$), pa

se obrazovanje zakonitosti za taj vodomer svodi na određivanje koeficijenta C_v .

Može se za praktične potrebe prihvatiti da je u pretežnom broju slučajeva C_v između 0,96 i 0,99 ili da je otprilike $C_v = 0,98$.

DODATAK

Primena dimenzionalne analize uprošćuje izražavanje koeficijenta C_v ako se pojednostave granični uslovi. Zbog toga se za takav „klasični vodomer” predlaže rešenje prema slici 103–8, gde se postiže potpuna geometrijska sličnost za sve vodomere, gde je odnos prečnika D_0 sužene cevi i prečnika D cevi ispred i iza vodomera isti ($D_0/D = idem$). Uz to treba obezbediti i prilazne i izlazne uslove tako da oni ne utiču na zakonitosti za vodomer. Ovo znači da se prethodni i naredni lokalni poremećaji moraju odmaknuti od vodomera za izvesne dužine. One mogu da budu i nešto kraće od onih za dijafragmu, jer se ovde, od preseka (I) do (II), a to je sve zajedno vodomer, obavi celokupni uticaj vodomera na strujanje, dok se kod dijafragme prostire na znatnim dužinama ispred i iza nje.



Slika 103–8 Venturijev vodomer sa predviđenim piježometarskim priključcima; propisane su dužine sužavanja sa prečnika D na prečnik D_0 , srednjeg dela sa konstantnim prečnikom (D_0) i proširivanja

Stoga se preporuke za zahtevanu dužinu ispred vodomera svode na $l_1 = 5D$ do $8D$, a iza vodomera na $l_2 = 3D$ do $4D$.

Sa obezbeđenjem navedenih uslova dimenzionalna analiza bi se svela na istraživanje funkcije:

$$C_v = C_v \left(Re, \frac{D_0}{D}, \frac{k}{D} \right) \quad (103-27)$$

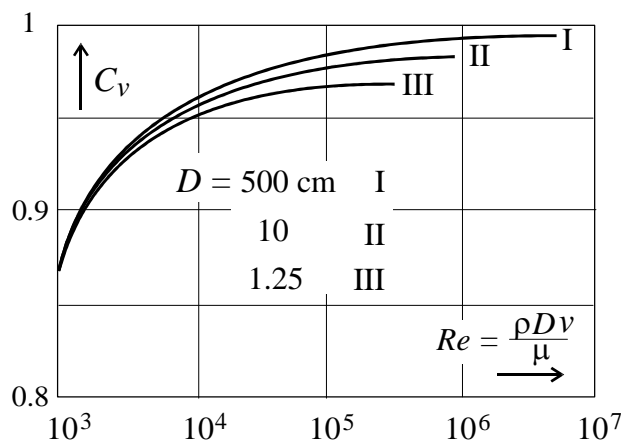
Ako se ovo uporedi sa napisanim (103-12), uviđa se da se ovde pojavila još i relativna hrapavost k/D . Ovo se može lako objasniti. Ovde se, u području lokalnog poremećaja, ispoljava uticaj trenja jer je gubitak energije od preseka (I) do preseka (0) u stvari gubitak usled trenja, pošto nema odvajanja mlaza od zida i stvaranja vrtložne oblasti koja bi oduzimala energiju struji.

Na sl. 103-8 prikazano je i kako se ugrađuju piježometarski priključci. Kroz niz rupica na istom obimu cevi, u preseku (I), odnosno (0), voda ulazi u prstenastu komoru koja opkoljava cev i iz koje se izvodi piježometarski priključak za merenje. Sitnija nepodudarnost piježometarskog stanja po jednom obimu (nepodudarnost piježometarskih kota za mesta gde su izbušene rupice) ne mogu uticati na rezultat merenja, jer ono što se meri to je prosek za ceo obim.

Slika 103-9 prikazuje eksperimentalno određene funkcije (103-27), ali samo za $D_0/D = 1/2$, pa se (103-27) svodi na:

$$C_v = C_v \left(Re, \frac{k}{D} \right) \quad (103-28)$$

Da ne utiče relativna hrapavost bio bi koeficijent brzine zavisao samo od Re -broja, pa bi na sl. 103-9 bila nacrtana jedinstvena linija. Međutim, slika prikazuje da je za manji prečnik (a i za isti Re -broj) koeficijent C_v manji što znači da je koeficijent gubitka energije ψ veći, jer tako kaže (103-24), a to je moguće samo pod uticajem relativne hrapavosti k/D , koja je veća kod tanjih cevi. To uticanje je doduše prilično maleno (vrednosti koeficijenta C_v , za isti Re -broj, razlikuju se do 2% za cev od prečnika 5 m, i onu sa prečnikom od svega 1,25 cm). Ovo se objašnjava činjenicom da je kod Venturijevog vodomera piježometarska razlika uglavnom posledica porasta kinetičke energije $(v_0^2 - v^2)/2g$, da je u odnosu na tu razliku gubitak energije $\psi v_0^2/2g$ malen, pa i veće razlike u tom gubitku malo utiču na piježometarsku razliku, upravo na



Slika 103-9 Eksperimentalno dobijeni koeficijenti za Venturijev vodomer oblikovan prema sl. 103-8, a za $D_0/D = \text{const} = 1/2$

izmerenu visinu H . Uostalom, iz istog razloga je koeficijent C_v vrlo blizak jedinici, izuzev manjih Re -brojeva, kada je uticaj viskoznosti značajan.

Upoređenjem slika 103-9 i 103-4 uviđa se da kod Venturijevog vodometra koeficijent C_v neprekidno raste sa povećanjem Re -broja, a to znači da i koeficijent proticaja C_Q raste, jer nema kontrakcije, $C_A = 1$. Kod dijafragme (sl. 103-5), koeficijent C_Q raste sa porastom Re -broja do izvesne vrednosti toga broja, potom C_Q opada. To opadanje se objasnilo da u tom području opada vrednost koeficijenta kontrakcije C_A , jer sve razvijenija turbulencija sve više skuplja mlaz, a pošto to skupljanje ima svoju granicu, to se ispoljava sa zaustavljanjem opadanja koeficijenta C_Q i on se ustali na neku konstantnu vrednost C_Q za isti odnos D_0/D . Rečeno je ranije da se to ogleda i na prikazu izgubljene energije kod dijafragme (sl. 101-5), gde ξ ima minimalnu vrednost, do koje opada, i potom raste, da bi se, posle izvesne vrednosti Re -broja, ta vrednost ustalila. Rečeno je da se ta zavisnost uklapa u načelno datu zavisnost b) na sl. 101-4. Za Venturijev vodomer gde C_v neprekidno raste sa porastom Re -broja, izgubljena energija, upravo njen koeficijent ψ , uklapao bi se u zavisnost (a) na sl. 101-5.

Sl. 103-9 ukazuje da su vrednosti za C_v bliske jedinice u pretežnom broju praktičnih slučajeva, što je posledica činjenice da gubitak energije

od preseka (I) ispred vodomera do preseka (0) u sredini vodomera nije značajan. To pokazuje vrednost za koeficijent ψ lokalnog gubitka koji se, shodno izrazu (103–24), može povezati sa C_v , jer je:

$$\psi = \left(\frac{1}{C_v^2} - 1 \right) \left(1 - \frac{A_0^2}{A^2} \right) \quad (103-29)$$

pa se za $C_v = 0,98$, što je prosečna vrednost za pretežan deo praktične primene, dobija ψ nešto manje od 0,04, što je i objašnjivo, jer se radi o gubitku usled trenja na malenoj dužini.

Dosadašnja razmatranja, na osnovu slike 103–9, odnosila su se na odnos prečnika u suženju i prečnika cevi D_0/D jednakog 1/2, pa je potrebno da se razmotri koliko se menja vrednost koeficijenta C_v sa promenom odnosa D_0/D .

Za vrednost koeficijenta ψ može se reći da smanjenje odnosa A_0/A (pojačavanje prigušenja) dovodi do dva uticaja, koji se suprotstavljaju, od kojih prvi utiče na povećanje koeficijenta ψ , jer se rastojanje između preseka (I) i (0) povećava (duža je deonica sužavanja), dok drugi, naprotiv, utiče na smanjenje koeficijenta ψ , jer se odnos brzina u presecima (I) i (0), tj. v/v_0 , smanjuje, pa je prosečna brzina manja u odnosu na v_0 , a uz $v_0^2/2g$ se obračunava gubitak energije, kako je i napisano sa (103–20).

Pri povećanju odnosa A_0/A opet deluju dva nasuprotno usmerena uticaja na vrednost za ψ : kraće je rastojanje između preseka (I) i (0) i odnos v/v_0 se približava jedinici (prvi uticaj, razume se, smanjuje, a drugi povećava vrednost za ψ).

Utvrđeno je da je, za D_0/D jednako 1/2, vrednost za ψ malena, a prema prethodnim navodima, ne menja se osetno i pri promeni odnosa A_0/A , odnosno D_0/D , pa se onda može proceniti da se ni koeficijent brzine mnogo ne menja sa promenom odnosa D_0/D . On je nešto niži od jedinice i može se uzeti da iznosi otprilike 0,98 za sve vodomere, a za oblast kada se ta vrednost ne menja sa brzinom (za oblast kvadratne zakonitosti).

* * *

Ponegde se za Venturijev vodomere daje isti obrazac kao i za dijafragmu – to je obrazac napisan sa (103–10). Računska vrednost za

koeficijent C_Q ako se računa po tom obrascu iznosi:

$$C_Q = \frac{C_v}{\sqrt{1 - A_0^2/A^2}} \quad (103-30)$$

Ovo je napisano na osnovu upoređenja izraza (103-10) i (103-26).

Prethodnim izrazom, za A_0/A od 0,2 do 0,7, i za C_v između 0,96 i 0,99, dobija se C_Q između 0,98 i 1,39. Taj koeficijent je uglavnom veći od jedinice i mora se shvatiti kao obračunski podatak: njime se računa po određenom obrascu i dobija se dobar rezultat, a ne može mu se dati tumačenje sa fizičkog stanovišta. Naime, on se ne može shvatiti kao koeficijent proticaja kojim se ovde ispoljava i smanjenje brzine u odnosu na idealan fluid (nema skupljanja mlaza) a takav koeficijent je manji od jedinice.

I kod dijafragme tako je, istina u retkim slučajevima, bio koeficijent proticaja C_Q veći od jedinice (vidi sl. 103-4). I tamo je naglašeno da je to samo obračunski koeficijent kome ne treba davati nikakvo tumačenje sa fizičkog stanovišta. Razlog za vrednosti koeficijenta C_v kod Venturijevog vodomera, ako se računa po (103-10), je u tome što je obrazac (103-10) izveden uz pretpostavku da je merena piježometarska kota ispred dijafragme zaustavna, što očigledno nije merena piježometarska kota ispred vodomera gde zaustavljanja struje nema.

* * *

Za praktične potrebe nužna je procena izgubljene energije koju uzrokuje ugrađivanje vodomera u cev – to je gubitak energije od preseka (I) do preseka (II) (vidi sl. 103-7).

Gubitak usled trenja na delu gde se cev sužava iznosi polovinu gubitka na delu gde se cev proširuje, jer je dužina sužavanja dva puta veća od dužine proširivanja (vidi sl. 103-8). Dakle, izostavivši srednji deo vodomera (gde je konstantan prečnik D_0) zbirni gubitak energije na sužavanju i proširivanju je trostruki gubitak na sužavanju.

Za srednji deo vodomera gubitak do preseka (0) je polovina od gubitka na celom srednjem delu. Kada bi taj srednji deo bio veoma dugačak u odnosu na dužine na kojima se obavlja sužavanje i proširivanje cevi, onda bi gubitak energije bio pretežno u trenju u srednjem delu, a on bio dvaput veći od trenja do polovine, do preseka (0).

Dva prethodna navoda dozvoljavaju da se napiše procena:

$$3 > \frac{E_{izg}^{I-II}}{E_{izg}^{I-0}} > 2 \quad (103-31)$$

jer se iz prethodnog razmatranja moglo zaključiti da je odnos gubitka od preseka (I) do preseka (0) prema gubitku (I) do (II) između 2 i 3, pa se, kao približnost može uzeti da iznosi 2,5. Sa tom vrednošću i koristeći (103-20) može se napisati:

$$E_{izg}^{I-II} = 2,5 E_{izg}^{I-0} = 2,5 \psi \frac{v_0^2}{2g}$$

što se zamenom ψ prema (103-29) svodi na

$$E_{izg}^{I-II} = 2,5 \left(\frac{1}{C_v^2} - 1 \right) \left(1 - \frac{A_0^2}{A^2} \right) \frac{v_0^2}{2g} \quad (103-32)$$

Za praktične potrebe pogodno je izgubljenu energiju koju nameće vodomer izraziti u odnosu na izmerenu visinu H , koja se, shodno (103-25) može napisati:

$$H = \frac{1}{C_v^2} \left(1 - \frac{A_0^2}{A^2} \right) \frac{v_0^2}{2g} \quad (103-33)$$

Deljenjem (103-32) sa ovim izrazom dobija se:

$$\frac{E_{izg}}{H} = 2,5 \left(1 - \frac{1}{C_v^2} \right) \quad (103-34)$$

Za $C_v = 0,98$ napisani odnos iznosi oko 0,1. Ako je gubitak veći, odnosno C_v manje, dobiće se nešto veća vrednost – ako se C_v spusti na 0,96, napisan odnos biće oko 0,2.

Pošto je kod Venturijevog vodomera izgubljena energija, kako je rečeno, svega 10 do 20%, od izmerene visine, dok je to kod dijafragme znatno više, kako se navodilo iza izraza (103-10) (izuzev slučajeva gde je prigušenje slabo izraženo), ovaj navod mogao bi da oglasi dijafragmu nepodobnijim od Venturijevog vodomera, pogotovo ako se još doda da dijafragma zahteva i veće pravolinijske dužine ispred i iza nje. Takav

zaključak ne može se ipak prihvatiti bez ozbiljnijih primedbi. Naime, prednost dijafragme je u tome što pouzdanije određuje proticaj uz istu postignutu tačnost u merenju visine H , pošto se granični uslovi kod nje pouzdanije obezbeđuju, jer su oni prevashodno u oštroičnom otvoru, a ostalo je zanemarljivo uticajno, dok je kod Venturijevog vodomera merodavno celo oblikovanje između mernih preseka, uz jako izražen uticaj hrapavosti, a uticajniji je i raspored dolazećih brzina. Oko rupica na zidu cevi kroz koje voda ulazi kroz pijezometarske priključke moguće su neravnine (štrčanje) koje mogu uticati na lokalne pritiske s obzirom da se pored njih odvija tečenje, dok su kod dijafragme pijezometarski priključci vezani za mesta gde je voda mirna. Ovi navodi ne treba sada da rasuđivanja odvedu u drugu krajnost, da se izrekne nepodobnost Venturijevom vodomeru, jer se njime mogu dobiti dovoljno tačni rezultati za pretežan deo praktičnih primera – htelo se samo reći da dijafragma može da pruži nešto veću mogućnost za obezbeđenje tačnosti, jer se granični uslovi lakše obezbeđuju, ali se ta veća mogućnost mora odraziti kroz veći gubitak energije.

* * *

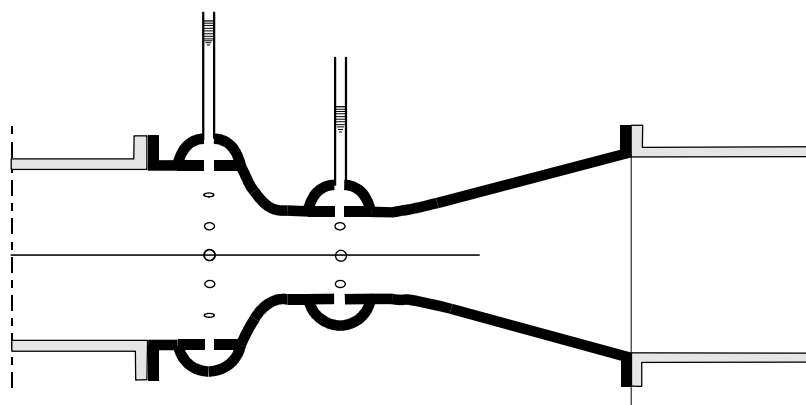
Strogo poštovanje načela iznesenog još u početku Poglavlja 101, da se kao lokalni gubitak računa samo onaj višak energije koji je stvorio lokalni poremećaj, zahtevalo bi da se ovde računa razlika između malo pre sračunate izgubljene energije i one koje bi se ostvarile da nema vodomera, a to je trenje na pravolinijski položenoj cevi konstantnog prečnika D , a na dužini koju zauzima vodomer. Ovo znači da bi za izgubljenju energiju koju nameće vodomer trebalo uzeti nešto manje od onoga što je navedeno. Međutim, to se može izostaviti tim pre što računanje izgubljene energije ima karakter procene, kao što ima i celokupan račun izgubljene energije u cevovodu u koji se uključuje vodomer. Međutim, izmerena visina H mora se odrediti sa zahtevanom tačnošću, jer je inače merenje besmisleno.

Pošto se odredi izgubljena energija za vodomer (razume se za maksimalni predviđeni proticaj), usklade se (sa pijezometarskim stanjem u cevovodu u koji se vodomer ugrađuje) pijezometarske kote ispred i iza vodomera (Π_I, Π_{II}) čija je razlika jednaka E_{izg}^{I-II} . Potom se pijezometarska kota Π_0 u suženju odredi oduzimanjem izmerene visine H od Π_I .

* * *

Sila kojom fluid deluje na površinu kojom se cev sužava, i sila na površinu kojom se cev proširuje, svaka zasebno mogu se sračunati, jer se presek u suženju može uzeti kao završni (pri sili na prvi deo), odnosno početni (za drugi deo). Jasno je da treba znati piježometarske kote Π_I , Π_0 , Π_{II} , kao i proticaj. Zbog osnosimetričnog strujanja obe navedene sile deluju u osovini cevi. Sadejstvo te dve sile čini silu koju prima vodomera kao celina, i koja je znatno manja od sile koja napada dijafragmu (za iste prečnike sužene cevi kod vodomera, odnosno otvora dijafragme, ugrađene u istu cev, i za isti proticaj). Na slici 102–12 pregledno su prikazana različita suženja u cevi, u stvari niz prepreka koje ometaju strujanje. Najizrazitije preprečavanje na pomenutoj slici označeno je kao (a), a to je dijafragma, dok najmanje ometaju strujanje slučajevi (e–1) i (e–2), jer su prilagođeni strujanju (kod njih se mlaz ne odvađa od zidova cevi, ne stvara se odvojena vrtložna oblast, koja bi bila uzrok znatnijeg gubitka energije). Treba i ovde ponoviti rečeno prilikom tumačenja slike 102–12 da manji gubitak energije znači i manju silu otpora.

Slučajevi (e–1) i (e–2) su dva uobičajena tipa Venturijevog vodomera. Prvi je opširno razmatran, a kod drugoga je jedino postepeno sužavanje zamenjeno zaobljenim. Taj tip vodomera prikazan je slikom 103–10, i treba napomenuti da zahteva pažljiviju izradu (misli se na zaobljeno sužavanje) od razmatranog (sl. 103–8) koji se obično naziva „klasični Venturijev vodomera”. Kod drugog rešenja (sl. 103–10) koeficijenti brzine su otprilike isti kao i kod „klasičnog”.



Slika 103–10 Venturijev vodomera sa zaobljenim sužavanjem

Na kraju treba dodati da ima niz varijanti vodomera koji se nazivaju „Venturijevim”, a za bilo koji od njih, kao i za ovde navedene, treba pre primene raspolagati sa tačnom zavisnošću između merene visine H i proticaja Q , kao i sa zahtevanim graničnim uslovima.

III

KRATAK OSVRT NA RAZLIČITE MOGUĆNOSTI ODREĐIVANJA PROTICAJA MERENJEM JEDNE PIJEZOMETARSKJE RAZLIKE

Opširna izlaganja o dijafragmi i Venturijevom vodomeru nisu imala za svrhu da se oni preporučuju kao nezamenjivi uređaji za merenje proticaja. Htelo se – i to se sada naglašava – da se prikaže mogućnost *određivanja proticaja merenjem samo jedne visine (jedne pijeziometarske razlike)* i za to su data dva primera. Iz izlaganja se, međutim, mora izvući zaključak da se za merni uređaj može upotrebiti svaki za tu svrhu podešeni i tačno propisani lokalni uticaj, što znači tačno *utvrđeni granični uslovi*, kao i tačno *utvrđena mesta za uzimanje pijeziometarskih priključaka*. Isti takav uređaj ispitan na jednom mestu, primenjuje se na drugom gde su obezbeđeni isti granični uslovi, a ako se želi povećati ili smanjiti moraju biti zadovoljeni *uslovi sličnosti*. Veza između merne visine H i proticaja Q , uz karakteristični poprečni presek A_0 , se obično svodi na bezdimenzionalnu veličinu:

$$C_Q = \frac{Q}{A_0 \sqrt{2gH}} \quad (103-35)$$

Uopšteno uzevši za C_Q važi zavisnosti:

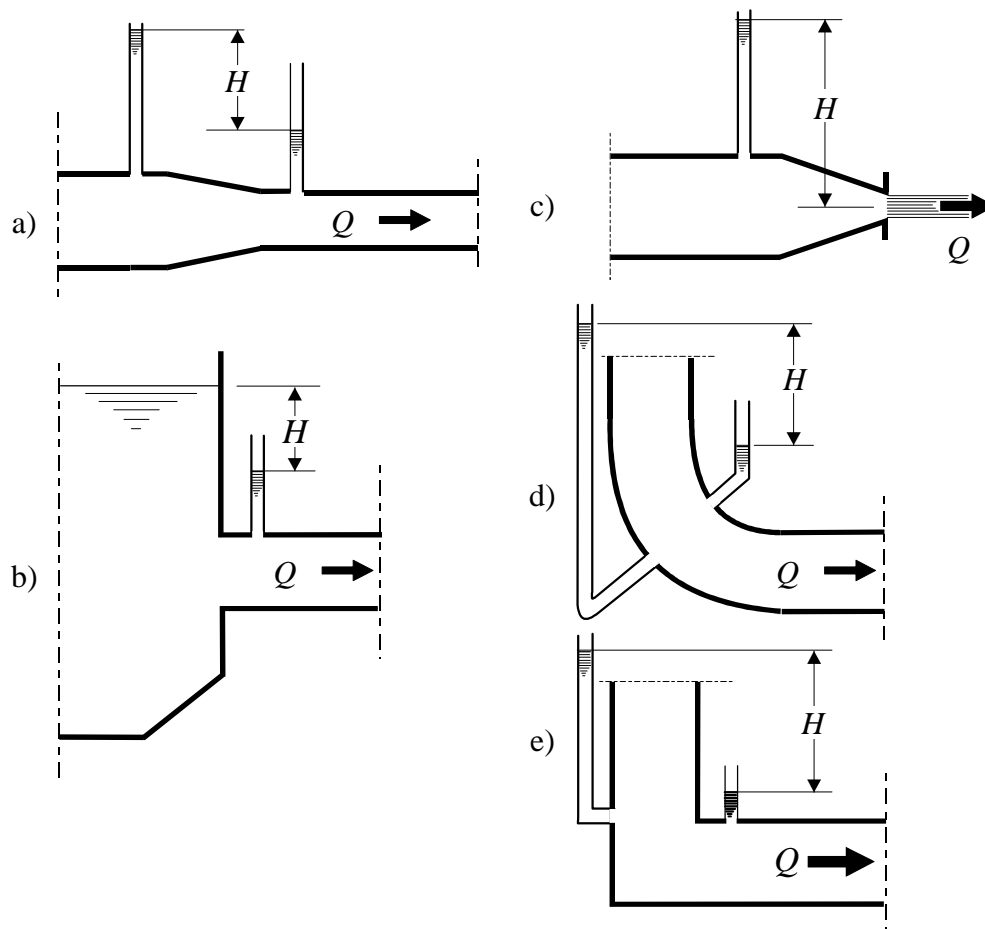
$$C_Q = C_Q(Ko, Re) \quad (103-36)$$

Ko sadržava sve merodavne granične uslove, izražene bezdimenzionalnim veličinama.

Za sve primere kod kojih su isti tj. međusobno slični granični uslovi, što se piše sa $Ko = idem$, koeficijent C_Q zavisi samo od Re –broja. Na modelu koji se odnosi na sve takve primere C_Q se utvrđuje eksperimentalnim istraživanjem, mere se visina H i proticaj Q , i onda se sračuna C_Q , upravo utvrđuje se njegova vrednost koja se onda može preneti na sve, međusobno slične primere.

* * *

Za mnogobrojne tipizirane merne uređaje, kakve su dijafragma i Venturijev vodomjer daju se grafikoni kao onaj na sl. 103–5 namenjen standardnoj dijafragmi. Kao merni objekat mogu da posluže i primeri sa sl. 103–11 kao i niz drugih. Prvi slučaj na slici označen sa (a) pokazuje da se ne mora posebno ugrađivati merni objekat, nego se može iskoristiti prelaz iz cevi većeg u cev manjeg prečnika koji je projektom cevovoda predviđen. Može se iskoristiti i ulaz u cev – prikazano sa (b) na slici, ili izliv iz cevi ako se ugradi mlaznik – (c) na slici. Sva tri slučaja koriste zavisnost pjezometarske razlike H od povećanja kinetičke energije, što je načelno isto kao kod Venturijevog vodomera. Za merni uređaj se



Slika 103–11 Nekoliko primera mogućnosti određivanja proticaja Q na osnovu izmerene visine H i eksperimentalno utvrđene zavisnosti $Q = Q(H)$

može koristiti krivina, gde izmerenu pijezometarsku razliku čini razlika između pijezometarskih kota na spoljnoj i unutrašnjoj strani krivine tj. $H = \Pi_{\text{sp}} - \Pi_{\text{un}}$ vidi (d) na sl. 103–11. Na osnovu izmerene visine H i jednačinom (102–21) može se sračunati brzina v u cevi, a onda i proticaj Q , množenjem v sa površinom A_0 poprečnog preseka cevi. Tako se dobija:

$$Q = A_0 \sqrt{g (\Pi_{\text{sp}} - \Pi_{\text{un}}) R/D} \quad (103-37)$$

Upoređenjem ovoga izraza i izraza (103–35) uviđa se da je C_Q jednako $\sqrt{R/2D}$. Napominje se da napisano treba shvatiti kao približni izraz, i da ga treba popraviti i doterati na osnovu eksperimentalnog istraživanja. Pre svega, izraz je dobijen uz zanemarenje uticaja viskoznosti i stoga može da važi samo za oblast razvijene turbulencije gde ne utiče Re -broj. Uz to svakako da i ugao skretanja α (vidi sl. 102–13) utiče na zavisnost proticaja od navedene pijezometarske razlike. Međutim, za praktične potrebe, i ako se želi procena, a ne veća tačnost, može poslužiti izraz (103–37) za krivinu sa skretanjem $\alpha = 90^\circ$.

Na isti način kao i krivina može da posluži i koleno – primer (e) na sl. 103–11.

Na kraju, naglašava se sledeće:

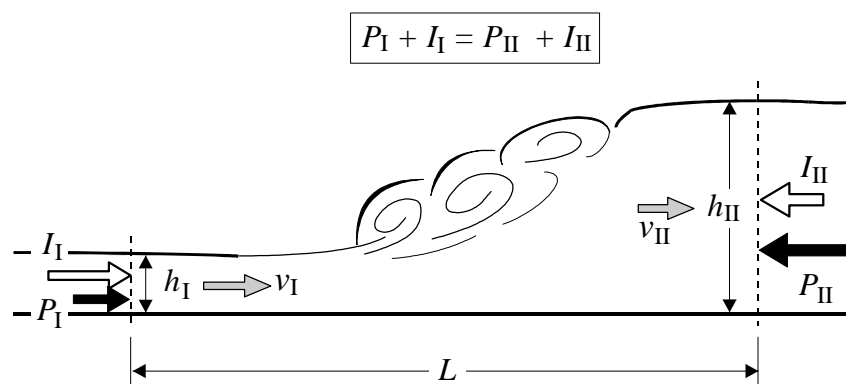
U projektu svakoga objekta mogu se pronaći neke promene poprečnog preseka, ili skretanja, koja se mogu iskoristiti (možda uz mala podešavanja) kao uređaj za određivanje proticaja. Ne mora se, dakle, primeniti neki standardni merni uređaj (kao, na primer, dijafragma ili Venturijev vodomer) za koja je poznata veza $Q(H)$ između proticaja i merene visinske razlike, ali taj uređaj se posebno ugrađuje, i isključivo u tu svrhu, i postizanje graničnih uslova za njega nije uvek lako obezbediti. Utvrđivanje zavisnosti $Q(H)$ za nestandardni merni objekat ne mora se obaviti u istraživačkoj ustanovi (na modelu u prirodnoj veličini ili smanjenom), jer se mogu obaviti na samom objektu, što je pogodnije. Obave se merenja za niz proticaja, gde se oni mere nekom drugom metodom, pa se uz izmerenu pijezometarsku razliku dođe do veze $Q(H)$ koja onda nadalje služi. Preporučljivo je da se u projektu hidrotehničkog objekta predvide i izgrade pijezometarski priključci, a onda se pri početku rada objekta utvrdi veza proticaj-pijezometarska razlika (na malo pre opisani način) koji će onda služiti za povremeno određivanje, ili još bolje za neprekidno registrovanje proticaja.

PRELAZ IZ MIRNOG U BURNO TEČENJE – HIDRAULIČKI SKOK

I

OPŠTA RAZMATRANJA

U Poglavlju 92 objašnjeno je da mirno burno tečenje ne može preći u mirno postepenom promenom dubine, nego skokovito. Na primerima na sl. 92–5 i 92–7 postavljeno je kao zadatak: istraživanje skoka iz burnog u mirno tečenje. To se sada i ispunjava – razmatraće se *hidraulički skok*. Tako se naziva *skokoviti prelaz iz burnog u mirno tečenje*. Dubine ispred i iza skoka (h_I i h_{II} na sl. 104–1) nazivaju se *spregnute dubine* (ili *konjugovane dubine*).



Slika 104–1 Sile koje se uravnotežuju pri obrazovanju hidrauličkog skoka

Napisaće se dinamička jednačina ili jednačina „uravnoteženja sila” za masu fluida između preseka (I) i (II) – slika 104–1. U tim presecima ispunjeni su uslovi za pravolinijsko i paralelno strujanje, normalno upravljeno na presek (dovoljno su odmaknuti od skoka), pa se može primeniti postupak izložen u Poglavlju 82 koji utičaje u jednom preseku izražava silom pritiska i komponentom inercijalne „sile”. To su sile P_I

i I_I , odnosno P_{II} i I_{II} , za pravac strujanja, za koga će se napisati naredna jednačina. Ostale sile su zanemarljive, ili u tom pravcu ne deluju, ako se prihvate sledeće pretpostavke koje se mogu razložno prihvatiti.

1. Skok se posmatra u pravolinijski položenom kanalu kod koga se građevinski poprečni presek ne menja duž strujanja. To se obično naziva „prizmatični kanal”. Ovaj uslov pojednostavljuje zadatak, jer sa čvrstih graničnih površina deluje samo sila trenja koja je zanemarljiva u odnosu na malo pre navedene sile.
2. Takođe se zanemaruje sila između vode i vazduha na slobodnoj površini vode, što se kod otvorenih tokova redovno čini, a navedeno je još na početku razmatranja struja, u Poglavlju 81, pod VII.
3. Zadatak je rešiv samo za horizontalno dno, jer tada otpada komponenta sile težine u pravcu strujanja, pa se ne mora poznavati zapremina vode u skoku. Pored toga, sila pritiska sa horizontalnog dna na fluid usmerena je vertikalno, pa ne ulazi u uravnoteženje horizontalnih sila.

Data objašnjenja (1. do 3.) dozvoljavaju da se za jednačinu „ravnoteže sila” uzmu samo navedene sile (P_I, P_{II}, I_I, I_{II}), pa jednačina glasi:

$$P_I + I_I = P_{II} + I_{II} \quad (104-1)$$

Sile pritiska iznose:

$$P_I = (p_0 A)_I = \gamma (h_0 A)_I = \gamma S_I$$

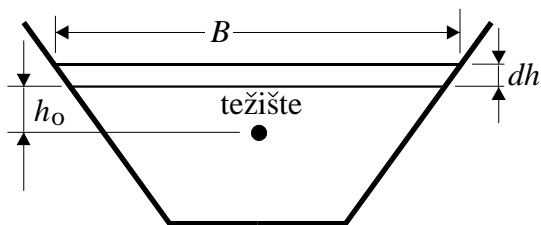
$$P_{II} = \gamma S_{II}$$

p_0 označava pritisak u težištu preseka, a h_0 rastojanje težišta od nivoa vode (vidi sl. 104-2), pa je $p_0 = \gamma h_0$, gde je γ specifična težina. $S = Ah_0$ je onda statički momenat površine A preseka u odnosu na osovину položenu na nivo.

Komponente inercijalne „sile” za preseke (I) i (II), shodno razmatranjima u Poglavlju 82, iznose:

$$I_I = \rho Q v_I = \rho \frac{Q^2}{A_I}$$

$$I_{II} = \rho \frac{Q^2}{A_{II}}$$



statički momenat u odnosu na nivo: $S = Ah_o$

priraštaj statičkog momenta:

$$dS = Adh + \underbrace{B \frac{1}{2}(dh)^2}_{\text{zanemarljivo}}$$

Slika 104–2 Uz uvođenje u razmatranje statičkog momenta preseka, u odnosu na osovinu u nivou

Ovde, kao i svuda, ρ označava gustinu, a korišćena je istovetnost proticaja Q kroz oba preseka: $Q = A_I v_I = A_{II} v_{II}$.

U razmatranje se unosi tzv. *sila u preseku*:

$$F = P + I = \gamma S + \frac{\rho Q^2}{A} \quad (104-2)$$

Sila F je, kako se iz prethodnog izraza vidi, zbir sile pritiska P i komponente inercijalne „sile” I za jedan presek.

Jednačina skoka (104–1) se svodi na izjednačavanje „sila” F_I i F_{II} u presjecima, pa se prethodno piše sa:

$$\underbrace{\underbrace{\gamma S_I}_{\text{sila pritiska}} + \underbrace{\rho \frac{Q^2}{A_I}}_{\text{inercijalna „sila”}}}_{F_I = \text{sila u preseku I}} = \underbrace{\underbrace{\gamma S_{II}}_{P_{II}} + \underbrace{\rho \frac{Q^2}{A_{II}}}_{I_{II}}}_{F_{II}} \quad (104-3)$$

jednačina hidrauličkog skoka
(preseci I i II su ispred, odnosno iza skoka)

Deljenjem sile F , izražene sa (104–2), sa specifičnom težinom γ dobija se veličina koja će se nazvati *funkcija skoka* i označava se sa:

$$\Phi = \frac{F}{\gamma} = S + \frac{Q^2}{gA} \quad (104-4)$$

Ta funkcija, za određeni prizmatični kanal, i za određeni proticaj ($Q = \text{const}$), je funkcija isključivo od dubine, tj.

$$\Phi = \Phi(h) \quad (104-5)$$

Jednačina skoka (104-3), uz uvođenje Φ , prema (104-4) svodi se na *izjednačavanje vrednosti funkcije Φ za spregnute dubine h_I i h_{II}* :

$$\Phi(h_I) = \Phi(h_{II}) \quad (104-6)$$

$$S_I + \frac{Q^2}{gA_I} = S_{II} + \frac{Q^2}{gA_{II}} \quad (104-7)$$

Funkcija (104-4) za jedan određeni proticaj je funkcija isključivo od dubine h , kako je to sa (104-5) i napisano. Kada dubina h teži ka beskonačnost i $\Phi(h)$ teži ka beskonačnosti, jer tada $S(h)$ teži ka beskonačnosti (S izražava, kako je objašnjeno, statički momenat preseka u odnosu na osovina u nivou vode). Međutim, i kada h teži ka nuli, Φ teži ka beskonačnosti, jer se u imenitelju drugog sabirka u (104-4) nalazi površina preseka struje A . Prema tome, $\Phi(h)$ mora da ima negde minimum – načelno isto je bilo i kod specifične energije – vidi grafički prikaz $e(h)$ na sl. 92-12 – gde se minimalna vrednost za $e(h)$ ostvaruje za kritičnu dubinu ($h = h_K$). I kod funkcije skoka $\Phi(h)$ minimalna vrednost se postiže takođe za $h = h_K$, što se dokazuje sledećim izlaganjem.

Diferenciranjem (104-4) po h , uz $Q = \text{const}$ dobija se:

$$\frac{d\Phi}{dh} = \frac{dS}{dh} - \frac{Q^2}{gA^2} \frac{dA}{dh} \quad (104-8)$$

Priraštaj statičkog momenta, za priraštaj dubine dh , iznosi:

$$dS = Adh + Bdh \frac{dh}{2} \quad (104-9)$$

gde je Adh priraštaj statičkog momenta zbog toga što se za površinu A osovina u odnosu na koju se računa momenat (a to je linija nivoa u preseku) pomera za dh , a drugi član je priraštaj statičkog momenta koji daje povećanje preseka ($dA = Bdh$), sa težištem na rastojanju $dh/2$ od nivoa. Slika 104-2 može da pripomogne u razjašnjavanju napisanog

sa (104–9). Taj izraz uz zanemarenje drugog sabirka (kao neizmerno male veličine višega reda) daje:

$$\frac{dS}{dh} = A$$

Ovo se uvrštava u (104–8), gde se istovremeno obavi zamena $dA = Bdh$, pa se dobija:

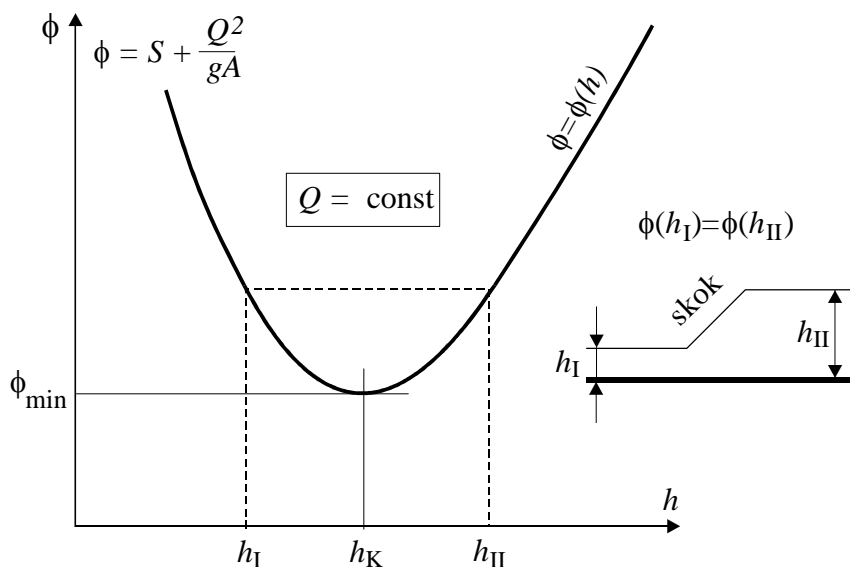
$$\frac{d\Phi}{dh} = A - \frac{Q^2}{gA^2}B$$

Minimalna vrednost za Φ uspostavlja se pri izjednačenju prethodnog sa nulom:

$$\Phi = \Phi_{\min} \quad \text{za} \quad \frac{Q^2 B}{gA^3} = 1 \quad \text{tj. za} \quad Fr = 1$$

odnosno za $h = h_K$ a to je trebalo dokazati.

Sl. 104–3 prikazuje kako izgleda grafikon za $\Phi = \Phi(h)$ za konstantan proticaj i na njemu je naznačen jedan od mogućih parova spregnutih dubina. Za bilo koji par se uspostavlja $h_I < h_K < h_{II}$, što znači da je jedna od spregnutih dubina u burnom, a druga u mirnom režimu –



Slika 104–3 Funkcija skoka Φ za određeni proticaj u prizmatičnom kanalu

takvo rešenje je i trebalo očekivati, jer se tražio prelaz iz burnog u mirno tečenje.

Iz sl. 104–3 uviđa se takođe da je dubina iza skoka veća ako je dubina ispred skoka manja, jer što je dolazeći mlaz tanji, veća je brzina, pa ga je teže zaustaviti, treba veća dubina. Razume se da se ovo odnosi na isti proticaj, a za $Q = \text{const}$ je i nacrtana sl. 104–3.

Skreće se pažnja da sprovedeno izvođenje jednačine skoka dozvoljava i suprotan smer tečenja, jer uzete sile ne zavise od smera tečenja, one na graničnim presecima posmatrane zapremine deluju obe unutrašnjim smerom, ka zapremini. Prema tome, što se primene jednačine i „uravnoteženja sila” tiče, moglo bi se reći da ona daje rešenja za prelaz iz burnog u mirno tečenje, ali i obrnuto. Međutim primena jednačine energije pokazaće da je ispravno rešenje samo ono gde se iz burnog tečenja prelazi u mirno, što se uviđa iz sledećeg rasuđivanja. Ako se rešenje iz jednačine „uravnoteženja sila” unese u jednačinu energije da bi ona odredila izgubljenu energiju, onda za prelaz iz burnog u mirno tečenje, više je energije ispred, nego iznad skoka, čak i znatno više, i to je „izgubljena energija”, koja se troši u skoku za snažno vrtloženje. Da se u skoku zaista gubi energija jasno je sa fizičkog stanovišta, a kasnije će se i računski pokazati.

Za prelaz iz mirnog u burno tečenje, a primenjujući jednačinu skoka, njeno rešenje uvršteno u jednačinu energije dalo bi očigledno neprihvatljiv rezultat: više energije iza nego ispred skoka. Odakle?

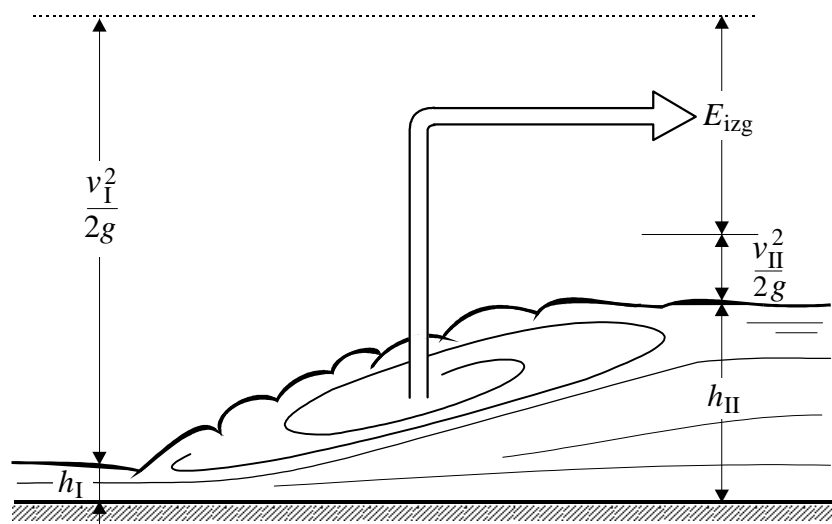
Za prelaz iz burnog u mirno tečenje, izgubljena energija u skoku iznosi:

$$E_{izg} = E_I - E_{II} = h_I + \frac{v_I^2}{2g} - \left(h_{II} + \frac{v_{II}^2}{2g} \right) \quad (104-10)$$

Ovo je i upisano na sl. 104–4. Napominje se da ova jednačina važi za horizontalno dno, kakvo se u razmatranjima i uslovljava.

Poznavanjem dubina h_I i h_{II} , što se dobija iz jednačine skoka, izgubljena energija je prethodnim izrazom potpuno određena, jer poznate dubine znače i poznate preseke struje, a onda i poznate brzine v_I i v_{II} .

Postupak kojim se primenom jednačine „uravnoteženja sila” dolazi do rešenja, a onda se to rešenje nametne jednačini energije da sračuna izgubljenu energiju, omogućava da se do izgubljene energije dođe analitičkim putem, bez ikakvih iskustvenih saznanja proizašlih



Slika 104–4 Snažno vrtloženje u skoku oduzima znatnu energiju koju izražava E_{izg}

iz eksperimentalnih istraživanja. Na žalost, to se može primeniti samo u izuzetnim okolnostima. Naponsko stanje po površini koja zatvara zapreminu na koju se primenjuje jednačina „uravnoteženja sila” treba da bude veoma prosto i lako odredljivo (tako je pretpostavljeno i kod skoka).

U pretežnom broju praktičnih primera do izgubljene energije dolazi se eksperimentalnim putem, odnosno primenom eksperimentalnih rezultata dobijenih za pojedini slučaj, odnosno sve njemu slične slučajeve. U početnim izlaganjima Poglavlja 101, to je i naglašeno, a navedena su svega dva primera u tečenju u cevi gde se do izgubljene energije došlo analitičkim putem, to su, da se ponovi, ulaz u cev uguranu u rezervoar i naglo proširenje (Drugi i Treći primer na kraju Poglavlja 83 – sl. 82–5 i 83–5). Sada se, kao treći primer, dodaje i hidraulički skok.

Skok se može shvatiti kao lokalni gubitak energije koga proizvodi sama struja, čvrste granice ovde ne oblikuju prelaz iz manjeg u veći presek – ovo je naglo proširenje struje, a ne i kanala. Kod cevi (tačnije rečeno: kod provodnika pod pritiskom) promenu u struji mogu da nametnu samo čvrste granice, dok je kod kanala (kod otvorenih tokova), gde se struja obrazuje sa slobodnom površinom, moguća i skokovita

promena preseka struje koju ne prisiljavaju čvrste granice struje – to je upravo razmatrani hidraulički skok.

U tečenju pod pritiskom lokalni gubitak energije prikazivao se skokovitim snižavanjem linije energije kao da se poremećaj dešava u jednom preseku – tako je postupljeno u poglavljima 101 i 102. Opisani način ne zahteva poznavanje dužine na kojoj se oseća lokalni poremećaj tj. ne mora se znati rastojanje između preseka (I) ispred i preseka (II) iza lokalnog poremećaja u kojima je strujanje paralelno i pravolinijsko, normalno na presek. Rečeno je svojevremeno da je taj način veoma pogodan za praksu i prihvaćen, bez obzira na načelne primedbe. I kod skoka može se postupiti na isti način, pa se skok prikazuje kao da se dešava u jednom preseku, a tu se linija energije skokovito spusti. Unapred se ukazuje na sl. 104–11, gde je tako postupljeno.

Mora se primetiti da se dužina na kojoj se oseća lokalni poremećaj u cevi sakrivena u cevi, ne vidi se, dok je kod skoka dužina na kojoj se obrazuje skok vidljiva, pa onda može da se postavi pitanje koliko ona iznosi. Čak ima i praktičnih zadataka gde se mora znati dužina na kojoj se obrazuje skok, jer se gradi objekat u kome se mora smestiti skok, što je predmet kasnijeg primera (sl. 104–12). U tom slučaju odredi se stanje u presecima (I) i (II) prema osnovnoj jednačini skoka (104–3), i odredi se rastojanje među tim presecima, a uticaj trenja se zanemari, jer je zaista zanemarljiv.

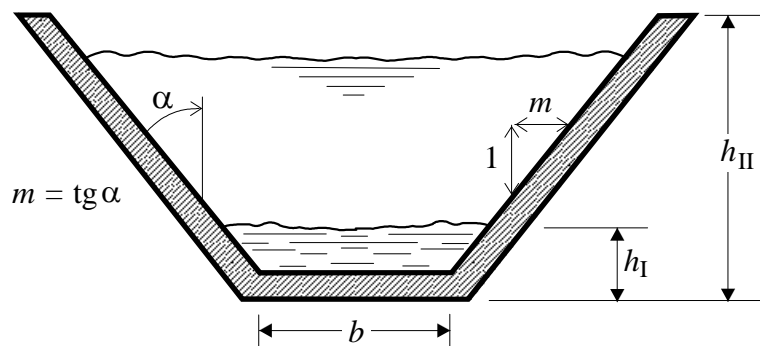
Prethodno nameće određivanje rastojanja između preseka (I) i (II) koje će se nazvati dužina skoka, označena sa L na sl. 104–1. Određivanje te dužine kasnije će se razmatrati.

* * *

Računanje skoka se svodi na to da se za poznati proticaj i jednu poznatu spregnutu dubinu sračuna druga. Ili, uz obe poznate dubine računa se proticaj. Račun se sprovodi primenom jednačine (104–7). Za trapezni presek kanala ona se svodi na:

$$\frac{bh_I^2}{2} + \frac{mh_I^3}{3} + \frac{Q^2}{g(bh_I + mh_I^2)} = \frac{bh_{II}^2}{2} + \frac{mh_{II}^3}{3} + \frac{Q^2}{g(bh_{II} + mh_{II}^2)} \quad (104-11)$$

Sa b je označena širina dna kanala, a sa m nagib bokova (vidi sl. 104–5), pa je statički momenat S jednak zbiru prva dva člana (prvi



Slika 104–5 Oznake za kanal trapeznog preseka

član je statički momenat srednjeg pravougaonog dela, a drugi se odnosi na trougaone površine uz bokove), dok je u trećem članu presek A izražen sa $bh + mh^2$.

Jednačina se ne može rešiti neposredno, nego postepenim približavanjem.

Za pravougaoni presek kanala može se napisati neposredna veza između dubina, što će se i uraditi u narednom odeljku (II).

* * *

Sem upoređivanja spregnutih dubina u praktičnim zadacima potrebno je oceniti i dužinu skoka, označenu sa L na slikama 104–1 i 104–4. Jednačina koja se koristila za rešavanje skoka, nažalost, ne pruža mogućnost da se odredi dužina L na kojoj se obrazuje skok, a za to nema raspoložive jednačine.

Može se postaviti pitanje kako se određuje dužina skoka. Odgovor bi bio da je to dužina na kojoj se obavi prelazak iz mirnog u burno kretanje, sa dubine h_I na dubinu h_{II} , gde je na početku i na kraju skoka strujanje paralelno i pravolinijsko, sa rasporedom brzine kao u nepomećenom stanju. Na dužini L se smire svi uticaji skoka i iza njega se tečenje zanemarljivo razlikuje od onoga koje bi bilo da nema skoka, nivo je smiren, vrtloženja su uglavnom završena.

Sa praktičnog stanovišta određivanje dužine skoka bitno je u onim zadacima, gde se baš određuje dužina objekata u kome mora da se obrazuje skok (da se sa burnog tečenja pređe u mirno), i da iz toga objekta izlazi smirena struja, čije sposobnosti za odnošenje dna i bokova

kanala nisu primetno veće od onih koje bi imala struja iza objekta kada se u njoj ne bi osećao uticaj skoka. Praktičan primer takvog objekta razmatraće se kao Drugi primer u Odeljku (III) ovoga Poglavlja.

Za kanal pravougaonog poprečnog preseka postoje obimna eksperimentalna istaživanja o kojima će biti još reči u narednom Odeljku (II). Iz njih proizilazi da se za praktične potrebe može računati da je dužina skoka:

$$L = 5h_{II} \quad (104-12)$$

tj. petostruka dubina iza skoka.

Iako se navedeni obrazac odnosi na kanal pravougaonog poprečnog preseka, može se primeniti i na trapezni presek, ako se on mnogo ne razlikuje od pravougaonoga. Može se primeniti uz uslov da širina B nivoa vode u preseku (II) ne bude veća od dvostruke širine b dna trapeza ($B \leq 2b$). Izlaganja se nastavljaju obrazloženjem prethodnog navoda.

Sile u preseku (II) koje su sposobne da zaustave burno tečenje, i obrazuju hidraulički skok, su sila pritiska i komponenta inercijalne „sile” napisane na desnoj strani izraza (104-1), a kasnije određene desnom stranom jednačine (104-3). Uviđa se da će dejstvo tih sila biti isto, upravo jednake vrednosti, u dva primera, ako su u oba primera vrednosti statičkog momenta S_{II} i površine A_{II} poprečnog preseka podjednake – naravno za isti proticaj. Neka prvi primer bude trapezni presek sa širinom nivoa vode jednakoj dvostrukoj širini dna ($B = 2b$), što je granica prema prethodnom uslovljavanju. Drugi slučaj neka bude pravougaoni presek sa istim vrednostima za S_{II} i A_{II} . Izjednačavanje statičkih momenata za oba preseka daje:

$$\frac{2}{3}b_t h_t^2 = \frac{1}{2}b_p h_p^2$$

gde se leva strana odnosi na trapezni, a desna na pravougaoni presek, b_t označava širinu dna, h_t dubinu u trapeznom preseku, dok su b_p i h_p širina odnosno dubina u pravougaonom preseku. Izjednačavanje površina preseka daje:

$$\frac{3}{2}b_t h_t = b_p h_p$$

Napisane jednačine čine sistem kojim se za zadate vrednosti b_t i h_t određuju nepoznate b_p i h_p dobija se:

$$h_p = \frac{8}{9}h_t \quad b_p = \frac{27}{16}b_t$$

U preseku (I) ispred skoka komponenta „inercijalne sile” je $I_I = \rho Q^2/A_I$, a upoređenje trapeznog i pravougaonog preseka ima smisla za isti proticaj koji nadire u burnom tečenju. Pored toga, može se pretpostaviti da je brzina v_I za oba slučaja ista, kao posledica iste visinske razlike koja je uzrokovala tu veliku brzinu u burnom tečenju, što znači i istu površinu preseka A_I , pa je onda i komponenta inercijalne „sile” u oba slučaja podjednake vrednosti. U istom preseku deluje i sila pritiska P_I , koja je srazmerna stičkom momentu S_I , a on je proizvod površine preseka A_I (a ova je, prema prethodnom navodu, u oba slučaja ista) i rastojanja h_0 težišta preseka od nivoa vode. Razlika tih sila za razmatrana dva slučaja (trapezni i pravougaoni presek) je samo u razlici u rastojanjima težišta od nivoa vode, a ta razlika nije velika, jer za malenu dubinu u odnosu na širinu dna trapezni presek se malo razlikuje od pravougaonog, a takav odnos dubine i širine može se očekivati u preseku (I). Pored toga, treba naglasiti da je sila P_I mnogo manja od sile I_I , kao i od P_{II} , pa ona malo utiče na uravnoteženje sila, a onda je pogotovo beznačajan uticaj razlike sila P_I za posmatrana dva slučaja.

Iz prethodnih raspravljanja može se zaključiti da je zbir sila u preseku (II) za oba slučaja podjednak ako su odnosi dubina (h_p/h_t) i širina dna (b_p/b_t) određeni napisanim izrazima i da su sile u preseku (I) približno iste vrednosti, pa su sposobnosti za obrazovanje skoka u oba slučaja isti. Ovo naravno, važi za isti proticaj i za prihvaćeni uslov da u trapeznom preseku širina nivoa ne bude veća od dvostruke širine dna.

Kao zapremina u kojoj se obavlja proces smirivanja burnog tečenja može se shvatiti zapremina iznad nivoa vode u preseku (I). Tačan iznos te zapremine ne može se odrediti jednačinom koja se koristila, a druge raspoložive nema da se odredi linija nivoa u skoku, što je već svojevremeno objašnjeno. Stoga se barem kao pogodan pokazatelj te zapremine može uzeti razlika $A_{II} - A_I$ između preseka iza i ispred skoka pomnožena sa njegovom dužinom L . Ta zapremina je nešto veća kod trapeznog preseka, jer se u oba slučaja računa sa dužinom $L = 5h_{II}$, a dubina h_{II} je veća kod trapeznog, jer je prema ranijem računu $h_t/h_p = 9/8$, dok je razlika površina preseka u oba slučaja ista.

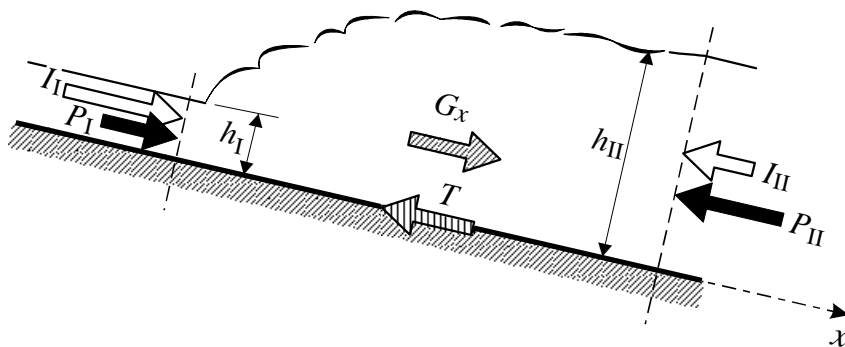
Ako se prihvate prethodna rasuđivanja, ona bi dovela do zaključka da je za smirivanje burnog tečenja u skoku veći raspoloživi prostor kod trapeznog preseka (nego kod pravougaonog). Međutim, ta na izgled dopunska sigurnost je dobro došla, jer može da posluži da naknadi ono

što može uneti sumnja da je kod trapeznog preseka manja mogućnost za razvoj skoka, jer je manja širina nivoa ispred skoka, a odatle se začinje skok. (Širina nivoa je manja kod trapeznog preseka, jer se pri malo dubini, širina nivoa malo razlikuje od širine dna, a za širinu dna je sračunato da je manja kod trapeznog preseka od širine pravougaonog.) Stoga je i razumljiv prethodno postavljeni uslov da širina nivoa iza skoka ne bude veća od dvostruke širine trapeza ($B \leq 2b$).

* * *

Do sada je raspravljao skok u kanalu sa horizontalnim dnom, rešenje je proizašlo iz jednačine uravnoteženja sila u pravcu strujanja (to je bio horizontalni pravac), a sila trenja je bila zanemarena. Za skok na nagnutom dnu kanala u pravcu strujanja (u kome deluju sile u preseccima: P_I, P_{II}, I_I, I_{II}) deluje i komponenta sile težine (označena sa G_x na sl. 104–6). O toj sili treba voditi računa ako znatno nadmašuje silu trenja između čvrstih granica i fluida, u oblasti skoka (ona je označena sa T na slici, a ranije je oglašena zanemarljivom), jer se razlika $G_x - T$ uvrštava u uravnoteženje sa silama u preseccima.

Uravnotežuju se sile koje deluju u pravcu strujanja, nagnutom za ugao α prema horizontali, pa su poprečni presecc, postavljeni normalno na pravac strujanja, nagnuti prema vertikalni za isti ugao α . Sila pritiska je jednaka $\gamma S \cos \alpha$, gde je S statički momenat za presek, u odnosu na osu u nivou, a računat sa dubinom h koja se meri u pravcu



Slika 104–6 Za skok na nagnutom dnu, komponenta težine (G_x) u pravcu strujanja uzima se u obzir ako nije zanemarljiva u odnosu na silu u preseccu ($P_I + I_I$)

normalnom na strujanje. Ako je $\sin \alpha < 0, 1$, o nagnutosti preseka ne treba voditi računa, jer je $\cos \alpha$ blizak jedinici. Inercijalna „sila” u preseku računa se na uobičajeni način – jednaka je ρQv . Sila pritiska kojim dno deluje na fluid usmerena je normalno na pravac strujanja i ne ulazi u uravnoteženje sila.

Uzima se u razmatranje slučaj pod sledećim okolnostima: iza skoka tečenje je jednoliko sa dubinom h_{II} (dubina kojom završava skok), a nagib dna je I_D , i taj nagib je i ispod skoka. Dakle, skok je u kanalu nagiba I_D , a od skoka je jednoliko tečenje sa normalnom dubinom $h_N = h_{II}$.

Za navedeni slučaj komponenta sile težine od preseka (I) do preseka (II) tj. na dužini prostiranja skoka je manja od $\gamma L A_{II} I_D$, jer bi ta komponenta bila tolika da je poprečni presek struje duž celoga skoka jednak A_{II} , a on jednak A_{II} na kraju skoka, a celom dužinom skoka je manji (raste od A_I do A_{II}).

Sila trenja je pak veća od $\gamma L A_{II} I_D$ jer bi toliko iznosila da je dužinom skoka L jednoliko tečenje sa presekom A_{II} i brzinom v_{II} , a duž skoka preseci su manji, a brzine veće, što uzrokuje veće trenje.

Prethodna dva navoda dovode do zaključka da je komponenta težine nedovoljna da podmiri trenje, što znači da zanemarenje obe sile daje rezultat koji je kako se obično kaže na „strani sigurnosti”. Jasno je da je za horizontalno dno ta sigurnost još i veća, jer tada celokupna sila trenja doprinosi smirenju burnog tečenja. Treba naglasiti da je ipak uticaj trenja beznačajan.

Prethodni zaključak o nedovoljnosti komponente sile težine G_x da savlada trenje za posmatrane uslove govore da nagib dna I_D može biti čak i veći od onoga koji odgovara jednolikom tečenju sa dubinom h_{II} pa da komponenta težine ne savlada trenje.

Svakako da bi za znatno veće nagibe komponenta težine imala i znatan uticaj, dobila bi se veća dubina h_{II} iza skoka, jer treba povećati silu pritiska sa nizvodne strane da bi se naknadio uticaj težine usmeren nizvodno. Ovo, dakako, važi za nagib dna kojim se dno spušta nizvodnim smerom. Ako se nizvodnim smerom dno penje, ako je kanal u tzv. „kontra nagibu”, onda i sila težine smiruje burno tečenje i treba manja dubina h_{II} na kraju skoka (manja od one za skok na horizontalnom dnu).

Čim utiče težina mora se znati oblik skoka, upravo njegova zapremina, a to se ne može odrediti analitičkim putem, preostaju samo

iskustvena saznanja. Grubo se, doduše, može oceniti koliki je uticaj težine jer se može proceniti zapremina vode u skoku, između preseka (I) i (II).

II HIDRAULIČKI SKOK U KANALU PRAVOUGAONOG PRESEKA

Razmatranja u ovom Odeljku (II) ograničavaju se na hidraulički skok u kanalu pravougaonog preseka, što će omogućiti da se skok u tom kanalu podrobnije, opširnije, i određenije, razmotri. Razlozi za to su sledeći. Prvo, za takav kanal su izrazi veoma jednostavni, pa se analiza lako sprovodi, a načelni zaključci iz nje važe i za svaki prizmatični kanal. Drugo, u praktičnim zadacima skok je najčešće u pravougaonom kanalu.

* * *

Već je rečeno da se za pravougaoni kanal može napisati neposredna veza između spregnutih dubina h_I i h_{II} . Jednačina (104-11), za $m = 0$ (to je pravougaoni presek) daje:

$$\frac{1}{2} (h_{II}^2 - h_I^2) = \frac{Q^2}{gb^2} \left(\frac{1}{h_I} - \frac{1}{h_{II}} \right) \quad (104-13)$$

Koristeći jednačinu (92-24), namenjenu pravougaonom kanalu kod koga su širina dna i širina struje u nivou iste ($B = b$), u prethodnoj jednačini zamenjuje se Q^2/gb^2 sa h_K^3 , a uz to se jednačina deli sa $h_{II} - h_I$, pa se dobija:

$$\frac{1}{2} (h_I + h_{II}) = \frac{h_K^3}{h_I h_{II}}$$

što se može napisati u vidu rešive kvadratne jednačine

$$h_{II}^2 + h_I h_{II} - 2 \frac{h_K^3}{h_I} = 0$$

Za jednu poznatu dubinu (h_I), uz poznat proticaj (poznato h_K), druga spregnuta dubina iznosi:

$$h_{II} = \frac{h_I}{2} \left(\sqrt{1 + 8 \frac{h_K^3}{h_I^3}} - 1 \right) \quad (104-14)$$

Pri pisanju ove jednačine nije uslovljeno koja je dubina ispred, a koja iza skoka, jer to nije uslovljeno ni jednačinom (104–13) za skok u pravougaonom kanalu, a ni jednačinom (104–3) za bilo kakav prizmatični kanal. Proizvoljnost koja je dubina h_I , a koja h_{II} (ispred ili iza skoka) razjašnjena je ranije (za jednačinu „uravnoteženje sila” nije uslovni smer strujanja). Prema tome, može se napisati i jednačina koja izražava h_I :

$$h_I = \frac{h_{II}}{2} \left(\sqrt{1 + 8 \frac{h_K^3}{h_{II}^3}} - 1 \right) \quad (104-15)$$

Ne treba smetnuti sa uma da ova razmatranja o skoku pretpostavljaju horizontalno dno kanala, pa se to odnosi i na određene dubine h_I i h_{II} za pravougaoni kanal.

Deljenjem obe strane jednačine (104–14) sa h_I , dobiće se bezdimenzionalne veličine na obe strane:

$$\frac{h_{II}}{h_I} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8 \frac{h_K^3}{h_I^3}} - 1 \right) \quad (104-16)$$

h_K^3 se može zameniti sa Q^2/gb^2 , što dozvoljava malo pre već pomenuta jednačina (92–24), pa se odnos h_K^3/h_I^3 može izraziti:

$$\frac{h_K^3}{h_I^3} = \frac{Q^2}{gb^2 h_I^3} = Fr_I \quad (104-17)$$

Fr_I je Frudov broj za presek (I), a prethodno izjednačavanje srednjeg izraza sa njime dozvolila je jednačina (92–22).

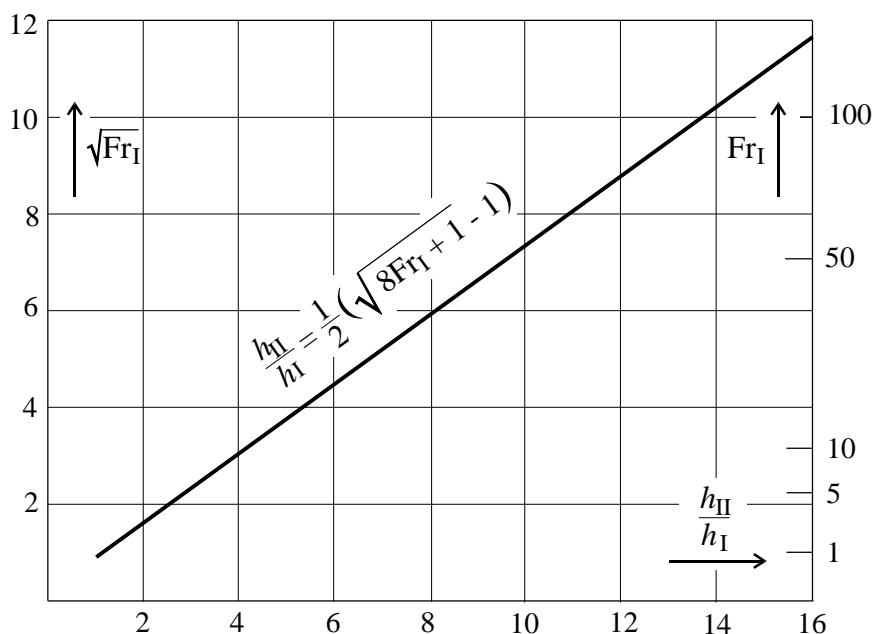
Uvrštavanjem Fr_I umesto h_K^3/h_I^3 u jednačinu (104–16) dobija se:

$$\frac{h_{II}}{h_I} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr_I} - 1 \right) \quad (104-18)$$

Ovaj izraz ukazuje da postoji jednoznačna veza između h_{II}/h_I i Fr_I – grafički prikaz zavisnosti h_{II}/h_I od $\sqrt{Fr_I}$ dat je slikom 104–7.

* * *

Izgubljena energija u hidrauličkom skoku u pravougaonom kanalu odrediće se iz izraza (104–10) vodeći računa da su za pravougaoni kanal brzine v_I i v_{II} , a za proticaj Q , jednake Q/bh_I i Q/bh_{II} . Nadalje,



Slika 104–7 Odnos dubina iza i ispred skoka h_{II}/h_I i zavisnosti od Froudivog broja ispred skoka – za pravougaoni presek kanala

koristiće se i jednakost $h_K^3 = Q^2/gb^2$, koja je korišćena i malo pre, pri prelazu iz (104–13) u (104–14). Sa zamenama prema ovim vezama, jednačina (104–10) se svodi na:

$$E_{izg} = h_I - h_{II} + \frac{Q^2}{2gb^2} \left(\frac{1}{h_I^2} - \frac{1}{h_{II}^2} \right)$$

Zamenom $Q^2/2gb^2$, korišćenjem (104–13), dobija se:

$$E_{izg} = h_I - h_{II} + \frac{1}{4} \frac{(h_I + h_{II})(h_{II}^2 - h_I^2)}{h_I h_{II}}$$

Sređivanje prethodnog daje:

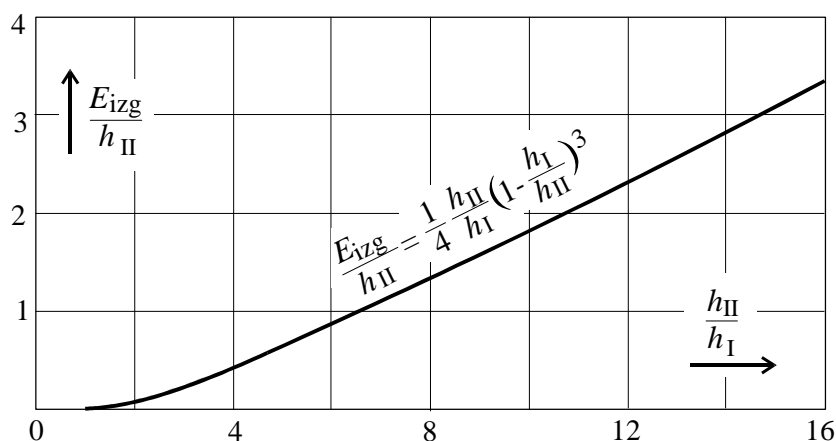
$$E_{izg} = \frac{1}{4} \frac{(h_{II} - h_I)^3}{h_I h_{II}} \quad (104-19)$$

Pogodno je izgublenu energiju izraziti u odnosu na dubinu iza skoka

– deljenjem prethodnog izraza sa h_{II} i sređivanjem dobija se:

$$\frac{E_{izg}}{h_{II}} = \frac{1}{4} \frac{h_{II}}{h_I} \left(1 - \frac{h_I}{h_{II}}\right)^3 \quad (104-20)$$

Prethodni izraz ukazuje na vezu bezdimenzionalnih veličina E_{izg}/h_{II} i h_{II}/h_I , čiji je grafikon dat slikom 104–8.

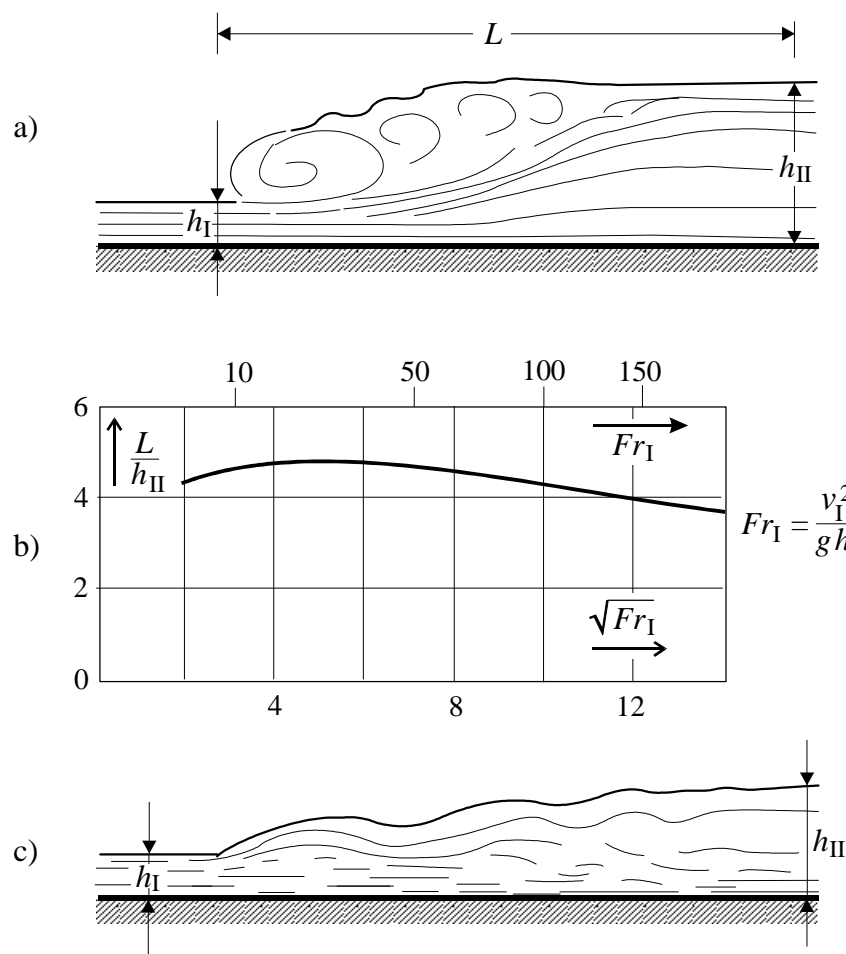


Slika 104–8 Relativna vrednost izgubljene energije u skoku (u odnosu na dubinu h_{II} iza skoka) u zavisnosti od odnosa dubine iza i ispred skoka (h_{II}/h_I) – za pravougaoni presek kanala

* * *

Eksperimentalna istraživanja hidrauličkog skoka u pravougaonom kanalu pokazuju da se dužina skoka L na kojoj se obrazuje skok može izraziti u zavisnosti od Fr broja ispred skoka.

Rezultat eksperimentalnih istraživanja dužine hidrauličkog skoka prikazuje slika 104–9b, gde je odnos dužine skoka prema dubini iza skoka prikazan u funkciji kvadratnog korena Frudovog broja ispred skoka. To se odnosi na tzv. „strmi skok” gde se nagao prelaz iz dubine h_I na dubinu h_{II} obavlja vrtložnom oblašću koja zahvata celu zapreminu iznad dubine h_I (sl. 104–9a). Za relativno malen porast dubine, gde je $h_{II} < 2h_I$, a to prema (104–18) znači $Fr_I < 3$, obrazuje se tzv. „talasasti” (sl. 104–9c) kod koga dužina L je i duža od petostruke dubine iza skoka, ali se poremećaji osećaju samo uz nivo, sve se lako i postepeno smiruje, pa onda dužina skoka i nema veći praktični značaj.



Slika 104–9 a) „Strm skok” sa naglim povećanjem dubine uz snažno vrtloženje koje zahvata skoro celu masu vode između preseka (I) i (II), b) odnos dužine skoka i dubine iza njega (L/h_{II}) u zavisnosti od Frudovog broja ispred skoka Fr_I , c) ’talasasti skok’ obrazuje se pri $Fr_I < 3$ (tj. $h_{II} < 2h_I$), dužina skoka L je veća od $5h_{II}$, ali je poremećaj znatno manjeg inteziteta od onoga pod a) i oseća se samo uz površinu vode

Uz dužinu skoka treba se podsetiti da je iza obrasca (104–12) rečeno da se on, iako potiče iz eksperimentalnih iztraživanja za pravougaoni kanal, može primeniti i na trapezni, ali se preporučuje primena na slučajevne gde širina nivoa vode nije veća od dvostruke širine dna.

DODATAK

U nastavku će se razmotriti primena dimenzionalne analize na hidraulički skok u kanalu pravougaonog preseka sa horizontalnim dnom.

Dubina h_{II} iza skoka zavisi od dubine i brzine ispred skoka (h_I, v_I), od gustine ρ i od težine, koju će predstavljati gravitaciono ubrzanje g (koje unosi uticaje težine). h_{II} zavisi i od širine kanala b . Veza dimenzionalnih veličina, napisana uopšteno sa (62–10), za ovaj slučaj, gde je $\phi = h_{II}$, svodi se, prema navedenom, na:

$$h_{II} = h_{II}(h_I, v_I, \rho, g, b) \quad (104-21)$$

Pošto pojavu skoka karakteriše izuzetna turbulentnost i veoma nemirna površina vode, može se pretpostaviti da su uticaji viskoznosti i kapilarnosti (površinskog napona) zanemarljivi, pa su iz (62–10) izostavljeni koeficijenti viskoznosti μ i površinskog napona δ , a svakako otpada modul stišljivosti E (jer se razmatra nestišljiv fluid). Granični uslovi su sadržani u h_I, v_I i b , a prve dve (od ove tri) veličine, uz gustinu ρ , uzeće se za osnovne veličine, pa veza (104–21) dobija bezdimenzionalnu zamenu, po ugledu na (62–11):

$$\frac{h_{II}}{h_I} = \frac{h_{II}}{h_I} \left(\frac{gh_I}{v_I^2}, \frac{b}{h_I} \right) \quad (104-22)$$

jer su iz veze (104–21) izostale osnovne veličine (h_I, v_I, ρ) a preostale tri su dobile bezdimenzionalne zamene. Moglo se u početku izlaganja, umesto (104-21) napisati

$$h_{II} = h_{II}(h_I, v_I, g, b) \quad (104-23)$$

Kako je v_I jednako Q/bh_I , prvi član u zagradi u (104–22) je jednak $1/Fr_I$, što se zaključuje iz (104–17). Ako se uz to prihvati tumačenje da se hidraulički skok u pravougaonom kanalu može razmatrati kao ravan-ski zadatak (da je odnos dubina h_I i h_{II} nezavisan od širine b kanala), veza (104–22) svodi se na:

$$\frac{h_{II}}{h_I} = \frac{h_{II}}{h_I}(Fr_I) \quad (104-24)$$

Dimenzionalna analiza je broj od 6 veličina koje čine vezu (104–21) svela na 3 u (104–22), a prihvatanjem pretpostavke da je zadatak ravanski, problem se sveo na svega dve međusobno vezane veličine u (104–24). Dimenzionalna analiza nije moćna da odredi kakva je funkcija (104–23), da je izrazi tako da se h_{II}/h_I može sračunati ako je poznata vrednost za Fr_I . To i nije svrha primene dimenzionalne analize, ona je smanjila broj veličina koje su međusobno povezane, i eksperimentalnim istraživanjima poverila veoma uprošten zadatak – ona treba samo da odrede funkciju (104–24). Međutim, postoji i analitičko rešenje ispisano sa (104–18) i ono je potpuno u skladu sa vezom (104–24) – i u tom analitičkom rešenju ne pojavljuje se širina kanala jer izvođenje koje je dovelo do (104–18) odgovara ravanskom zadatku. Eksperimentalni rezultati potvrdili su analitička rešenja.

Razmatranje dužine skoka L (vidi sl. 104–9) dimenzionalnom analizom najpre ispisuje zavisnost L od dimenzionalnih veličina:

$$L = L(h_I, v_I, h_{II}, \rho, g) \quad (104-25)$$

Ovde je u odnosu na (104–21) izostavljena širina kanala b , jer se zadatak smatra ravanskim, a L zavisi od obe spregnute dubine (h_I, h_{II}).

Bezdimenzionalna zamena za prethodnu vezu, uz osnovne veličine h_I, v_I, ρ , je:

$$\frac{L}{h_I} = \frac{L}{h_I} \left(\frac{gh_I}{v_I^2}, \frac{h_{II}}{h_I} \right) \quad (104-26)$$

Ako se želi dužina L izraziti u odnosu na dubinu h_{II} iza skoka (a ne u odnosu na dubinu h_I ispred skoka), postupiće se na sledeći način: Umesto L/h_I i h_{II}/h_I može se uzeti prva bezdimenzionalna veličina podeljena sa drugom, a to daje L/h_{II} , a onda otpada jedna od uzetih u postupak, ili L/h_I , ili L/h_{II} , jer broj bezdimenzionalnih veličina mora ostati isti. Izostaviće se L/h_I , pa će se tako u prethodnom izrazu L/h_I u stvari zameniti sa L/h_{II} , a to se i želelo. Umesto (104–26) dobija se, dakle:

$$\frac{L}{h_{II}} = \frac{L}{h_{II}} \left(\frac{gh_I}{v_I^2}, \frac{h_{II}}{h_I} \right)$$

Prvi član u zagradi je Fr_I što je već korišćeno pri prelazu iz (104–22) u (104–24). Isto se može uraditi i ovde. Treba još iskoristiti okolnost da su Fr_I i h_{II}/h_I jednoznačno vezani kako to pokazuje (104–24), pa

određena vrednost za Fr_I znači i potpuno određenu vrednost za h_{II}/h_I . Prema tome, dovoljno je povezati L/h_{II} sa Fr_I , pa se konačno piše:

$$\frac{L}{h_{II}} = \frac{L}{h_{II}} (Fr_I) \quad (104-27)$$

Jasno je da se analizom dimenzija ne može ništa više postići (iako je postignuto veoma mnogo), odnosno ne može se odrediti kakva je prethodna funkcija. Analitičkog rešenja nema, ali postoje eksperimentalni podaci koji se za sve skokove uklapaju u grafikon nacrtan na sl. 104-9.

Šta se podrazumeva pod dužinom skoka objašnjeno je neposredno pre ovih razmatranja o primeni dimenzionalne analize. Može se samo dodati da dužina skoka L računata po (104-12) ne znači da je to dužina dovoljna da se na njenom kraju turbulentne fluktuacije svedu na takvu meru da se u njima više ne oseća uticaj skoka. Dužina na kojoj će se potpuno „ugasiti” („izumreti”) pojačana turbulencija izazvana skokom je mnogo duža, nekoliko puta duža od sračunatog po (104-12). Međutim, primetan nemir u nivou vode i u strujanju, kako je ranije objašnjeno, završi se na dužini računatoj po (104-12).

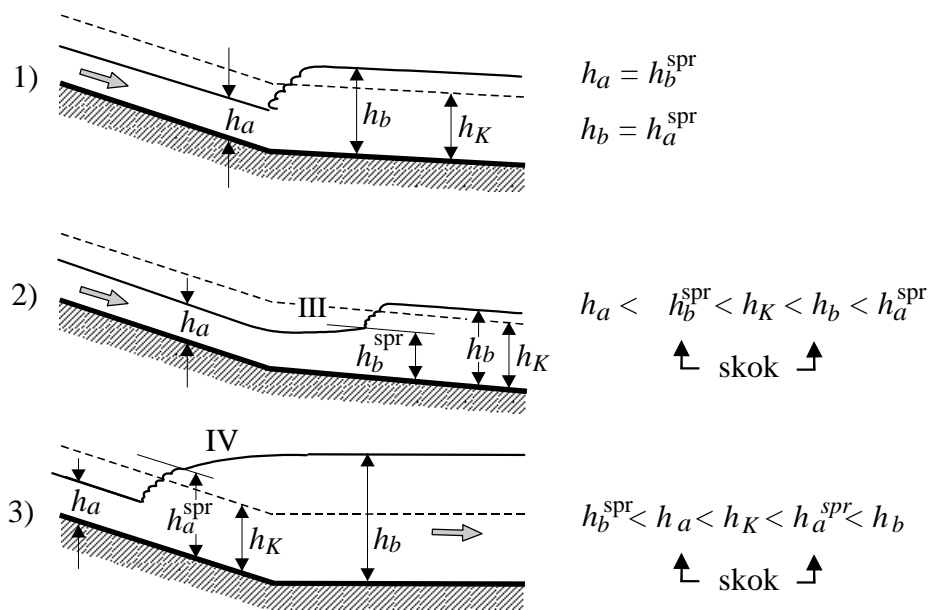
* * *

Za hidraulički skok se može reći da je to izrazita i očigledna pojava koja se odvija po Frudovoj sličnosti. Zbog razvijenog vrtloženja uticaji viskoznosti i kapilarnosti su zaista zanemarljivi, što se sa pravom pretpostavilo za pisanje (104-21) gde ulaze uticaji težine i inercijalni. Pod isključivim dejstvom težine skok ne bi mogao stajati. Kako površina vode može da bude strma ako nema drugih uticaja? Inercijalni uticaji „drže” skok.

III

PRIMERI HIDRAULIČKOG SKOKA U PRAKTIČNIM ZADACIMA

Za *Prvi primer* pojave hidrauličkog skoka, i njegovog uklapanja u tok, uzet je kanal konstantnog građevinskog poprečnog preseka (prizmatični kanal), koji iz većega nagiba dna (u kome je jednoliko tečenje burno) prelazi u manji nagib dna (gde je jednoliko tečenje mirno) – sl. 104-10.



Slika 104–10 Tri mogućnosti prelaza iz burnog u mirno tečenje pri promeni nagiba kanala. U sva tri slučaja h_a i h_b su normalne dubine za uzvodnu, odnosno nizvodnu jedinicu, h_k je kritična dubina za obe jedinice ($h_a < h_k < h_b$)

U ranijem primeru (u Poglavlju 92, Odeljak II) prikazano je da je prelaz iz mirnog u burno tečenje postepen, kroz kritičnu dubinu (sl. 92–11) dok je ovde (sl. 104–10) skokovit, jer se prelazi iz burnog u mirno tečenje.

Pretpostaviće se da su obe deonice kanala sa sl. 104–10 toliko dugačke da se uticaji sa uzvodne strane (koji bi mogli poremetiti normalnu dubinu) na uzvodnu (gornju) deonicu ne prostiru do njenog kraja (do preloma dna), niti da uticaji sa nizvodne strane za nizvodnu (donju) deonicu ne dopiru takođe do preloma dna. Ovo znači da se zadatak svodi na prelazak sa jedne normalne dubine na drugu, a pitanje je gde i kako.

Postoje sledeća rešenja (1, 2 i 3), prikazana na sl. 104–10.

1. Slučajno su normalne dubine za uzvodnu i nizvodnu deonicu (označavaju se sa h_a i h_b) baš tolke da se sprežu u hidraulički skok:

$$h_a = h_b^{\text{spr}} \quad h_b = h_a^{\text{spr}}$$

Ako se to ostvari, onda se skok javlja u prelomu dna. Dodavanje gornjeg indeksa „spr” na napisanu dubinu znači njoj spregnutu dubinu (tako, je na primer, h_b^{spr} dubina koja se spreže sa h_b). (Ovakvo označavanje ne treba da unese zabunu, s obzirom da su u prethodnim izlaganjima u Odeljcima I i II, spregnute dubine označavane sa h_I i h_{II} .)

Da dubine h_a i h_b budu baš međusobno spregnute je slučajna podudarnost, koja se može samo slučajno ostvariti. Međutim, taj slučaj treba shvatiti kao razgraničenje dve naredne mogućnosti: (2) i (3). U jednoj od njih naći će se rešenje za bilo koji praktični zadatak. Naime, skok može da bude u donjoj ili gornjoj deonici kanala zavisno da li je dubina h_b premalena da zaustavi burno tečenje, ili je za to potrebna dubina manja od nje.

2. Dubina h_b je premalena da smiri nailazeću burnu struju dubine h_a , pa burno tečenje prodire u nizvodnu deonicu, gde se dubina postepeno povećava sa h_a na h_b^{spr} (linijom tipa III na sl. 92–5) i tek onda dubina h_b može skokom da zaustavi nadiruće burno tečenje. Uslov za ovo je:

$$h_b < h_a^{\text{spr}} \quad \text{a to znači i} \quad h_a < h_b^{\text{spr}}$$

Ovaj slučaj može se nazvati „odbačeni skok”, jer je odbačen od preloma dna – „odbačeno” je (potisnuto je) mirno tečenje na početku nizvodne deonice.

Ranije, na sl. 92–6, prikazano je da se iz burnog tečenja po liniji III mora skokom preći u mirno tečenje. To se ovde i ostvaruje – (2) na sl. 104–10.

3. Nailazeću burnu struju, sa dubinom h_a , smiruje dubina h_a^{spr} , koja je manja od dubine h_b , odnosno dubina h_b je prevelika za smirivanje nailazećega burnog strujanja, pa mirno strujanje prodre u uzvodnu deonicu da tu „presretne” burno tečenje. Ovaj slučaj određen je sa:

$$h_b > h_a^{\text{spr}} \quad \text{a to znači i} \quad h_a > h_b^{\text{spr}}$$

U ovom slučaju odgovarajući naziv je „navučeni skok”, on je „navučen” na uzvodnu deonicu jer je mirno tečenje bilo u stanju da

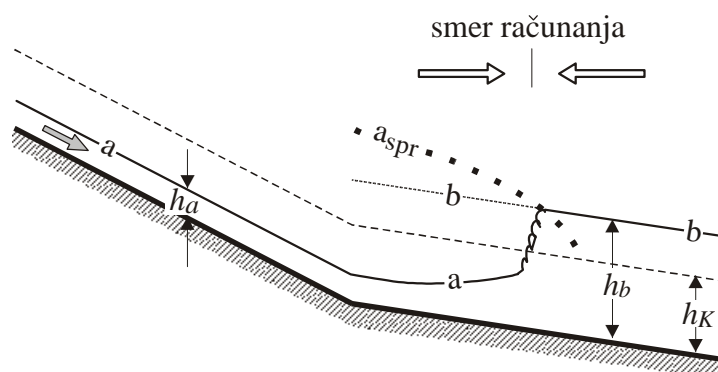
potisne burno sa preloma dna. Skok je nagao prelaz sa dubine h_a na njoj spregnutu h_a^{spr} , a sa ove se linijom tipa IV sa sl. 92–7, postepeno (kontinualno) prelazi na dubinu h_b .

Prelaz na liniju IV iz burnog tečenja moguće je ostvariti samo skokom – to se pokazalo i ovde, a već je načelno prikazano slikom 92–8.

* * *

Zadatak koji se razmatrao imao je jednostavne granične uslove, jer se pretpostavilo da se radi o prelazu iz jedne normalne dubine u drugu. U praktičnim zadacima okolnosti ne moraju da budu tako jednostavne, upravo mogu da budu složenije – sl. 104–11. Donja deonica je pod usporom, usled nizvodnog graničnog uslova koji to nameće. Računanjem uzvodnim smerom određena je linija „b” pa se dolazi do dubine h_b koja se uspostavlja na prelomu dna, pod uslovom da burno tečenje ne prodire iz gornje deonice u donju. U gornjoj deonici, od uzvodnog graničnog uslova nizvodnim smerom (jer je tečenje burno) računaju se dubine „a”. Tako se dolazi do dubine h_a na prelomu dna pod uslovom da je ne preklapa uticaj sa nizvodne strane.

Dve sračunate dubine na prelomu dna ne moraju biti normalne, jer deonica kanala ne mora biti toliko dugačka da se na prelomu dna ne



Slika 104–11 Linija „a” u burnom tečenju računa se nizvodnim smerom (od uzvodnog graničnog uslova), a linija „b” uzvodnim smerom (od nizvodnog graničnog uslova). Tako se dolazi do dubina h_a i h_b . Pošto je $h_b < h_a^{spr}$ burno tečenje prodire u nizvodnu deonicu do preseka gde ga skok zaustavlja.

osećaju uticaji sa početka gornje i kraja donje deonice.

Opisanim postupkom dolazi se, dakle, do dve dubine na prelomu dna – h_a i h_b – (prva je dobijena računanjem uzvodnim smerom od nizvodnog kraja, a druga računanjem nizvodnim smerom od uzvodnog graničnog uslova). Njih treba uporediti i utvrditi, na isti način kao i malo pre, na prikazanom na sl. 104–10, da li je dubina dobijena sa nizvodne strane toliko velika da potisne burno kretanje koje nadire i da se skok obrazuje na uzvodnoj deonici. Ili je pak ta dubina nemoćna da spreči prodiranje burnog tečenja u nizvodnu deonicu, pa se skok obrazuje u nizvodnoj deonici. Pretpostaviće se da se ostvaruje ova druga mogućnost ($h_b < h_a^{spr}$) – vidi sl. 104–11.

Burno tečenje prodire u nizvodnu deonicu i računa se nizvodnim smerom, linijom III sa sl. 92–5 nastavlja se linija dubina „a”. Za dubinu u svakom preseku sračuna se spregnuta dubina i na osnovu toga računa nacrtana je linija „a^{SPR}” i na mestu gde se ta linija seče sa „b” obrazuje se hidraulički skok.

Do položaja skoka može se doći ako se ucrtta linija „b_{spr}” (ona za svaki presek prikazuje dubinu koja se sa dubinom h_b sprežu u skok). Skok je tamo gde se seku linije „b^{SPR}” i „a”, a to mora da bude na mestu gde se seku i linije „b” i a^{SPR}.

Mogli su granični uslovi i do rešenja navučenog skoka na uzvodnu deonicu. Linija „b” računa se tada uzvodnim smerom od h_b (to je linija IV sa sl. 92–6) i gde se ta linija seče sa „a^{SPR}” obrazuje se skok. Razume se da treba „a^{SPR}” računati uzvodno od preloma na osnovu sračunate linije „a”.

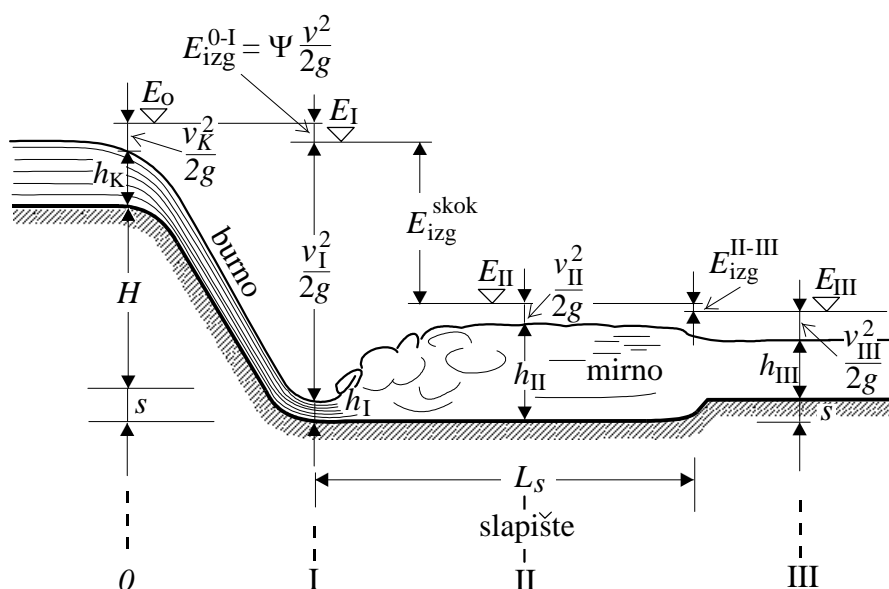
Navedeni primer pruža saznanja kako bi se postupilo i u bilo kome praktičnom primeru.

Na slici 104–11 skok je ucrtan kao da se dešava u jednom preseku, gde se seku odgovarajuće linije, a bez razmatranja dužine skoka, pod pretpostavkom da ona nije bitna u razmatranom zadatku. Načelno se isto tako postupilo u lokalnim promenama u cevima, gde se računalo (i prikazivalo) kao da se ona dešava u jednom preseku.

* * *

Za *Drugi primer* uzeće se smirivanje burnog tečenja, hidrauličkim skokom, u posebno za tu svrhu izgrađenom objektu.

Uz građevinu koja stvara nagli pad (brana, stepenica i slično) hidrotehnička praksa redovno postavlja zadatak: burno tečenje sa velikom brzinom, uzrokovano visinskom razlikom, treba smiriti hidrauličkim skokom, da nadalje od građevine otiče mirno tečenje, jer bi burno tečenje rušilačkim dejstvom stvaralo nepoželjne posledice, u opasnost bi dolazila i sama građevina, koju bi voda potkopala, i potom srušila. Slika 104–12 odnosi se na jedan takav primer.



Slika 104–12 Smirivanje burnog tečenja hidrauličkim skokom u slapištu

Objekat gde se obavlja navedeno smirivanje burnoga toka naziva se „slapište” ili „bučnica” ili „objekat za umirenje”. Prva dva naziva vode poreklo od odgovarajućih naziva odomaćenih u narodu, a vezanih za pojave u prirodnim uslovima gde se dešava suštinski isto. Padanje vode je „slap”, ona velikom brzinom pada u „slapište”, koje se naziva i „bučnica”, jer tu voda, snažnim vrtloženjem „buči” (stvara buku). Prirodna slapišta su udubljenja koja je voda veoma dugo kopala, siloviti mlaz koristio je deo svoje energije za kopanje udubljenja za svoje smirivanje, što je dublje iskopao, mlaz se bolje smirivao. Građenje slapišta je stvaranje unapred potrebnog prostora za smirivanje burnog tečenja i stoga se i nailazi na naziv „objekat za umirenje”.

Jedan primer za obračun slapišta dat je slikom 104–12. Proticaj Q je zadat, i on nameće nivo u preseku (0), a onda i brzinu v_0 u tom preseku – razume se za potpuno određene granične uslove, koji su u primeru na slici svedeni na uspostavljanje kritične dubine pred slivanje iz gornjeg kanala (što će se i uspostaviti ako je tečenje u tom kanalu mirno). U nekom drugom slučaju, drukčiji su granični uslovi, a opet, u svakom slučaju, određuju kotu energije pred stepenicom, od koje se polazi u razmatranju slapišta.

Za slučaj na sl. 104–12, jednačina energije za struju između preseka (0) i (I) glasi:

$$H + s + h_K + \frac{v_K^2}{2g} = h_I + \frac{v_I^2}{2g} + E_{izg}^{0-I} \quad (104-28)$$

Leva strana je energetska kota za presek (0) uz nultu kotu na dnu slapišta, dok je desna zbir energetske kote za presek (I) i izgubljene energije između navedena dva preseka.

Izgubljena energija može se izraziti sa:

$$E_{izg}^{0-I} = \psi \frac{v_I^2}{2g} \quad (104-29)$$

gde koeficijent ψ obuhvata trenje i dodatni lokalni gubitak usled postepenog proširivanja struje. Usled postepenosti u proširivanju, i nevelikog uticaja krivine, a i malog rastojanja između preseka, gubitak nije znatan, neće vrednost za ψ preći 0,1. Preporučljivo je da se za ψ uzme i manja vrednost, jer to znači nešto manju izgubljenu energiju, a onda i nešto veću kinetičku energiju u preseku (I) pa su uslovi za smirenje burnog tečenja nešto teži, onda je i veća sigurnost da će burno tečenje zaista smiriti. Na kraju, može se uzeti i $\psi = 0$ (tj. $E_{izg} = 0$, što bi dao idealan fluid), a i to neće mnogo menjati dubinu h_I .

Uz pretpostavljeno udubljenje slapišta (označeno sa s) i procenjeni gubitak energije, jednačina (104–28) dozvoljava da se odredi dubina h_I na osnovu poznatog proticaja Q , jer on jednoznačno određuje kritičnu dubinu i brzinu v_K , a brzina v_I je jednaka Q/A_I , gde je A_I poprečni presek struje koga određuje dubina h_I .

Presek (II) u slapištu i presek (III) iza njega povezuje jednačina energije (vidi ponovo sliku 104–12):

$$h_{II} + \frac{v_{II}^2}{2g} = s + h_{III} + \frac{v_{III}^2}{2g} + E_{izg}^{II-III} \quad (104-30)$$

Pretpostavlja se da su poznati nizvodni granični uslovi – poznato: h_{III} , v_{III} , pa se uz procenu izgubljene energije, može sračunati dubina h_{II} u slapištu (brzinu v_{II} nameće dubina h_{II}). Izgubljena energija se računa kao kod suženja struje uz primenu obrasca (102–13) koji je naveden za suženje kod cevi, i u taj obrazac ulaze preseći A_{II} i A_{III} , za dubine h_{II} i h_{III} . Uz to se kao i tamo, kod suženja cevi, dodaje i trenje. Može se odmah reći da se taj gubitak može i zanemariti, o čemu će biti reči malo kasnije.

Razumljivo je da je pretpostavljeno udubljenje slapišta isto pri primeni obe jednačine (104–28) i (104–30).

Sračunata dubina h_{II} treba da se sa dubinom h_I spreže u hidraulički skok, jer se baš zahteva da se u slapištu obrazuje hidraulički skok. Dakle:

$$h_{II} = h_I^{\text{spr}} \quad \text{što je ujedno i} \quad h_I = h_{II}^{\text{spr}} \quad (104-31)$$

Računanje h_I po (104–28) i h_{II} po (104–30) neće zadovoljiti (104–31) za bilo koju vrednost udubljenja s , nego samo za jednu vrednost, do koje će se doći menjajući pretpostavljenu vrednost za s u (104–28) i (104–30) sve dok se ne zadovolji (104–31). Rešenjem vrednosti za s zadatak je rešen. Može postupak poći od pretpostavke ($s = 0$) tj. možda uopšte ne treba udubljenje slapišta, jer je i bez udubljenja skok potopljen. Ako tako nije (a najčešće nije) treba opisanim postupkom naći zadovoljavajuću vrednost za s .

Za praktičnu primenu mogu da posluže sledeće napomene:

- a) Može se u jednačini (104–28) uzeti $E_{izg} = 0$, što je već napomenuto iza pisanja (104–29).
- b) U jednačini (104–30) može se na desnoj strani zadržati samo $s + h_{III}$, a zanemariti na levoj $v_{II}^2/2g$, čime se jednačina svodi na:

$$h_{II} = s + h_{III} \quad (104-32)$$

Račun po prethodnoj jednačini (104–32) daje udubljenje s veće od odnosa koje daje (104–30) za:

$$\Delta = \frac{v_{III}^2}{2g} - \frac{v_{II}^2}{2g} + E_{izg}^{II-III}$$

Lako se zaključuje da je $\Delta > 0$, jer je $v_{III} > v_{II}$, a $E_{izg} > 0$, što znači da uproštavanje dovodi do potapanja skoka (veća dubina u slapištu), pa se može prihvatiti kao doprinos da se bude, kako se to obično kaže „na strani sigurnosti”.

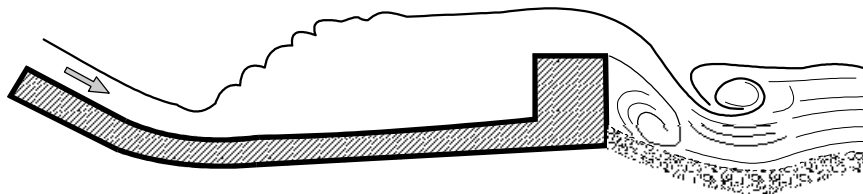
* * *

Treba odrediti i dužinu L_S slapišta prikazanu na sl. 104–12, a to znači dužinu skoka, koji se obrazuje u slapištu. Dužinu skoka, odnosno u ovom slučaju dužinu slapišta određuje obrazac (104–12) namenjen pravougaonom preseku slapišta. Ranije je objašnjeno da se taj obrazac, po tamo navedenim uslovima ($B < 2b$), može primeniti i na trapezni presek. (Treba se podsetiti da je sa B označena širina nivoa vode, a sa b širina dna kanala).

Poželjno je sračunatu dužinu slapišta L_S malo povećati obezbeđenja radi, da se burno tečenje sigurno smiri u bučnici.

* * *

Potrebna dubina za određivanje hidrauličkog skoka u slapištu može se, umesto udubljenja slapišta, postići i pragom na kraju slapišta koji će podići nivo u slapištu (sl. 104–13). Takvo rešenje je sa praktične strane primamljivo, jer ne treba ukopavati slapište, ali mu se mora staviti ozbiljna zamerka, jer nameće pitanje umirivanja iza praga. Naime, povećanje nivoa vode u slapištu uzrokuje povećanu brzinu u mlazu koji se spušta sa praga, pa ta neumirena struja ugrožava dno iza praga. Ako to dno treba osigurati na izvesnoj dužini, onda se to mora shvatiti kao produženje objekta za umirenje.



Slika 104–13 Prag podiže nivo u slapištu, pa se skok obrazuje i bez spuštanja dna, ali to dovodi do nepovoljnijeg stanja iza praga (odnošenje dna) pa se obično mora tu dno obezbediti, što znači produženje objekta

U narednom poglavlju (105) raspravljaće se o tečenju preko praga, pa će se uvideti šta prag unosi u tok. Za sada je samo nagovešteno da treba biti oprezan sa eventualnim rešenjem sa pragom iza slapišta.

* * *

Udubljenje slapišta i njegova znatna dužina nagone praktičare na rešenja kojima bi se te veličine smanjile. Da bi se na manjem prostoru obavilo isto oduzimanje energije kao na većem prostoru koje zahteva jednostavno rešenje hidrauličkim skokom, moraju se na manjem prostoru stvoriti uslovi za pojačano vrtloženje. U hidrauličkom skoku stvara se glavni vrtlog sa horizontalnom osovinom, kojim se obrazuje skok nivoa, i uz njega prateće vrtloženje. Ugrađivanjem dodatnih elemenata – to su pragovi celom širinom slapišta, prepreke u vidu „češljeva”, stubovi različitih oblika i rasporeda, ili uopšteno rečeno, različiti „razbijači mlaza”, sve su to „rasipači energije” („disipatori”), a naziv im opravdava činjenica da oni rasipaju, a time i oduzimaju energiju, u vrtlozima oko i iza njih. Tako se dodatnim elementima postiže da se oduzimanje energije koje zahteva prelaz iz mirnog u burno tečenje obave u manjoj zapremini od one koju zahteva skok ako tih elemenata nema.

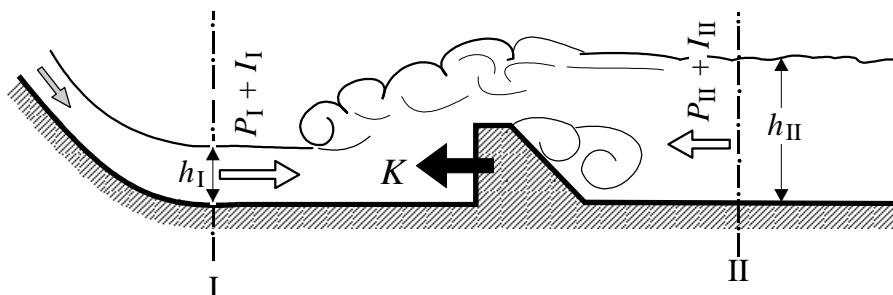
Prethodno rečeno navodi na pomisao da je primena dodatnih elemenata primamljiva i da je treba primenjivati. Ali, u rešavanju svakog zadatka suprostavljaju se međusobno suprotno usmereni uticaji, i može se čak reći da je zadatak tek shvaćen kada se to uoči. Malo pre kod navođenja primene praga iza skoka (sl. 104–13) rečeno je da smanjivanje bučnice, što je veoma pogodno, dovodi do nevolja iza praga. Kod primene dodatnih elemenata ne sme se zaobići činjenica da oni na sebe navlače velike napadne sile, a vrtloženja oko njih ih potresaju, struja teži da ih „iščupa”. Ovo nameće opreznost pri primeni dodatnih elemenata.

Može se uloga dodatnih elemenata protumačiti i unošenjem sila njihovih otpora u jednačinu uravnoteženja sila: u jednačinu (104–1). Sa desne strane treba upisati silu K , kojom, u pravcu strujanja, čvrsta granica deluje na fluid. Ta sila se kod skoka svela na zanemarljivu silu trenja, a unošenjem dodatnih elemenata, ona je zbir otpora svih dodatnih elemenata. Za iste dolazne uslove ista je i leva strana već pomenute jednačine (104–1) tj. ona je $F_I = P_I + I_I$, a dodaje se na desnu stranu

sila K , pa jednačina glasi:

$$P_I + I_I = P_{II} + I_{II} + K$$

što se vidi i iz slike 104–14, a ukazuje na to da je potrebna manja sila $F_{II} = P_{II} + I_{II}$ u preseku (II) od one koju zahteva jednačina (104–1).



Slika 104–14 Dodatni prag (ili 'češalj') svojom silom otpora K smanjuje potrebnu silu za umirenje $I_{II} + P_{II}$, a time i dubinu h_{II}

* * *

Predlažu se različita rešenja sa dodatnim elementima u slapištu, ona proizilaze iz eksperimentalnih istraživanja, i primenjuju se poštujući Frudovu sličnost (jer je pojava pod premoćnim dejstvom inercijalnih uticaja i uticaja težine, dok su uticaji viskoznosti i kapilarnosti zanemarljivi).

Uz poznate okolnosti da dodatni elementi navlače na sebe velike sile otpora, i da pojačano vrtloženje snažno potresa objekat, treba obratiti pažnju i na uticaj turbulencije. Trenutni pritisci mnogo povećaju trenutne sile. Na stubove (ili uopšte na „razbijače energije”) deluju i poprečne sile (normalno upravljene na osnovni pravac strujanja), iako su postavljeni simetrično u odnosu na podužnu osu strujanja. Naime, osrednjenih sila nema, ali ima onih koje deluju usled fluktuacije pritiska, jer turbulencija ne stvara simetričnost trenutnog opterećenja (istovremeni pritisci na bočne strane nisu isti). Ove i one ranije napomene treba da ukažu da sa raspoloženjem za primenu dodatnih elemenata ne treba preterivati – naprotiv, opreznost je savetna.

* * *

Napomena. Na primerima prikazanim slikama 104–10, 104–11 i 104–12 može se ubedljivo potvrditi ono što je nagovešteno pod 1) u „Napomenama” na kraju Odeljka I Poglavlja 99. Tamo je rečeno da treba predvideti gornju i donju granicu hrapavosti između koje treba očekivati hrapavost koja će se ostvariti, i da ima primera gde u rešavanju zadataka može pored gornje da bude merodavna i donja granica.

Primer sa slike 104–10 za gornju granicu (najveća očekivana hrapavost) neka dovede do rešenja (3) na slici, a može sa donjom granicom (najmanja očekivana hrapavost) da dovede do rešenja (2). Veća hrapavost uzrokuje manju brzinu u uzvodnoj deonici od one za manju hrapavost, a i dubina je veća u nizvodnoj deonici, pa veća hrapavost lakše zaustavlja nailazeće burno tečenje i tako sprečava da ono prodre u nizvodnu deonicu. Može se desiti da manja hrapavost (veća brzina u uzvodnoj, a manja dubina u nizvodnoj) ne može sprečiti prodor burnog tečenja u nizvodnu deonicu. Ako se zahteva da treba postići rešenje (3), mora se proveriti uz računanje sa najmanjom očekivanom, dok se sa najvećom očekivanom hrapavošću odrede potrebne dubine kanala, da bi se i sa te strane bilo na ”strani sigurnosti”. Na isti način treba razmatrati i primer sa slike 104–11.

Za primer sa slike 104–12 treba računati sa najvećom očekivanom hrapavošću dubinu u kanalu iza slapišta, da se pouzdano obezbedi da će kanal propustiti maksimalni predviđeni proticaj. Za obezbeđenje obrazovanja hidrauličkog skoka u slapištu (što je i svrha zadatka), treba za nizvodni kanal predvideti najmanju očekivanu hrapavost, jer daje najmanju očekivanu dubinu u nizvodnom kanalu, pa onda i u slapištu (a i ta najmanja dubina mora da zaustavi burno tečenje).

LOKALNE POJAVE U TEČENJU IZAZVANE PROMENOM POPREČNOG PRESEKA KANALA

I

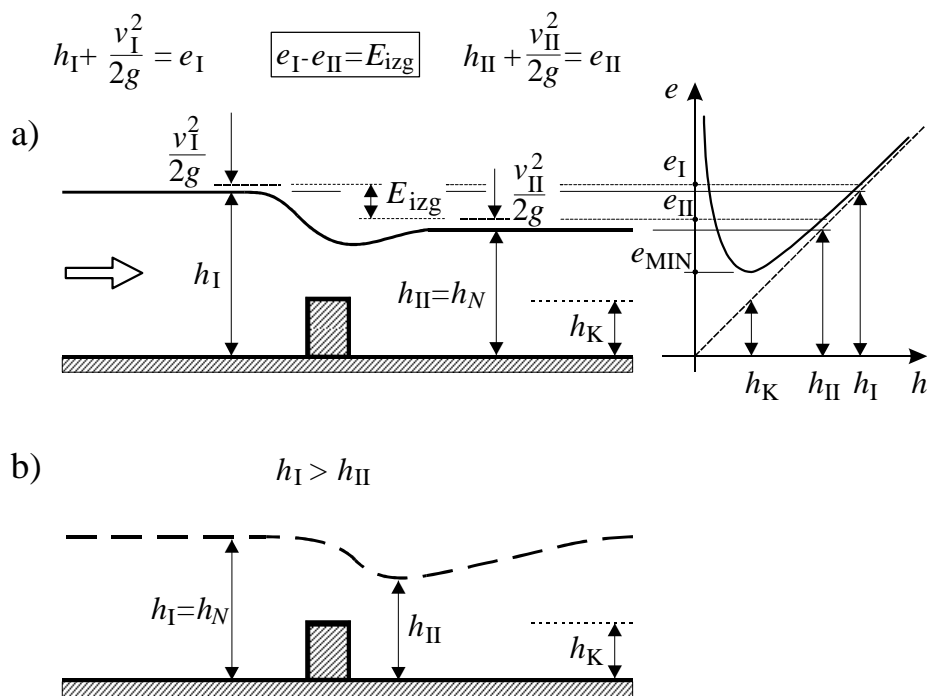
LOKALNI GUBICI ENERGIJE U OTVORENIM TOKOVIMA – OPŠTA RAZMATRANJA

Jedna od bitnih osobina tokova sa slobodnom površinom tečnosti (otvorenih, kanalskih tokova) za razliku od tokova pod pritiskom (u cevima) je ova: kod otvorenih tokova unapred su nepoznate čak i granice struje, poprečni preseki struje nisu unapred određeni, nego ih sama struja obrazuje prema nametnutim joj uslovima. U Poglavlju 92, Odeljak II, pokazano je kako se tok obrazuje ako su gubici energije isključivo posledica trenja – to je kontinualno određivanje nivoa, bez uticaja lokalnih poremećaja.

Lokalni poremećaj zahteva lokalno spuštanje linije energije, da se podmiri gubitak energije, a promena u liniji energije povlači i promenu u pijezometarskoj liniji. Kako je pijezometarska linija kod otvorenog toka i linija nivoa vode, ovo znači promenu poprečnog preseka struje. Kod tečenja u cevima za poznate preseke ispred i iza lokalnog poremećaja obračuna se lokalni gubitak. Kod otvorenog toka ne može se lokalni gubitak računati za poznate preseke struje, jer baš on ih menja. Lokalni poremećaj može i da podeli zadatak, stvorivši svoje granične uslove, u stvari dolazi do unutrašnjeg razgraničenja zadatka, što će se uvideti iz nekoliko primera kojima će se baviti naredna razmatranja.

Prethodno navedeno kazuje da je proučavanje lokalnih poremećaja u otvorenim tokovima znatno složenije nego kod struja pod pritiskom (u cevima).

Primer na sl. 105–1 prikazuje poremećaj u toku koji unosi nekakva lokalna prepreka. Bez toga poremećaja tečenje bi bilo jednoliko sa normalnom dubinom h_N . Neka je uz to tečenje mirno, pa je normalna



Slika 105–1 a) Podizanjem nivoa ispred prepreke povećava se energija toka i tako se podmiruje izgubljena energija; b) snižavanjem nivoa iza prepreke smanjila bi se energija za iznos izgubljene energije – to rešenje se ne može ostvariti, jer se nivo ne može povećati približavanjem normalnoj dubini

dubina veća od kritične ($h_N > h_K$). Za preseke ispred i iza prepreke kote dna se zanemarljivo razlikuju, pa se jednačina energije piše sa:

$$h_I + \frac{v_I^2}{2g} = h_{II} + \frac{v_{II}^2}{2g} + E_{izg}^{I-II} \quad (105-1)$$

Pred kraj Poglavlja 92, jednačinom (92–32) uvedena je specifična energija e , koja je zbir dubine h i brzinske visine $v^2/2g$. Koristeći specifičnu energiju prethodna jednačina (105–1) se svodi na:

$$e_I - e_{II} = E_{izg}^{I-II}$$

Dakle, specifična energija u preseku (I) mora da bude veća od one u preseku (II), i tako se podmiruje gubitak energije. To se može postići podizanjem nivoa ispred prepreke, jer će za $h_I > h_{II}$ biti $e_I > e_{II}$ (tako

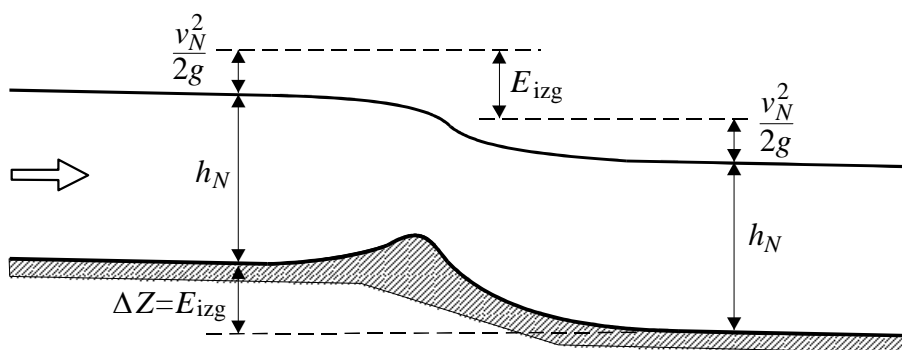
pokazuje sl. 92–12), a to važi ako je tečenje mirno, ako je $h_I > h_{II} > h_K$, a to se pretpostavlja. Podignuti nivo ispred prepreke usporava tok prema liniji (I) na sl. 92–5. Tako je prikazano na sl. 105–1a.

Spuštanje nivoa iza prepreke (slika 105–1b) takođe bi dalo smanjenje energije, čime bi se podmirio gubitak, što znači da bi ispred prepreke bila neporemećena normalna dubina, a iza prepreke manja dubina od normalne, sa koje bi se prešlo na normalnu dubinu. Takvo rešenje, međutim, nije moguće jer se iz sl. 92–5 uviđa da se iz dubine h koja je između kritične i normalne ($h_K < h < h_N$) nizvodnim smerom dubina može samo smanjivati (to je linija II na pomenutoj slici), a ne postoji mogućnost za povećanje nivoa, a to se ovde zahteva.

Moguće je, dakle, rešenje samo prema sl. 105–1a: nizvodno od prepreke obrazuje se neporemećeno tečenje (kao da prepreke nema), a to, u razmatranom slučaju znači jednoliko tečenje sa normalnom dubinom ($h_{II} = h_N$), dok se ispred prepreke nivo podiže na dubinu h_I i usporeni tok se obrazuje uzvodno od prepreke.

Izgubljena energija, prema načelima izraženim u Poglavlju 101 predstavlja iznos za koga je izgubljena energija veća od one koje bi dalo samo trenje (upravo ono što se računski mora dodati zbog lokalnog poremećaja). U primeru koji se razmatra izgubljena energija se na liniji energije prikazala stepenastim spuštanjem – vidi sl. 105–1a (tako se postupalo i kod lokalnih gubitaka u cevima).

Ako se želi jednoliko tečenje sa određenom normalnom dubinom i ispred prepreke, mora se spustiti dno za visinu ΔZ (vidi sl. 105–2) koja je

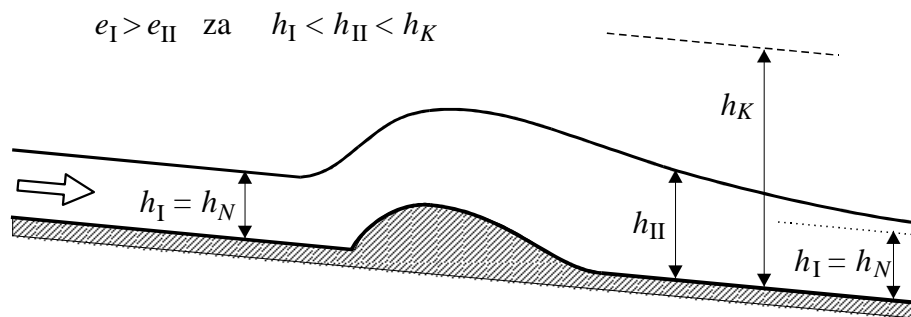


Slika 105–2 Da bi ispred iza prepreke bilo jednoliko tečenje sa normalnom dubinom h_N mora se dno spustiti za iznos izgubljene energije ($\Delta Z = E_{izg}$)

jednaka izgubljenj energiji. Ovo je, na žalost, moguće postići samo za jedan proticaj. Premaleno spuštanje dovodi do povišenja nivoa ispred prepreke, ali je usporavanje manje nego kad nikakvog spuštanja dna nema (kao na sl. 105–1). Preveliko pak spuštanje dovodi do obaranja nivoa ispred prepreke prema liniji (II) na sl. 92–5.

Uz prethodni primer (sl. 105–1 i 105–2) treba staviti ograničenje: on spada u one primere gde se u području lokalnog gubitka ne stvaraju toliko povećane brzine da bi se stvorilo burno tečenje koje bi nastojalo da prodre nizvodno. Treba se prisetiti razmatranja lokalnih poremećaja u cevima gde se struja sužava i time povećava lokalnu brzinu. Kod otvorenih tokova ovo može dovesti do burnog tečenja.

Sl. 105–3 prikazuje prepreku u kanalu u kome bi bez prepreke tečenje bilo jednoliko, sa normalnom dubinom h_N , ali burno, jer je normalna dubina manja od kritične ($h_N < h_K$). Za ovaj slučaj povećanje dubine ispred prepreke smanjiće energiju, jer za burno tečenje (vidi sl. 92–12), specifična energija je manja ako je dubina veća. Međutim, povećanje dubine iza prepreke ($h_{II} > h_I$) daće $e_{II} < e_I$ i to smanjivanje energije podmiriće gubitak energije.



Slika 105–3 Kod burnog tečenja povećavanjem nivoa smanjuje se energija (da se podmiri gubitak)

Moglo bi se postaviti pitanje zašto se ne bi dubina ispred prepreke smanjila i tako povećala energija sa čime bi se podmirio gubitak. To nije moguće, jer sl. 92–7 ukazuje da nema ostvarljivog opadanja nivoa u oblasti $h_K < h < h_N$. Dakle, ostaje kao moguće ostvarenje ono što je prikazano na sl. 105–3: do prepreke ostaje neporemećena dubina, a iza nje dolazi do poremećaja u tečenju, do povećanja dubine na h_{II} , a sa

te dubine se dubina smanjuje na normalnu, rešenjem prema liniji (V) na sl. 92–7.

Upoređujući rešenja sa slika 105–1 i 105–3, dolazi se do zaključka da i lokalni poremećaji slede ranije izrečenu zakonitost da se u mirnom tečenju uticaji (pa i poremećaji) prenose uzvodnim smerom, a kod burnoga nizvodnim.

Kako se u mirnom tečenju uticaj izazvan lokalnim poremećajem prenosi uzvodnim smerom, može se remećenje tečenja kroz prepreku ublažiti, i smanjiti lokalni gubitak, oblikovanjem prepreke. Ako je to suženje, izvešće se postepeno ili zaobljeno suženje (isto je i kod proširenja), ako je krivina daće joj se veći radijus zakrivljenja itd. Oblikovanje čvrstih granica utiče na struju uzvodno od tog oblikovanja (jer je uzvodnim smerom prenose uticaji – ovde je reč o mirnom tečenju) pa je, može se reći, priprema da pređe kroz lokalnu promenu sa što manjim poremećajem, sa što manjim gubitkom energije.

U burnom tečenju ne može se uticati uzvodnim smerom, pa ono silovito udara o prepreku (za burno tečenje stoga se opravdano koristi i naziv „silovito”) – to se pokušalo prikazati uz primer na sl. 105–15. Udaranje o prepreku može dovesti do toga da voda u neredu preskače prepreku, da dolazi do izlivanja iz kanala. Stoga kod lokalnog poremećaja u burnom tečenju treba biti veoma oprezan.

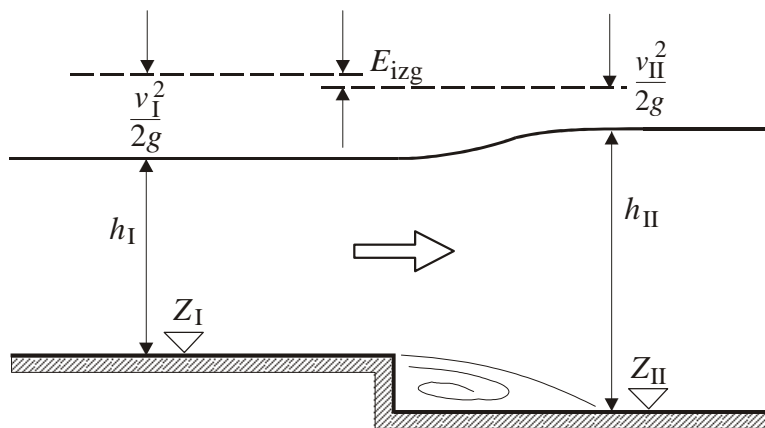
II

SPAJANJE TOKOVA PRI LOKALNIM POVEĆANJIMA, ILI SMANJIVANJIMA POPREČNOG PRESEKA KANALA

Na sl. 105–4 prikazana je promena preseka struje dobijena spuštanjem dna. Za taj slučaj jednačina energije između preseka (I) i (II) glasi:

$$Z_I + h_I + \frac{v_I^2}{2g} = Z_{II} + h_{II} + \frac{v_{II}^2}{2g} + E_{izg} \quad (105-2)$$

Primena ove jednačine zahteva da je tečenje iza spuštanja dna mirno (dubina h_{II} veća od kritične), što znači da dubinu h_{II} nameće nizvodni granični uslov. Za nametnutu dubinu h_{II} (i njoj pripadajuću brzinsku visinu $v_{II}^2/2g$), uz poznate kote dna Z_I i Z_{II} , dobija se dubina h_I ispred spuštanja dna (dubina h_I određuje brzinu v_I). Uz to treba proceniti



Slika 105–4 Povećanje preseka kanala

i izgublenu energiju, što se može uraditi primenom obrasca (102–1) za naglo proširenje cevi. Taj obrazac ukazuje da je izgubljena energija zavisna od preseka ispred i iza proširenja, upravo od dubina h_I i h_{II} . Kako obrazac daje samo gubitak usled lokalnog poremećaja, koji se dodaje na gubitak usled trenja, i ovde, po ugledu na postupak kod cevi, treba trenje računati kao da dubine h_I i h_{II} dosežu do naglog spuštanja dna. Račun jednačinom (105–2) se sprovodi postepenim približavanjem sve dok se jednačina ne zadovolji. Prihvata se rešenje sa $h_I > h_K$, uz napomenu da postoji i rešenje sa $h_I < h_K$, jer postoje dve dubine za koje je $h + v^2/2g$ isto, pa obe zadovoljavaju jednačinu, što se zaključuje iz slike 92–12, jedna dubina je veća od kritične, a druga manja. Malo pre je rečeno da se prihvata rešenje za veću, jer na to upozorava prikaz na sl. 92–5, gde se dubina u mirnom tečenju ne može spustiti ispod kritične, bez obzira na nizvodni uslov. Primećuje se da je u posmatranom slučaju smer računanja uzvodni, jer je tečenje skroz mirno.

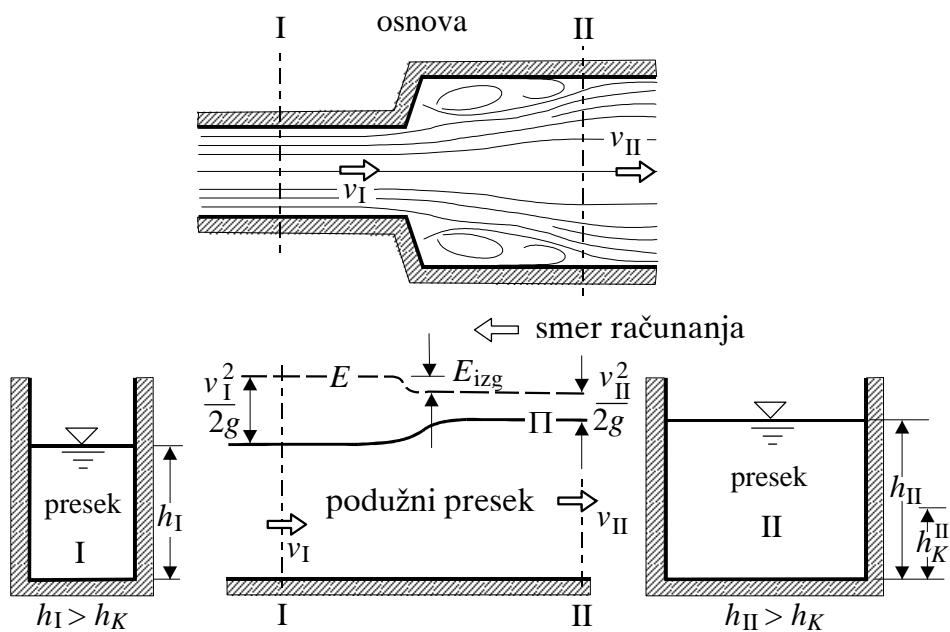
Treba naglasiti da se može desiti da se jednačina (105–2) ne može zadovoljiti. Ako se na levoj strani jednačine stavi $h_I = h_K$, onda će to biti minimalno mogući iznos te strane, a jednačina opet nije zadovoljena, jer je:

$$\left. \begin{aligned} Z_I + h_I + \frac{v_I^2}{2g} &> Z_{II} + h_{II} + \frac{v_{II}^2}{2g} + E_{izg} \\ \text{uz } h_I &= h_K \end{aligned} \right\} \quad (105-3)$$

Ovim je iskazano da je energija izražena levom stranom nejednačine nadmoćna u odnosu na energiju na desnoj strani, uprkos tome što je na levoj strani minimalno moguća energija. To nameće zaključak da će se uspostaviti $h_I = h_K$, jer nizvodni uslovi nisu u stanju da uspostave veću energiju od minimalno moguće, nesposobni su, dakle, da utiču na obrazovanje dubine h_I , ona je $h_I = h_K$, jer je to, shodno prikazu na sl. 92–6, dubina koja se obrazuje kada nizvodni uslovi ne utiču na nizvodni kraj prethodne deonice kanala.

Slučajevi gde nizvodni uslovi ne utiču biće raspravljani kasnije, a neposredno u nastavku će se razmotriti slučajevi povećanja preseka uz pretpostavku da nizvodni uslovi utiču (kao na sl. 105–4).

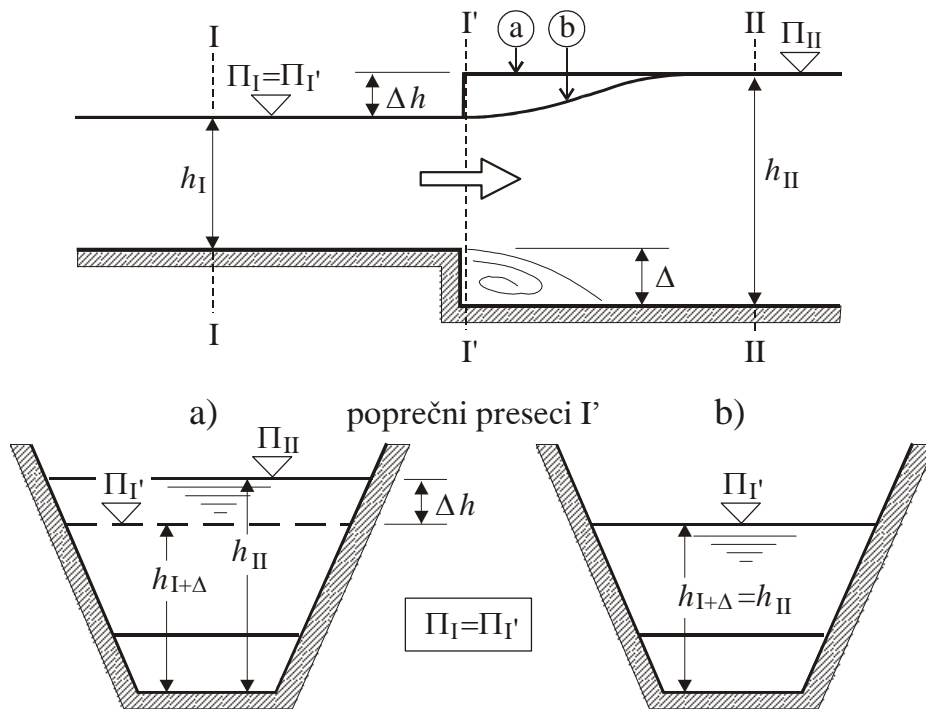
Na isti način kao primer sa sl. 105–4 rešava se i primer gde se povećanje preseka postiže proširenjem kanala – sl. 105–5. Primenjuje se ista jednačina (105–2) uz $Z_I = Z_{II}$. Jasno je da se isti postupak primenjuje ako se proširenje preseka obavi proširenjem kanala i uz spuštanje dna.



Slika 105–5 Proširenje kanala u mirnom tečenju

* * *

Napomena: Kod naglog proširenja cevi presek se naglo poveća sa A_I na A_{II} , a neposredno iza proširenja, u preseku označenom sa (I') na slikama 83-5 i 102-1, prenosi se pijezometarska kota Π_I iz preseka pre suženja. Taj uslov omogućio je rešenje zadatka u vidu primene jednačine (102-1), koja se i malo pre preporučila i za energetski gubitak kod naglog proširenja kanala. Prenošenje rezultata sa cevi na kanal znači da se do rezultata došlo prikazanim stanjem „a” na slici 105-6: neposredno po proširenju, u preseku (I') nivo je naglo skočio sa kote Π_I , ali u tom preseku nije pijezometarska kota na nivou, nego se prenosi pijezometarska kota pre proširenja ($\Pi_{I'} = \Pi_I$), jer je to temeljni uslov na kome se zasniva određenje izgubljene energije za naglo proširenje cevi. Za proširenje kanala prihvatljivo je, međutim, predviđanje da se nivo postepeno penje u proširenju, jer nagli skok nivoa nije ostvarljiv (jer je tečenje skroz mirno). Na istoj slici (105-6) prikazano je sa (b)



Slika 105-6 Porast nivoa pri naglom povećanju preseka kanala: a) prema pretpostavci primenjenoj za proširenje cevi; b) prema pretpostavci prilagođenoj kanalu

penjanje nivoa, bez naglog skoka.

Sa praktičnog stanovišta pogodnije je računati energetski gubitak na proširenju prema (a), jer se računa sa veoma prostim obrascem po kome je izgubljena energija jednaka $(v_I - v_{II})^2/2g$, i to je opštevažeći obrazac, za sva nagla proširenja. Krajnji rezultat je određenje jedne dubine (h_I ili h_{II}) na osnovu poznate druge. Rezultat se može prihvatiti ako se malo razlikuje od rezultata prema prikazanom sa (b). Pod rezultatom se smatra određenje jedne dubine na osnovu poznate druge. Može se obaviti i računanje uravnoteženjem sila koje deluju u stanju (b) i doćiće se do zahtevanog rezultata, ali treba računati svaki pojedinačni primer. U nastavku pokušaće se da se proverí razlika u rezultatima proizašlih iz stanja (a), odnosno (b).

U uravnoteženje sila koje deluju na masu između preseka (I') i (I) ulazi sila pritiska u (I') koja se razlikuje za (a), odnosno (b), jer statički momenti za oba slučaja nisu isti (a sila pritiska je srazmerna statičkom momentu). Iz slike 105-6 se vidi da je površina preseka veća u (a), nego u (b), ali je statički momenat manji, jer se statički momenat za deo preseka iznad pijeometarske kote oduzima od statičkog momenta za deo preseka ispod nje, upravo od statičkog momenta za (b), što znači da je sila u (a) manja nego u (b). Prema tome računa se sa manjom silom u smeru tečenja od one koja se ostvaruje prema (b), pa je račun prema (a), kako se to obično kaže „na strani sigurnosti” u odnosu na (b), što dozvoljava primenu jednostavnog i stoga za praksu pogodnog obrasca za naglo proširenje cevi i na kanale, pogotovo ako razlika u rezultatu nije velika.

Relativna greška u navedenoj sili pritiska jednaka je $\Delta S/S_{II}$. Ovde S_{II} označava momenat preseka u (b), a ΔS statički momenat za deo preseka iznad kote Π'_I u (a). Za pravougaoni kanal $\Delta S/S_{II}$ je jednako $\Delta h^2/h_{II}^2$, gde je h_{II} dubina u (b), a Δh nadvišenje nivoa u (a) – vidi sl. 105-6. Kako $\Delta h/h_{II}$ u praktičnim primenama neće preći 0,1, $\Delta S/S_{II}$ neće preći 0,01, a to je relativna greška za posmatranu silu. Prema tome, može se računati sa gubitkom energije jednakim $(v_I - v_{II})^2/2g$. Treba primetiti da se prethodna procena odnosi na pravougaoni kanal, dok je kod trapeznog preseka $\Delta S/S_{II}$ veće, ali će dostići dvostruku vrednost od navedene tek ako bi širina dna bila 1/4 od širine vodene površine, a za trougaoni presek dostiže trostruku vrednost za $\Delta S/S_{II}$ (od istog odnosa za pravougaonim).

Izloženo dozvoljava da se obrazac za izgubljenu energiju za cevi prenese i na kanale, i on će se svuda nadalje primenjivati. Sumnja u ispravnost ove odluke lako se otklanja, u svakom pojedinačnom primeru može se provesti u uravnoteženje sila prema (b).

* * *

Za postepena povećanja preseka izgubljena energija je manja – isto je bilo i kod cevi, a tamošnja procena sa sl. 102–3 može se preneti i ovde kao, približna. Može se i ovde, kod kanala prva polovina dužine proširivanja shvatiti kao zamena za odgovarajuću dužinu kanala sa presekom pre proširivanja, a druga polovina sa odgovarajućom dužinom kanala iza proširivanja. Tako je bilo postupljeno i kod cevi. Na sračunato trenje za zamenjene dužine kanala dodaje se lokalni gubitak. Trenje se lako računa sa:

$$E_{izg}^{tr} = \frac{L}{2} \left[\left(C_{\tau} \frac{v^2}{2gR} \right)_I + \left(C_{\tau} \frac{v^2}{2gR} \right)_{II} \right] \quad (105-4)$$

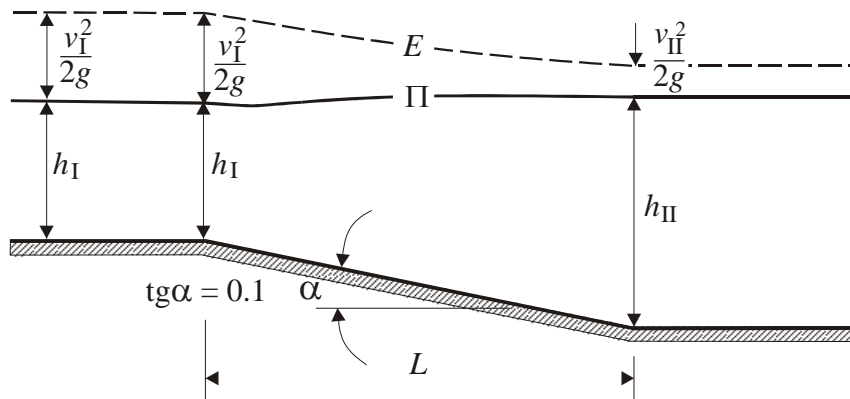
gde sabirci u zagradi označavaju nagib linije energije za kanal u preseku (I), odnosno (II). Odgovarajući obrazac kod cevi je bio (102–5), a ovde se umesto koeficijenta trenja λ uzima C_{τ} , a umesto prečnika D hidraulički radijus R . Koeficijent C_{τ} može se sračunati obrascem (91–31) u kome je sa k označena apsolutna hrapavost. Može se primeniti i Manningova formula (91–32) iz koje bi proizašli nagibi linija energije, pa se dobija:

$$E_{izg} = \frac{L}{2} (I_{E,I} + I_{E,II}) = \frac{L}{2} \left(\frac{v_I n^2}{R_I^{4/3}} + \frac{v_{II} n^2}{R_{II}^{4/3}} \right) \quad (105-5)$$

U ovom izrazu n predstavlja Manningov koeficijent hrapavosti.

Postepenost u promeni preseka koja ne dodaje lokalni gubitak energije na gubitak usled trenja, po ugledu na cevi (sl. 102–4), može se postići ako je nagib spuštanja $\text{tg } \alpha < 0,1$ (sl. 105–7). Ako se povećanje preseka ostvaruje širenjem kanala, izvodnice koje obrazuju boke kanala ne treba sa pravcem strujanja da zaklapaju ugao čiji je $\text{tg } \alpha < 0,1$.

Za prethodni slučaj gubitak usled trenja se može takođe proceniti sa (105–4), odnosno (105–5). Treba ipak pomenuti da račun po tim



Slika 105–7 Spuštanje dna bez dodavanja lokalnog gubitka na gubitak usled trenja

obracima precenjuje trenje, pa se, naročito kod dužih proširenja račun treba obaviti primenom integrala, upravo deljenjem dužine L proširenja na N delova, pa je:

$$E_{izg}^{tr} = \int_0^L C_\tau \frac{v^2}{2g} dx = \frac{L}{N} \sum_{i=1}^N \left(C_\tau \frac{v^2}{2gR} \right)_i$$

Tako se postupilo i kod cevi, gde je pored (102–5) upisano i (102–6).

* * *

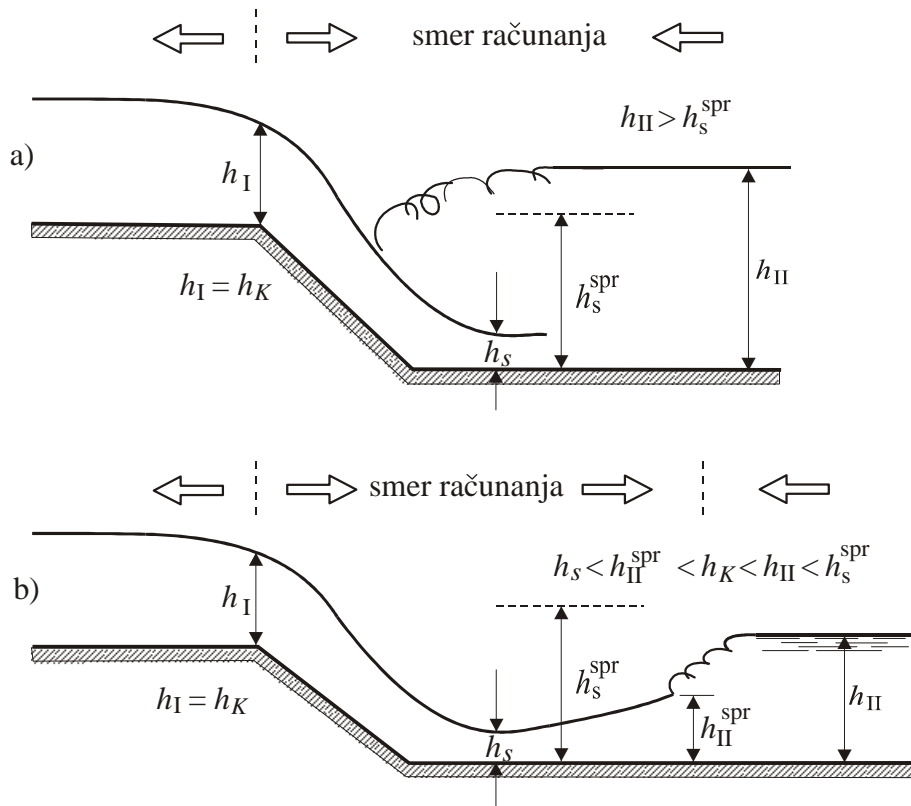
Skreće se pažnja da gubici u proširenju nisu značajni. Čak, ako je proširenje naglo, a odnos preseka struje iza i ispred njega ne prelazi 3 ($A_{II}/A_I < 3$), jednačina (102–1) će dati koeficijent ξ lokalnog gubitka manji od 0,45. Za proširivanje sa $\text{tg } \alpha = 0,2$, što daje dvaput kraću dužinu proširivanja od prikazane na sl. 105–7, koeficijent lokalnog gubitka se smanjuje, i ako se primeni napisano na slici 102–4, on će se smanjiti pet puta u odnosu na malo pre napisano, pa će biti manje od 0,1. Proširenja su obično manje izražena od navedene gornje granice ($A_{II}/A_I = 3$), pa će gubici biti još manji.

Prethodno ukazuje da se izgubljena energija na proširenju u praktičnim primerima može svesti na beznačajan iznos. Uviđa se da je suština zadatka u spajanju toka tj. u spajanju nivoa, ispred i iza proširenja, pri

čemu promena izgubljene energije nema veći značaj – naravno ako se to proširenje obavi postepeno.

* * *

Najavljeno je da će se raspravljati stanje koje nastaje ako se jednačina (105–2) ne može zadovoljiti, upravo ako se ostvaruje napisano sa (105–4), pa se, kako je objašnjeno uspostavlja $h_I = h_K$. Zadatak je razgraničen, granični uslov je usred zadatka. Od preseka sa $h_I = h_K$ računaju se dubine uzvodnim smerom (tečenje je mirno), a od tog preseka nizvodnim smerom računanja dolazi se do dubine h_s (vidi sl. 105–8). Ta



Slika 105–8 Spuštanje dna bez uticaja nizvodnih uslova na mirno tečenje pre spuštanja dna; nizvodni granični uslov dopire sa mirnim tečenjem do mesta spuštanja dna (a), odnosno ne dopire (b), zavisno od toga da li je sprečen (a) ili nije (b) prodor burnog tečenja

se dubina računa na isti način kao dubina h_I sa jednačinama (104–28) i (104–29) u zadatku prikazanom na slici 104–12. Za ovde posmatrani slučaj odgovarajuća jednačina je:

$$Z_I + h_I + \frac{v_I^2}{2g} = Z_s + h_s + \frac{v_s^2}{2g} + E_{izg}^{I-s}$$

gde je $h_I = h_K$.

Pošto se sračuna dubina h_s treba odrediti koja se od dve mogućnosti prikazane na sl. 105–8 ostvaruje, a to zavisi od dubine h_{II} koju nizvodni granični uslov nameće u preseku za koji se sračunala dubina h_s .

Prva mogućnost – prikazana sa „a” na sl. 105–8 ostvariće se ako je dubina h_{II} veća od dubine h_s^{spr} koja se sa h_s spreže u skok. U tom slučaju dubina h_{II} je sposobna da spreči obrazovanje burnog tečenja, ona „potapa” skok, pa se dubina h_s i ne ostvaruje, ona je „preklopljena” dubinom h_{II} .

Druga mogućnost („b” na sl. 105–8) ostvaruje se kada je dubina h_{II} , koja bi se obrazovala neposredno po proširenju, manja od h_s^{spr} , pa je dubina h_{II} nesposobna da spreči prodiranje burnog tečenja na proširenje. Ona se neće ni obrazovati, biće potisnuta. Od dubine h_s računa se nizvodnim smerom (tečenje je burno) linija nivoa. Isto je bilo i u primeru prikazanom slikom 104–11. Mesto skoka se nalazi na isti način kao u navedenom primeru (sl. 104–11).

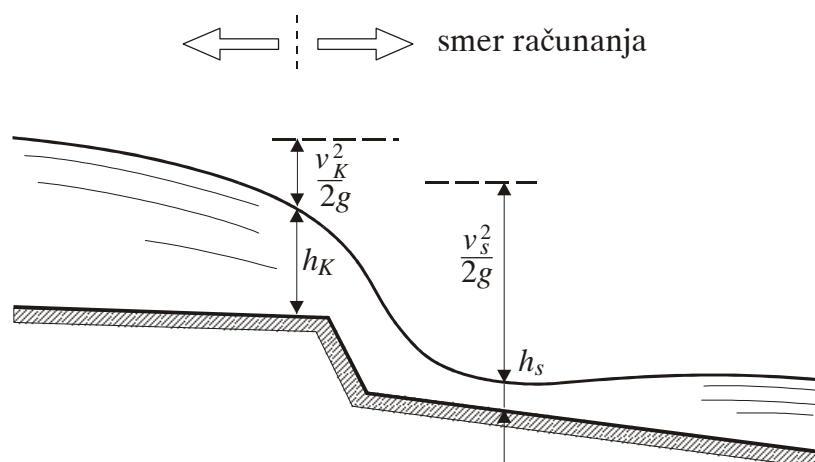
Ako nizvodni uslovi obezbeđuju jednoliko tečenje zadatak je znatno jednostavniji, jer je h_{II} normalna dubina h_N . Za slučaj pojave skoka dubina iza njega je takođe normalna, ma gde se obrazovao skok.

Da bi se sprečila pojava burnog tečenja (slučaj „b” na sl. 105–8), moralo bi se napraviti udubljenje u dnu („bučnica”). Dubina „bučnice” se rešava kao u primeru prikazanom slikom 104–12. Za slučaj „a” sa slike 105–8 može se reći da je tu „bučnica” nepotrebna.

Burno tečenje usred mirnog, koje se javlja u izvesnim slučajevima pri spuštanju dna, kako je prethodno i opisano, može se javiti i u primerima gde se povećanje preseka dobija širenjem kanala, a bez spuštanja dna. To na prvi pogled izgleda paradoksalno, proširio se kanal i to nameće pomisao na mirniji tok (jer je kanal širi). Međutim, mirno tečenje može se preobratiti u burno, ako se višak energije pre promene preseka ispoljava kroz znatno povećanje brzine iza promene, a to dovodi do burnog tečenja. Do burnog tečenja, posve razumljivo, neće doći

ako je i ovde dubina h_{II} iza promene preseka dovoljno velika da spreči prodor burnog tečenja, a to znači da je veća od dubine koja se spreže sa dubinom h_s koja se sračuna za presek neposredno iza promene. Napominje se da dubinu h_s treba računati za širinu pre proširenja kanala, jer mlaz sa te širine postepeno se širi na širinu kanala iza proširenja. Ako navedeni uslov nije ispunjen, burno tečenje se javlja, prodire nizvodno. Računanje nivoa nizvodno od proširenja i utvrđivanje položaja skoka nije jednostavno, jer se mlaz postepeno širi.

Ova prethodna razmatranja odnosila su se na primere gde je iza promene preseka struje tečenje mirno, odnosno gde bi bilo mirno da lokalni poremećaj ne uvede burno tečenje. Međutim, iza promene preseka nagib dna kanala može da bude toliki da bi jednoliko tečenje u njemu bilo burno (normalna dubina manja od kritične). U tom slučaju nivo se računa nizvodnim smerom (od dubine h_s) i skroz je burno, što se pokušalo prikazati slikom 105–9. Do prepreke ovde je tečenje isto kao na prethodnoj slici (105–8).

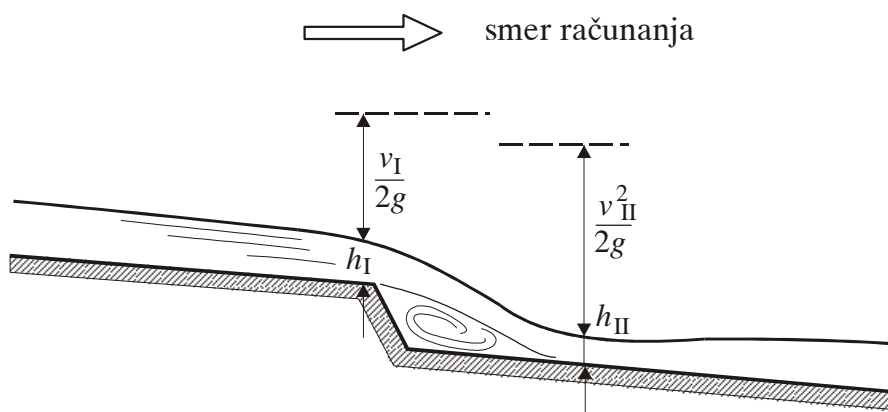


Slika 105–9 Mirno tečenje do spuštanja dna, a iza toga je burno (to nameću nagibi dna); granični uslov je usred zadatka

* * *

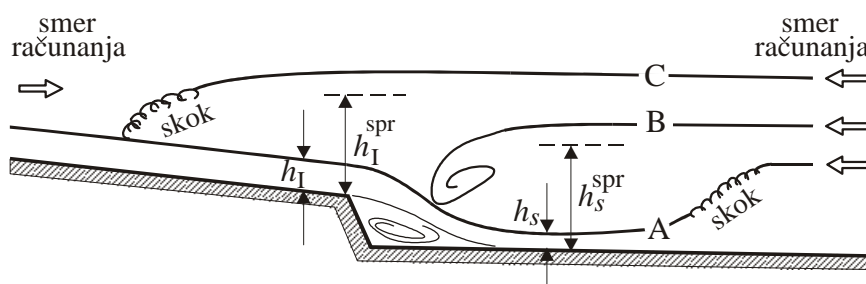
Do sada se razmatralo spajanje nivoa pri povećanju preseka struje ako je dolazeće tečenje (pre promene) mirno. Ako je to tečenje burno, a

iza promene preseka nagib dna kanala omogućava burno tečenje (jer je normalna dubina manja od kritične), onda će tečenje biti skroz burno (sl. 105–10), bilo da se dno spušta, bilo da se kanal širi. Jasno je da ovde neprekidno nizvodni smer računanja.



Slika 105–10 Padovi dna ispred i iza spuštanja dna omogućavaju burno tečenje

Slika 105–11 odnosi se na primere gde je dolazeće tečenje burno, a iza promene preseka struje nagib dna je toliki da bi tečenje bilo mirno (normalna dubina veća od kritične) ako lokalni poremećaj ne uvodi burno tečenje.



Slika 105–11 Granični uslovi nameću burno tečenje pre spuštanja dna i mirno tečenje iza spuštanja; burno tečenje prodire u nizvodnu deonicu (A) odnosno sprečeno je da prodire (B), ili je čak burno tečenje skokom zaustavljeno još u uzvodnoj deonici (C)

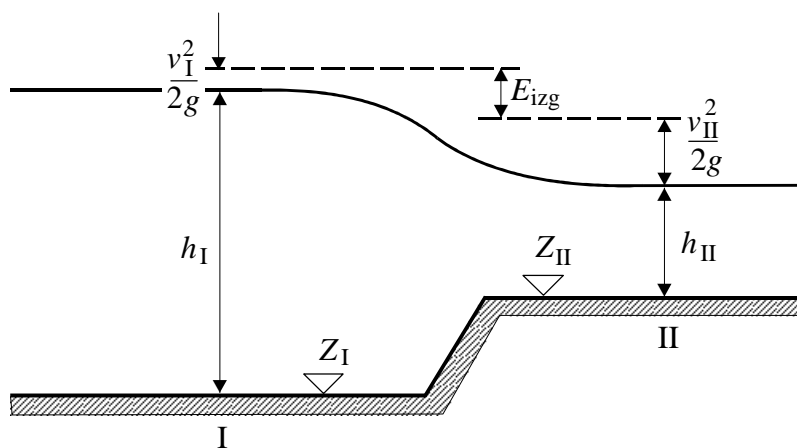
Linija „A” na slici 105–11 odnosi se na slučaj gde burno tečenje nastavlja i iza promene preseka, jer je dubina koju nameće nizvodni granični uslov premalena da zaustavi prodor burnog tečenja. Negde nizvodno, ako granični uslovi nametnu, obrazovaće se skok kojim će burno tečenje preći u mirno. Zadatak se rešava na isti način kao slučaj „b” sa sl. 105–8. Prodiranje burnog tečenja može se sprečiti ugradnjom „bučnice”.

Na slici 105–11 linijom (B) prikazan je slučaj gde nizvodni uslov nameće veću dubinu od one prikazane na istoj slici sa (A). Ta dubina neka je veća i od dubine h_s^{spr} koja se sa dubinom h_s spreže u skok, pa je skok „potopljen” upravo dubina se ne pojavljuje, ona je „preklopljena”. Ovo je slučaj koji se rešava kao slučaj „a” na sl. 105–8.

Na slici 105–11 prikazan je linijom (C) i slučaj gde je nizvodna dubina toliko velika da sprečava ulaženje burnog tečenja u kanal iza promene preseka struje, pa se skok zato navlači na uzvodni deo.

* * *

Za smanjenje preseka dobijeno podizanjem dna (sl. 105–12) jednačina je ista kao kod spuštanja dna – to je jednačina (105–2). E_{izg} se računa kao kod naglog smanjenja preseka cevi – procenjuje se prema obrascu (102–13). Navedeno važi uz uslov da je tečenje u preseku (II) mirno, i da je mirno tečenje i uzvodno od preseka (I). Postupak primene



Slika 105–12 Podizanje dna u mirnom tečenju

jednačine (105-3) je isti kao kod naglog spuštanja dna: dubina h_{II} je poznata (nju je nametnuo nizvodni granični uslov) i jednačinom se dobija dubina h_I (koja je nizvodni granični uslov za uzvodno mirno tečenje).

Napominje se da je primer u kome je bilo podizanje dna već ranije razmatran – to je bilo između preseka (II) i (III) u primeru prikazanom slikom 104-12, i rešavalo se na isti način koji je ovde malo pre objašnjen.

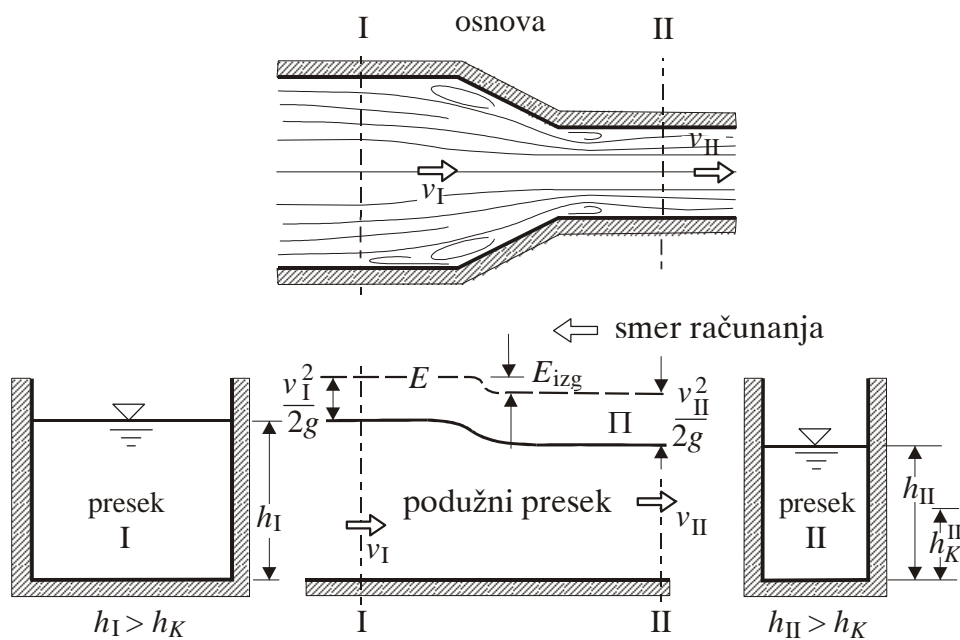
Uobičajenim postupkom uravnoteženja sila može se odrediti komponenta (u pravcu strujanja) sile kojom na fluid deluje čvrsta granična površina kojom se iz jednog preseka prelazi u drugi. Sila iste vrednosti, a suprotno usmerena, je sila kojom fluid napada na navedenu površinu koja mu se isprečila. Zadatak se rešava uravnoteženjem te sile sa silama pritiska i komponentama inercijalnih sila u presecima (I) i (II), uz pretpostavku da pravac strujanja neznatno odstupa od horizontalnog, pa je uticaj težine zanemarljiv. Napominje se da se napadna tačka sile na navedenu površinu ne može odrediti, jer se za izjednačavanje momenta ne raspolaže silama pritiska sa dna i težinom (ne zna se nivo tokom njegovog spuštanja).

Slično je bilo i kod nekih primera u Odeljku IV, Poglavlja 101.

Primećuje se da se i ovde mogu dati slične napomene koje su navedene u razmatranjima spuštanja dna. Naime, isti postupak koji je objašnjen za slučaj sa podizanjem dna primenjuje se i na primere gde se poprečni presek smanjuje sužavanjem kanala bez spuštanja dna (sl. 105-13), ili gde se i podiže dno i sužava kanal.

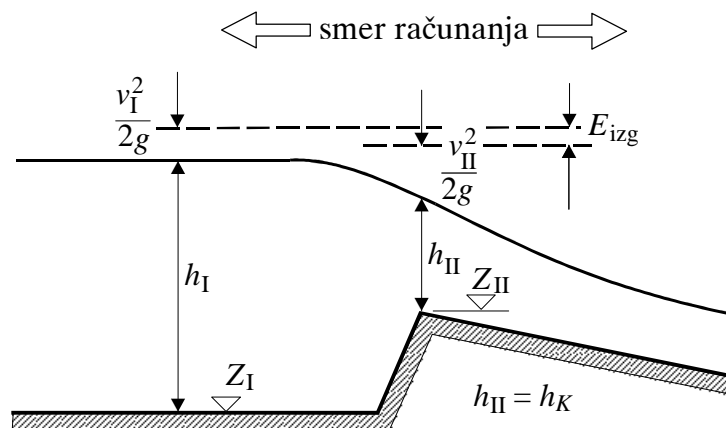
Razume se da će postepenost u sužavanju smanjiti energetske gubitke. Smanjenje se može proceniti prenošenjem napisanog za cevi na sl. 102-7a. Može se izbeći lokalni gubitak energije (a onda ostaje samo gubitak usled trenja), ako je postepenost dovoljno izražena a tada je dužina na kojoj se postepenost obavlja upola je manja od one kod povećanja preseka, prikazane slikom 105-7. Tako je bilo i kod proširenja odnosno suženja cevi, što se zaključuje upoređivanjem slika 102-4b i 102-7b. Trenje se računa prema jednačini (105-4), odnosno (105-5).

Lokalni gubici u suženju manji su nego u proširenju kanala, i zahtevane dužine za postepenost, da bi se lokalni gubitak mogao izostaviti, takođe su manje. Stoga je lakše lokalni gubitak svesti na beznačajan iznos kod suženja, nego kod proširenja.



Slika 105-13 Sužavanje preseka u mirnom tečenju

Na sl. 105-14 prikazan je slučaj gde je nailazeće tečenje mirno, ali nagib dna iza promene preseka tu uslovljava burno tečenje. Zadatak se rešava kao i prethodni slučaj (sl. 105-12) samo što je u preseku (II)



Slika 105-14 Iza podizanja dna nagib dna uslovljava burno tečenje, a ispred podizanja dna tečenje je mirno

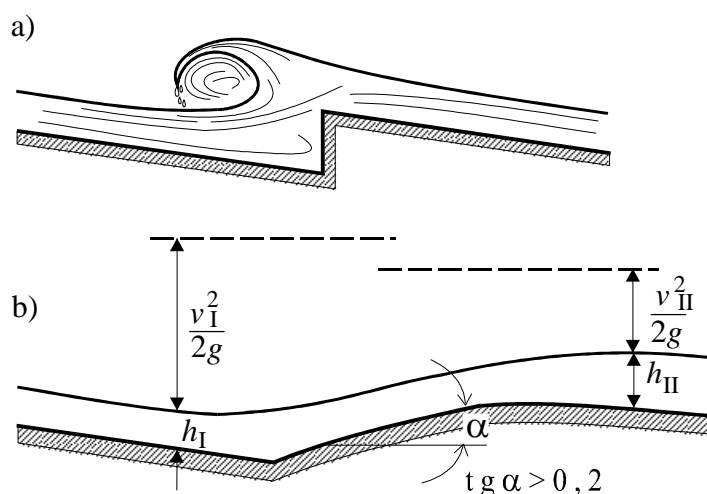
dubina kritična, upravo uspostavlja se minimalno moguća energija, a ona dozvoljava da sa njom otpočne burno tečenje. Sa dubine h_{II} dubina će se nizvodnim smerom približavati normalnoj dubini.

* * *

Prethodna razmatranja su se odnosila na slučajeve kod kojih na lokalnu promenu smanjenja preseka kanala dotiče mirno tečenje, a sada treba razmotriti slučajeve kada dotiče burno tečenje (sl. 105–15), a nagib dna nizvodno od promene takođe uslovljava burno tečenje.

Burno tečenje koje nailazi silovito udara u prepreku stvorenu promenom preseka (bilo da se dno izdiže, bilo da se presek sužava). Voda uz prepreku naglo se uzdiže, „propinje se”, nivo je nemiran, koleba se, uvlače se u vodu velike količine vazduha, može doći do izlivanja iz kanala. Ovakvo stanje se pokušalo prikazati sa crtežom „a” na sl. 105–15. Može se reći da je ono neprihvatljivo sa praktičnog stanovišta, jer se ne sme dozvoliti neobuzdano divljanje vode.

Preporučljivo je stoga da se podizanje dna, ili suženje preseka, obavi postepeno (sl. 105–15b), tako da uzvodni tok ne udara u naglo isturenu



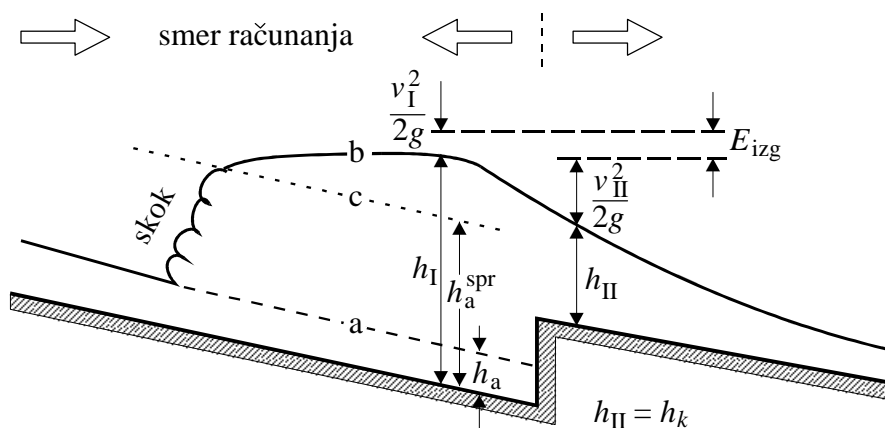
Slika 105–15 a) Burno tečenje udara o prepreku stvorenu naglim podizanjem dna i unosi poremećaj koji treba izbegavati; b) postepeno podizanje dna omogućava da se postepenim podizanjem nivoa vode pređe iz burnog toka ispred podizanja dna u burni tok iza njega

prepreku. Može se postepeno dovesti do mere da lokalnog gubitka energije nema i ostaje samo gubitak usled trenja.

Dubina h_I nameće uzvodni granični uslov (jer je tečenje burno) i na osnovu nje se jednačinom energije odredi dubina h_{II} , samo sa gubitkom E_{izg} (usled trenja, ako je postepenost dovoljno izražena). Ovo znači da je kroz ceo lokalni poremećaj smer računanja nizvodni. Dobijena dubina h_{II} je manja od kritične, ali veća od h_I ($h_I < h_{II} < h_K$), jer u preseku (II) specifična energija (zbir h i $v^2/2g$) mora biti manja nego u preseku (I), što je uočljivo iz slike 105–15b. To će se i ostvariti ako je $h_{II} < h_I$, jer je u burnom tečenju specifična energija manja ako je dubina veća, što se uviđa iz slike 92–12.

Ne mora se, međutim, ostvariti nijedan od slučajeva sa sl. 105–15. Mogu se stvoriti uslovi da smanjenje preseka zaustavi burno tečenje i da ga skokom preobrati u mirno i da se u mirnom tečenju obavi prelaz suženja. Obrazloženje za ostvarenje takve mogućnosti navodi se u nastavku.

Najniža vrednost energije toka (specifične energije) je pri kritičnoj dubini h_K . Neka se ona uspostavi u preseku (II) i od nje će tečenje biti burno prema liniji (V) na sl. 92–6. Tako je prikazano i na sl. 105–16. Tako uspostavljena minimalno moguća energija u preseku (II) sposobna je da nadvlada burno tečenje, jer je dubina h_I (koja se dobija energetskom jednačinom uz $h_{II} = h_K$) veća od dubine h_a^{spr} , koja bi se sprežala



Slika 105–16 Nizvodni uslovi nameću dubinu ispred podizanja dna dovoljnu da zaustavi nailazeće burno tečenje, pa se uspostavlja mirno tečenje pre podizanja dna, dok se iza toga opet uspostavlja burno tečenje

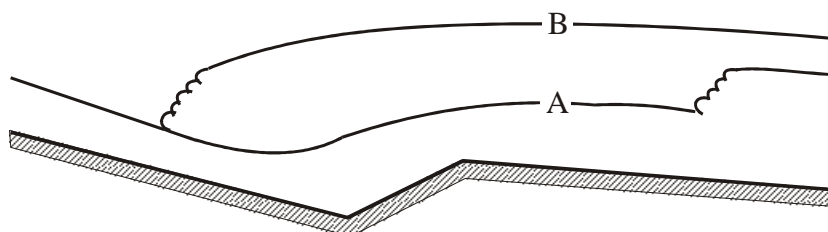
sa dubinom h_a koja se dobija računom burnog tečenja od uzvodnog graničnog uslova, nizvodnim smerom do promene preseka. Taj račun daje liniju „a” na slici.

Dubina h_a se neće ostvariti, jer je burno tečenje skokom zaustavljeno nešto uzvodnije od preseka (I). Sa druge strane, uzvodnim smerom od dubine h_I računa se linija nivoa (ona je tipa linije IV na sl. 92–6) na slici je označena sa „b”. Mesto gde će javiti skok utvrđuje se postupkom koji je izložen uz sliku 104–11. Sračuna se i linija „c” sa slike 105–16, koja pokazuje dubine koje se sprežu u skok sa dubinama iz linije „a”. Skok se javlja tamo gde se seku linije „b” i „c”.

Zadatak se znatno lakše rešava ako uticaj uzvodnog graničnog uslova (koji remeti uspostavljanje normalne dubine h_N) ne dopire do mesta uspostavljanja skoka tj. ako je $h_a = h_N$.

Uz prikazano slikom 105–16 treba da se primeti da lokalni poremećaj unosi mirno tečenje usred burnog. I ispred, i iza promene preseka, ako se svaka deonica posmatra zasebno, tečenje bi bilo burno, ali spajanje dovodi do uplitanja mirnog tečenja.

Sl. 105–17 odnosi se na slučaj gde bi nagibi dna uslovlili burno tečenje u uzvodnoj, a mirno u nizvodnoj deonici. Zavisno od stvaranja uslova za obrazovanje skoka, burno tečenje može da prodre u nizvodnu deonicu, odnosno mirno tečenje može uzvodnim smerom ući u uzvodnu deonicu, što je prikazano sa (A), odnosno (B) na slici.



Slika 105–17 (A) Burno tečenje nametnuto uzvodnim graničnim uslovom potiskuje iza podizanja dna mirno tečenje nametnuto nizvodnim graničnim uslovom. (B) veća dubina iza podizanja dna od one pod (A) sposobna je da burno tečenje zaustavi pre spuštanja dna

* * *

Razmatranja se nastavljaju sa gubicima na ulazu u kanal i izlasku iz njega – to su, uostalom neminovni gubici i stoga zaslužuju posebnu

pažnju. Pretpostavlja se da ispred ulaza, i iza izlaza kanala, struja ima veoma velike preseke, u odnosu na preseke u kanalu tj. da voda u kanal ulazi, i iz njega izlazi iz „jezera” (bazena velike zapremine) gde su brzine zanemarljive. Ova pretpostavka daće i najveće moguće gubitke na ulazu, odnosno izlazu.

Izlazni gubitak se može se izraziti sa:

$$E_{izg} = \frac{v_{izl}^2}{2g} \quad \text{tj.} \quad \xi_{izl} = 1 \quad (105-6)$$

što je napisano za cevi, obrascem (102-3), jer je pojava i ovde načelno ista. Skreće se pažnja da je na slikama 92-6 i 92-8, pri prikazivanju primera, za linije (I) i (IV), nivo na nizvodnom kraju kanala izjednačen sa nivoom u „jezeru” u koga se kanal uliva, a to govori da se gubi celokupna kinetička energija iz kanala, a time je prećutno prihvaćeno ono što je malo pre napisano, sa (105-6).

Navedena tvrdnja prihvatljiva je, jer u bazenu velike zapremine ima dovoljno prostora da se obavi rasipanje (gubljenje) celokupne kinetičke energije iz kanala.

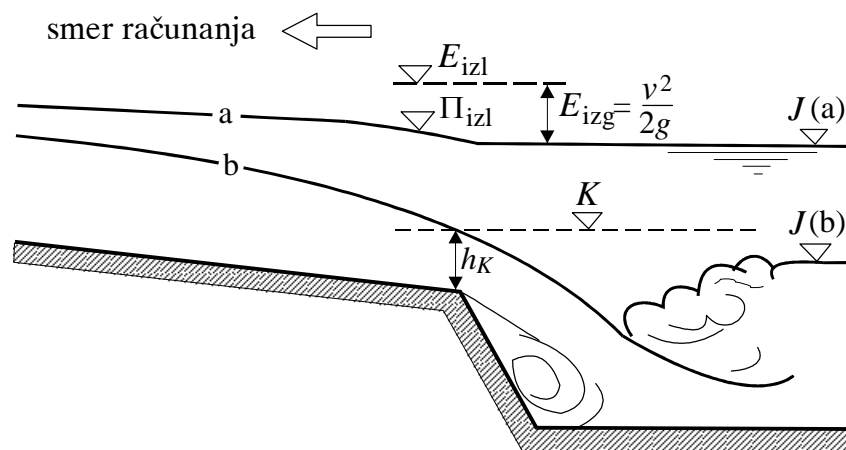
Izlazni gubitak između nizvodnog kraja kanala i jezera ostvariće se u navedenom iznosu ako je nivo u jezeru iznad kote označene sa K na sl. 105-18, koja je na koti koju bi zauzimao nivo na kraju kanala ako je tu dubina kritična. U tom slučaju nivo u jezeru postaje nizvodni granični uslov za kraj kanala gde se obrazuje dubina $h_{izl} > h_K$. To je prikazano kao slučaj „a” na sl. 105-18.

Ako je nivo u jezeru ispod kote K na sl. 105-18, na nizvodnom kraju kanala se obrazuje kritična dubina $h_{izl} = h_K$, bez obzira na nivo u jezeru. To je slučaj „b” na sl. 105-18.

Prethodni navodi su u skladu sa objašnjenjima uz primere za linije „I” i „II” na sl. 92-6.

Kao zaključak može se navesti da se samo u slučaju (a) na ulivanje u jezero gubi $v_{izl}^2/2g$, dok se u slučaju (b) gubi sva visina od energetske kote na kraju kanala do nivoa u jezeru, a to ne zavisi od tečenja u kanalu, nego od slivanja iz kanala u jezero.

Uz slučaj (a) treba primetiti da oblikovanje izlaza kanala postepenim povećanjem preseka smanjuje izlazni gubitak, koji iznosi $v_{izl}^2/2g$, a povećanje preseka smanjuje izlaznu brzinu v_{izl} , i može izlazni gubitak



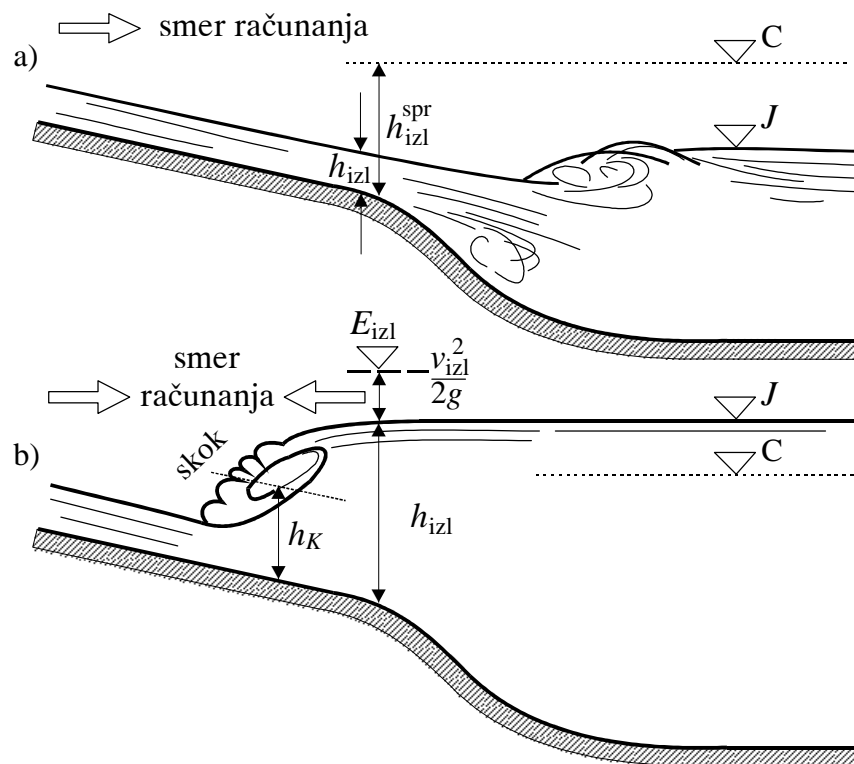
Slika 105–18 Izlaz iz kanala sa mirnim tečenjem u jezero (u mirnu vodu) sa uticanjem (a) i bez uticanja (b) nivoa u jezeru (kota J), zavisno od toga da li je nivo u jezeru iznad (a) ili ispod (b) kote K

svesti na mnogo manji iznos od onoga koji daje izlaz bez povećanja izlaznog preseka.

Slično je bilo i sa izlazom iz tunela (ili cevi) što je prikazano slikom 102–24 i objašnjeno pri opisivanju prikazanog na slici. Tamošnja objašnjenja mogu se preneti i na izlaz iz kanala, gde treba naglasiti da smanjivanja izlazne brzine ne znači samo prednost zbog smanjenog gubitka energije nego i manje erozivno dejstvo vode po njenom izlasku iz kanala.

Posle prethodnog razmatranja izlaznog gubitka energije iz kanala u kome je tečenje mirno, nastavlja se sa raspravljanjem o izlazu iz kanala u kome je tečenje burno. Dubina na kraju kanala, nametnuta uzvodnim graničnim uslovom (jer je tečenje burno) manja je od kritične ($h_{izl} < h_K$) – a nivo u jezeru nije toliko visok da pre kraja kanala skokom zaustavi burno tečenje – to je slučaj (a) na sl. 105–19, gde je nivo u jezeru J ispod kote C , a ona je određena tako da odgovara dubini h_{izl}^{SP} koja se sa h_{izl} spreže u skok.

Drugi slučaj („b” na sl. 105–19) ostvaruje se ako je nivo u jezeru J viši od kote C . Dubina na izlazu iz kanala h_{izl} određena je nivoom u jezeru i od nje se linija nivoa računa uzvodnim smerom, jer je tečenje mirno. Sa druge strane, od uzvodnog graničnog uslova računa se

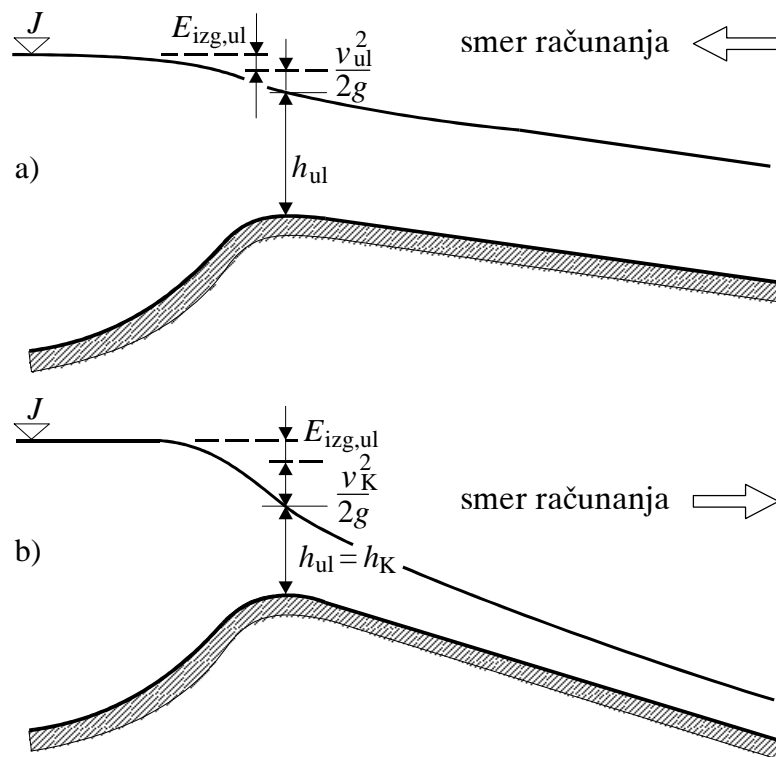


Slika 105–19 Izlaz iz kanala sa burnim tečenjem bez uticanja (a) i sa uticanjem (b) nivoa u jezeru (kota J) zavisno od toga da li je nivo u jezeru dovoljno visok (a), ili nije (b), da spreči izlaženje burnog tečenja iz kanala

nizvodnim smerom linija nivoa. Dakle, postupak je isti kao onaj koji je doveo do prikaza slikom 105–16, pa će se na tamo objašnjeni način naći i mesto gde se obrazuje skok.

* * *

Razmatraće se gubitak na ulazu u kanal pod pretpostavkom da je na ulazu tečenje mirno, pod uticajem nizvodnog graničnog uslova. Iz slike 105–20a se uviđa da visinska razlika između nivoa u jezeru i nivoa na početku kanala iznosi $(1 + \xi_{ul}) v_{ul}^2 / 2g$, gde je v_{ul} brzina na ulazu u kanal (pri dubini h_{ul}), a ξ_{ul} je koeficijent lokalnog gubitka na ulazu, koji se procenjuje po ugledu na gubitak na ulazu u cev (sl. 102–8). Preporučljivo je oblikovati ulaz da bi ulazni gubitak bio što je moguće



Slika 105–20 Ulaz u kanal sa mirnim (a) odnosno burnim tečenjem (b)

manji, jer je tada nivo u jezeru niži za isti proticaj, odnosno veći je proticaj za isti nivo u jezeru – razume se, za isti kanal, smešten na istom visinskom položaju i za isti nizvodni granični uslov.

Do dubine h_{ul} dolazi se računanjem uzvodnim smerom od nizvodnog graničnog uslova – ona je veća od kritične ($h_{ul} > h_K$), jer je tečenje mirno.

Treba napomenuti da je dubina na ulazu jednaka normalnoj dubini ako je kanal dovoljno dugačak da uticaj nizvodnog graničnog uslova (koji nameće dubinu različitu od normalne) ne dopire do ulaza u kanal.

Ako bi se na početku kanala uspostavila kritična dubina, energija toka, izražena zbirom h_{ul} i $v_{ul}^2/2g$, imala bi minimalnu vrednost, što bi za zadati proticaj dalo minimalno mogući nivo u jezeru, odnosno za zadati nivo dalo bi maksimalno mogući proticaj. To je zaista povoljno. Umesno je stoga pitanje: Zašto se na početku kanala ne

ustpostavi kritična dubina? Odgovor je da to nije moguće, ako je tečenje u kanalu mirno, jer sa kritične dubine h_K nizvodnim smerom se dubine ne mogu povećavati, da bi se približile normalnoj dubini h_N . U oblasti između h_K i h_N nije moguće povećavati dubine – slika 92–5 ukazuje da je tu moguće samo opadanje dubine po liniji (II). Nizvodni uticaji „potapaju” kritičnu dubinu ($h_{ul} > h_K$).

Nameće se novo pitanje: Da li je uopšte ostvarljivo da na početku kanala bude kritična dubina? Ostvarljivo je, ako je u kanalu burno tečenje (sl. 105–20b). Sa kritične dubine moguće je spuštanje dubine ka normalnoj – to je linija (V) na sl. 92–7.

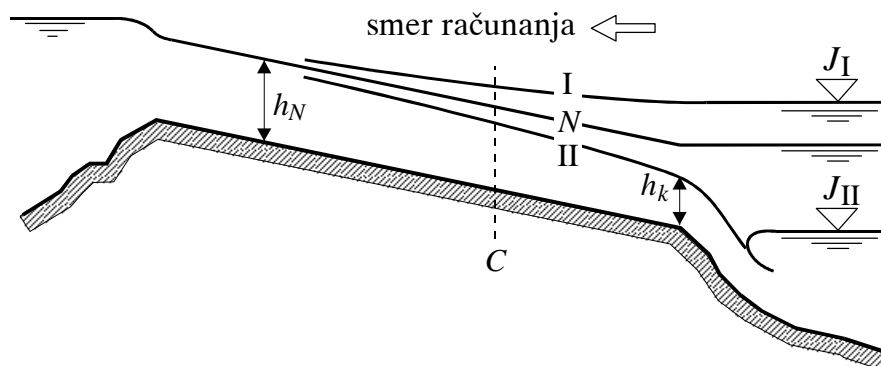
* * *

Na početku ovoga poglavlja nagovešteno je da lokalni poremećaj u otvorenim tokovima uzrokuje promenu nivoa i da se to ne može rešiti jednostavnim uklapanjem lokalnog gubitka u račun između dva unapred poznata poprečna preseka struje, jer te preseke lokalni gubitak menja. To je potvrđeno u razmatranju prethodnih primera, a teškoću u rešavanju nekih primera čini razgraničavanje zadatka, pojavljuje se usred zadatka granični uslov koji stvara lokalni poremećaj. Tako se u nekim primerima pojavljuje burno tečenje gde bi ispred i iza lokalne promene, bez njenog uticaja tečenje bilo mirno (sl. 105–8b). Ili, pojavljuje se mirno tečenje usred burnog (sl. 105–16).

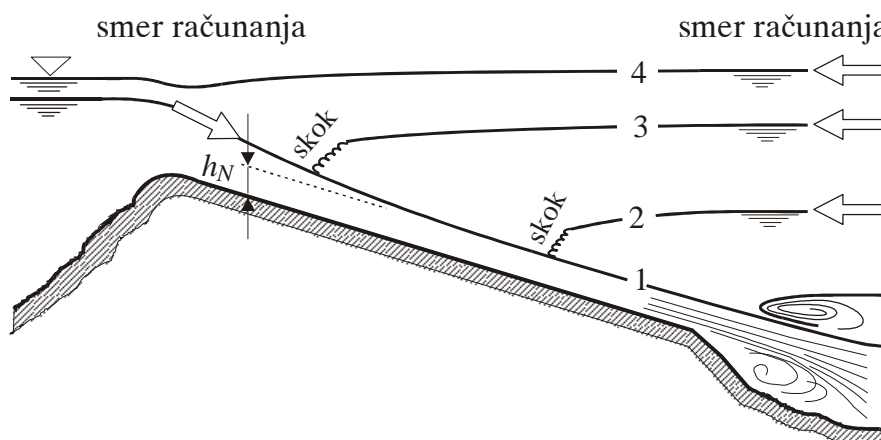
Može se zaključiti da se lokalna promena mora uklopiti u tok ispred i iza nje, ali da se i tečenje ispred i iza lokalne promene mora uskladiti sa njom i to međusobno preklapanje utiče na obrazovanje nivoa ispred i iza nje, da bi se onda uzvodno i nizvodno računao nivo prema onome što nameće trenje. Treba naglasiti da se zadatak prevashodno svodi na spajanje nivoa ispred sa onim iza prepreke, a da procena lokalnog gubitka energije nema veći značaj, pogotovo ako se lokalna promena oblikuje da se gubitak svede na beznačajan iznos. U ovome treba naći i opravdanje za naslov ovog odeljka gde je naglašeno da se radi o „spajanju tokova”.

* * *

Na slikama 105–21 i 105–22 prikazane su mogućnosti koje se mogu ostvariti u jednom kanalu sa konstantnim nagibom dna u kome su lokalne pojave samo na ulazu i izlazu. Prva slika se odnosi na kanal u



Slika 105–21 Kanal u mirnom tečenju – smer računanja je uzvodni, granični uslov je nivo u jezeru u kojem se kanal uliva, taj nivo uslovljava usporavanje toka (I) ili ubrzavanje (II), a u izuzetnom slučaju (N) duž celoga kanala tečenje je jednoliko (normalna dubina); na početku kanala uspostavlja se normalna dubina ako je kanal dovoljno dugačak, a ako je kraći, ako počinje sa presekom (C), normalna dubina neće se nigde ostvariti za slučajeve (I) i (II)



Slika 105–22 Nagib kanala omogućava burno tečenje do kraja kanala (1), ili je ono zaustavljeno skokom pošto je već postignuta (2), odnosno još nije postignuta (3) normalna dubina, ili se burno tečenje uopšte ne pojavljuje (4) pri visokom nivou uzvodnog jezera

kome je normalna dubina veća od kritične (jednoliko tečenje je mirno), a druga na slučaj kada je normalna dubina manja od kritične (jednoliko tečenje je burno).

PRIMEDBA

Spajanje nivoa pri promeni poprečnog preseka unosi i izgubljenu energiju. Ako bi se želelo da se primenom dimenzionalne analize napišu izrazi koji bi sa bezdimenzionalnim veličinama opisivali tu energiju došlo bi se do veoma složene veze. Pre svega, morao bi ući geometrijski opis promene čvrstih granica (u bezdimenzionalnim veličinama), a zatim uneti Re i We -broj (jer utiču viskoznost i površinski napon). Posebnu teškoću za pojedinačne primere predstavljaju granični uslovi, jer se u nekim primerima i ne zna gde je granični uslov, zbog preplitanja mirnog i burnog tečenja. Zbog svega toga ostaje da se svaki primer rešava prema datim uslovima, a da se izgubljena energija procenjuje prema odgovarajućim slučajevima u cevima, a pri tome se prihvata „kvadratna zakonitost otpora” tj. zanemarenje uticaja viskoznosti i površinskog napona. Tako je postupljeno i kod cevi što je i napisano u „Primedbi” uz Poglavlje 102.

Na kraju, treba naglasiti i uticaj Fr -broja, merodavnog za sve procese sa slobodnom površinom vode.

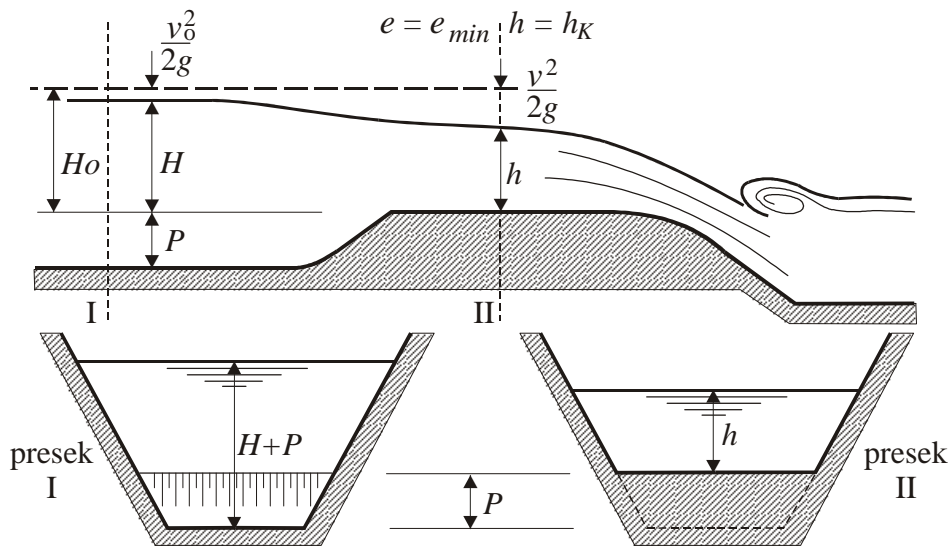
III

USPOSTAVLJANJE MINIMUMA ENERGIJE PRI TEČENJU PREKO ŠIROKOG PRAGA

Slika 105–23 prikazuje prag smešten u kanal. Gornja površina praga je horizontalna i ona se u pravcu strujanja pruža dovoljno dugo da se u jednom njenom delu uspostavi paralelno i pravolinijsko strujanje, horizontalno usmereno. Time je ispunjen uslov da poprečni presek struje na pragu može da uđe u jednačinu energije:

$$\underbrace{H + \frac{v_0^2}{2g}}_{H_0} = \underbrace{h + \frac{v^2}{2g}}_e \quad (105-7)$$

koja povezuje presek ispred praga (na koji se odnosi leva strana jednačine) i presek na pragu. Razume se da se i za presek ispred praga pretpostavlja pravolinijsko i paralelno strujanje. Za nultu kotu je uzeta kota praga (vidi sl. 105–23). Fluid se smatra idealnim.



Slika 105–23 Na širokom pragu uspostavlja se minimalna energija struje (e_{\min}) koju daje kritična dubina (h_K)

Uslovljava se da na strujanje preko praga ne utiču nikakvi nizvodni uslovi, upravo da se presek struje na pragu može povezati samo za stanjem ispred praga, kako je napisano sa (105–7).

Pri primeni jednačine (105–7), za zadati proticaj, dubine h , odnosno $H+P$, određuju brzinu v , odnosno v_0 , pa su onda veličine za određivanje samo h i H . Za vezu između njih raspolaže se samo jednom jednačinom – ona je napisana sa (105–7). Za određeni proticaj ona je zadovoljena za bilo koju vrednost za h (i za nju dobijenu vrednost H), pa je, prema tome, zadatak neodređen ako se želi rešiti samo sa (105–7). Treba prihvatiti neki dopunski uslov kojim će zadatak moći da se reši. On je u sledećem:

Desna strana u (105–7) je jednaka specifičnoj energiji e za struju na pragu, a prema prikazu na sl. 92–12 ta energija ima minimalnu vrednost za $h = h_K$ (= kritična dubina). Prihvatanje „načela o minimumu energije” (koji se primenjuje u Mehanici) u ovom slučaju dovodi do uspostavljanja kritične dubine na pragu. Tako je i upisano na sl. 105–23. Sa $h = h_K$ zadatak je rešiv, jer je onda desna strana (105–7) funkcija isključivo od proticaja, pa su jednačinom povezani proticaj i visina H , pa je zadavanjem jedne od tih veličina poznata druga.

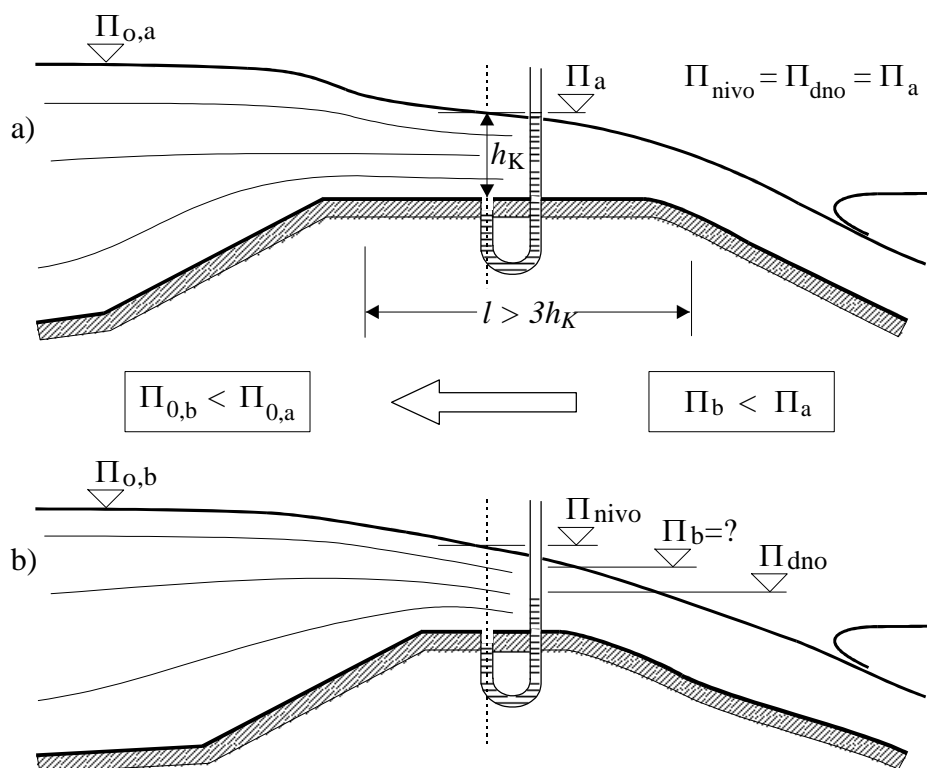
„Načelo o minimumu energije” može se protumačiti izrekom „priroda se, sama od sebe, stara da se uspostavi najverovatnije stanje”. U ovom slučaju zaista je verovatno da se voda ispred praga neće podići više nego što je minimalno potrebno da zadati proticaj protiče preko praga. Nema razloga da ispred praga nivo bude viši, a i nema ni valjanog odgovora dokle bi se popeo.

„Minimum energije” je ujedno i „maksimum izdašnosti”, jer se prethodno navedeno može iskazati i ovako: za određeni nivo ispred praga (uz kritičnu dubinu na pragu) teče maksimalno mogući proticaj.

„Načelo minimuma energije” već je ranije korišćeno, u primerima prikazanim slikama 105–8, 105–9, 105–14 i 105–16, gde je dubina izjednačena sa kritičnom tamo gde se nameće da se uspostavlja minimalna energija.

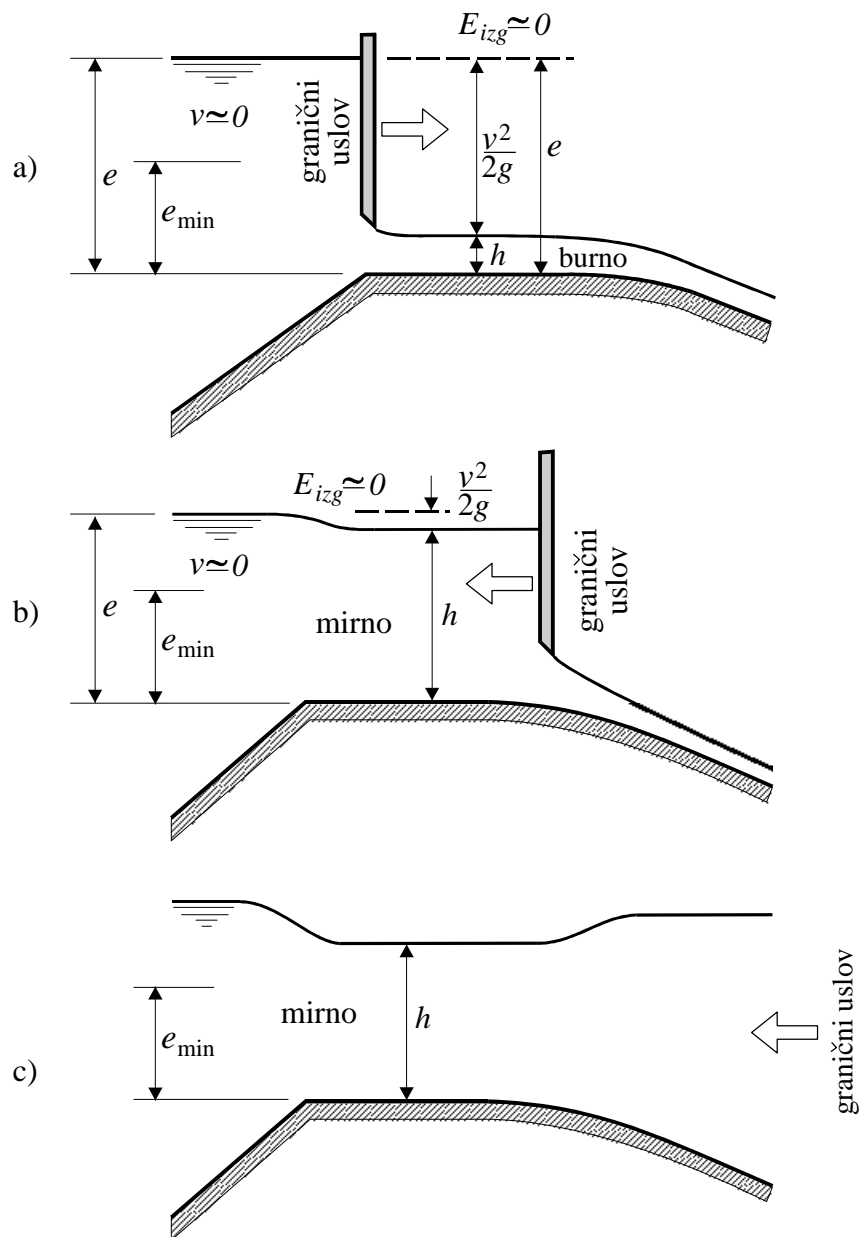
Na sl. 105–24, na crtežu „a” napisano je da će se sa dužinom l većom od trostruke kritične dubine ispuniti uslov za obrazovanje paralelnog i pravolinijskog strujanja na pragu, čime će se opravdati primena jednačine (105–7), koja, kao i svaka jednačina koja povezuje dva preseka, zahteva taj uslov za preseke na koje se primenjuje. Struja pri nailasku na prag je zakrivljena, jer se nivo spušta, a donje strujnice zaobilaze prag. Tek na izvesnom rastojanju od početka praga obrazuje se paralelno i pravolinijsko strujanje, ako još ostaje i izvesna dužina na kojoj će se obaviti zakrivljenost strujanja pri kraju praga. Ne smeju se preklapati uticaji sa uzvodne i nizvodne strane, što bi dovelo do toga da nigde na pragu ne bude presek sa paralelnim i pravolinijskim strujanjem. Smatra se da je navedena dužina $l > 3h_K$ dovoljna da do toga ne dođe, odnosno da se na pragu uspostavi presek struje, podoban za primenu jednačine (105–7), jer je kroz njega strujanje paralelno i pravolinijsko.

Dužina l se meri duž struje, a kako se radi o „prelasku preko praga”, obično se govori o „širini praga”. Zadatak se naziva „*tečenje preko širokog praga*” ako je on dovoljno širok (ako je $l > 3h_K$) da se na njemu uspostavi paralelno i pravolinijsko strujanje sa kritičnom dubinom. U tom slučaju prag se može nazvati „širokim”, jer se „ponaša kao široki prag”, ostvaruje se zakonitost za „široki prag”. U slučaju „a” prag se može nazvati „širokim”, dok se to ne može u slučaju „b”. Za utehu i u ovom drugom slučaju prag će se ponašati kao širok ako se smanji proticaj, jer će se time smanjiti i kritična dubina, pa onda i potrebna širina da bi se prag ponašao kao širok.



Slika 105–24 Skraćenjem praga (smanjenjem širine praga) povećava se propusna moć, jer se za isti proticaj dobija niži nivo ispred praga ($\Pi_{0,b} < \Pi_{0,a}$)

Za slučaj „b” sa sl. 105–24 ne može se primeniti jednačina (105–7), jer se nigde na pragu ne uspostavlja paralelno i pravolinijsko strujanje. Zakrivljenost strujanja na pragu uslovljava da pijeziometarska kota nije ista za sve deliće u preseku. Još u Poglavlju 81, ukazano je na promenu pijeziometarske kote po preseku u zakrivljenom strujanju (slika 81–3). Pijeziometarska kota je na dnu niža od pijeziometarske kote u nivou, pa bi u jednačinu energije za slučaj „b” sa sl. 105–24 trebalo uneti pijeziometarsku kotu koja predstavlja ceo presek. Gde je ona pouzdano se ne zna, ali se pouzdano može tvrditi da je niža od kote nivoa. Tako je i nacrtana kota Π_b na slici. Pošto je $\Pi_b < \Pi_a$, u slučaju „b” manja je sila pritiska koja se na pragu suprostavlja tečenju, pa je za slučaj „b” propusna moć veća: za istu visinu H_0 proticaj je veći, odnosno za isti proticaj visina H_0 manja



Slika 105–25 Na širokom pragu se ne uspostavlja kritična dubina (koja daje minimalnu specifičnu energiju) ako to nametnu granični uslovi: a) uzvodni granični uslov nameće burno tečenje preko praga ($h < h_K$); b) i c) nizvodini granični uslov nameće mirno tečenje preko praga ($h > h_K$)

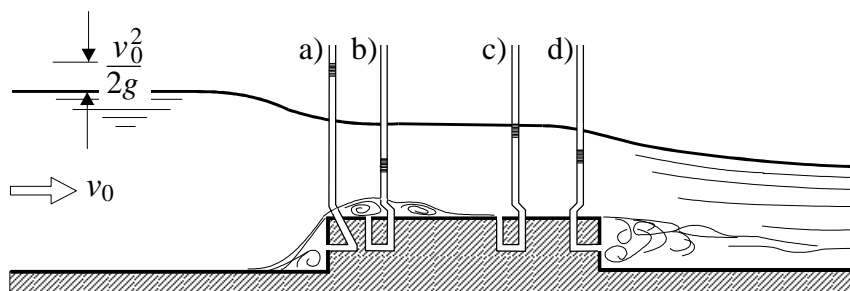
Može se zaključiti i da je za isti nivo ispred praga proticaj u „b” veći nego u „a”. Kao opšti zaključak može se izreći da se skraćivanjem praga (kada se on ne ponaša kao „široki prag”) povećava propusna moć.

* * *

Može se reći da se kritična dubina na pragu uspostavlja „sama od sebe”, jer se tako zadovoljava ono što kaže „načelo o minimumu energije”. Da bi se na pragu obrazovala dubina koja nije kritična mora postojati uzrok koji remeti uspostavljanje kritične dubine. Taj uzrok može da bude na uzvodnoj strani, što je prikazano crtežom „a” na sl. 105–25, gde je dubina na pragu manja od kritične. Tečenje je burno, a za njega mora i da postoji uzvodni granični uslov što je na slici i prikazano. Za pojavu mirnog tečenja (dubina na pragu veća od kritične) merodavan je granični nizvodni uslov, što je prikazano crtežima „b” i „c” na istoj slici (105–25), gde se sa slučajem „c” ukazuje da nizvodni granični uslov može da bude i udaljen od praga.

* * *

Na sl. 105–26 dat je načelni uvid u raspored pritisaka po pragu. U preseku struje u kome je tačka „c” strujanje je pravolinijsko i paralelno, pa vlada hidrostatička raspodela pritisaka tj. ista pijeziometarska kota za sve tačke u tom preseku. Prema tome, u tački „c” na pragu pritisak je onaj koji po hidrostatičkoj zakonitosti odgovara dubini vode. U tački „a” pritisak je povišen zbog zaustavljanja struje, dok je u tačkama „b” i „d” snižen (u „b” zbog sužavanja proticajnog preseka i povećane brzine u struji van vrtložne oblasti uz prag, a u „d” zbog zakrivljenja struje).



Slika 105–26 Uvid u raspored pritisaka po pragu

Rečeno je za pritisak da je „povišen”, odnosno „snižen” – mislilo se da je povišen, odnosno snižen, u odnosu na pritisak koji bi vladao da je raspored pritiska po zakonu hidrostatičke.

IV

SUŽENJA, PRAGOM I PREPREKE U OTVORENIM TOKOVIMA

Smanjenje poprečnog preseka otvorenog toka postiže se podizanjem praga u dnu, ili smanjivanjem širine toka (primicanjem bočnih zidova) ili udruživanjem prvog i drugog, ili stavljanjem neke prepreke u sredinu toka. Praktični primeri su: prag radi podizanja nivoa, bočno sužavanje na mestu nekog objekta u toku (mostovski stubovi, na primer), privremeno zakrčenje poprečnog preseka tokom izgradnje objekta, suženje preseka radi merenja proticaja itd.

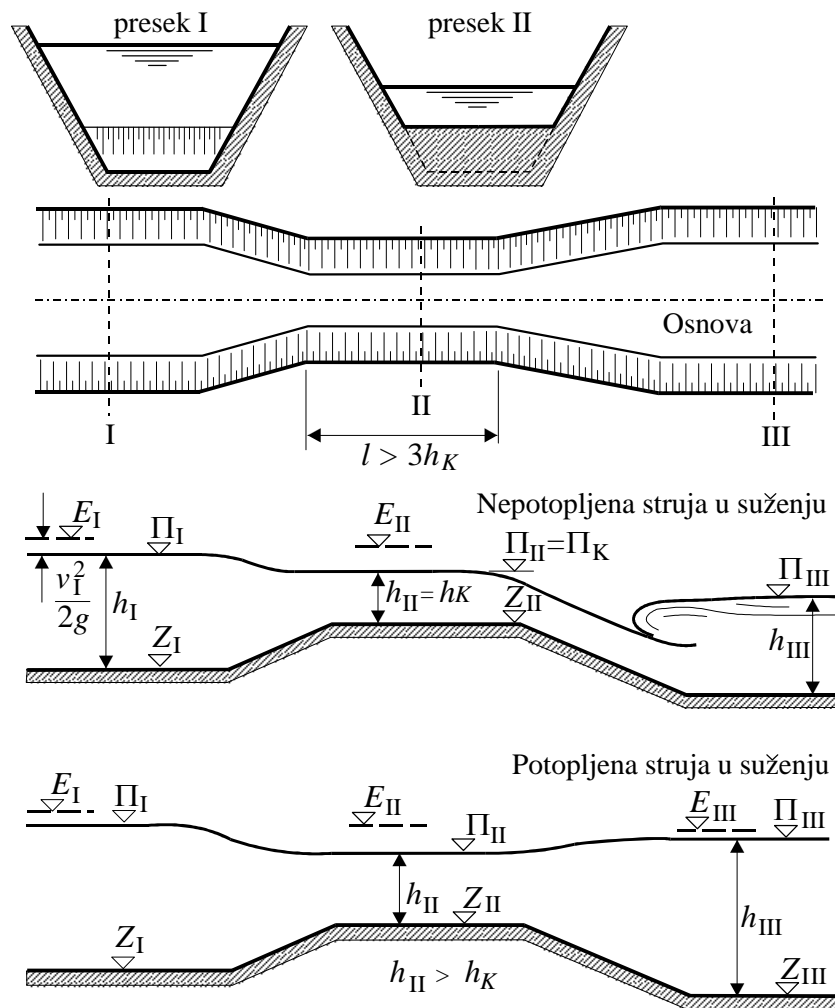
U narednim izlaganjima upotrebljavaće se reč „*suženje*” kao opšti naziv za smanjenje poprečnog preseka. Iza suženja izgrađeni poprečni presek je isti kao ispred njega, a ako nije, on je u svakom slučaju veći od onoga u suženju.

Podrazumeva se da na suženje nailazi mirno tečenje, tako da suženje nameće nivo ispred njega. Burno tečenje ispred suženja se isključuje, jer je, bez posebnih proučavanja, neizvesno kako bi silovita struja prošla kroz njega. Mirno tečenje je i iza suženja.

Na sl. 105–27 prikazano je suženje uz sadejstvo praga i bočnog suženja, što može da posluži za uopštena razmatranja smanjenja poprečnog preseka u kanalu.

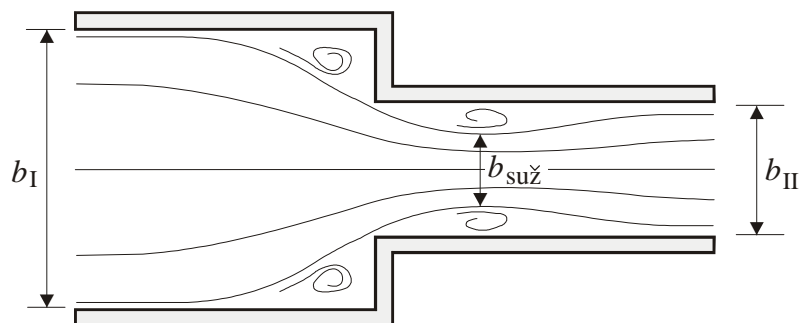
Prvi mogući slučaj nazvan na sl. 105–27 „nepotopljena struja u suženju” nastaje ako nema uticaja sa nizvodne strane na uspostavljanje strujanja na pragu. Podrazumeva se da je suženje dovoljno dugačko da se u njemu uspostavi paralelno i pravolinijsko strujanje, a to će se i ostvariti, shodno razmatranju u prethodnom odeljku (III), ako je dužina suženja, označena sa l na slici 105–27, veća od trostruke kritične dubine u suženju (tako je upisano na slici). U suženju će se onda barem u jednom njegovom delu uspostaviti kritična dubina – dakako, ako, kako je malo pre naglašeno, nema uticaja sa nizvodne strane koji bi to poremetili.

U ranijim razmatranjima, u Odeljku III, pretpostavljeno je da se struja pri prelasku na prag ne sužava – tako je prikazano na sl. 105–23.



Slika 105–27 Potopljeno i nepotopljeno tečenje kroz suženje

Ako se širina kanala u suženju smanjuje (u odnosu na širinu ispred njega), i ako je prelaz u suženje nagao dolazi do tzv. „bočnog suženja struje” – sl. 105–28. Pojava ima sličnosti sa sužavanjem struje pri naglom suženju cevi (sl. 102–5), gde se struja, po ulasku u užu cev suzi (sažme) tako da je poprečni presek sužene struje manji od celokupnog preseka unutar cevi. Tamo se to izrazilo „koeficijentom suženja” C_A , uvedenim izrazom (102–7), po kome je $C_A = A_{suž}/A_{II}$, gde su $A_{suž}$ i A_{II} površine poprečnih preseka sužene struje i cevi po promeni preseka.



Slika 105–28

Tamo, kod razmatranja pojave suženja struje u cevi objašnjeno je da je sužena struja zapravo središnji deo poprečnog preseka cevi kroz koji se obavlja proticanje duž cevi (to je „aktivni deo preseka”), a taj središnji deo je opkoljen vrtložnom oblasti uz zid cevi koja ne doprinosi proticanju.

Za oštroično naglo suženje dat je obrazac (102–11) po kome se računa koeficijent C_A u zavisnosti od A_{II}/A_I , gde je A_I površina preseka cevi pre promene (cev se naglo sužava sa A_I na A_{II}). Veza $C_A = C_A (A_{II}/A_I)$, pored ostalih funkcija, je grafički prikazana na slici 102–6. U navedenom obrascu može se odnos A_{II}/A_I zameniti sa $(D_{II}/D_I)^2$, gde su D_{II} i D_I odgovarajući prečnici, a umesto C_A , što je jednako $A_{su\check{z}}/A_{II}$, može se pisati $(D_{su\check{z}}/D_{II})^2$, pa se obrazac, umesto (102–11) piše sa:

$$\frac{D_{su\check{z}}}{D_{II}} = \sqrt{0,62 + 0,38 \left(\frac{D_{II}}{D_I} \right)^4} \quad (105-8)$$

Između suženja kanala pravougaonog poprečnog preseka, prikazanog na sl. 105–28 i suženja cevi (sl. 102–5) može se uočiti veza ako se prikazano na sl. 105–28 shvati kao bilo koji presek cevi u kome leži podužna osovina cevi, pa upisane širine na slici ($b_I, b_{II}, b_{su\check{z}}$) predstavljaju onda prečnike ($D_I, D_{II}, D_{su\check{z}}$). Iz toga sledi da se, može barem kao približnost, prethodni obrazac (105–8) preneti na kanal, u vidu:

$$\frac{b_{su\check{z}}}{b_{II}} = \sqrt{0,62 + 0,38 \left(\frac{b_{II}}{b_I} \right)^4} \quad (105-9)$$

Za najizrazitije suženje gde je b_I jako veliko u odnosu na b_{II} (gde je b_I/b_{II} blisko nuli), prethodni obrazac daje $b_{suž}/b_{II}$ jednako otprilike 0,8, što znači da je sužena struja odmaknuta od zida za $0,1b_{II}$ (kod cevi se zaključuje da je to odmicanje $0,1D_{II}$). Dužina na kojoj se sužena struja proširuje jednaka je otprilike 10 puta $0,1b_{II}$, tj. b_{II} (ovo je zaključeno uz pretpostavku da se središnja struja širi tako da granična njena strujnica zaklapa sa pravcem strujanja ugao α , gde je $\text{tg } \alpha$ otprilike 0,1, što se već u nekoliko navrata primenilo, počevši od prikazanog na slici 102–4). Pre proširivanja struja se skuplja na dužini otprilike upola kraćoj od dužine proširivanja, pa se ukupna dužina sužavanja i proširivanja ceni na $1,5b_{II}$. Na tom rastojanju od promene preseka središnji deo struje dopire do zidova kanala, i onda treba još dodati i izvesnu dužinu na kojoj će se obrazovati pravolinijsko i paralelno strujanje. Kod cevi, radi potpune sigurnosti, uzela se čak dužina jednaka trostrukom prečniku, što je i napisano sa (102–14).

Prethodna procena obavljena je za najnepovoljnije uslove, za oštroični ulaz u suženje, i za najizrazitije suženje, gde je širina užega kanala veoma malena u odnosu na širinu širega. Manje izražena suženost dovodi do manje potrebne dužine na kojoj će se struja sužiti, a potom proširiti. Na primer, za $b_{II}/b_I = 0,9$, račun po istom postupku dao bi da se sužena struja odmakne za otprilike $0,03b_{II}$, pa bi se suženje i proširenje obavilo na dužini odprilike $0,5b_{II}$.

Treba naglasiti da ulaz u suženje ne mora da bude (i poželjno je da ne bude) oštroičan. Ako je on zaobljen, može sužavanje da postane nezatno. Na kraju, može se sužavanje i potpuno sprečiti ako se obavi postepeno, kao što je za cevi prikazano slikom 102–7. Ovo važi ne samo za pravougaoni presek nego i za trapezni.

Prema tome, za postepeno sužavanje ne bi trebalo postavljati uslov za njegovu dužinu, izuzev, razume se, uslova da je dužina l veća od trostruke kritične dubine. Može se ipak preporučiti da dužina l ne bude manja od širine vodenog nivoa za kritičnu dubinu ($l > B_K$).

Ako se uspostave uslovi za nepotopljenu struju sa kritičnom dubinom u suženju primenjuje se jednačina energije između preseka ispred suženja i u suženju:

$$Z_I + h_I + \frac{v_I^2}{2g} = Z_{II} + h_{II} + \frac{v_{II}^2}{2g} + E_{izg}^{I-II} \quad (105-10)$$

za nepotopljeno suženje $h_{II} = h_K$

Nazivi „potopljena”, odnosno „nepotopljena” struja u suženju dobro izražavaju ono što je bitno, jer je kritična dubina u suženju na pragu „potopljena” (ili „poklopljena”) uticajem sa nizvodne strane, odnosno nije „potopljena”. Nije ispravno izražavanje sa „potopljeno suženje” ili „potopljeni prag” (odnosno „nepotopljen”) jer je prag pri tečenju u svakom slučaju potopljen, voda je iznad njega.

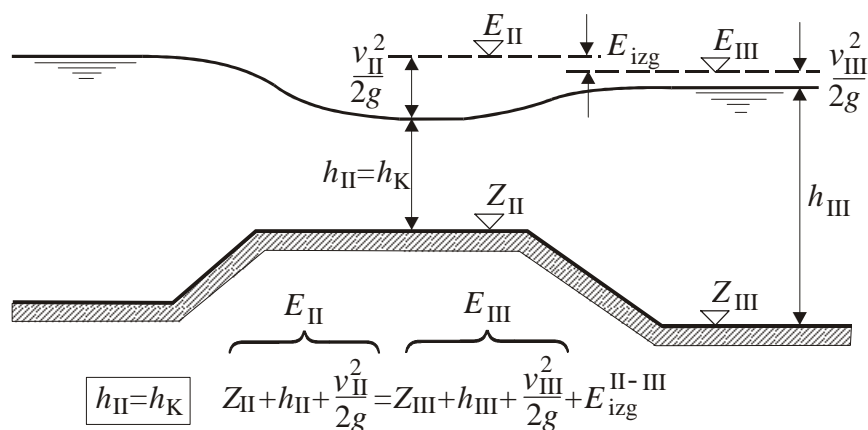
Od praktičnog značaja je raspravljanje uslova koji nameće potapanje, upravo utvrđivanje „granice potopljenosti”. Može se, po ugledu na nejednačinu (105–3) napisati da je strujanje kroz suženje nepotopljeno, ako je:

$$\left. \begin{aligned} Z_{II} + h_{II} + \frac{v_{II}^2}{2g} &> Z_{III} + h_{III} + \frac{v_{III}^2}{2g} + E_{izg}^{II-III} \\ \text{uz } h_{II} &= h_K \end{aligned} \right\} \quad (105-11)$$

jer je u tom slučaju energija sa kritičnom dubinom u preseku (II) veća od one u (III) pa nepotopljeno strujanje u (II) ne može da bude ometeno od stanja u preseku (III).

Na sl. 105–29 prikazano je strujanje na granici potopljenosti, a to je kada je leva strana u (105–11) baš jednaka desnoj, i tako je upisano i na sl. 105–29.

Jasno je da je strujanje nepotopljeno ako je pijeziometarska kota sa kritičnom dubinom u suženju viša od pijeziometarske kote u preseku



Slika 105–29 Tečenje na granici potopljenosti; za dubine u preseku (III) veće od prikazane – tečenje preko praga je potopljeno

iza suženja, tj. $\Pi_K > \Pi_{III}$ (vidi prikaz nepotopljene struje u suženju na sl. 105–27). Može da bude i $\Pi_K < \Pi_{III}$ pa do potapanja ne dolazi, jer se nivo sa kritične dubine može i popeti do preseka (III), jer se u smeru tečenja brzina smanjuje. Stoga je nužna provera potopljenosti nejednačinom (105–11).

Ako se utvrdi da je strujanje kroz suženje potopljeno, računanje mora otpočeti sa nizvodnim uslovom, sa presekom (III), pa se prema prikazanom na sl. 105–27, ispisuje jednačina koja povezuje preseke (II) i (III):

$$Z_{II} + h_{II} + \frac{v_{II}^2}{2g} = Z_{III} + h_{III} + \frac{v_{III}^2}{2g} + E_{izg}^{II-III} \quad (105-12)$$

Ova jednačina je ista kao (105–2) samo što je tamo uzvodni presek (I), a ovde je (II), a tamošnji (II) ovde je (III). Jednačina (105–12) rešava se isto kao i (105–2). Od zadatog nizvodnog uslova, u preseku (III) dobija se dubina h_{III} . Napominje se da prilikom traženja rešenja treba pretpostavljati $h_{II} > h_K$. Naime, jednačina se može zadovoljiti i sa nekom vrednošću $h_{II} < h_K$, jer formalno postoje dve dubine sa istom vrednošću $h + v^2/2g$, od kojih je jedna dubina veća od kritične, a druga manja, što je objašnjeno iza jednačine (105–2), a tamo je objašnjeno i da je odgovarajuće rešenje samo sa dubinom većom od kritične.

Pošto se odredi dubina h_{II} računa se dubina h_I ispred suženja, primenom jednačine (105–10), ali u njoj dubina h_{II} nije kritična, nego malo pre sračunata sa (105–12).

* * *

U jednačinama (105–10) i (105–12) pojavljuju se energetske gubici između preseka (I) i (II), odnosno (II) i (III). Oni se mogu proceniti na osnovu razmatranja gubitaka na suženju, odnosno proširenju preseka kanala.

Za ulazak u suženje bez ikakvog oblikovanja (naglo suženje sa oštrovičnim ulazom), izraz (102–13) za smanjenje preseka struje u suženju na jednu trećinu preseka pre suženja ($A_{II}/A_I = 1/3$) daje izgubljenu energiju $1/3$ od $v_{II}^2/2g$.

Za izlazak iz suženja, sa naglom promenom poprečnog preseka, i za odnos preseka struje u suženju prema preseku iza njega $A_{II}/A_{III} = 1/3$, obrazac (102–1) bi dao izgubljenu energiju jednaku $0,45v_{II}^2/2g$.

Prethodno uzimanje odnosa preseka jednakog $1/3$ može se smatrati kao suženje od koga se još izrazitije retko može u praksi očekivati.

Ako se obavi postepenost promene preseka i pre i iza suženja, energetski gubitak može se svesti na otprilike $0,1$ i na $0,1v_{II}^2/2g$ na ulazu, odnosno na $0,2v_{II}^2/2g$ na izlazu.

* * *

Skreće se pažnja da suženje može da uzrokuje burno tečenje iza suženja, iako bi, da nema suženja, tečenje tu bilo mirno.

Da li će iza suženja burno tečenje prodirati nizvodno zavisi od toga da li je energija u suženju sposobna da to uzrokuje, a to se može zaključiti iz prikazanog na sl. 105–8 i objašnjenja uz tu sliku. Na toj slici pre promene preseka dubina je $h_I = h_K$, a nizvodni uslovi doveli bi do dubine h_{II} iza suženja. Dubina h_{II} može da bude dovoljno moćna da spreči prodiranje burnog tečenja (prikazanog sa „a” na sl. 105–8), ili preslaba da to spreči, pa burno tečenje prodire iza suženja (slučaj „b” na sl. 105–8).

Prenošenje sa sl. 105–8 i rečenog uz nju, na tečenje kroz suženje je jednostavno: dubinu $h_I = h_K$ na sl. 105–8 treba shvatiti kao nepotopljenu kritičnu dubinu u suženju, a dubinu h_{II} treba smatrati za dubinu iza suženja označenu sa h_{III} na sl. 105–27.

* * *

Prethodna razmatranja odnosila su se na suženje koje je dovoljno dugačko, odnosno na prag koji se „ponaša kao široki”, tako da se u suženju, odnosno na pragu, barem na izvesnoj dužini ostvari pravolinijsko i paralelno strujanje. To omogućava da presek u suženju, ili na pragu, uđe u jednačinu energije.

Sada će se raspravljati primeri gde prethodno nije ostvareno: suženje je prekratko, prag se ne može nazvati „široki”.

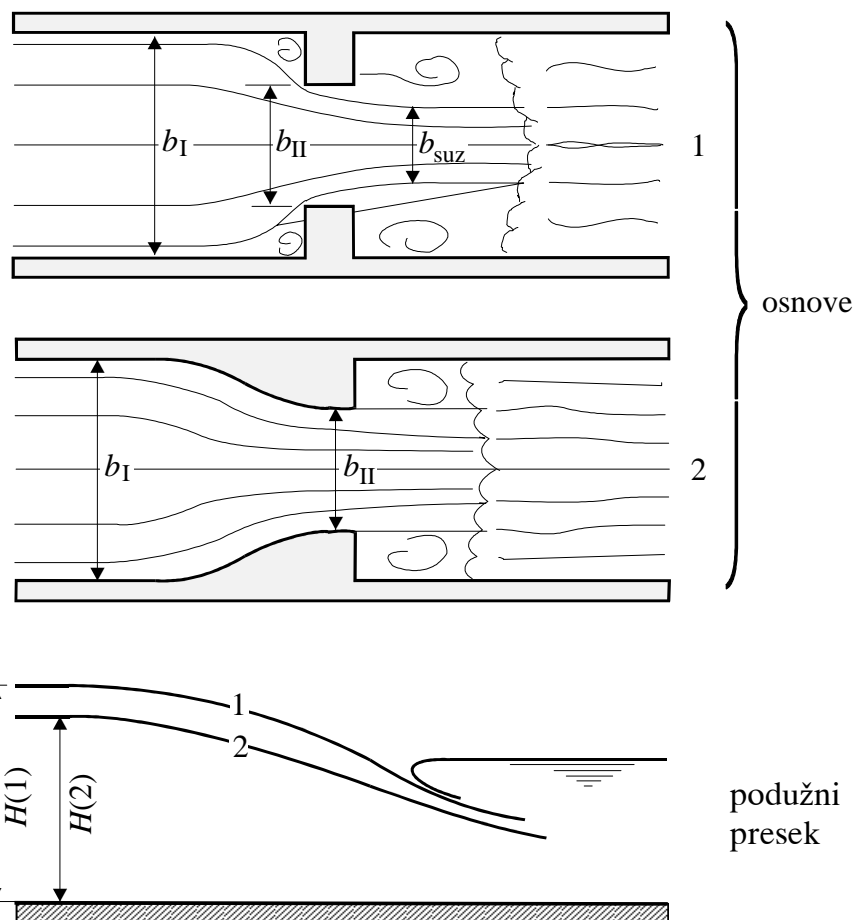
Na slici 105–24 prikazano je tečenje preko praga na koje ne utiču nizvodni uslovi, i to za dva slučaja – „a” i „b” – od kojih se u prvom „prag ponaša kao široki”, a u drugom ne. Slučaj „a” računa se jednačinom (105–7) sa kritičnom dubinom (i njoj odgovarajućom brzinskom visinom) na desnoj strani. Uz to na toj strani treba dodati i u jednačini (105–7) izostavljenu izgubljenu energiju između preseka koje

jednačina povezuje. Ako se i slučaj „b” računa na isti način, dobija se nivo ispred praga viši od onoga koji će se ostvariti. Ovaj zaključak je u skladu sa objašnjenjem koje je u ranijim izlaganjima pratilo malo pre pomenutu sliku 105–24, gde je rečeno da je, za isti proticaj, nivo u slučaju „b” niži nego u „a”, manja je visina označena sa H na slici. Koliko je ona manja zavisi od toga koliko je širina praga (merena u pravcu strujanja) manja od zahtevane trostruke kritične dubine, od oblika prednjeg dela praga i visine praga u odnosu na visinsku razliku H . Prema tome teško je to proceniti, ali se može reći da ne bi trebalo očekivati da će relativno odstupanje za visinu H (zbog toga što se i slučaj „b” računa na isti način kao slučaj „a”) preći 10%, i to za slučajeve gde je odstupanje najizrazitije. U nizu primera biće manje, pa čak i znatno manje.

Na slici 105–30 prikazana su dva primera suženja kod kojih na proticanje kroz suženje ne utiču nizvodni uslovi. U oba primera očigledno je da su suženja prekratka da bi se u njima uspostavilo pravolinijsko i paralelno strujanje sa kritičnom dubinom. Primeri se međusobno razlikuju u oblikovanju ulaza u suženje: u prvom slučaju, označeno sa „1” (na slici 105–30), ulaz je oštroičičan, dok je u „2” zaobljen. U prvom slučaju dolazi do skupljanja struje pa se mora računati sa suženim presekom. Na slici je prikazano da se za pravougaoni presek u suženju sa širinom b_{II} struja suzi na širinu $b_{suž}$. U slučaju „2” nema sužavanja struje, pa se računa da je ona široka koliko i kanal u suženju.

Za oba slučaja računa se sa kritičnom dubinom, i to za širinu $b_{suž}$ u slučaju „1”, a za širinu b_{II} u „2”, tako će se dobiti dubina H ispred suženja. Međutim, zbog kratkoće suženja ne obrazuje se minimum energije iz istog razloga kao kod praga kada nije dovoljno „širok”. I ovde se, kao i kod praga, i ostvaruje se nešto niži nivo ispred suženja od onoga koji se dobija ako se računa sa kritičnim dubinama.

Razumljivo je da će račun na opisani način dati veći nivo ispred suženja za slučaj „1” odnosno za „2”, jer se polazi od veće kritične dubine. Naime, za isti proticaj, i istu širinu suženja b_{II} , kritična dubina za širinu $b_{suž}$ je veća nego za širinu b , što je uočljivo iz izraza za kritičnu dubinu napisanog sa (92–24). Isti obrazac ukazuje da je odnos kritične dubine za $b_{suž}$ prema onoj za b_{II} jednak $(b_{II}/b_{suž})^{2/3}$. Shodno pratećim objašnjenjima uz obrazac (105–9), koji ukazuje da odnos $b_{suž}/b_{II}$ nije niži od 0,8, odnos navedenih kritičnih dubina nije veći od 1,15, za manje



Slika 105–30 Nepotopljeno strujanje kroz kratko suženje: a) oštroičičan ulaz, b) zaobljen ulaz

izrazita suženja približava se jedinici.

Struja na pragu koji nije dovoljno „širok” je, van svake sumnje, potopljena ako nije ispunjen uslov (105–11) dat za „široki prag”. Ovaj zaključak proizilazi iz ranijeg objašnjenja da je energija struje na pragu koji nije „dovoljno širok” manja od one za „široki prag” (manja je za prikazano sa „b” od prikazanog sa „a”, na slici 105–24). Isto se može zaključiti za prekratko u odnosu na suženje dovoljno dugačko da se u njemu uspostavi pravolinijsko i paralelno strujanje sa kritičnom dubinom.

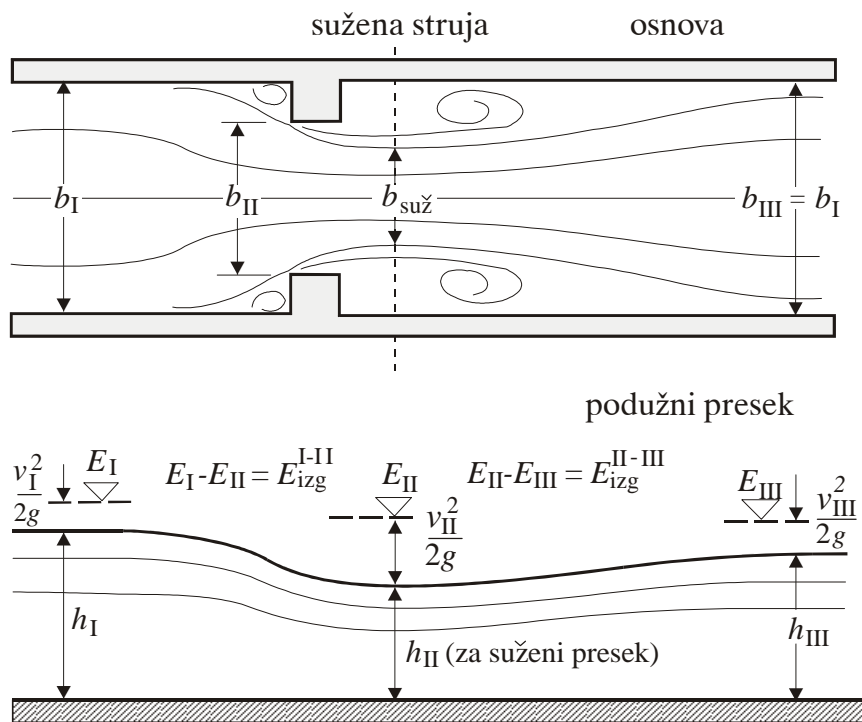
* * *

Zanimljiva su za praktičnu primenu saznanja o potopljenoj struji kroz suženje koje je kratko, pa unosi sumnju da li se u njemu može uspostaviti pravolinijsko i paralelno strujanje. Ako se to ne može, primena jednačine (105–12) i (105–10) je onemogućena, trebalo bi primeniti jednačinu za deo struje između preseka ispred do preseka iza suženja, sa jedinstvenim gubitkom energije između ta dva preseka, a ne dve jednačine, jednu za deo do suženja, a drugu od njega, kako predviđa postupak objašnjen iza pomenutih jednačina (105–12) i (105–10).

Za nepotopljenu struju u suženju (ili na pragu) zahtevalo se da dužina suženja (merena u pravcu strujanja) ne bude manja od trostruke kritične dubine u suženju. Zbog zakrivljenosti struje na ulazu u suženje i na izlazu iz njega, treba izvesna dužina suženja da se u njegovom središnjem delu uspostavi pravolinijsko i paralelno strujanje, sa hidrostatičkom raspodelom pritisaka, da bi presek u suženju mogao ući u jednačinu energije. Kod potopljenog suženja zakrivljenost struje je manje izražena, jer su promene nivoa u suženju manje, strujanje manje odstupa od paralelnog. Stoga se uslov za dužinu suženja za potopljenu struju može znatno ublažiti, pa čak i prenebreći ako ulaz u suženje, i izlaz iz njega, nisu nagli, nego postepeni, i ako razlike u nivoima nisu jednake. U takvim okolnostima može se pretpostaviti da je u suženju (iako je kratko) strujanje pravolinijsko i paralelno, pa se presek u suženju može uzeti u energetske jednačine (jedna do, a druga od suženja).

Naglašava se da je ceo ovaj odeljak (IV) odnosi na suženja, prepreke ili pragove ugrađene u mirno tečenje, pa je granični uslov nizvodno, a računana se uzvodnim smerom. Tako je objašnjeno iza jednačine (105–12). Tom jednačinom, uz zadati granični uslov, izražen dubinom h_{III} iza suženja, sračuna se dubina h_{II} u suženju (koja je veća od kritične), pa se sa sračunatom dubinom h_{II} ulazi u jednačinu 102–10), koja onda određuje dubinu h_I ispred suženja.

Slika 105–31 prikazuje kratko suženje sa naglim prelazom u njega, uz oštroični ulaz, uz napomenu da se za presek u suženju mora uzeti suženi presek struje (za pravougaoni presek računa se sa širinom $b_{suž}$, a ne sa širinom otvora b_{II} – vidi sliku 105–31). Ovo se opravdava time što se u jednačine unosi samo tečenje kroz središnji mlaz, kroz koji se pronosi tečnost, i gde je strujanje približno pravolinijsko i paralelno, a izostavlja se vrtložna oblast koja opkoljava središnji mlaz, i gde ima čak i povratnog strujanja, ali se tu ne prenosi tečnost. Tako se postupilo i kod



Slika 105–31 Potopljeno strujanje kroz kratko suženje sa oštroičnim ulazom

cevi: za kratko suženje u cevi prikazano slikom 102–10, primenjuje se jednačina (102–15), u kojoj se prvi deo gubitka odnosi na sužavanje mlaza (do suženog preseka), a drugi deo na proširivanje mlaza (od suženog preseka).

Širina $b_{suž}$ središnjeg mlaza izražava se sa $b_{suž} = C_A b_{II}$, gde je b_{II} širina otvora, a C_A koeficijent skupljanja (kontrakcije). Vrednost toga koeficijenta procenjuje se na osnovu izraza (105–9) u kome b_I predstavlja širinu kanala pre suženja. Sa tako određenom širinom $b_{suž}$ ulazi se u jednačinu (105–12) kojom se sračuna dubina h_{II} i brzina $v_{suž}$ u suženom preseku $h_{II} b_{suž}$. Izgubljena energija od suženja do preseka iza suženja E_{izg}^{II-III} iznosi $(v_{suž} - v_{III})^2/2g$, kako se obično obračunava naglo proširenje.

Sa određenom dubinom h_{II} (koja je veća od kritične) ulazi se u jednačinu (105–10), da ona odredi dubinu h_I ispred suženja. Za gubitak

energije E_{izg}^{I-II} se uzima prvi deo u jednačini (102–15) gde se vrednost koeficijenta φ procenjuje izrazom (102–12), u koji ulazi već ranije sračunati koeficijent C_A . Vrednost koeficijenta φ ne prelazi 0,05.

Prenošenje iskustava sa suženja u cevima na suženje u kanalima, koje je korišćeno u prethodnom primeru (a koristiće se i u narednim primerima) prati razlika što je u cevi poznat presek cevi ispred suženja, pa se određuje pijezometarska kota, dok u kanalu taj presek nije poznat, njega određuje dubina koja se dobija rešenjem zadatka. Ta razlika može se podneti, može se smatrati da nije mnogo uticajna na rezultate računa, koji se dobijaju prenošenjem postupka sa cevi na kanal, ako su razlike nivoa ispred i u suženju (odnosno iza i u suženju) malene u odnosu na dubine, a u dobrom delu praktičnih zadataka je baš tako (taj odnos je obično manji od 10%).

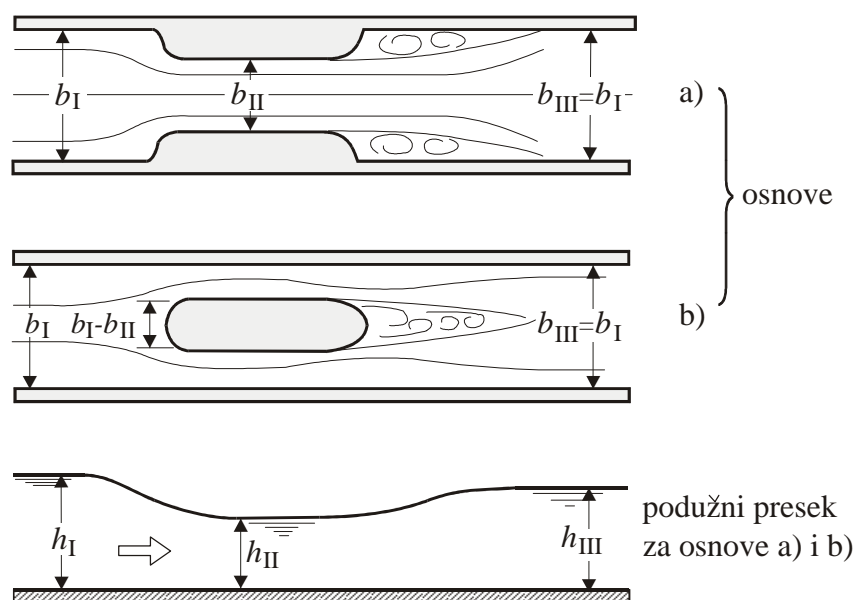
Prethodni primer (a i svi naredni) ima svoj odgovarajući primer na slici 102–12, namenjenoj suženju (ili prepri) u cevi. Za prethodni primer to je slučaj „b” na pomenutoj slici, a tamo je rečeno da je isti račun i za dijafragmu u cevi, pa bi se na isti način kao prethodni primer (sa slike 105–31) rešavao i primer dijafragme u kanalu.

Savetno je ulaz u suženje oblikovati tako da se otkloni sužavanje mlaza. Takvo suženje je primenjeno kao „2” na slici 105–30, a odgovarajući slučaj kod cevi je „c” na slici 102–12. Računski postupak je isti kao prethodni primer sa slike 105–31. Razlika je u tome što sada nema skupljanja mlaza, pa se računa sa širinom b_{II} otvora, a ne sa širinom $b_{suž}$ suženog mlaza, i tako se odredi dubina h_{II} i njoj pripadajuća brzina v_{II} za presek $b_{II}h_{II}$. Za iste širine kanala b_I , b_{III} i otvora b_{II} , kao i za isti granični uslov (iste dubina h_{III} i brzina v_{III}), dobiće se manja brzina v_{II} (ako nema suženja mlaza) od brzine $v_{suž}$ (pri suženju mlaza), pa su ovde u prvom slučaju gubici manji, pa je i povišenje nivoa usled ugradnje suženja ($h_I - h_{III}$) manje, jer je suprostavljanje struji slabije izraženo.

Pri rešavanju kanalskog suženja kome odgovara slučaj „d” sa slike 102–12 podrazumeva se da pre kraja suženi mlaz sa početka suženja proširi da zauzme ceo presek kanala. Kod cevi to je bilo suženje sa slike 102–9. Gubitak na izlazu iz suženja se onda računa sa $(v_{II} - v_{III})^2/2g$, gde su brzine v_{II} i v_{III} u suženju, odnosno iza njega tj. isto kao za prethodni primer. Ulazni gubitak u suženje sa slučaja „d” i odgovarajući kanalski je gubitak pri naglom suženju cevi, ali on se može znatno smanjiti zaobljavanjem ulaza.

Svi do sada razmatrani primeri ne oblikuju proširivanje kanala iza suženja radi smanjenja gubitka energije. Taj gubitak se može znatno umanjiti postepenim proširivanjem po ugledu na slučajeve „e-1” i „e-2” na slici 102–12.

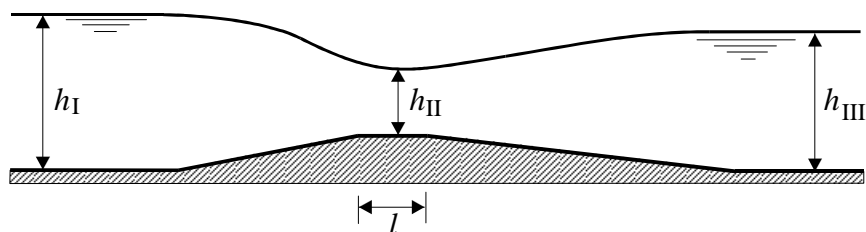
Isti računski postupci se primenjuju za obostrana suženja kanala (uz oba boka) i za odgovarajuća suženja samo uz jedan bok, kao i za suženja stvorena preprekom u sredini toka (vidi sl. 105–32).



Slika 105–32 Za isti proticaj i iste širine (b_I, b_{II}), uz isti nivo iza suženja dobija se isti nivo ispred suženja za: a) suženje primicanjem bokova kanala; b) prepreka u sredini kanala

Svakom od primera sa sl. 102–12 nađen je u prethodnom razmatranju odgovarajući primer suženja u kanalu, a može se naći i odgovarajući primer sa pragom. Samo se isturenje u cev sa donje strane pojedinog crteža shvati kao kontura praga. Račun se sprovodi na isti način kao za suženje. Krajnji rezultat je visinska razlika nivoa koju nameće suženje odnosno prag.

Za primer označen sa „e”, odgovarajući prag je prikazan na slici 105–33. On se računa bez dodatnih lokalnih gubitaka, jer je tako oblikovan, pa se računaju gubici samo na trenje.



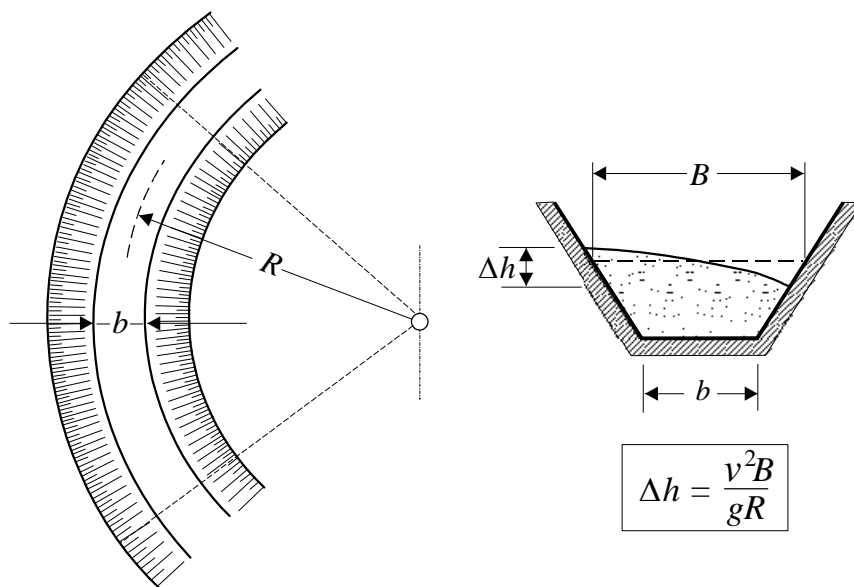
Slika 105–33 Potopljeno strujanje preko praga oblikovanog tako da je lokalni gubitak zanemarljiv

V

KRATAK OSVRT NA LOKALNE PROMENE U KRIVINI I NA SPAJANJU KANALA

U krivinama u kanalima (sl. 105–34) treba nastojati da radijus zakrivljenja bude što je moguće veći, i to ne samo što to smanjuje izgubljenu energiju nego i zbog poprečnog nagiba nivoa vode u krivini.

Gubitak energije se može ceniti na osnovu prikazanog gubitka za krivine u cevima – sl. 102–14 – uz zamenu prečnika cevi sa prosečnom širinom kanala $= (B + b)/2$.



Slika 105–34 Poprečni nagib nivoa vode u krivini

Na spoljnoj strani krivine nivo je viši za Δh (vidi sl. 105–34) od nivoa na unutrašnjoj strani. Kod krivine u cevi objašnjeno je da je pijezometarska kota na spoljnoj strani krivine viša od kote na unutrašnjoj strani (vidi sl. 102–13), i ta pijezometarska razlika je napisana izrazom (102–22). Kako je kod kanala pijezometarska kota ujedno i kota nivoa, po ugledu na navedenu jednačinu, za kanal se može napisati:

$$\Delta h = \frac{v^2 B}{gR} \quad (105-13)$$

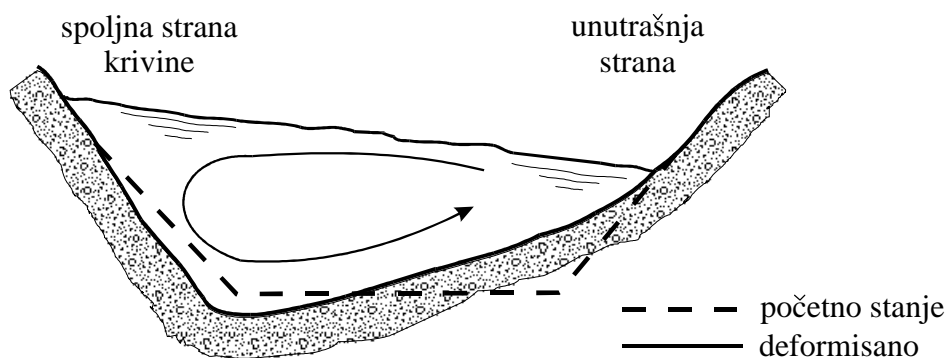
što je upisano i na slici 105–34. Vidi se da je B širina nivoa vode, R poluprečnik zakrivljenja, dok je v prosečna brzina u poprečnom preseku.

Sve navedeno o krivini u kanalu odnosi se na mirno tečenje. Ako je tečenje burno silovita struja napada spoljnu stranu krivine, uz skokovito i jako izdizanje nivoa.

Na već pomenutoj slici 102–13 prikazano je (i označeno sa „3”) poprečno strujanje koje sa podužnim slaže u spiralno. Kod kanala (sl. 105–35) se ostvaruje polovina od prikazanog na sl. 102–13. Zanimljivo je primetiti da se kod neobloženog kanala, gde je moguće odnošenje bokova, pod uticajem poprečnog strujanja presek deformiše, što se pokušalo prikazati slikom 105–35.

* * *

Gubici energije pri razdvajanju (račvanju) kanalskih tokova, ili pri njihovom spajanju, mogu se proceniti iz navoda u Odeljku III Poglavlja 102, koji je namenjen razdvajanju i spajanju cevi. I ovde, kao i



Slika 105–35 Deformacija poprečnog preseka u krivini

tokom dosadašnjih razmatranja, prenošenje na kanale saznanja o lokalnim pojavama u cevima, može poslužiti kao procena. Ne treba smetnuti sa uma da izrazite lokalne poremećaje, koji uzrokuju i značajnije lokalne gubitke treba izbegavati, i ovde, kao i svuda. Savetno je oblikovanje lokalnih promena. Sl. 102–19 i 102–20 ukazuju kako se to može postići kod cevi, odnosno tunela, a slična rešenja treba primeniti i kod kanala.

VI

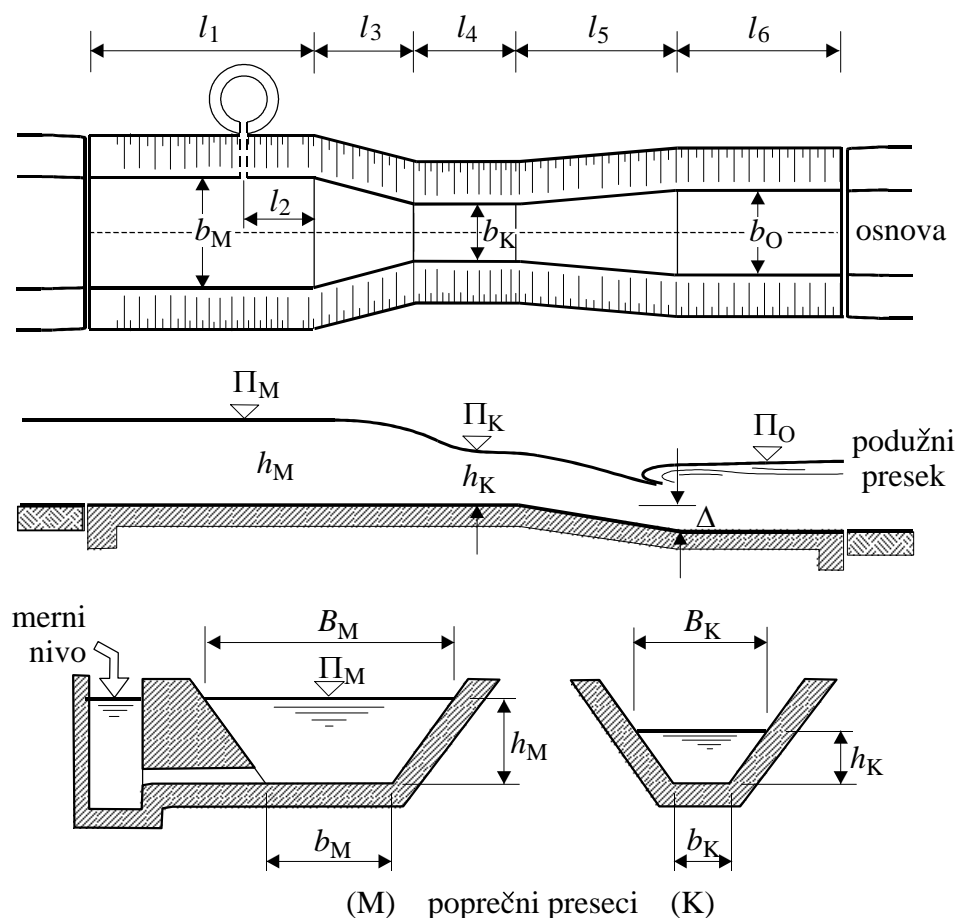
SUŽENJE NAMENJENO ODREĐIVANJU PROTICAJA MERENJEM DUBINE ISPRED SUŽENJA

Određivanje proticaja merenjem samo jedne dubine može da se ostvari u suženju sa nepotopljenom strujom u njemu (sl. 105–36). Merenje samo jedne dubine za određivanje proticaja znači da postoji jednoznačna veza između merene dubine i proticaja, što će obezbediti ispunjavanje sledećih uslova:

1. Suženi presek u kome se meri mora da se pruža na dovoljnoj dužini. Ta dužina je na sl. 105–36 označena sa l_4 i za nju se zahteva da bude barem trostruka kritična dubina u suženju ($l_4 > 3h_K$), što je na slici i upisano, a što je u skladu sa dosadašnjim objašnjenjima. Ispunjavanje toga uslova obezbeđuje da se barem u jednom delu suženja uspostavlja pravolinijsko i paralelno strujanje, upravljeno normalno na presek, a to je neophodno da se primeni jednačina (105–7), do sada korišćena, a biće i u narednim razmatranjima na kojoj će se zasnivati naredna raspravljanja. Treba dodati i uslov $l_4 > B_K$, tj da dužina bude barem širina vodnog nivoa u suženju.

2. Mesto gde će se uspostaviti kritična dubina nije unapred predviđeno. Biće negde u suženju, i to je bitno, a nije važno gde je baš taj presek, jer se dubina ne mora, i neće meriti u suženju. Meri se dubina ispred suženja u preseku za koga se pouzdano može tvrditi da je strujanje kroz njega pravolinijsko i paralelno, i gde je brzina manja od one u suženju, pa se očekuje i manja uznemirenost u tečenju. Meri se dubina h_M u preseku koji je odmaknut od početka suženja za l_2 .

3. Ispred preseka u kome se dubina meri mora da bude dovoljna dužina kanala u kome se presek ne menja tako da na tečenju kroz presek



Slika 105–36 Merni objekat u obliku suženja; proticaj je određen izmenom dubinom ispred suženja. Dužine l_1 do l_6 propisane su (u zavisnosti od poprečnih preseka) kako se navodi u tekstu.

u kome se meri ne utiču uzvodni uslovi koji bi remetili pravolinijsko i paralelno u tom preseku. To se postiže ako dužina označena sa l_1 na sl. 105–36 ispunjava nepovoljniji od dva uslova: $l_1 > 2h_M$ i $l_1 > 3B_K/2$.

4. Ulaz u suženje treba da bude postepen, jer je manji gubitak energije (u odnosu na gubitak pri naglom prelazu) poželjan ne samo zbog uštede u visini, nego, još više, zbog toga što to dovodi do manje uznemirenosti u strujanju, ne stvaraju se odvojene vrtložne oblasti

uz zidove, a stvaraju se pogodne okolnosti da se pouzdano u suženju obrazuje pravolinijsko i paralelno strujanje, što je neophodan uslov za uspostavljanje zakonitosti na kojima se temelje rasuđivanja o mernom objektu.

Za zadovoljavajuću postepenost može se smatrati da izvodnice koje oblikuju suženje (to su horizontalne linije po zidu, usmerene nizvodno) zatvaraju sa podužnom osom (sa pravcem strujanja u podužnoj simetralnoj ravni) ugao α , uz uslov da je $\text{tg } \alpha \leq 1/3$. Poštujući taj uslov, za primer na slici 105–36 dužina deonice sa sužavanjem je iskazana sa $l_3 = 3(b - b_K)/2$.

Prema slici 102–7b navedeni nagib trebalo bi da bude $\text{tg } \alpha = 1/5$, da bi se lokalni gubitak mogao zanemariti, ali se može prihvatiti i navedeni nagib ($1/3$), jer je i tada lokalni gubitak neznatan, a manji je dodatni gubitak na trenje.

5. Dno kroz sve pomenute deonice objekta, sa dužinama l_1, l_2, l_3 i l_4 , treba da je horizontalno.

6. Da bi se merni objekat mogao koristiti, mora se znati zavisnost proticaja Q od merne dubine h_M , tj. $Q = Q(h_M)$, jer je svrha mernog objekta, navedena u naslovu ovog odeljka (VI), da se proticaj određuje merenjem samo jedne dubine. Dakle, proticaj se ne meri neposredno, nego se meri jedna dubina, a ona određuje proticaj – razume se poznavanjem veze između te dve veličine.

Primenjuje se jednačina:

$$h_M + \frac{v_M^2}{2g} = h_K + \frac{v_K^2}{2g} \quad (105-14)$$

gde se leva strana odnosi na presek (M), gde se meri dubina h_M , a desna strana na presek (K) u suženju, gde je za nepotopljenu struju u njemu (što se mora obezbediti) dubina jednaka kritičnoj (h_K) za taj presek.

Pošto je u jednačini (105–14) izostavljena izgubljena energija između preseka (M) i (K), rešenje će se odnositi na proticaj Q_{id} koji bi tekao da je fluid idealan.

Za pretpostavljeni proticaj Q_{id} poznata je kritična dubina h_K , i njoj odgovarajuća brzinska visina $v_K^2/2g$, za presek u suženju. Tako je poznata desna strana u (105–14), a onda se traži dubina h_M koja

zadovoljava jednačinu, vodeći računa da je brzina v_M jednaka Q_{id}/A_M , gde je A_M površina poprečnog preseka struje pri dubini h_M . Na taj način doći će do zavisnosti:

$$Q_{id} = Q_{id}(h_M) \quad (105-15)$$

Za tako sračunatu dubinu h_M u stvarnosti teče proticaj Q , manji od pretpostavljenog za idealni fluid, manji od Q_{id} .

Posebno procenjivanje izostavljene izgubljene energije za svaki pojedinačni slučaj moguće je izbeći, ako se prihvati veoma prost obrazac:

$$Q = C_Q Q_{id} \quad (105-16)$$

gde je:

$$C_Q = 0,95 \quad (105-17)$$

Tačno određivanje izgubljene energije i nije moguće postići, a za hidrotehničku praksu dovoljna tačnost će se dobiti (sa relativnom greškom do 2%) primenom napisanog tj. da je $Q = 0,95Q_{id}$, što znači da je stvarni proticaj za 5% manji od proticaja za idealni fluid pri istoj dubini h_M ispred suženja.

Izloženi postupak može se izraziti i suprotnim smerom od primenjenoga. Naime, može se reći da se umesto stvarnog proticaja Q računa sa proticajem za idealni fluid $Q_{id} = Q/0,95$ i sa njime se dobija merna dubina h_M , koja važi za stvarni proticaj Q . Može se podesiti da za maksimalni predviđeni proticaj nema podizanja nivoa ispred suženja u odnosu na nivo da nema suženja.

7. Merni objekat napravljen prema svim navedenim uslovima ne može dati dobre rezultate ako je merena dubina manja od 10 cm ($h_M \leq 0,10\text{m}$).

8. Ima praktičnih primera gde je nepotapanje struje obezbeđeno bez ikakvog produženja mernog objekta iza suženja, iza dužine označene sa l_4 na slici 105-36. To je, na primer, merni objekat na nizvodnom kraju kanala koji se uliva u drugi tok u kome nivo ne može da potopi struju u suženju. Ili se kanal nastavlja u drugi sa nagibom dna i dubinom koja ne može dovesti do potapanja. U tom slučaju merni objekat završava sa dužinom l_4 .

U primerima gde nizvodni uslovi mogu da potope struju u suženju, mora se to sprečiti, mora se nepotopljenost obezbediti. To se postiže nastavkom (produžetkom) mernog objekta iza suženja u dužini označenoj sa l_5 na slici. Obezbeđenje nepotopljenosti treba postići sa najvišim nivoom iza suženja koji to omogućava, da bi spuštanje nivoa, uzrokovano mernim objektom, bilo što je moguće manje, da bi se izgubilo što manje na visini. Ovo znači da treba odrediti granicu potopljenosti prema slici 105–29, gde nije lako tačno sračunati gubitak energije od preseka u do preseka iza suženja, napisanog sa E_{izg}^{II-III} . Praktične potrebe može zadovoljiti veoma prost uslov za granicu potopljenosti:

$$\Pi_{III} - \Pi_K \leq \frac{1}{2}(\Pi_I - \Pi_K) \quad (105-18)$$

Ovim se uslovljava da nadvišenje nivoa iza suženja ne treba da bude veće od polovine spuštanja nivoa do suženja. Primena navedenog uslova obično dovodi do podizanja dna u suženju (u odnosu na dno iza suženja), odnosno da dno u suženju bude iznad dna iza suženja, za visinsku razliku označenu sa Δ na slici 105-36.

Naglašava se da uslov napisan sa (105–18) može primeniti samo ako je proširenje postepeno (da se gubitak energije smanji), a ne naglo. U svakoj ravni položenoj paralelno sa ravni dna prava na zidu ne sme sa pravcem strujanja da zaklapa ugao manji od α , gde je $\text{tg } \alpha = 0,2$. Prema slici 102–4b trebalo bi da bude $\text{tg } \alpha < 0,1$, a ovde je to ublaženo – obrazloženo je isto kao i za dubinu l_3 (navedeno pod 4).

9. Deonica sa dužinom l_6 potrebna je da se obezbedi donji granični uslov u mirnom približno pravolinijskom i paralelnom strujanju sa jasno određenom kotom Π_{III} . Ona treba da bude približno iste dužine kao l_1 .

* * *

Izloženi su od 1 do 9 uslovi koje mora da zadovolji merni objekat da bi određivanje proticaja bilo valjano. Pogodnosti primene sa praktičnog stanovišta pokušaće da objasne naredna izlaganja.

a. Između cevi i kanala očigledna je razlika u tome što su cevi kružnog preseka obično industrijski proizvedene, dok su kanali različitog preseka i obično se grade na terenu. Za cevi se onda može nabaviti i

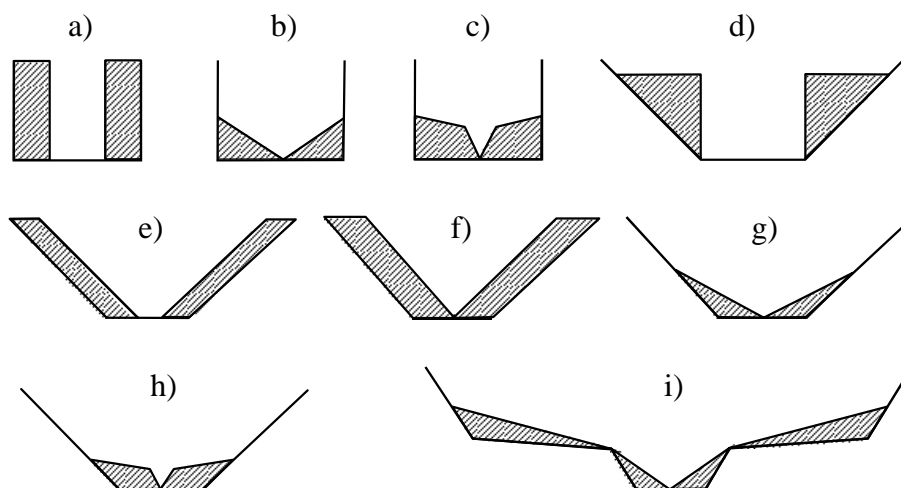
merni uređaj standardnog oblika (na primer dijafragma ili Venturijev vodomer, opisani u Poglavlju 103) takođe industrijski proizveden i samo se ugrađuje u cev. Kod kanala same prilike nameću da se merni objekat gradi zajedno sa kanalom i da ga treba prilagoditi određenom pojedinačnom slučaju, treba ga smišljeno uklopiti.

Ako se, primera radi, merni objekat gradi na kanalu pravougaonog, trapeznog, ili nekog drugog pravilnog preseka, kanal se nepromenjen dovodi do ulazne deonice u suženje, i nepromenjen odvodi izlazne deonice. Drugim rečima deonice l_1 i l_6 sa sl. 105–36 ne treba posebno graditi. Treba jedino da su pravolinijski položene na zahtevanim dužinama. Kada ne treba obezbeđivati nepotopljenost, merni objekat čine samo deonice l_3 i l_4 . Ako se gradi merni uređaj na toku nepravilnog preseka, preseki ispred i iza suženja se izaberu tako da se što bolje prilagode toku.

Prilagođavanje mernog objekta toku u koji se ugrađuje postiže se i kroz podešavanje nivoa, tako da merni objekat stvori što je moguće manje spuštanje nivoa, a onda i dna. Može se podesiti da za najveći očekivani proticaj merni objekat ne povećava nivo ispred njega, da ne stvara uspor. Opisano je kako se određuje minimalno spuštanje dna iza suženja, koje se postiže maksimalno dozvoljenim povišenjem nivoa iza suženja.

b. Neograničene su mogućnosti oblikovanja suženja – uvid u neke od njih daje slika 105–37. U pravougaonom kanalu može se suženje dobiti suženjem u doslovnom smislu reči (prikazano sa „a”) ili suženjem gde je donji deo trougao („b”) da bi se za manje proticaje dobile veće merene dubine. Ako će se meriti proticaji od nekoliko litara u sekundi (čak manje od 10) sa mernom dubinom većom od 10,cm, pa do nekoliko desetina kubnih metara u sekundi, pogodno je rešenje prikazano pod „c”. Za kanal trapeznog preseka suženje može zadržati trapezni presek, ali sa užim dnom („e”) ili je suženje trougaonog preseka („f”), a sužavanje se može obaviti i sa vertikalnim bokovima („d”). Primere „g” i „h” može da prati isto objašnjenje dato sa „b” i „c”.

Skreće se pažnja na poslednji crtež („i”) gde je prikazano da se merenjem jedne dubine proticaj može odrediti i u složenom poprečnom preseku regulisanog rečnog korita. Ovo rešenje je veoma pogodno ispred spuštanja dna (kaskade) predviđene projektom regulisanja, pa je



Slika 105–37 Preseci ispred i u suženju za neke od mogućnosti mernog objekta osenčene površine predstavljaju smanjenje preseka suženjem

struja u suženju nepotopljena i iz suženja voda se neposredno spušta u nizvodni tok.

c. Za predloženi merni objekat zahteva se da strujanje kroz suženje bude nepotopljeno. To uslovljavanje umesno je, pre svega, što se meri samo jedna dubina, dok bi se za potopljenu struju u suženju morale meriti dve (ispred i u suženju), a za određivanje proticaja merodavna je razlika nivoa koju daju te dve dubine. Ta razlika obično je malena, pa neminovna greška u merenju (a ona se ne može u potpunosti izbeći) ne mora da bude nezatna u odnosu na izmerenu razliku. To unosi izvesno nepoverenje u određivanje proticaja. Ali, možda ne treba biti isključiv, jer se u stručnoj literaturi navode i suženja u svrhu merenja proticaja gde je strujanje u suženju potopljeno. Kod njega je manja visinska razlika između nivoa ispred i iza suženja od one kod nepotopljenog strujanja, a to znači da se neusporavanje suženjem može postići sa manjim spuštanjem dna. Ta prednost, međutim, smanjuje tačnost merenja, što je malo pre i objašnjeno.

d. Za određivanje proticaja može da posluži ne samo prikazano suženje bez promene kote dna nego i smanjivanje preseka ugrađivanjem

praga, pa i merni objekat sa smanjivanjem širine i ugrađivanjem praga. Ta rešenja se mogu primeniti uz odgovarajuće računanje.

Otvoreni tokovi, sem izuzetaka, nose materijal koji se može taložiti, a taložice se ispred praga, a time se menja poprečni presek, a onda i zavisnost između merene dubine (ona je baš ispred praga) i proticaja. Ovo se izbeglo predloženim rešenjem. Međutim, to ne znači da prag kao merni objekat treba potpuno isključiti, može se primeniti tamo gde ne dolazi do zasipanja ispred njega.

PRIMEDBA

Izrazom (105–17) preporučeno je da se stvarni proticaj računa množenjem sa 0,95 proticaja za idealan fluid, što je neosporno, sa praktičnog stanovišta, veoma pogodno. To, međutim, nameće kritiku, jer koeficijent proticaja C_Q nije za sve primere baš jednak 0,95. On zavisi od geometrijskog opisa objekta, napisanog bezdimenzionalnim veličinama, pa se račun sa $C_Q = 0,95$ može shvatiti kao približan, ali dovoljno tačan za potrebe hidrotehničke prakse, gde se relativna greška do 2% može podneti. Koeficijent zavisi i od Re i We -broja, ali je ta zavisnost odstranjena uslovom u tački 7, kojim se primena mernog objekta ograničava na merne veličine veće od 10 cm, za koje je uticaj i zanemarljiv.

106 PRELIVANJE

Naziv *preliv* pripada objektu preko koga tečnost *preliva*. Preliv pregrađuje tok vode, pa je ona prisiljena na prelivanje (preko preliva).

I RAVANSKO NEPOTOPLJENO PRELIVANJE PREKO ŠIROKOG PRAGA, TANKOZIDNOG OŠTROIVIČNOG PRELIVA I PRELIVNE BRANE

Naslov ovoga odeljka ukazuje da će zadaci biti rešavani kao *ravanski* i uz uslov da nizvodni uslovi ne utiču na prelivanje, ono je *nepotopljeno*. U ravanskom zadatku prelivanja ravan proučavanja je vertikalna i smatra se, kao kod svih ravanskih zadataka, da je zbivanje u svim ravnima paralelnim sa ravni proučavanja potpuno istovetno. Praktično uzevši, to je preliv u pravougaonom kanalu uz pretpostavku da su uticaji sa bokova kanala zanemarljivi.

Tečenje preko širega praga može se shvatiti kao prelivanje i nazvati *prelivanje preko širokog praga*. Nadvišenje nivoa ispred praga u odnosu na kotu praga, označeno sa H na sl. 105–23, nazvaće se *visina prelivnog mlaza*, taj naziv je uobičajen za prelivanje.

Za jednačinu energije merodavna je visina H_0 , koja na visinu prelivnog mlaza dodaje i dolaznu brzinsku visinu, pa je $H_0 = H + v_0^2/2g$. Visina H_0 obično se naziva *energetska visina prelivanja*.

Za prelivanje pogodno je izraziti proticaj u zavisnosti od energetske visine. Do te veze doći će se iz jednačine:

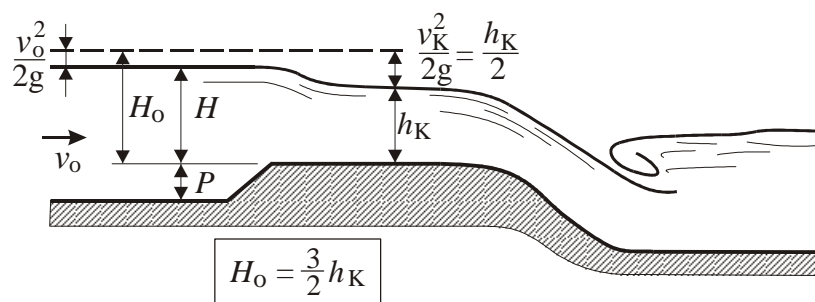
$$H_0 = h_K + \frac{v_K^2}{2g} \quad (106-1)$$

Ovo je u stvari ranija jednačina (105–7) u kojoj su na desnoj strani za dubinu h napisana kritična dubina h_K (jer se ona uspostavlja) i njoj pripadajuća brzinska visina $v_K^2/2g$.

Pošto se razmatra ravansko prelivanje, znači da je prag smešten u pravougaonom kanalu, pa je $h_K = v_K^2/g$, što je napisano u izrazu (92-24). Ova veza omogućava da se (106-1) preobliči u:

$$H_0 = \frac{3}{2}h_K \quad (106-2)$$

što je i prikazano slikom 106-1.



Slika 106-1 Uz jednačine (106-1) i (106-2)

Brzina na pragu, jednaka kritičnoj brzini v_K , dobija se iz (106-1):

$$v_K = \sqrt{2g(H_0 - h_K)} \quad (106-3)$$

što množenjem sa poprečnim presekom struje bh_K (gde je b širina kanala), daje proticaj

$$Q = bh_K\sqrt{2g(H_0 - h_K)}$$

pa proticaj po jedinici širine kanala iznosi

$$q = \frac{Q}{b} = h_K\sqrt{2g(H_0 - h_K)} \quad (106-4)$$

U prethodnoj jednačini može se h_K zameniti sa $2H_0/3$, shodno (106-2), pa se dobija veza između proticaja i energetske visine preliivanja. Dobija se:

$$q = \frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{2gH_0^3} = 0,385\sqrt{2gH_0^3} \quad (106-5)$$

Po ugledu na prethodni izraz napisaće se uobičajeni

obrazac za proticaj po jedinici širine
ravanskog nepotopljnog preliivanja

$$q = m\sqrt{2gH_0^3}$$

m = koeficijent preliivanja

(106-6)

Ovaj obrazac primenjuje se na sve prelive, a vrednost koeficijenta m zavisi od oblika preliiva.

Upoređenjem poslednja dva napisana izraza dolazi se do vrednosti koeficijenta preliivanja za široki prag:

$$m = 0,385 \quad (106-7)$$

Izvođenje obrasca za preliivanje za široki prag zasnivalo se na jednačini (105-7), a ona važi za idealan fluid. Za realan fluid, usled gubitka energije, proticanje je manje, pa će koeficijent preliivanja m biti manji od 0,385. Ako se vodi računa o gubitku energije, na desnoj strani jednačine (106-1) dodaje se $\xi v_K^2/2g$, gde je ξ koeficijent lokalnog gubitka energije, pa se, umesto (106-3) dobija:

$$v_K = \sqrt{\frac{1}{1+\xi}} \sqrt{2g(H_0 - h_K)}$$

Uvođenjem koeficijenta brzine:

$$C_v = \sqrt{\frac{1}{1+\xi}} \quad (106-8)$$

brzina na pragu izražava se sa

$$v_K = C_v \sqrt{2g(H_0 - h_K)} \quad (106-9)$$

pa se množenjem sa h_K dobija

$$q = C_v h_K \sqrt{2g(H_0 - h_K)} \quad (106-10)$$

Smenjivanjem h_K sa $2H_0/3$, što se primenjivalo i ranije, dolazi se do:

$$q = \frac{2}{3\sqrt{3}} C_v \sqrt{2gH_0^3} = 0,385 C_v \sqrt{2gH_0^3} \quad (106-11)$$

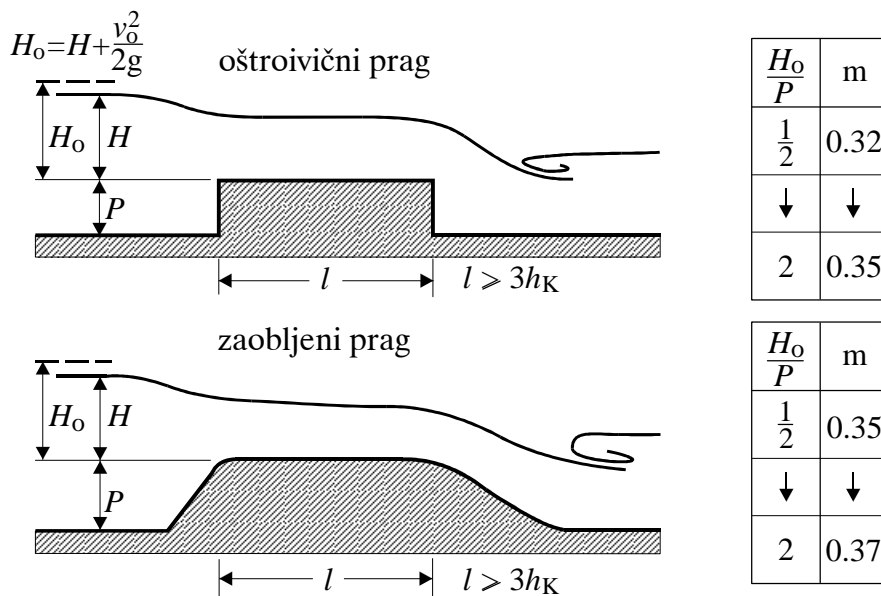
Upoređenjem ove jednačine sa (106-6) uviđa se da je koeficijent preliivanja:

$$m = 0,385 C_v \quad (106-12)$$

Za idealan fluid, sa $C_v = 1$, dobija se $m = 0,385$ što je već napisano, sa (106-7).

Na slici 106-2 dati su podaci za procenu preliivanja za oštroiivčno i zaobljeno čelo praga. Vrednosti koeficijenta m su za oštroiivčni prag niže nego za zaobljeni, što je i razumljivo jer prvi više (nego drugi) smanjuje proticaj, jer su gubici veći. Sa druge strane, koeficijent ima veću vrednost ako prag manje preprečava tok, ako je njegova visina P manja u odnosu na visinu preliivanja H_0 (ako je H_0/P veće).

Za na slici 106-2 upisane vrednosti koeficijenta m , prema izrazu (106-12) koeficijent C_v iznosi 0,83 (za $m = 0,32$), odnosno 0,96 (za $m = 0,37$), a onda je koeficijent lokalnog gubitka ξ , shodno (106-8)



Slika 106-2 Koeficijenti preliivanja m za jednačinu (106-6) za široki prag

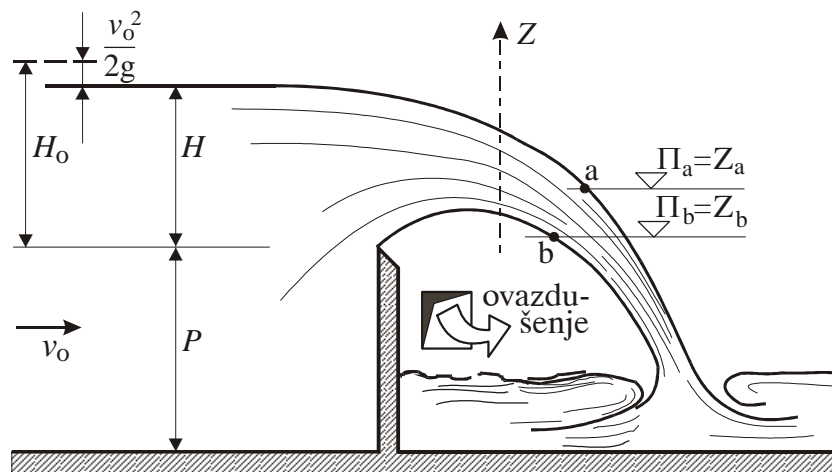
približno 0,45, odnosno 0,1. Mogu se ove vrednosti uporediti sa koeficijentima lokalnog gubitka ξ kod naglog suženja cevi, koji se određuju obrascem (102–13). U oba slučaja presek se smanjuje, ali se, zbog različitih graničnih uslova, zakonitosti ne mogu jednostavno preneti sa sužene cevi na prag, ali se može pokazati da se dobijeni rezultati mnogo ne razlikuju. Prema navedenom obrascu (102–13) koeficijent ξ ne prelazi 0,5, jer bi tu vrednost dostigao pri najizrazitijem suženju, gde je presek iza suženja veoma malen u odnosu na presek pre suženja. Za izrazito suženje koje daje veoma visok prag ($P = 2H_0$) dobilo se $\xi = 0,45$. Za manje izrazita suženja, gde je prag niži, koeficijent ξ biće niži, pa i znatno niži, pogotovo ako je uzvodna površina praga zaobljena.

Prag će se ponašati kao *široki prag* ako mu se pruža na dužini l većoj od trostruke kritične dubine ($l \geq 3h_K$) – to je zaključeno u Odeljku III prethodnog poglavlja (105). U objašnjenju prikazanom na sl. 105–24 navedeno je da prag koji *nije dovoljno širok* (ne ispunjava napisani uslov za dužinu l) ima veću propusnu moć od praga koji taj uslov ispunjava. Ako je $l = 1,5h_K$ (dužina iznosi polovinu potrebne da bi se prag *ponašao kao širok*), koeficijente upisane na slici 106–2 treba povećati za otprilike 10%.

Odeljak III prethodnog, 105-og Poglavlja, odnosio se na sve slučajeve preprečavanja u kanalu, postignuta sužavanjem kanala ili izdizanjem praga, ili sadejstvom ta dva uticaja. U odeljku VI istoga Poglavlja predložen je merni objekat u vidu suženja poprečnog preseka, uz preporuku da se proticaj za idealan fluid pomnoži sa 0,95 i tako dobije stvarni proticaj za isti nivo ispred suženja. Isto se može preneti i na široki prag, za njega u ravanskom strujanju koeficijent preliivanja iznosi 0,385. To je i napisano sa (106–7). Odnos između koeficijenta preliivanja za stvarni fluid i za idealan fluid iznosi $m/0,385$, a u istom odnosu su i proticaji, pa je za $Q/Q_{id} = 0,95$, koeficijent preliivanja $m = 0,367$ (što se dobilo množenjem 0,385 sa 0,95), što će se i postići postepenim penjanjem dna na prag. Iz slike 106–2 može se zaključiti da se oblikovanjem prilaza pragu može očekivati m između 0,36 i 0,37, ako se izuzmu isuviše istureni pragovi ($H_0 > P$).

* * *

Oštroivični tankozidni preliv je naziv za preliv prikazan slikom 106–3. Prelivni mlaz slobodno pada i njegova i gornja i donja povr-



Slika 106–3 Prelivanje preko tankozidnog oštroivičnog preliva

šina oslobođene su pritiska (pritisak je jednak nuli tj. apsolutni pritisak je jednak atmosferskom). Stoga su položajne kote za tačke označene sa „a” i „b” na pomenutoj slici ujedno i pijeziromarske jer je pritisak u njima jednak nuli. Prema tome, razlika pijeziromarskih kota iznosi:

$$\Pi_a - \Pi_b = Z_a - Z_b$$

Napisana razlika može se shvatiti kao razlika između pijeziromarskih kota za spoljnu i unutrašnju stranu zakrivljene struje. Uz spoljnu stranu (tačka a) je veća nego za unutrašnju (b), što je objašnjeno još u Poglavlju 81 – vidi sliku 81–3. Mlaz se mora baš tako zakriviti da je pijeziromarska razlika ujedno i razlika položajnih kota.

Da bi se donja površina mlaza oslobodila pritiska mora se obezbediti ovazdušenje (*aeracija*), što se postiže otvorom u boku kanala (sl. 106–3) koji omogućava da se ispod mlaza uspostavi atmosferski pritisak. Ako se to ne omogući mlaz će usitati deo vazduha koji se nalazi u prostoru ispod njega (upravo između njega i nizvodne strane prelivnog zida) i tu će se pritisak smanjiti (apsolutni pritisak biće manji od atmosferskog). Na spoljnoj strani mlaza sada će biti pritisak veći, koji će mlaz gurati ka pregradnom zidu, pa se mlaz može delimično zalepiti za zid. Tako se stvara neizvesno stanje, ne zna se pouzdano granični uslov pa se ne može utvrditi zakonitost za prelivanje.

Za oštroični preliv obično se primenjuje obrazac:

$$q = \frac{Q}{b} = m_H \sqrt{2gH^3} \quad (106-13)$$

koji proticaj q izražava u zavisnosti od visine H prelivnog mlaza, a ne od energetske visine H_0 , koja je ulazila u obrazac (106-6). Opravdanje za primenu neposredno napisanog obrasca je u tome što se oštroični preliv uglavnom koristi kao merni objekat. Mere se visina prelivnog mlaza, čime je određen proticaj po jedinici širine preliivanja, pa je onda pogodno da u obrazac ulaze te dve veličine.

Primenom oba obrasca (106-6) i (106-13) – za jedan pojedinačni slučaj mora da se dobije ista vrednost proticaja, pa, posve razumljivo, novouvedeni koeficijent m_H se razlikuje od koeficijenta m iz (106-6). Ista vrednost proticaja se dobija izjednačenjem desnih strana u (106-6) i (106-13), a to izjednačenje daje:

$$\frac{m_H}{m} = \left(\frac{H_0}{H} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (106-14)$$

H_0 je zbir H i $v_0^2/2g$, pa je odnos:

$$\frac{H_0}{H} = 1 + \frac{v_0^2}{2gH} = 1 + \frac{q^2}{2gH(P+H)^2} = 1 + \left(\frac{m_H H}{H+P} \right)^2 \quad (106-15)$$

U prethodnom pisanju najpre je v_0 zamenjeno sa $q/(P+H)$, a potom je q izraženo prema obrascu (106-13).

Sabirak koji se dodaje jedinici ukazuje na razliku između H_0 i H . Ako je taj sabirak blizak nuli, H_0 i H se zanemarljivo razlikuju.

Koristeći napisano u prethodnom izrazu (106-15) za zamenu u (106-14) dobija se:

$$\frac{m}{m_H} = \left[1 + \left(\frac{m_H H}{P+H} \right)^2 \right]^{-3/2} \quad (106-16)$$

Ovim je utvrđen međusobni odnos koeficijenata m i m_H , pa se poznavanjem jednog može sračunati drugi.

Veliki broj obrazaca napisan je za preliivanje preko oštroičnog tankozidnog preliiva – njima se određuje koeficijent m_H , sa kojim se

jednačinom (106–13) računa proticaj q . Od tih obrazaca navešće se dva najpoznatija – Bazenov i Rebokov:

$$m_H = \left(0,405 + \frac{0,003}{H}\right) \left[1 + 0,55 \left(\frac{H}{H+P}\right)^2\right] \quad (\text{BAZIN}) \quad (106-17)$$

$$m_H = \frac{2}{3} \left(0,605 + \frac{0,001}{H} + 0,08 \frac{H}{P}\right) \quad (\text{REHBOCK}) \quad (106-18)$$

Ovi obrasci zahtevaju da se u članu gde se 0,003, odnosno 0,0001 deli sa visinom H , ta visina mora uvrstiti u metrima. Ovaj zahtev proizilazi iz okolnosti da su obrasci dimenzionalno neusklađeni. Pošto je leva strana jednačine, tj. m , bezdimenzionalna veličina, takva bi morali biti i svi članovi na desnoj strani, a navedeni članovi to nisu – odatle i navedeni zahtev.

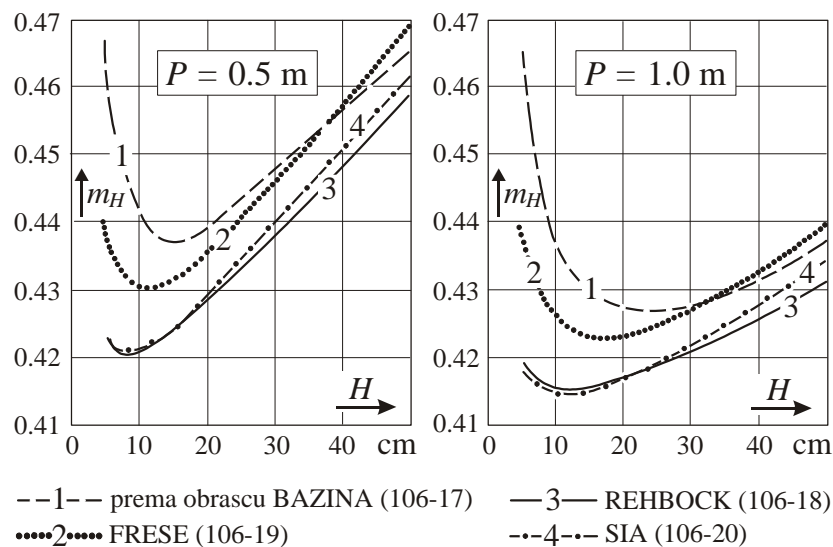
Zašto su odabrana dva navedena obrasca između velikog broja obrazaca preporučivanih za primenu? Bazen je obavio prva eksperimentalna istraživanja oštroičnog preliva, iz kojih je proizašao njegov obrazac – to je najstariji obrazac namenjen ovoj vrsti preliva. Skoro da i nema knjige u kojoj se razmatra prelivanje a da se ne navodi Bazenov obrazac. Često se oštroični preliv i naziva *Bazenov preliv*. Posle Bazena mnogi istraživači ispitivali su svoje obrasce, a od njih se najčešće navodi (a samim tim i preporučuje) Rebokov obrazac.

Navešće se još dva od poznatijih obrazaca: Frezeov i Društva švajcarskih inženjera i arhitekata (SIA):

$$m_H = \left(0,41 + \frac{0,0014}{H}\right) \left[1 + 0,55 \left(\frac{H}{H+P}\right)^2\right] \quad (\text{FRESE}) \quad (106-19)$$

$$m_H = 0,41 \left(1 + \frac{1}{1000H + 1.6}\right) \left[1 + 0,5 \left(\frac{H}{H+P}\right)^2\right] \quad (\text{SIA}) \quad (106-20)$$

Zavisnosti koje izražavaju sva četiri napisana obrasca grafički su predstavljani na slici 106–4, za visine prelivnog zida od $P = 0,5$ m i $P = 1,0$ m, i za visine prelivnog mlaza od $H = 0,05$ m do $H = 0,5$ m. Time je obuhvaćeno područje gde se nalazi pretežni deo praktičnih primera. Iz slike je uočljivo neslaganje između vrednosti koeficijenta prelivanja koje daju pojedini obrasci a to neslaganje je izrazitije za



Slika 106–4 Koeficijenti preliivanja m_H za obrazac (106–13) u zavisnosti od visine H prelivnog mlaza, a za visine P prelivnog zida od 0,5 i 1,0 m

manje visine prelivnog mlaza. Ovo nameće pitanje: Šta je uzrok ovom neslaganju? Pokušaće se da se odgovori na ovo pitanje.

Rečeno je da se oštroični tankozidni preliv uglavnom primenjuje kao merni objekat, pa je razumljiv zahtev da zakonitost napisana za njega mora sračunati proticaj sa velikom tačnošću. Bez većeg udubljenja u okolnosti u kojima se odvija preliivanje, izgleda da je izraženi zahtev lako ostvarljiv, jer proticaj na svim primerima toga preliiva mora podjednako zavisiti od visine H preliivanog mlaza i visine P prelivnog zida. Za određene te dve veličine na svim primerima oštra preliivna ivica podjednako će odbacivati mlaz, strujanje je svuda ravansko, i svuda je obezbeđeno potrebno ovazdušenje donje površine prelivnog mlaza.

Dobro bi bilo da je zaista tako, ali nije tako, jer navedeni uslovi nisu svuda istovetni, i odatle različiti obrasci za određivanje koeficijenta preliivanja, i oni daju rezultate koji se međusobno razlikuju. Na zakonitost na preliivanje utiče obrada preliivne ivice sa svrhom postizanja njene oštroičnosti, kao i moguća (makar i veoma malena) njena odstupanja od horizontalnog pravca. Može da utiče i nezanemarljivo odstupanje od ravanskog strujanja uz bočne zidove, pogotovo ako kanal nije dovoljno širok. Uzvodni uticaji od uvođenja vode u kanal mogu da dopru

do preлива tako da utiču na preliivanje, a to se i dešava ako kanal nije dovoljno dugačak, i ako nije dovoljno dubok (prelivni zid je prenizak) da bi se ulazni uticaji smirili. Svakako da je osetan uticaj potpritisaka ispod prelivnog mlaza ako ovazdušenje nije dovoljno.

U eksperimentalnom određivanju zavisnosti za preliivanje meri se visina prelivnog mlaza i proticaj. Proticaj se meri na drugi način: merenjem zapremine protekle kroz vreme, ili dijafragmom u cevi kojom se voda dovodi, ili na neki drugi način. Tačnost merenja proticaja prenosi se na tačnost zakonitosti koji se utvrđuje.

Eksperimentalna istraživanja sprovedena su u istraživačkim ustanovama – dakle, u povoljnim uslovima, pa se može postići zavidna tačnost, i onda iz istraživanja proizađe obrazac koji daje utisak tačnosti svojom složenošću i numeričkim vrednostima ispisanim sa više decimala. Tome ne bi trebalo stavljati zamerku ako se obrazac ograniči samo na preliv na kome su obavljena istraživanja. Nevolja nastaje kada se zakonitost dobijena na jednom prelivu nametne drugom, gde se ona ne mora (a verovatno i neće) ostvariti sa istom tačnošću, zbog nemogućnosti da svi potrebni uslovi deluju potpuno istovetno u oba primera. Stoga novi istraživač, da bi obrazac prilagodio svom prelivu, ispisuje svoj obrazac (često samo popravljajući prethodni), uz ubeđenje da je njegov obrazac tačniji od prethodnog. I tako niču novi obrasci.

Na slici 106–4 grafički prikazi zavisnosti koje daju obrasci označeni su brojevima od (1) do (4), sa redosledom koji hronološki odgovara pojavi obrasca. Najstariji je Bazenov obrazac i označen je sa (1), iza njega se pojavio Frezeov (2) – oba pri kraju 19–og veka. Iz izraza (106–19) vidi se da je Freze popravio Bazenov obrazac (106–17), zadržavši napisano u ugaonoj zagradi, a promenivši napisano ispred nje, čime je za manje visine prelivnog mlaza dobio znatno manje koeficijente preliivanja od onoga što daje Bazenov obrazac (vidi sl. 106–4), dok je za veće visine prelivnog mlaza razlika između rezultata po ta dva obrasca znatno manja, ali je ipak primetna. Treći obrazac (3) je Rebokov – on se pojavio početkom 20–og veka, dvadesetak godina iza Frezeovog. On daje znatno niže koeficijente od prethodna dva. Linija označena sa (4) odnosi se na obrazac SIA koji se pojavio iza Rebokovog (3) ali daje skoro iste rezultate kao Rebokov, iako mu je izraz drukčiji – liči na Bazenov. Između Rebokovog i obrasca SIA prednost, iz praktičnih razloga, treba dati prvom, jer je jednostavnijeg izraza.

Navedeno dozvoljava opredeljenje za Rebokov obrazac, jer obrasci koji su se pojavili pre njega daju veće koeficijente prelivanja (veće proticaje) što je posledica da su opiti rađeni u manje doteranim uslovima (nedoterana oštroičnost, neumireni uzvodni uslovi). Upravo, vremenom su se ti uslovi popravljali. Posle Rebokovog obrasca nije bilo pojave obrazaca koji bi ga ozbiljnije opovrgli. Od navedenih obrazaca, a oni su među najpoznatijim, Rebokov ima najjednostavniji izraz, što praksa rado prihvata, tim pre što bi složeniji izraz samo stvarao iluziju veće tačnosti za pojavu koju je zbog mnogih uticaja nemoguće potpuno tačno izraziti.

Zanimljivo je da je sam Rebok, valjda nezadovoljan svojim obrascem, napisao kasnije i složeniji po kome je koeficijent prelivanja:

$$m_H = \frac{2}{3} \left(0,6035 + 0,813 \frac{H}{P} + \frac{0,0009}{P} \right) \left(1 + \frac{0,0011}{H} \right)^{3/2} \quad (106-21)$$

Treći član u prvoj zagradi je nesumnjivo nepotreban, a možda je upisan zbog malo pre pomenute želje da se stvori „iluzija tačnosti”. Naime, pošto se visina pregradnog zida izražava u metrima, za $P > 0,3$ m (a niža visina pregradnog zida se ne primenjuje), taj član u odnosu na prvi u istoj zagradi, ne iznosi ni pola promila, pa se može izostaviti. Izostavljanjem toga člana u prethodnom obrascu, proticaj iznosi:

$$q = m_H \sqrt{2gH^3} = \frac{2}{3} \left(0,6035 + 0,813 \frac{H}{P} \right) \sqrt{2g(H + 0,0011)^3} \quad (106-22)$$

Ovo pokazuje da se proticaj računa sa prelivnim mlazom koji je 0,0011 m veći od stvarne visine prelivnog mlaza. Na taj način unosi se u račun uticaj visine prelivnog mlaza H , pored uticaja odnosa H/P , što je, na drugi način, unešeno srednjim članom u zagradi u prvom Rebokovom obrascu (106-18). Naglašava se da novi obrazac (106-21) daje skoro iste rezultate kao i prvi (relativna greška ne prelazi 0,2% za visine prelivnog mlaza od 0,03 do 1 m, visine prelivnog zida između 0,3 i 2 m, i za $H/P < 1$, a u tim granicama nalaze se praktični primeri). Dakle, novi obrazac nije opravdao svoju složenost i stoga praksa nije imala razloga da odbaci stari, jednostavniji.

Ispisivanje novih obrazaca nije se okončalo uprkos tome što je razlika između rezultata koje oni daju i ovde navedenih zanemarljiva sa praktičnog stanovišta.

Primećuje se da se navode i obrasci u kojima treba računati sa prelivnim mlazom većim za 1,0 mm od stvarnog, što je po ugledu na noviji Rebokov obrazac (106–21), u kome je to nadvišenje 1,1 mm.

Iz vrednosti koeficijenta m_H u obrascu (106–13), primenom izraza (106–16) dobija se vrednost koeficijenta m koja se uvrštava u obrazac (106–6) gde se računa sa energetsom visinom preliivanja H_0 . Za visinu H prelivnog mlaza između 5 i 100 cm, i visinu P pregradnog zida od 50 do 100 cm, i uz uslov $P > H$, na opisani način dobijaju se vrednosti koeficijenta koje se mogu obuhvatiti sa jednom vrednošću:

$$m = \frac{q}{\sqrt{2gH_0^3}} = 0,42 \quad (106-23)$$

Ovo je, doduše, približna vrednost, uz napomenu da unutar navedenih granica tačne vrednosti za m se kreću od 0,415 do 0,424, što znači da relativno odstupanje od 0,42 ne prelazi mnogo 1%, a to se može dozvoliti u procenjivanju propusne moći – pogodno je raspolagati sa obrascem od koga se jednostavniji ne može napisati.

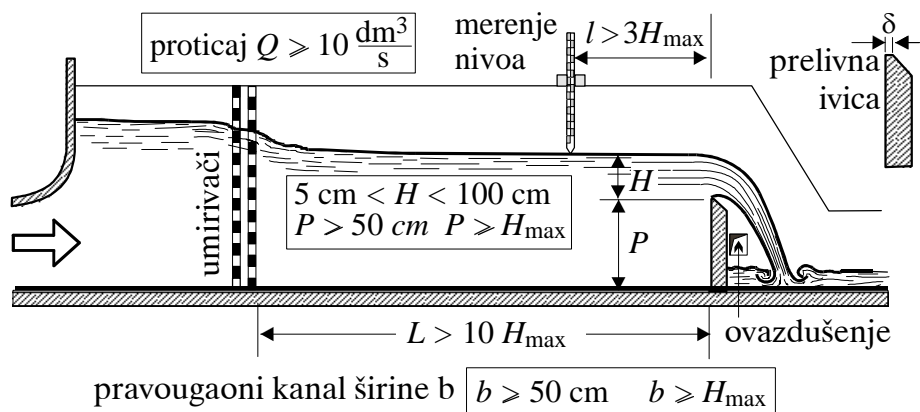
* * *

Na kraju, razmotriće se uslovi koje treba da zadovolji preliv da bi se otklonila različitost uticaja na preliivanje.

a) Prelivna ivica može se nazvati „oštrom” ako „odseca mlaz” i odbacuje ga. Ali, ona ne može da bude „oštra kao nož”, jer je to teško napraviti, a umesna je sumnja da li bi se ona takva i održala. Stoga se preliv izrađuje da ima na vrhu izvesnu širinu, označenu sa δ na slici 106–5 (u gornjem desnom uglu). Ta širina mora da bude što je moguće manja, jer veća širina toga temena preliiva dovodi do neodbacivanja mlaza sa uzvodne ivice preliiva, nego se on „zalepljuje” za teme preliiva, pa zakonitost preliivanja postaje neizvesna.

Uticaj širine δ se smanjuje povećanjem visine H prelivnog mlaza, jer deblji mlaz preliiva sa većim brzinama, pa je sposobniji da se odbaci od uzvodnog početka prelivne ivice, bez zalepljivanja za teme preliiva, pa zakonitost za preliivanje nije neizvesna. Što je širina δ veća treba i veća visina H da bi mlaz bio odbačen.

Navedena objašnjenja opravdavaju preporuku da se, radi određivanja proticaja, isključe merene visine prelivnog mlaza manje od 5 cm,



Slika 106–5 Uslovi za tankozidni oštroični preliv, namenjen za određivanje proticaja merenjem visine H prelivnog mlaza

čak i ako je oštroičnost doterana. Za slabije obrađenu ivicu mlaz ne mora biti odbačen čak i za prelivne mlazeve veće od 5 cm. Zalepljivanje prelivnog mlaza povećava proticaj (povećava koeficijent preliivanja) jer je presek mlaza iznad temena veći. Verovatno manjoj doteranosti oštroičnost preliiva, pored drugih uzroka, treba pripisati što su veći koeficijenti preliivanja kod starijih obrazaca (vidi sliku 106–4), a to je naročito izraženo kod manjih visina prelivnog mlaza.

Obično se teme preliiva obradi da širina bude od 1 do 2 mm, čime će se postići da mlaz veći od 5 cm bude odbačen sa uzvodne ivice. Ima preporuka da bude $\delta \leq H/100$ gde za H treba uzeti minimalnu visinu koja će se meriti, pa bi za $H = 5$ cm bilo svega 0,5 mm, što nije lako izvesti.

Kao zaključak može se navesti da ne bi trebalo određivati proticaje za prelivne mlazeve visine manje od 5 cm.

Napominje se da je uz Rebokov obrazac navedeno da se može primeniti čak za $H > 3$ cm, ali merenje sa tako tankim mlazom nije preporučljivo. Freze pak uz svoj obrazac (107–19) navodi da se može primeniti tek ako je $H > 10$ cm.

b) Ravansko strujanje poremećeno je uticajem bočnih zidova kanala, a taj uticaj se oseća na jednom malenom delu prelivne ivice, uz bočne zidove. Usled toga uticaja proticaj sračunat pod pretpostavkom ravanskog strujanja zanemarljivo će odstupati od stvarnog proticaja

ako širina kanala bude veća od neke uslovljene granice. Preporučuje se da kanal ne bude uži od polovine metra, a uz to da ne bude uži od maksimalno predviđene visine mlaza ($b \geq 0,5 \text{ m}$, $b \geq H$).

c) Prihvatanje uslova za širinu ($b \geq 0,5 \text{ m}$) uz napisani uslov za visinu prelivnog mlaza ($H \geq 5 \text{ cm}$) ograničava minimalni proticaj merenja na:

$$Q = m_H b \sqrt{2gH^3} = 0,42 \times 0,5 \sqrt{19,62 \times 0,05} \text{ m}^3/\text{s} = 0,01 \text{ m}^3/\text{s}$$

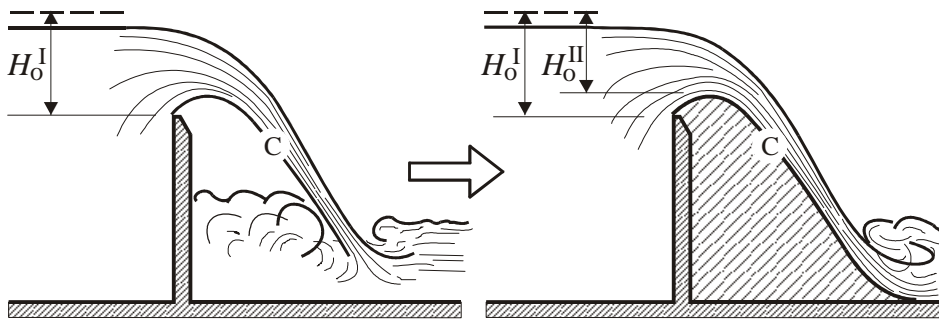
Dakle, nije preporučljivo merenje proticaja manjeg od 10 litara u sekundi. Ovo ograničenje se može prihvatiti, jer za manje proticaje prikladniji su drugi merni objekti između ostalih i „trougaoni preliv” koji će se razmatrati u IV odeljku ovoga poglavlja.

d) Prelivanje ne sme da bude pod uticajem poremećaja sa ulaza u kanal, ti uticaji ne smeju da dopru do preliva. Stoga se predviđaju pogodni umirivači na početku kanala, kojima se postiže smirenost toka i zahteva se da dužina kanala ispred preliva bude $L \geq 10H_{\max}$ tj. desetostruka maksimalna visina prelivnog mlaza (sl. 106–5). Pored toga visina P prelivnog praga ne sme da bude manja od visine H prelivnog mlaza ($P \geq H$), a uz to da visina P praga ne treba da bude manja od pola metra ($P > 0,5 \text{ m}$), mada se uz neke obrasce uslovljava $P > 0,3 \text{ m}$, ali nema praktičnog razloga da se izgradi kanal čija dubina do prelivne ivice ne bude barem pola metra.

Visinu H prelivnog mlaza treba meriti na rastojanju l jednakom trostrukoj maksimalno predviđenoj visini $l = 3H_{\max}$ prelivnog mlaza – vidi sl. 106–5.

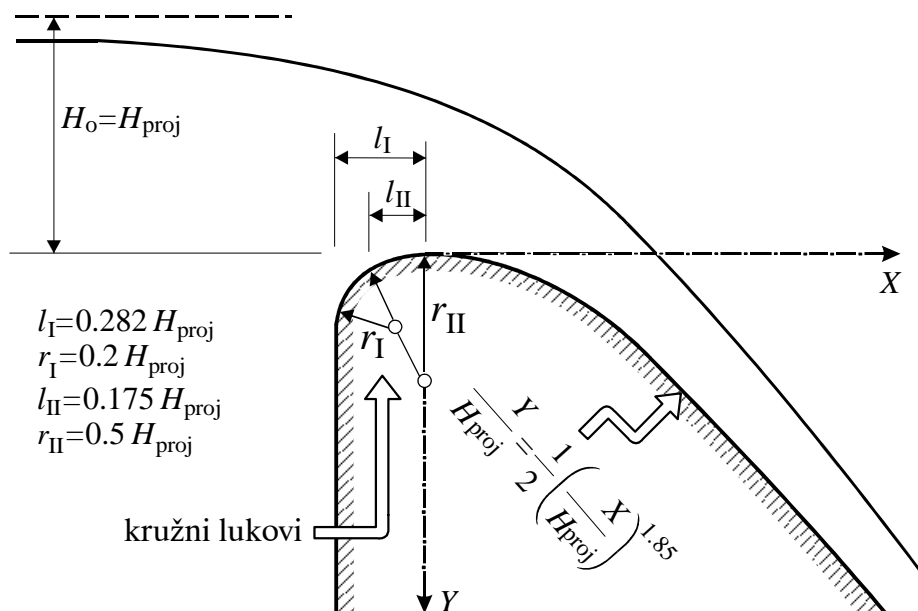
* * *

„Preliv prilagođen mlazu” ili „prelivna brana” ima nizvodnu grafičnu površinu oblikovanu prema donjoj površini slobodnog mlaza sa oštroičnog tankozidnog preliva. Na sl. 106–6 to je prikazano prenošenjem linije „C” sa tankozidnog na preliv prilagođen mlazu. Tako su kod oba preliva mlazevi istoga oblika i u oba slučaja tako zakrivljeni da po površini „C” nema pritisaka. Prema tome, za preliv se kaže da je *prilagođen mlazu* ako mlaz ne pritiskuje preliv, niti teži da se udalji od preliva. Jasno je da linija „C” odgovara samo jednom proticaju, odnosno samo jednoj energetskej visini H_0 prelivanja, i ona će se nazvati *projektovana energetska visina* i označiće se sa H_{proj} . Za tu visinu,



Slika 106–6 Nizvodna površina prelivne brane dobija se prenošenjem donje površine prelivnog mlaza sa oštroičnog tankozidnog preлива (na crtežu su identične linije C za oba slučaja)

upravo za proticaj koji ona daje, brana je projektovana. Za oblikovanje preлива za zadatu projektovanu visinu ima niz postupaka – jedan od njih prikazan je slikom 106–7.



Slika 106–7 Presek prelivne brane; sve dužine određuje energetska visina prelivanja za koju je brana projektovana ($H_0 = H_{proj}$)

Za projektovanu energetska visinu, $H_0 = H_{\text{proj}}$, ostvaruje se koeficijent preliivanja:

$$m(H_0) = 0,49 \quad (106-24)$$

Za primenu nacrtanog na sl. 106-7 kao i napisanog obrasca (106-24) pretpostavlja se da je visina brane $P > 2H$. Taj uslov je redovno ispunjen u praktičnim primerima, obično je visina brane znatno veća od dvostruke visine prelivnog mlaza.

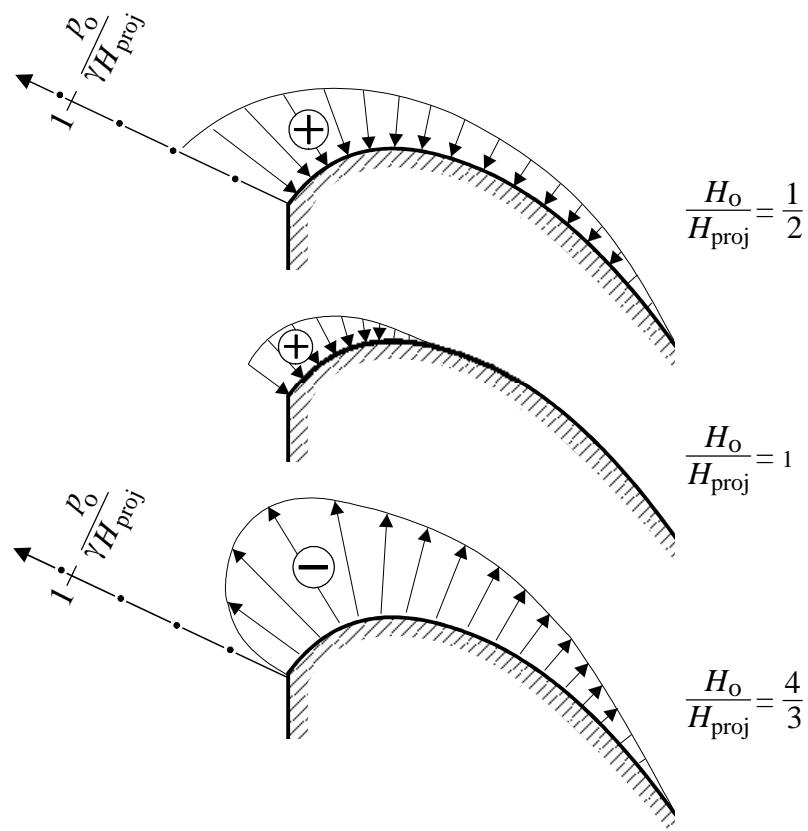
Vrednost napisana sa (106-24) veća je od vrednosti za oštroiivčni tankozidni preliv – za njega je sa (106-23) upisano da je $m = 0,42$. Uzrok za tu razliku je što se kod oštroiivčnog preliiva visina meri od vrha prelivnog zida, a kod prelivne brane od njenog vrha (od „krune” brane), što je u oba slučaja pogodno. Međutim, tako se ne prenosi ista visina sa prvog slučaja na drugi – računa se sa H_0^I , odnosno sa H_0^{II} , sa slike 106-6. Pošto je $H_0^I > H_0^{II}$, koeficijent preliivanja u drugom slučaja (prelivna brana) mora da bude veći nego u prvom (oštroiivčni preliv) jer se tako može dobiti isti proticaj (a on je zaista isti) u oba slučaja. Koeficijent preliivanja m treba shvatiti kao obračunski pojam, kojim se usklađuje račun za dve računске visine H_0 za isti proticaj.

Za proticaj manji od onog za koji je preliv projektovan, tj. za $H_0 < H_{\text{proj}}$, na vrhu preliiva i njegovoj nizvodnoj kosini dolazi do pritiska, jer bi mlaz da je slobodan padao manje udaljen, a u tome je sprečen nizvodnom kosinom preliiva, pa on onda nju pritiskuje. Ovi pritisci smanjuju propusnu moć, jer se suprostavljaju strujanju, pa je koeficijent preliivanja manji od utvrđenog sa (106-24) za projektovanu visinu. Navodi se jedan od niza obrazaca koje praksa primenjuje za osređivanje koeficijenta preliivanja:

$$m(H_0) = 0,49(H_0/H_{\text{proj}})^{1/8} \quad (106-25)$$

Uvid kako otprilike izgledaju pritisci pri H_0/H_{proj} jednako 1/2 i 1 prikazuju prva dva crteža na slici 106-8. Drugi crtež (srednji na slici) odnosi se na slučaj kada preliiva projektovani proticaj $H_0 = H_{\text{proj}}$, i tada je nizvodna kosina oslobođena pritiska, jer je oblikovana baš tako da se to ostvari. Za $H_0 < H_{\text{proj}}$ preliivanje pritiskuje krunu brane i njenu nizvodnu stranu, kako je malo pre navedeno i objašnjeno.

Za proticaj veći od projektovanoga (za $H_0 > H_{\text{proj}}$) slobodni mlaz sa oštroiivčnog tankozidnog preliiva bio bi udaljeniji nego za projektovani



Slika 106–8 Pritisci na prelivnu branu za tri proticaja (manji, jednak i veći od proticaja za koji je preliv projektovan)

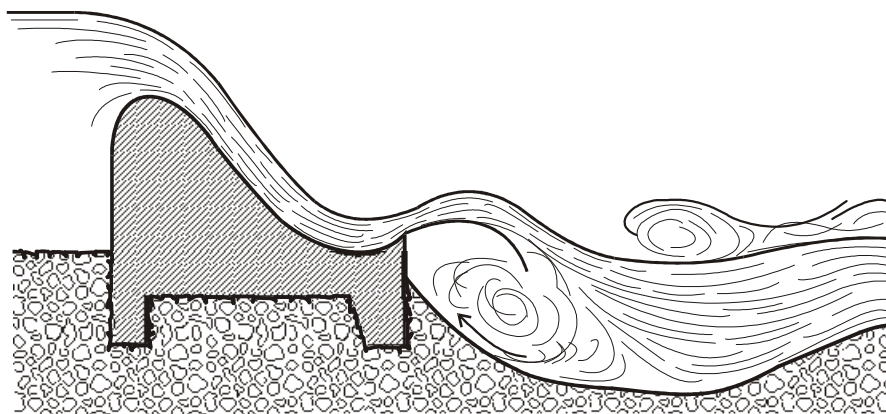
proticaj. Iz ovoga sledi zaključak da će mlaz kod prelivne brane, ako je za nju zalepljen, težiti da se od nje odlepi, dolazi do uticaja kojim mlaz „uvlači” branu, a to se ispoljava potpritiscima na krunu brane i njenu nizvodnu stranu, što je prikazano za $H_0/H_{proj} = 4/3$ na trećem crtežu na slici 106–8. Usled toga propusna moć se povećava, koeficijent prelivanja je veći nego za $H_0 = H_{proj}$, jer struja ulazi u snižene pritiske na vrh brane. To bi se i moglo prihvatiti, da ne stvara mogućnost za izazivanje neželjenih posledica. Naime, ne može se pouzdano tvrditi da će mlaz ostati zalepljen za branu, jer moguće ulaženje vazduha između brane i mlaza odlepljuje mlaz i uz puno ovazdušenje mlaz bi imao oblik slobodnog mlaza sa tankozidnog oštroičnog preliva, koji bi bio udaljen

od brane. Ovo ukazuje da bi moglo doći do povremenog odlepljivanja mlaza (on želi da se udalji), uz povremeno njegovo prianjanje uz branu (jer ovazdušenje nije dovoljno), i mlaz se klata, što može biti pobuda za neprihvatljive vibracije objekta.

* * *

Prelivanje preko brane zahteva da se prelivni mlaz smiri pre ulaska u nizvodni tok. To se postiže izgradnjom slapišta, što se hidraulički rešava na isti način kao primer za hidraulički skok, prikazan slikom 104–12. Uzvodni granični uslov kod brane je energetska kota za H_0 iznad vrha brane, pa se leva strana u jednačini (104–28) zamenjuje sa $H_0 + P_n$ (sa P_n je označena visina brane merena od dna slapišta), dok se desna strana odnosi na početak slapišta.

U praksi se primenjuje i rešenje prikazano slikom 106–9, gde se mlaz sa brane odbacuje „ski skokom”. To se primenjuje ako erozija dna iza brane ne potkopava branu u toj meri da ne ugrožava njenu stabilnost. Povoljna okolnost je u tome što je najveće udubljenje stvoreno kopanjem odmaknuto od brane.



Slika 106–9 Odbacivanje prelivnog mlaza 'ski-skokom' dozvoljava se ako erozija dna iza brane ne ugrožava njenu stabilnost

II POTOPLJENO RAVANSKO PRELIVANJE

Dovde napisano odnosilo se na ravansko nepotopljeno prelivanje – tako je naslovljen prethodni odeljak (I) i to je i napisano uz osnovni obrazac (106–6).

U nastavku će se razmatrati *potopljeno ravansko prelivanje* gde nizvodni nivo utiče na prelivanje, on smanjuje proticaj u odnosu na nepotopljeno prelivanje.

Uticao potopljenosti iskazuje *koeficijent potopljenosti* (nosiće oznaku C_{pot}), a proticaj se računa obrascem:

$$q = \frac{Q}{b} = C_{\text{pot}} m \sqrt{2gH_0^3} \quad (106-26)$$

U ovom obrascu m predstavlja koeficijent prelivanja za nepotopljeno prelivanje, pa upoređenje ovoga obrasca sa obrascem (106–6) za nepotopljeno prelivanje pokazuje da je:

$$C_{\text{pot}} = \frac{\text{proticaj za potopljeno prelivanje}}{\text{proticaj za nepotopljeno prelivanje}}$$

pri istoj energetskej visini H_0 .

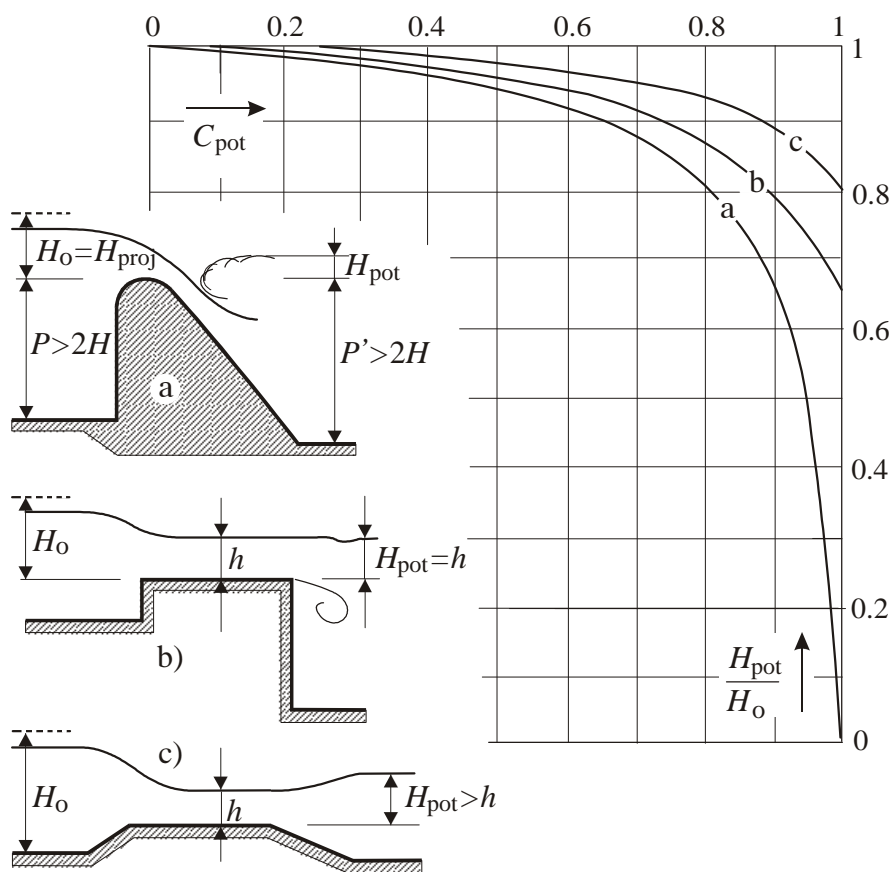
Vrednosti za C_{pot} se kreću od nule (potopljenost potpuno sprečava prelivanje) do jedinice (potopljenost ne deluje).

Na slici 106–10 sa „a” je obeležen grafikon zavisnosti koeficijenta potopljenosti C_{pot} od tzv. *stepena potopljenosti* H_{pot}/H_0 . Iz slike se vidi da visinska razlika H_{pot} meri potopljenost, to je nadvišenje nizvodnog nivoa iznad vrha preliwa. Slika se odnosi na preliv prilagođen prelivanju, prikazan na slici 106–7, a za konstantnu energetskej visinu prema kojoj je preliv projektovan tj. za $H_0 = H_{\text{proj}}$. Za zadati odnos H_{pot}/H_0 na slici se očita odgovarajuća vrednost za C_{pot} , i onda se, izrazom (106–26) sračuna proticaj:

$$q = 0,49 C_{\text{pot}} \sqrt{2gH_{\text{proj}}} \quad (106-27)$$

jer je za nepotopljeno prelivanje $m = 0,49$ što je napisano sa (106–24).

Za sračunati proticaj odredi se visina H prelivnog mlaza, oduzevši od H_{proj} dolaznu brzinsku visinu $v_0^2/2g$ za proticaj sračunat prema prethodnom obrascu (106–27).



Slika 106–10 Koeficijenti potopljenosti za prelivanje preko brane (a) i širokog praga (b, c)

Grafikon „a” na slici 106-10 pokazuje da potopljenost osetno utiče na prelivanje tek ako se H_{pot}/H_0 popne iznad 0,7, jer se za H_{pot}/H_0 veće od te vrednosti C_{pot} spusti ispod 0,9.

Rečeno je da je prikazano na slici 106–7 ograničeno na $H_0 = H_{proj}$, što je za praktične potrebe i dovoljno, jer se brana projektuje za maksimalno očekivanu visinu H_{proj} i za tu visinu treba razmotriti smanjivanje proticaja potapanjem (razume se ako se potapanje očekuje), dok za druge visine, za $H_0 < H_{proj}$, razmatranje potapanja nije značajno. Može se reći da potapanje postaje izrazito tek kad se H_{pot}/H_0 približi jedinici.

* * *

Uticaj potopljenosti na tečenje preko širokog praga raspravljen je u Poglavlju 105, gde se uopšteno razmatralo strujanje kroz svako suženje, upravo kroz presek struje koji je smanjen u odnosu na njemu uzvodni, pa se to, razumljivo, odnosi i na prag. Tamo je pokazano kako se određuje granica potopljenosti i kako se računa nepotopljeno odnosno potopljeno strujanje kroz suženja. Sada se prag posmatra kao preliv, pa se onda govori o nepotopljenom odnosno potopljenom prelivanju, pa se može uvesti i koeficijent potopljenosti C_{pot} koji će i ovde ulaziti u jednačinu (106–26).

Izrazom (105–11) određuje se granica potopljenosti (vidi sl. 105–29), a onda se primenom jednačine (105–10), uz $h_{\text{II}} = h_{\text{K}}$ računa proticanje za nepotopljeno strujanje, a ako je potopljeno, računa se sa (105–12). Odnos proticaja za potopljeno strujanje i za nepotopljeno (za istu visinu H_0) je vrednost koeficijenta potopljenosti C_{pot} . Dakle, do vrednosti za C_{pot} može se doći računskim postupcima objašnjenim svojevremeno. Iako se tako dolazi do vrednosti koeficijenta C_{pot} , pokušaće se da se taj koeficijent izrazi u zavisnosti od stepena potopljenosti H_{pot}/H_0 , kako se izražava kod drugih preliva, a kako je to učinjeno za preliv prilagođen prelivnom mlazu.

Proticaj za nepotopljeno prelivanje određuje se jednačinom (106–11), a za potopljeno prelivanje sa:

$$q = C_v h \sqrt{2g(H_0 - h)} \quad (106-28)$$

Upoređenje ovoga izraza sa (106–10) pokazuje da je tamošnja dubina h_{K} zamenjena ovde sa h – u oba slučaja to je dubina na pragu. Naime, do prethodnog izraza (106–28) dolazi se na isti način kao i do (106–10), samo se u celom postupku h_{K} zamenjuje sa h , pa se to ispoljava i u krajnjem izrazu.

Deljenjem proticaja koji daje (106–28) sa onim koji daje (106–11) dobija se odnos između proticaja za potopljeno i nepotopljeno strujanje, a to je C_{pot} , pa je:

$$C_{\text{pot}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{h}{H_0} \sqrt{1 - \frac{h}{H_0}} \quad (106-29)$$

Pri navedenom deljenju smatralo se da je koeficijent brzine C_v u oba slučaja isti, što je približno tako.

Ako je u preseku iza praga zanemarljiva brzina, gubitak energije između preseka na pragu i preseka iza njega jednak je brzinskoj visini

na pragu, pa je nivo u oba preseka isti. U tom slučaju $H_{\text{pot}} = h$ (vidi sl. 106–10b), pa je na slici i nacrtan grafikon „b” za $C_{\text{pot}} = C_{\text{pot}}(H_{\text{pot}}/H_0)$ prema prethodnoj jednačini (106–29), za $h = H_{\text{pot}}$. Ista jednačina za granicu potopljenosti ($C_{\text{pot}} = 1$) daje:

$$\frac{H_{\text{pot}}}{H_0} = \frac{h}{H_0} = \frac{2}{3}$$

Prethodno se gotovo nikada ne ostvaruje, jer u preseku iza praga brzina nije zanemarljiva, pa je gubitak energije manji, pogotovo ako se sa praga na dno ne prelazi naglo nego kosinom (slika 106–10c). Tada je nivo iza praga viši od nivoa na pragu, tj. ostvaruje se $H_{\text{pot}} > h$, pa bi grafički prikaz $C_{\text{pot}}(H_{\text{pot}}/H_0)$ bio kriva linija iznad nacrtane za slučaj „b”.

Ranija razmatranja su pokazala da nivo iznad praga nadvisi nivo na pragu čak i toliko da to podizanje bude i preko polovine spuštanja nivoa do praga. Može se oceniti da potapanje nastaje tek ako H_{pot}/H pređe 0,8. Na osnovu te procene nacrtan je grafički prikaz funkcije za $C_{\text{pot}} = C_{\text{pot}}(H_{\text{pot}}/H_0)$ i obeležen sa „c”.

Može se zaključiti da se C_{pot} za široki prag ne može spustiti ispod linije „b” a da se može približiti liniji „c” (u izvesnim retkim primerima može je i malo nadmašiti). Međutim, korisno je da se ponovi malopređašnje objašnjenje da potopljeno prelivanje preko širokog praga treba računati prema izloženom u Poglavlju 105. Nacrtano na sl. 106–9 poslužilo je za prethodnu procenu, a i za razmatranja koja slede.

* * *

Iz sl. 106–10 se uviđa da je prelivanje preko širokoga praga otpornije na potapanje od preliva prilagođenog mlaza, što se objašnjava horizontalno usmerenim tokom sa praga sa znatnim pritiskom (jer se na pragu uspostavlja hidrostatički raspored pritisaka), pa se postiže veća otpornost potapanja od one koja se ostvaruje kod preliva prilagođenog mlazu.

Ranije je objašnjeno da se prelivanje preko praga lakše potapa ako prag nije dovoljno širok (ako se pruža u pravcu strujanja za dužinu manju od trostruke kritične dubine na pragu) jer zakrivljenje struje i smanjeni pritisci (u odnosu na one kod dovoljno širokoga praga) dovode do manje otpornosti na potapanje. Dakle, za nedovoljno širok prag može se grafikon $C_{\text{pot}} = C_{\text{pot}}(H_{\text{pot}}/H_0)$ spustiti i ispod linije „b” ali ne niže od linije „a” za preliv prilagođen mlazu.

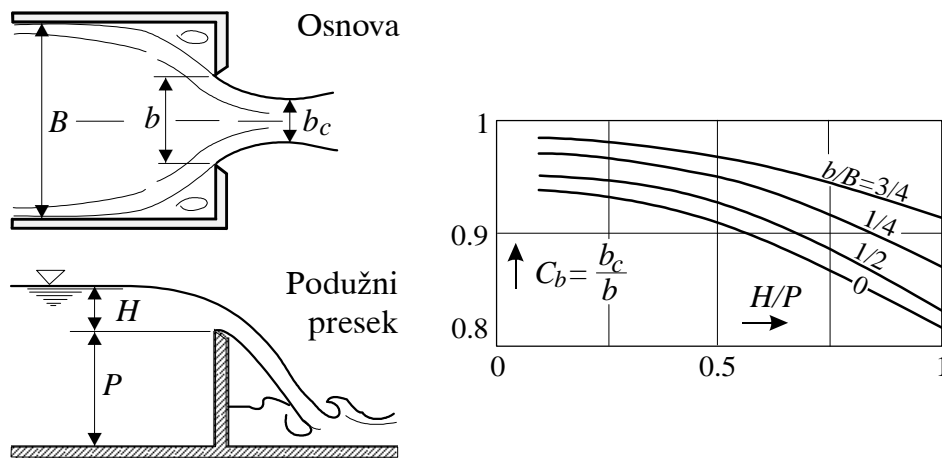
III

SUŽAVANJE PRELIVNOG MLAZA

Do sada se razmatralo preliivanje kao ravanski zadatak (širina preliiva = širina prilaznog kanala). Ako je preliv uži od širine prilazne struje dolazi do sužavanja mlaza, do „bočne kontrakcije” koju izražava koeficijent sužavanja:

$$C_b = \frac{b_c}{b} \quad (106-30)$$

gde je b_c širina mlaza, dok je b širina preliiva (= dužina prelivne ivice). Cela širina b ne može se koristiti – slika 106–11, nego se koristi smanjena širina b_c .



Slika 106–11 Koeficijent C_b sužavanja mlaza za oštroiivčni tankozidni preliv

Proticaj se računa obrascima:

$$Q = mb_c\sqrt{2gH_0^3} = C_bmb\sqrt{2gH_0^3} \quad (106-31)$$

ili

$$Q = m_Hb_c\sqrt{2gH^3} = C_bm_Hb\sqrt{2gH^3} \quad (106-32)$$

Tankozidni oštroiivčni preliv najčešće se primenjuje sa ravanskim strujanjem sa širinom preliiva po celoj širini prilaznog kanala, a i nema jakog razloga da se primenjuje uz užu preliv prilaznog kanala. Zašto

bi trebalo u zakonitosti za ravansko prelivanje, koje nisu, prema ranijim objašnjenjima baš lako odredljive, još upetljati i uticaj sužavanja? Stoga se razmatranju određivanja koeficijenta C_b i neće pridavati velika pažnja, neće se težiti da se složenosti obrazaca postigne veća tačnost, nego će se pokazati koliko približno iznose vrednosti koeficijenta C_b . Iz brojnih istraživanja potiču različiti obrasci u kojima se C_b izražava zavisnošću:

$$C_b = C_b\left(\frac{H}{P}, H, \frac{b}{B}\right) \quad (106-33)$$

Za procenu koeficijenta C_b poslužiće obrazac koji je napisan po ugledu na Bazenov (106-17), po kome se proticaj uz sužavanje prelivnog mlaza računa sa:

$$\frac{Q}{b\sqrt{2gH^3}} = \left(0,405 + \frac{0,003}{H} - 0,03\frac{B-b}{B}\right) \left[1 + 0,55\left(\frac{b}{B}\right)^2\left(\frac{H}{H+P}\right)^2\right] \quad (106-34)$$

Računa se sa celom širinom b preliva (sa dužinom prelivne ivice), a ne sa suženom širinom b_c . Sa B je označena širina kanala ispred preliwa. Uticaj sužavanja unešen je u obrazac, jer bi po obrascu (106-17) uz širinu b_c proticaj bio:

$$\frac{Q}{b_c\sqrt{2gH^3}} = \left(0,405 + \frac{0,003}{H}\right) \left[1 + 0,55\left(\frac{H}{H+P}\right)^2\right] \quad (106-35)$$

Deljenjem prve napisane jednačine sa drugom sa leve strane dobija se b_c/b , a to je C_b , što znači da se dobija deljenjem desne strane prve jednačine sa drugom.

U tom računanju pokazalo se da se uticaj članova gde se pojavljuje samo dubina H može izbeći, uz neveliku grešku (a, uostalom, radi se o proceni kako je rečeno na početku razmatranja), pa se, umesto (106-33) prihvata:

$$C_b = C_b\left(\frac{b}{B}, \frac{H}{P}\right) \quad (106-36)$$

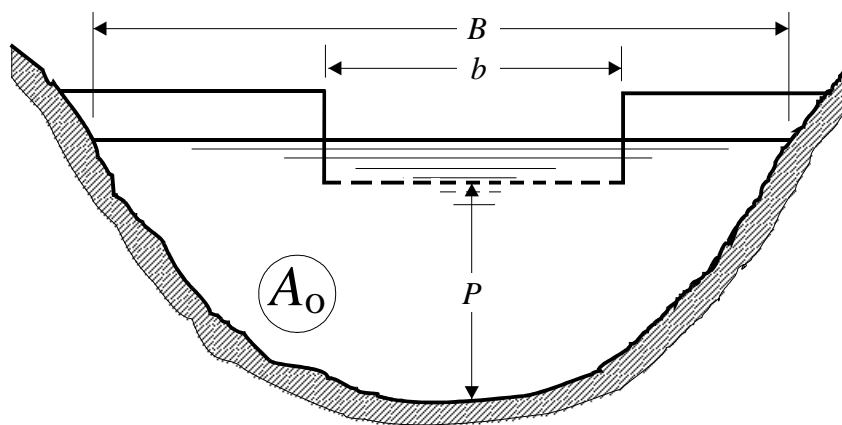
Grafički prikaz ove funkcije predstavljen je na slici 106-11. Zavisnost za $b/B = 0$ praktično uzevši je besmislena, ali ona ukazuje na donju granicu ispod koje se C_b uopšte ne može spustiti.

Zanimljivo je da u funkciju za C_b nije ušao odnos H/b , mada bi sužavanje mlaza moglo da zavisi od odnosa visine i širine mlaza. Izostavljanje se donekle može opravdati što uticaji visine prelivnog mlaza nije potpuno isključen, nastaje se u odnosu H/P . U narednim izlaganjima uz sliku 106–13, napisaće se jedan obrazac gde C_b zavisi samo od H/b .

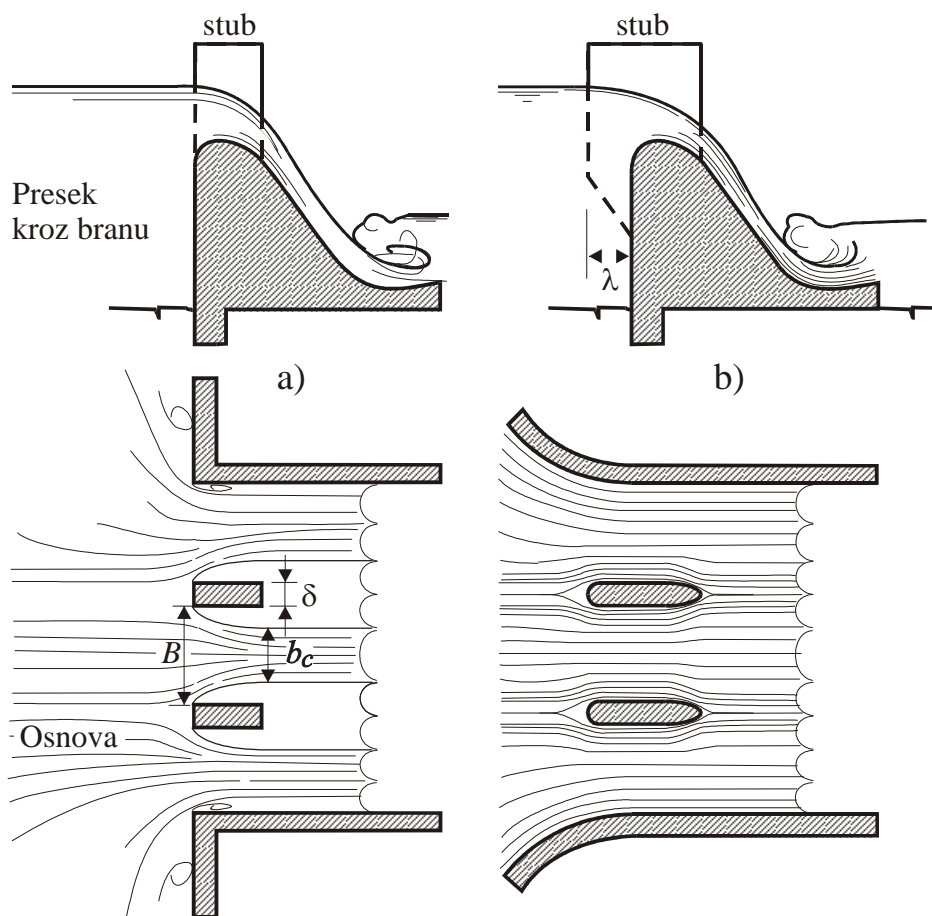
* * *

Kod prelivne brane skoro uvek prelivanje je samo izuzetno ravansko, jer se brana ne pruža čitavom širinom vodene površine ispred nje. Presek ispred brane obično nije pravilan (sl. 106–12) i teško je izraziti uticaje na skupljanje prelivnog mlaza. Visina P brane nije celom širinom ista, širina B rečnog korita između kote krune brane i kote nivoa vode ispred brane se menja, pa odnosi P/H i b/B nisu jasno nametnuti. Za približnu ocenu sužavanja mlaza može poslužiti prikazano na sl. 106–11 za oštrovični preliv. Kod brane H/P obično je manje od $1/2$, jer je visina brane barem dvostruka visina prelivnog mlaza, pa čak i za najizrazitija sužavanja (veoma malenu širinu preliva b u odnosu na širinu B površine vode ispred brane), iz slike 106–11 moglo bi se zaključiti da je C_b veći od 0,9. Iako je ovo gruba procena, može se zaključiti da skupljanje mlaza nije značajno. Treba istaći da do njega uopšte neće doći ako se ulazni bokovi preliva zaoble, što se lako ostvaruje.

Kod prelivne brane obično je preliv razdelnim stubovima podeľjen na nekoliko polja (sl. 106–13), a o stubove se upiru ustave koje



Slika 106–12 Presek ispred prelivne brane



Slika 106–13 Prelivanje preko prelivnih polja brane, omeđenih razdelnim stubovima: a) sa sužavanjem mlaza, b) sužavanje mlaza otklonjeno isturanjem stubova i zaobljavanjem njihovih čela

zatvaraju polja i otvaraju se prema proticaju koji preliva, uz održavanje zahtevanog nivoa ispred brane. Zbog ograničene širine ustava mora se preliv razdeliti. Čak iako ustave nisu predviđene, stubovi su nužni zbog mosta iznad brane.

Nastojanja treba usmeriti na sprečavanje sužavanja mlaza, a to se može lako postići. Stub se istura ispred uzvodne površine brane, tako da zadire u struje pre preliivanja. To je prikazano na slici 106–13b. Mlaz, iako se neposredno iza čela stuba od njega odvoji, proširiće se na

celu širinu polja pre preseka merodavnog za određivanje proticaja, pa je C_b blizak jedinici.

Iza izraza (106–36) primećeno je da u njega nije ušao odnos H/b i to se pokušalo opravdati, uz napomenu da će se uz sliku 106–13 napisati obrazac u kome C_b zavisi od H/b . Taj obrazac, za jedno prelivno polje između dva stuba, glasi:

$$C_b = 1 - \xi \frac{H_0}{b}$$

Za ξ maksimalna vrednost iznosi 0,2 (za oštroični pravougaoni stub, kao na slici 106–13a, pa za $H_0/b = 0,5$ (a retko se može naići na prelivni mlaz veći od polovine širine polja), koeficijent sužavanj iznosi $C_b = 0,9$. Za istureni stub sa zaobljenim čelom (sl. 106–13b), C_b je otprilike 0,98, jer je ξ otprilike 5 puta manji od prethodno navedene vrednosti. Treba naglasiti načelnu neispravnost obrasca, jer ne vodi računa o širini struje ispred preliva, ni o visini brane.

* * *

Razmotriće se uticaj dolazne brzine na prelivanje koje nije ravansko, a taj uticaj meri odnos H_0/H (koji je blizak jedinici ako je taj uticaj zanemarljiv. Za ravansko prelivanje odnos H_0/H je napisan sa (106–15), a za prelivanje koje nije ravansko on iznosi:

$$\frac{H_0}{H} = 1 + \frac{v_0^2}{2gH} = 1 + \frac{Q^2}{2gHA_0^2} = 1 + \left(\frac{m_H b_c H}{A_0} \right)^2 \quad (106-37)$$

Ovde je v_0 zamenjeno sa Q/A_0 , gde je A_0 površina poprečnog preseka toka ispred preliva, a potom je proticaj Q izražen prema obrascu (106–31).

Koristeći napisano izrazom (106–37) u izrazu (106–14) dobija se veza između koeficijenata m i m_H :

$$\frac{m}{m_H} = \left[1 + \left(\frac{m_H b_c H}{A_0} \right)^2 \right]^{-3/2} \quad (106-38)$$

Ako se u prethodna dva izraza b_c zameni sa b , a A_0 sa $b(H + P)$, dobiće se odgovarajući izrazi za ravansko prelivanje (106–15) i (106–16).

Kod prelivnih brana obično se zanemarljivo razlikuju H_0 i H (a onda i m i m_H). Ako se pretpostavi da je $A_0 > 5b_cH$, a to se gotovo redovno i ostvaruje, sabirak koji se u (106–38) dodaje jedinici, uz m_H približno 0,5, neće prelaziti 0,01.

* * *

Za razmatranje suženja prelivnog mlaza preko širokoga praga mogu poslužiti razmatranja suženja u kanalima, obavljena u Odeljku IV prethodnog poglavlja (105). Tamo je napisan obrazac (105–9) da bi poslužio za procenu suženja struje koja iz kanala širine b_I ulazi u kanal širine b_{II} , gde struja ne koristi celu raspoloživu širinu b_{II} nego se suzi na širinu $b_{suž}$ pa je koeficijent suženja $C_b = b_c/b$. I za najizrazitije suženje ($b_{suž}/b_{II}$ blisko nuli) i oštroične bočne ivice na ulazu suženja, C_b se ne spušta ispod 0,8.

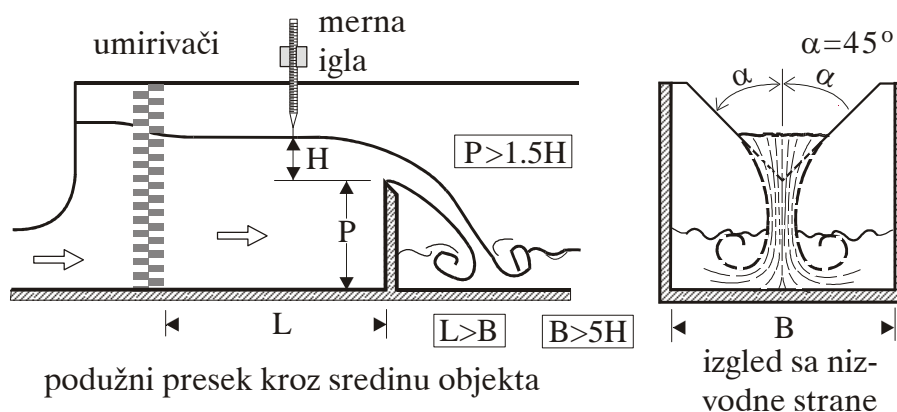
Navedeno se može primeniti i na široki prag, ako se sa b_{II} označava širina kanala na pragu, a sa b_I širina ispred praga. Prema navodima iza pomenute jednačine (105–9) dovoljna je dužina od $1,5b_{II}$, da se struja odbačena od bočnih zidova na početku suženja proširi na celu širinu b_{II} . To važi za najizrazitije suženje (b_{II}/b_I blisko nuli), a za manje izrazita potrebna je manja dužina pružanja praga da bi se struja pre njegovog nizvodnog kraja proširila na celu širinu b_{II} . Dakle, i u najnepovoljnijim okolnostima ako je dužina pružanja praga veća od $1,5b_{II}$ ne treba računati sa sužavanjem mlaza, odnosno uzeti $C_b = 1$.

Na kraju treba primetiti da se zaobljenjem bočnih ulaznih površina na ulazu u prag može u svakom primeru otkloniti sužavanje mlaza iako se prag pruža na manjoj dužini od navedene.

IV TROUGAONI PRELIV

Trougaoni preliv obično se povezuje sa imenom *Tomsona* (THOMPSON). Prikazan je slikom 106–14. On, gotovo redovno, služi kao merni objekat. Meri se i ovde, kao i kod ravanskog preliivanja preko tankozidnog preliiva („Bazenovog”), visina H prelivnog mlaza čime je određen proticaj Q – razume se, uz poznatu međuzavisnost te dve veličine.

Prelivni otvor mora biti oštroičan. Ovde se mogu napisati iste primedbe i objašnjenja koja su pratila oštroičnost Bazenovog preliiva.



Slika 106–14 Trougaoni preliv

Sem toga, i za Tomsonov preliv propisuju se i uslovi koji obezbeđuju smirivanje vode ispred preliva u toj meri da se ulazni uticaji u kanal iz koga voda preliva ne dopiru do preliva. To se postiže širinom B kanala ispred preliva koja je barem petostruka visina prelivnog mlaza ($B > 5H$) i visinom zida preliva $P > 1,5H$ ($P =$ visina zida u sredini preliva tj. najniža visina). Dužina L kanala ispred preliva treba da je barem jednaka širini, tj. treba da bude $L > B$. Svi navedeni uslovi upisani su na slici 106–14. Treba naglasiti da je neophodna ugradnja umirivača na ulazu u kanal.

Napominje se da se sve prethodno navedeno odnosi na otvor preliva koga obrazuju kose ivice pod uglom $\alpha = 45^\circ$ (vidi ponovo sliku 106–14) tj. uz teme trougla je pravi ugao ($\alpha = 90^\circ$).

Proticaj preko trougaonog preliva izražava se obrascem:

$$Q = C_Q \sqrt{2gH^5} \quad (106-39)$$

gde je C_Q = koeficijent preliivanja za trougaoni preliv. Ovaj obrazac može se uporediti sa obrascem (106–13) za ravansko preliivanje. Tamo je širina b preliivanja bila konstantna, a ovde se širina preliivanja kreće od nule do $b_H = 2H$ (na visini H), pa se za neku prosečnu širinu može uzeti visina H . To opravdava da se b iz (106–13) zameni sa H , pa se tamo proticaj Q dobija množenjem bezdimenzionalne veličine m_H sa $b\sqrt{2gH^3}$, a ovde množenjem bezdimenzionalne veličine C_Q sa $H\sqrt{2gH^3}$. Međutim to ne omogućava da se m_H i C_Q povežu u kvantitativnom

smislu, ali ukazuje da su obrasci dimenzionalno usklađeni i da ovde napisano sa (106–39) ima načelno opravdanje.

Još od Tomsonovih istraživanja (krajem 19-tog veka) potiče obrazac koga obično svode na veoma prost izraz:

$$Q = 1,4H^{5/2} \quad (106-40)$$

gde su obavezne dimenzije H [m] Q [m³/s]

Upoređenjem ovoga obrasca sa (106–39) uviđa se da je:

$$C_Q = 0,316 \quad (106-41)$$

Pojavljivalo se više obrazaca, gde konstanta ispred $H^{5/2}$ nije 1,4, nego je negde između 1,38 i 1,42, pa ti obrasci daju C_Q između 0,312 i 0,320 pa se njihovi rezultati od dobijenih za C_Q razlikuju za $\pm 1,4\%$ od napisanog sa (106–40).

Istraživanja su pokazala da se rezultatima bolje prilagođava obrazac u kojem proticaj nije srazmeran sa $H^{2,5}$, nego sa $H^{2,48}$ (ili $H^{2,47}$), a onda koeficijent C_Q nema konstantnu vrednost (kao u prethodnom izrazu, gde ona iznosi 0,316), nego se menja sa visinom H , upravo srazmeran je sa $H^{-0,02}$ (ili $H^{-0,03}$), pa vrednost za C_Q opada sa porastom visine H . Jedan od tih obrazaca je *Konov* koji se svodi na:

$$C_Q = \frac{0,303}{H^{0,02}} \quad (\text{CONE}) \quad (106-42)$$

gde se H mora izraziti u metrima.

Pošto su uobičajene merene visine od 5 do 40 cm (čime se mere proticaji od 0,8 do 140 dm³/s), u tom rasponu koeficijent C_Q , prema prethodnom obrascu opada od 0,322 (za 5 cm) do 0,309 (za 40 cm).

Razlika u odnosu na konstantnu vrednost (= 0,316) prema (106–41) iznosi od +1,9% do –2,2%.

Sem navedenog *Konovog* obrasca navođeni su, između brojnih, i *Eglijev* i *Barov*:

$$C_Q = 0,310 + \frac{2}{1000H} \quad (\text{HEGLY}) \quad (106-43)$$

$$C_Q = 0,3013 + 0,00463H^{-0,5} \quad (\text{BARR}) \quad (106-44)$$

Prvi od ova dva obrasca daje znatno veće proticaje od Konovog, jer se za $H = 5$ cm dobija $C_Q = 0,350$, dok je $C_Q = 0,315$ za $H = 40$ cm. Veliko povećanje proticaja, pogotovo za manje visine H prelivnog mlaza može se i ovde (kao i kod ravanskog preliivanja preko oštroiivčnog tankozidnog preliivanja) pripisati nedovoljno obrađenoj oštroiivčnosti, ili neumirenosti struje ispred preliiva.

Drugi obrazac (Barov) daje skoro iste rezultate kao Konov (relativno odstupanje je manje od pola procenta), iako je drukčije sklopljen.

U svim navedenim obrascima proticaj zavisi samo od visine H prelivnog mlaza, a nigde se ne pojavljuje visina P prelivnog zida, niti bilo koja veličina koju bi nametali prilazni uslovi preliivanju. Objašnjenje za to je u uslovima koji se nameću za širinu B kanala ispred preliiva i za visinu H pregradnog zida, napisanim na slici 106–14. Ako su ti uslovi ispunjeni, strujanje ispred preliiva je smireno u toj meri da su uticaji dolazne brzine zanemarljivi. Na preliivanje utiče pored visine H prelivnog mlaza i dolazna brzinska visina $v_0^2/2g$, jer njihov zbir čini energetska visina H_0 preliivanja. Ako je odnos $v_0^2/2g$ prema H zanemarljiv, zanemarljiv je uticaj dolazne brzine. Taj odnos se izražava sa:

$$\frac{v_0^2/2g}{H} = \frac{Q^2}{2gA_0^2H} = \frac{C_Q^2H^5}{(12,5H^2)^2H} = \left(\frac{C_Q}{12,5}\right)^2 \quad (106-45)$$

U prethodnom izjednačavanju najpre je brzina v_0 zamenjena sa Q/A_0 , gde je A_0 presek struje u kanalu ispred preliiva. Potom je proticaj Q izražen obrascem (106–40), a A_0 proizvodom iz širine kanala ($B = 5H$) i dubine ($= 2,5H$), tj. prema napisanom na slici 106–14. Krajnji rezultat, uz $C_Q = 0,3$, iznosi 6×10^{-4} , što je zanemarljivo, a to je trebalo pokazati.

Razlozi za pojavu mnogo obrazaca za trougaoni preliv (od kojih je navedeno samo nekoliko) su isti kao kod ravanskog preliivanja preko tankozidnog oštroiivčnog preliiva i nema ih smisla ponavljati.

* * *

Do sada je razmatran trougaoni preliv gde je ugao koji određuje otvor preliiva $\alpha = 45^\circ$ (vidi sliku 106–14). Za preliv gde $\alpha \neq 45^\circ$,

proticaj se može oceniti prema:

$$\frac{Q(\alpha)}{Q(45^\circ)} = \operatorname{tg}\alpha \quad (106-46)$$

jer je širina prelivanja, za istu visinu prelivanja, srazmerna sa $\operatorname{tg}\alpha$.

* * *

Bez obzira na ponuđene obrasce potpuna sigurnost za određivanje proticaja na jednom mernom prelivu može se obezbediti samo utvrđivanjem veze između merene visine i proticaja na samom prelivu, prethodnim eksperimentalnim radom gde će se proticaj meriti volumetrijski (merenjem zapremine protekle u izmerenom vremenu). Ovo je naročito potrebno ako treba meriti malene proticaje, a pogotovo za prelive sa otvorom određenim sa $\alpha < 45^\circ$.

V PRIMENA DIMENZIONALNE ANALIZE

U ravanskom nepotopljenom prelivanju za proticaj (po jedinici širine) može se napisati funkcija:

$$q = q(H, ko_1, ko_2, \dots, g, \nu, \delta_k) \quad (106-47)$$

čime se kazuje da proticaj q zavisi od visine H prelivnog mlaza, od graničnih uslova izraženih sa ko_1, ko_2, \dots , te od uticaja težine, viskoznosti i kapilarnosti. Te uticaje unose u funkciju gravitaciono ubrzanje g , kinematički koeficijenti viskoznosti ν i površinskog napona δ_k . Ova dva koeficijenta dobijena su deljenjem koeficijenta viskoznosti μ , odnosno koeficijenta površinskog napona δ , sa gustinom, što je napisano izrazima (62-12) i (62-14).

Funkcija je napisana da u nju ulaze samo kinematičke veličine. Granični uslovi su izraženi dužinama koje geometrijski opisuju preliv, i sa dolaznim brzinama, a to su kinematičke veličine, to su i proticaj (po jedinici širine) q i visina H prelivnog mlaza. Fizičke karakteristike fluida takođe su unešene kinematičkim veličinama, gde su dobijene, kako je malo pre navedeno, deljenjem μ i δ sa gustinom ρ .

Specifična težina γ podeljena sa gustinom ρ daje gravitaciono ubrzanje g . Tako je gustina izostavljena, pa je broj dimenzionalnih veličina smanjen za jednu, ali se, zbog toga, primenom dimenzionalne analize, broj veličina ne smanjuje za tri, nego za dve, jer su u kinematici dve osnovne veličine.

Za osnovne veličine uzeće se H i g , pa će sve ostale veličine dobiti bezdimenzionalne zamene (izražene preko navedenih osnovnih veličina). Tako se prethodna funkcija svodi na vezu bezdimenzionalnih veličina:

$$\frac{q}{g^{1/2}H^{3/2}} = f \left(Ko_1, Ko_2, \dots, \frac{\nu}{g^{1/2}H^{3/2}}, \frac{\delta_k}{gH^2} \right) \quad (106-48)$$

Ko_1, Ko_2, \dots su granični uslovi napisani u bezdimenzionalnom obliku, dok su dva preostala člana u zagradi bezdimenzionalne zamene za ν i δ_k . Napisano na levoj strani može se uzeti i podeljeno sa $\sqrt{2}$, a umesto pomenuta dva preostala člana u zagradi uzeće se njihove recipročne vrednosti. Tako se umesto prethodne funkcije ispisuje:

$$\frac{q}{\sqrt{2}gH^3} = F \left(\underbrace{Ko_1, Ko_2, \dots}_{Ko}, \frac{\sqrt{gH^3}}{\nu}, \frac{gH^2}{\delta_k} \right) \quad (106-49)$$

Leva strana je koeficijent preliivanja što se uviđa iz jednačine (106-13), svi granični uslovi nadalje će se pisati simbolično sa Ko , a poslednja dva člana izražavaju bezdimenzionalno kinematički koeficijent viskoznosti, odnosno kinematički koeficijent površinskog napona, a to su onda oblici Rejnoldovog (Re), odnosno Veberovog (We) broja, prilagođeni zadatku koji se rešava. Sa svim napomenama prethodna funkcija se zamenjuje sa:

$$m_H = m_H(Ko, Re, We) \quad (106-50)$$

gde su

$$Re = \frac{\sqrt{gH^3}}{\nu} \quad (106-51)$$

$$We = \frac{gH^2}{\delta_k} \quad (106-52)$$

Ovi izrazi, za Re i We , su u dimenzionalnom skladu sa izrazima (62-15) i (62-17), napisanim prilikom uvođenja ovih brojeva. Naime,

u (62–15) deli se proizvod karakteristične dužine L_0 i karakteristične brzine u_0 sa koeficijentom ν , a ovde, u (106–51) karakteristična dužina je H , dok karakterističnu brzinu zamenjuje veličina \sqrt{gH} koja ima dimenziju brzine. Karakterističnu brzinu na kvadrat iz (62–17) ovde zamenjuje gH , što se množi sa karakterističnom dužinom H , pa se taj proizvod deli sa δ_k , pa je (106–52) oblik We -broja, prilagođenog zadatku koji se razmatra.

Svojevremeno, po uvođenju u razmatranje Re -, Ca -, Fr - i We - broja, izrazima (62–1) do (62–4), objašnjeno je da uticaji koje predstavljaju ti brojevi slabe ako ti brojevi rastu. Iz prethodno napisanih, sa (106–51) i (106–52), izraza za Re i We vidi se da su ti brojevi za isti fluid (iste vrednosti za ν i δ_k) veći ako je visina H prelivnog mlaza veća. Stoga je uticaj viskoznosti i površinskog napona manji ako je visina H veća. Prema tome, ti uticaji biće izraženiji za manje visine H prelivnog mlaza.

Ako su uticaji viskoznosti i površinskog napona zanemarljivi, a to se, shodno prethodnom objašnjenju, može očekivati kada visina prelivnog mlaza pređe neku određenu vrednost, funkcija (106–50) se svodi na:

$$m_H = m_H(Ko) \quad (106-53)$$

Ovo znači da je prelivanje pod premoćnim uticajima težine i inercijalnosti, a zanemarljivi su uticaji viskoznosti i površinskog napona. Uticaje težine i inercijalne povezuje Fr -broj, uveden sa (62–3), a leva strana u (106–49) se može shvatiti kao \sqrt{Fr} , ako se kao karakteristična brzina u_0 uzme q/H , a H kao karakteristična dužina L_0 .

Iz jednačine (106–16) se zaključuje da je poznavanjem koeficijenta m_H iz obrasca (106–13) poznat i koeficijent m iz (106–6), ako je poznat i odnos P/H , a taj odnos je ušao u granične uslove Ko u funkciji (106–50). Prema tome, ako je ta funkcija određena, određena je i funkcija za m , pa se može pisati:

$$m = m(Ko, Re, We) \quad (106-54)$$

Prema osnovnom obrascu za prelivanje (106–6), m se dobija deljenjem q sa $\sqrt{2gH_0^3}$, pa se umesto prethodnog izraza može napisati i:

$$\frac{q}{\sqrt{2gH_0^3}} = f(Ko, Re, We) \quad (106-55)$$

Kako je malo pre objašnjeno pri većim vrednostima za H (a onda i H_0) može se očekivati da uticaji Re - i We - broja postanu beznačajni, pa se funkcija (106–55) svodi na:

$$m = m(Ko) \quad (106-56)$$

* * *

Predmet razmatranja koja slede je primena napisanih funkcija na pojedine vrste preliva – dakako, za nepotopljeno ravansko prelivanje za koje su funkcije i napisane.

Za tankozidni oštroični preliv u granične uslove ulaze visina P pregrade i debljina δ sečiva na vrhu preliva. Ove uslove bezdimenzionalno izražavaju odnosi P/H , δ/H , pa ovi odnosi ulaze u Ko u funkciji (106–50) i ona se svodi na:

$$m_H = \left(\frac{P}{H}, \frac{\delta}{H}, Re, We \right) \quad (106-57)$$

Pri pisanju prethodne veze podrazumevalo se da su dubina i širina kanala pred prelivom dovoljne da je tečenje pred prelivom smireno u toj meri da lokalni uticaji sa početka kanala ne dopiru do preliva. O tim uslovima raspravljalo se, ranije, u Odeljku I, pri kraju razmatranja oštroičnog preliva, i oni su i prikazani na slici 106–5.

Treba se podsetiti ranijih izlaganja gde je objašnjeno da je uticaj širine δ sečiva na vrhu preliva manji ako je visina prelivnog mlaza veća. Posle izraza (106–51) i (106–52), za Re i We , objašnjeno je da uticaj viskoznosti i površinskog napona opada sa porastom visine H . Iz ova dva navoda sledi da će raščćenjem visine H funkcija težiti na zavisnost m_H samo od P/H tj. na $m_H = m_H(P/H)$, a to pokazuje i obrazac (106–18). Taj obrazac sa $H > 0,5$ m i za $H > 0,25$ m (tj. $P > 2$ m, a veće visine prelivnog zida uglavnom se ne primenjuju) pokazuje da član $0,001/H$ (koji remeti da m_H bude zavisan samo od H/P) povećava vrednost koeficijenta m_H za svega 3 promila.

Navedeni član $(0,001/H)$ unosi uticaje širine δ sečiva, kao i uticaje viskoznosti i površinskog napona, ali sve to teško se može izraziti, i stoga je i preporučljivo da se obrazac ne primenjuje za visine H manje od 5 cm.

Treba naglasiti da se svi obrasci odnose isključivo na prelivanje vode, jer za druge tečnosti viskozitet i površinski napon nisu isti.

Zanimljiva su zapažanja istraživača da koeficijent preliivanja zavisi i od temperature. To se ne može pripisati termodinamičkom procesu, nego je uticaj temperature posredan, ona menja koeficijent viskoznosti, pa se onda pojavljuje uticaj Re -broja.

Za široki prag i za preliv prilagođen prelivnom mlazu, i za prelivne visine veće od 10 cm (što se i ostvaruje u pretežnom delu praktičnih zadataka) mogu se izostaviti uticaji Re i We -broja, pa je onda shodno (106–56), koeficijent preliivanja m zavisao samo od graničnih uslova, od Ko .

Za oštroiivni široki prag funkcija (106–56) svodi se onda na:

$$m = m(P/H_0) \quad (106-58)$$

jer se granični uslov, izražen bezdimenzionalno, uz H_0 kao osnovnu veličinu, svodi na P/H_0 , uz pretpostavku oštroiivnosti i uz vertikalnu uzvodnu površinu. Na slici 106–2 ispisani koeficijenti preliivanja su u skladu sa prethodnim izrazom (106–58). Treba se podsetiti da se te vrednosti koeficijenta m odnose na prag koji se „ponaša kao široki prag” tj. ako je njegova širina (meri se duž strujanja i na slici 106–2 je obeležena sa l) veća od trostruke kritične dubine. Ako je manja mora se voditi računa i o odnosu l/H_0 , pa je:

$$m = m(P/H_0, l/H_0)$$

Ranije, u Odeljku I, pri kraju razmatranja preliivanja preko širokog praga, ukazano je na povećanje koeficijenta m sa smanjem dužine l , ako je $l < 3h_K$.

Za široki prag sa uzvodnim zaobljenjem u granične uslove ulazi geometrijski oblik zaobljenja, upravo u Ko ulaze bezdimenzionalne veličine koje to opisuju. Takođe se koeficijent m malo poveća, ako je prag i oštroiivčan, ali je uzvodna površina nagnuta, pa taj nagib ulazi u Ko . Međutim, u svim slučajevima m neće preći vrednost $m = 0,385$ koju bi dao idealan fluid.

Za preliv prilagođen prelivnom mlazu celokupan geometrijski opis preliiva daje niz dužina L_1, L_2, \dots koje bezdimenzionalno izražene, u odnosu na energetska visinu H_0 preliivanja za koju je preliv projektovan ($H_0 = H_{proj}$), čine niz konstanti:

$$\frac{L_1}{H_{proj}} = C_1, \quad \frac{L_2}{H_{proj}} = C_2, \quad \dots$$

kao što se vidi iz slike 106–7.

Prema tome u funkciji (106–56) Ko je skup konstanti pa je onda:

$$m = \text{const} \quad \text{za} \quad H_0 = H_{\text{proj}} \quad (106-59)$$

a tako je i upisano u (106–24), gde je $m = 0,49$.

Ako ne preliva proticaj za koga je oblikovan preliv ($H_0 \neq H_{\text{proj}}$), bezdimenzionalni opis graničnih uslova Ko , za osnovnu dužinu H_0 , čine odnosi:

$$\frac{L_1}{H_0} = \frac{L_1}{H_{\text{proj}}} \frac{H_{\text{proj}}}{H_0} = C_1 \frac{H_{\text{proj}}}{H_0}, \quad \frac{L_2}{H_0} = C_2 \frac{H_{\text{proj}}}{H_0}, \quad \dots$$

pa se Ko svodi na zavisnost od H_0/H_{proj} , a onda je određenje funkcije (106–55)

$$m = m(H_0/H_{\text{proj}}) \quad (106-60)$$

a to i pokazuje izraz (106–25).

Napisano sa (106–59) i (106–60), odnosno ranija određenja tih funkcija (106–24) i (106–25), uslovljavaju da je visina brane P veća od dvostruke energetske visine H_0 prelivnog mlaza, a taj uslov ($P > 2H_0$), naveden je i ranije, uz prateće objašnjenje da je on zadovoljen gotovo u svim primerima prelivnih brana. Neuticanje visine P brane dozvoljava izostavljanje P/H_0 u Ko .

* * *

Za ravansko potopljeno prelivanje, u granične uslove, napisane sa bezdimenzionim veličinama, treba uvrstiti i H_{pot}/H_0 (H_{pot} je visina potapanja tj. nadvišenje nizvodnog nivoa iznad vrha brane – vidi sliku 106–10). Mogu se granični uslovi razdvojiti: neka Ko^n označava te uslove za nepotopljeno prelivanje, a na njih se još dodaje H_{pot}/H_0 , pa se na osnovu (106–55) piše:

$$\frac{q}{\sqrt{2gH_0^3}} = f(Ko^n, \frac{H_{\text{pot}}}{H_0}, Re, We) \quad (106-61)$$

Leva strana ovoga izraza može se zameniti sa $C_{\text{pot}}m$, jer to dozvoljava jednačina (106–26), i ta zamena dovodi do:

$$C_{\text{pot}}m = f(Ko^n, \frac{H_{\text{pot}}}{H_0}, Re, We) \quad (106-62)$$

pa se za C_{pot} može napisati:

$$C_{\text{pot}} = \frac{f(Ko^n, H_{\text{pot}}/H_0, Re, We)}{m} \quad (106-63)$$

m je koeficijent preliivanja za nepotopljeno preliivanje pri istoj vrednosti za H_0 , a on je, shodno (106-54), funkcija od Ko^n , Re i We , pa je:

$$C_{\text{pot}} = C_{\text{pot}}(Ko^n, H_{\text{pot}}/H_0, Re, We) \quad (106-64)$$

Ako je uticaj Re i We beznačajan, dobija se prostija zavisnost za C_{pot} :

$$C_{\text{pot}} = C_{\text{pot}}(Ko^n, H_{\text{pot}}/H_0) \quad (106-65)$$

Iz grafičkog prikaza, obeleženog sa „a” na slici 106-10, moglo bi se zaključiti da C_{pot} za prelivnu branu zavisi samo od stepena potapanja H_{pot}/H_0 . Treba se, međutim, prisetiti da je rečeno da taj prikaz važi samo za $H_0 = H_{\text{proj}}$ (za energetska visinu H_0 za koju je preliv oblikovan), a za taj slučaj se granični uslovi svode na niz konstanti, kako je objašnjeno iza izraza (106-59), pa je zaista $C_{\text{pot}} = C_{\text{pot}}(H_{\text{pot}}/H_0)$. Za istu branu, a za druge visine H_0 , za $H_0 \neq H_{\text{proj}}$, granični uslovi Ko^n se izražavaju sa H_0/H_{proj} što se vidi iz izraza (106-25), pa je onda:

$$C_{\text{pot}} = C_{\text{pot}}(H_0/H_{\text{proj}}, H_{\text{pot}}/H_0)$$

Svojevremeno je objašnjeno (u Odeljku III) da se za široki prag C_{pot} može sračunati primenom jednačina (106-10) i (106-12). Po prvoj se sračuna proticaj za nepotopljeno preliivanje, a po drugoj za potopljeno za istu vrednost za H_0 , pa se deljenjem drugog proticaja sa prvim dobija C_{pot} . Svakako da će C_{pot} zavisiti od stepena potopljenosti H_{pot}/H_0 i od graničnih uslova za nepotopljeno preliivanje.

* * *

Sužavanje mlaza određuje koeficijent sužavanja C_b , napisan sa (106-31) odnosno (106-32). Prelivni mlaz ne koristi celu raspoloživu širinu b nego se suzi na b_c . Bezdimenzionalna veličina C_b zavisi od bezdimenzionalnih veličina koje opisuju granične uslove, te od Rejnoldsovog i Veberovog broja, što se piše sa: $C_b = C_b(Ko, Re, We)$.

U granične uslove napisane sa Ko ulaze bezdimenzionalne veličine navedene u Odeljku III: b/B , H/P , H/b . Sa B je označena širina struje

ispred preлива, sa P visina pregradnog prelivnog zida, odnosno visina prelivne brane, H je visina prelivnog mlaza.

Uz tako određene granične uslove prethodna funkcija se svodi na:

$$C_b = C_b \left(\frac{b}{B}, \frac{H}{P}, \frac{H}{b}, Re, We \right)$$

Ranije je prihvaćena zavisnost (106–36) i ona je grafički prikazana slikom 106–11. Upoređenjem prethodnog izraza sa (106–36) uviđa se da su u (106–36) izostavljeni H/b , Re , We . Izostavljanje H/b tamo je objašnjeno navodom da taj odnos utiče posredno preko H/P . Tamo je, u izraz (106–33), ušla visina H prelivnog mlaza kao dimenzionalna veličina, čime su posredno ušli Re i We , jer izrazi (106–51) i (106–52) pokazuju da visina H nameće vrednosti za Re i We , za isti fluid (za iste vrednosti za ν i δ_k). Izostavljanjem H iz (106–33), došlo se do (106–36), što u stvari znači zanemarenje uticaja Re i We .

* * *

Za proticaj Q preko trougaonog preлива, po ugledu na funkciju (106–48), može se napisati:

$$Q = Q(H, Ko_1, Ko_2, \dots, g, \nu, \delta_k) \quad (106–66)$$

Primenom dimenzionalne analize, sa osnovnim veličinama H i g , istim postupkom kojim se došlo do (106–48), prethodni izraz dovodi do:

$$\frac{Q}{\sqrt{2gH^3}} = f(Ko, Re, We) \quad (106–67)$$

Ako se zadovolje uslovi za dužinu i dubinu ispred preлива, napisani na slici 106–14, tečenje se pre prelivanja do te mere smiri da je zanemarljiv uticaj prilazne brzine, što je dokazano procenom odnosa napisanog sa (106–45), pa u granične uslove ne ulaze ni širina B kanala, ni visina P prelivnog zida. Na proticaj može da utiče obrada prelivne ivice kojom se postiže oštroičnost. Merodavna je širina na vrhu prelivne ivice, koji je kod ravanskog prelivanja preko oštroičnog preлива označena na slici 106–5 sa δ . Bezdimezionalna zamena za δ je δ/H , pa se (106–68) svodi na:

$$C_Q = C_Q \left(\frac{\delta}{H}, Re, We \right) \quad (106–68)$$

Ovde je leva strana u (106–67) zamenjena sa koeficijentom prelivanja C_Q , što dozvoljava osnovni obrazac za prelivanje preko trougaonog preliva (106–39).

Ako je prelivni mlaz odbačen od uzvodne oštre ivice preliva, bez za-lepljivanja na širini δ , ta širina ne utiče na prelivanje. To se ostvaruje kada visina prelivnog mlaza pređe određenu granicu (što je širina δ veća potrebna je veća visina mlaza da se to ostvari). Povećanjem visine prelivnog mlaza smanjuje se uticaj Reynoldsovog i Veberovog broja – to je objašnjeno iza napisanih izraza (106–51) i (106–52) za te brojeve.

Prethodni navodi upućuju na zaključak da C_Q teži konstantnoj vrednosti povećanjem visine prelivnog mlaza, jer C_Q zavisi od sve manje uticajnih bezdimenzionalnih veličina upisanih u funkcije (106–68). To pokazuje i obrazac (106–42), jer on za povećanje visine H od 5 do 50 cm smanjuje koeficijent C_Q od 0,322 do 0,307 (za 4,7%), dok za H od 50 do 100 cm smanjenje je od 0,307 do 0,302 (za 1,3%). Obrazac (106–44) daje odgovarajuća smanjenja 4,4%, odnosno 0,6%.

Navešće se i jedan obrazac u kome se ne pojavljuje zavisnost od širine δ na vrhu prelivne ivice, ali se ispoljava zavisnost od Re i We . To je obrazac:

$$C_Q = 0,3 \left[1 + \frac{5}{4} (Re We)^{-1/6} \right] \quad (106-69)$$

Uz ovaj obrazac treba naglasiti da će imati različite vrednosti koeficijenta C_Q , a za istu vrednost visine H , ako se primeni na različite tečnosti. Te vrednosti se menjaju i ako se obrazac primeni isključivo na vodu, jer zavise od temperature. Za uobičajene temperature od 5 do 20°C vrednosti tih koeficijenata su:

$$\left. \begin{array}{lll} \text{za } 5^\circ\text{C} & 10^6 \nu = 1,52 \text{ m}^2\text{s}^{-1} & 10^6 \delta_k = 75,4 \text{ m}^3\text{s}^{-2} \\ \text{za } 20^\circ\text{C} & 10^6 \nu = 1,01 \text{ m}^2\text{s}^{-1} & 10^6 \delta_k = 73,7 \text{ m}^3\text{s}^{-2} \end{array} \right\} \quad (106-70)$$

Vrednosti za koeficijent površinskog napona δ_k odnose se na vodu čiju površinu opkoljava vazduh (tako je kod prelivnog mlaza).

U obrascu (106–69) Re i We će se izraziti sa (106–51), odnosno (106–52), a potom će se za njih koristiti prethodno, sa (106–70), napisane vrednosti. Dobiće se:

$$\text{za } 5^\circ\text{C} \quad C_Q = 0,3(1 + 0,0156H^{-7/12}) \quad (106-71)$$

$$\text{za } 20^\circ\text{C} \quad C_Q = 0,3(1 + 0,0145H^{-7/12}) \quad (106-72)$$

U ovim obrascima visina se uvrštava u metrima.

Dva prethodna obrasca daju rezultate koji se beznačajno razlikuju, pa se može primeniti jedinstveni obrazac:

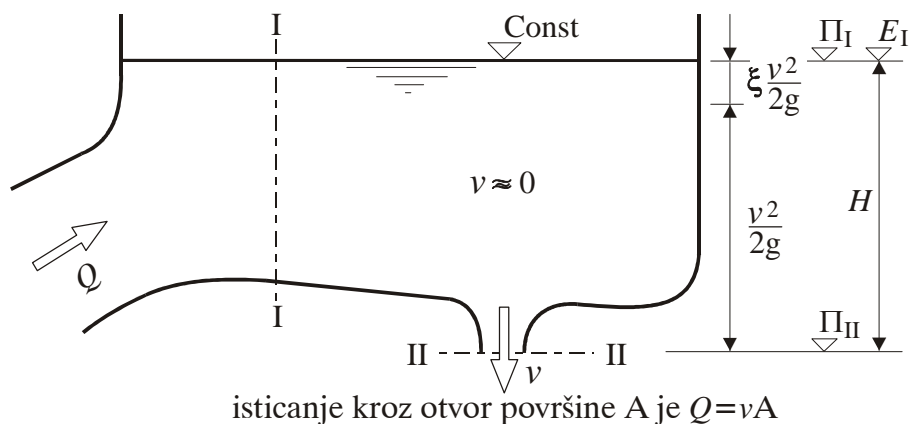
$$C_Q = 0,3(1 + 0,015H^{-7/12}) \quad (106-73)$$

koji će dati rezultate koji od napisanih sa (106-71) i (106-72) odstupaju do $\pm 0,3\%$, za visinu H veću od 5 cm. Ovo pokazuje da uticaj temperature vode nije značajan. Prethodni obrazac (106-73) za $H = 5$ cm i $H = 40$ cm daje $C_Q = 0,326$, odnosno $C_Q = 0,308$, a te vrednosti ne razlikuju se mnogo od vrednosti koji proizlaze iz obrazaca (106-42) i (106-44).

107 ISTICANJE

I ISTICANJE IZ SUDA

Ako se izuzme blizina otvora kroz koji voda ističe iz suda, brzina u sudu je zanemarljiva, pa onda vlada hidrostatička zakonitost. Stoga su za presek struje (I) na slici 107–1 pijezometarska i energetska kota (Π_I, E_I) na koti slobodne površine vode.



Slika 107–1 Isticanje iz suda

Mlaz slobodno ističe, pa je u preseku (II), položajna kota ujedno i pijezometarska (Π_{II}), jer se pretpostavlja da je kroz presek strujanje pravolinijsko i paralelno, pa je pijezometarska kota ista za sve deliće u preseku, a po obimu ona se poklapa sa položajnom, jer nema pritiska (mlaz slobodno ističe).

Na osnovu jednačine energije za preseke (I) i (II):

$$E_I = E_{II} + E_{izg}^{I-II}$$

piše se:

$$\Pi_I = \Pi_{II} + \frac{v_{II}^2}{2g} + \xi \frac{v_{II}^2}{2g} \quad (107-1)$$

jer je $E_I = \Pi_I$, a $E_{II} = \Pi_{II} + v^2/2g$. Gubitak energije je napisan uobičajenim načinom: koeficijent ξ se množi sa $v_{II}^2/2g$.

Iz slike 107-1 se vidi da je pijezometarska razlika $\Pi_I - \Pi_{II}$ u stvari tzv. *visina isticanja* H . Pošto u jednačinu (107-1) ulazi samo jedna brzina (v_{II}), može se indeks uz nju izostaviti, pa se umesto v_{II} piše v . Sa ovim zamenama jednačine (107-1) se preobličava u:

$$H = \frac{v^2}{2g}(1 + \xi) \quad (107-2)$$

Pogodno je koristiti „koeficijent brzine” C_v :

$$C_v = \sqrt{\frac{1}{1 + \xi}} \quad (107-3)$$

pa je

$$v = C_v \sqrt{2gH} \quad (107-4)$$

U idealnom fluidu gubitak energije nema ($\xi = 0$), pa je $C_v = 1$, dok je kod stvarnog fluida $C_v < 1$. Za idealan fluid je:

$$v_{id} = \sqrt{2gH}$$

pa se iz napisana dva izraza dobije:

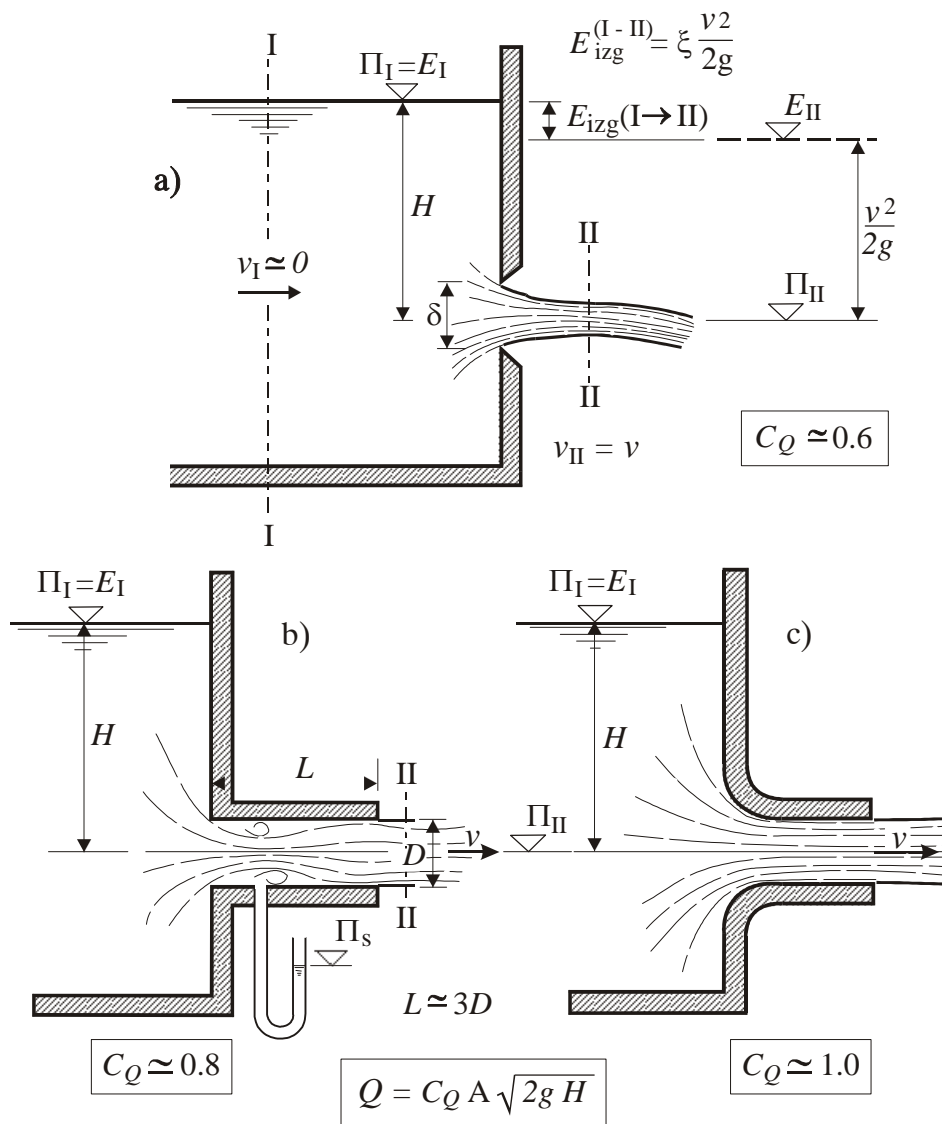
$$\frac{v}{v_{id}} = C_v \quad (107-5)$$

Napominje se da je koeficijent brzine C_v već ranije korišćen, uveden je u Poglavlju 103, izrazom (103-6).

Kod dobro oblikovanog otvora ξ ne prelazi 0,05, pa je C_v skoro jedinica, nije manji od 0,97.

Ako nema skupljanja mlaza („kontrakcije”), što znači da je presek mlaza koji ističe isti kao presek otvora A , proticaj je:

$$Q = vA = C_v A \sqrt{2gH} \quad (107-6)$$



Slika 107–2 Isticanje kroz otvor u boku suda: a) oštroični otvor, b) otvor sa naglavkom, c) oblikovani otvor (prilagođen strujanju)

U prethodnom izrazu brzina je zamenjena prema (107–4).

Slika 107–2 prikazuje tri slučaja isticanja kroz otvor na boku suda. Kod njih su za deliće fluida na spoljnoj površini mlaza koji ističe položajne kote ujedno i pjezometarske, jer tu nema pritiska. Stoga za

deliće po obimu jednog preseka mlaza pijezometarska kota ne može biti ista, jer im položajne kote nisu iste, pa onda pijezometarska kota za jedan presek nije ista za sve deliće u preseku, a to je posledica što strujanje kroz presek nije paralelno i pravolinijsko, normalno upravljeno na presek, nego je zakrivljeno. Isto je bilo i kod mlaza koji pada sa oštrovičnog tankozidnog preliva, što je svojevremeno opisano, u Odeljku I Poglavlja 106, a vidljivo je na slici 106–3. Treba naglasiti da je kod isticanja kroz otvor malene visine (ona je označena sa δ na slici 107–2a) u odnosu na visinu isticanja H , tj. za $\delta \ll H$, uticaj promene pijezometarske kote u preseku mlaza beznačajan, pa se može računati sa jedinstvenom pijezometarskom kotom za ceo presek – ta je kota označena sa Π_{II} na slici 107–2. Prihvatanjem ove kote podrazumeva se da u celom preseku nema pritiska (upravo zanemarljivi su), jer je mlaz malenoga preseka. Na slici 107–2a prikazano je isticanje kroz *oštrovični otvor* u tankom bočnom zidu. Mlaz se skuplja, presek mlaza A_{ml} manji je od preseka otvora A , što se izražava „koeficijentom kontrakcije” (skupljanja), koji se već koristio u nekoliko navrata počevši od izraza (102–7). On je ovde odnos između preseka mlaza i preseka otvora tj.

$$C_A = \frac{A_{ml}}{A} \quad (107-7)$$

Proticaj Q je proizvod površine mlaza A_{ml} i brzine v_{ml} u njemu:

$$Q = A_{ml}v_{ml}$$

Sa praktičnog stanovišta prikladnije je proticaj izražavati korišćenjem površine otvora A pa se u prethodnom izrazu A_{ml} zamenjuje sa C_A , a brzina se izražava prema (107–4), pa je:

$$Q = C_A A C_v \sqrt{2gH} \quad (107-8)$$

I ovde se koristi „koeficijent proticaja” C_Q uveden izrazom (103–9):

$$C_Q = C_v C_A \quad (107-9)$$

što ukazuje da se proticaj smanjuje zbog smanjenja brzine u odnosu na brzinu za idealni fluid (što izražava C_v) i zbog skupljanja mlaza (što izražava C_A).

Korišćenjem (107–9) izraz (107–8) se svodi na:

obrazac za isticanje iz suda kroz otvor površine A

$$Q = C_Q A \sqrt{2gH}$$

H = visinska razlika između nivoa
vode u sudu i položaja otvora

C_Q = koeficijent proticaja

(107–10)

U primerima (b) i (c) na sl. 107–2 izlazni presek mlaza je isti kao presek otvora, tj. $C_A = 1$, dok je skupljanje u primeru (a) značajno iako je za taj primer koeficijent brzine C_v blizak jedinici, koeficijent C_A znatno utiče na vrednost koeficijenta C_Q pa je C_Q približno 0,6. Ta vrednost biće obrazložena u narednim razmatranjima.

Za primer (b) mogu se koristiti saznanja iz proučavanja naglog suženja cevi (Poglavlje 102) jer se iz cevi velikog preseka (što ovde zamenjuje sud) prelazi u cev malenoga preseka, u cev koja se obično naziva *naglavak* (jer je naglavljen na zid suda). Tamo za prelazak iz cevi preseka A_I u presek A_{II} , gde je $A_{II}/A_I = 0$, koeficijent lokalnog gubitka ξ uz $v_{II}^2/2g$ iznosi 0,5, što se uviđa primenom jednačine (102–13). Primenom izraza (107–3), za $\xi = 0,5$ dobija se $C_v = 0,82$, ili zaokruženo $C_v = 0,8$. S obzirom da se mlaz po izlasku iz naglavka ne skuplja, $C_A = 1$ pa je $C_Q = C_v = 0,8$.

Nameće se pitanje kolika je dužina naglavka potrebna, pa da se skupljeni mlaz proširi na ceo poprečni presek naglavka i da iz naglavka ističe mlaz preseka istog kao presek naglavka? Odgovor na to pitanje može se naći u ranijim razmatranjima iz kojih je proizašao zaključak koji se svodi na izraz (102–14) po kome dužina L sužene cevi prečnika D treba da bude $L > 3D$ pa da se u suženoj cevi mlaz pre njenog kraja proširi na ceo raspoloživi presek. To je procenjeno za najizrazitija suženja, pa se može preneti i na naglavak. Prema tome, dovoljna je dužina naglavka jednaka trostrukom prečniku otvora da bi se računao izlazni presek mlaza jednak preseku naglavka, tj. sa $C_A = 1$.

Zanimljivo je razmotriti koliko iznosi presek suženog mlaza (suženje mlaza je prikazano na slici 107–2b). Iz ranijih razmatranja može se preneti jednačina (102–19) koja ukazuje da je, za $A_{II}/A_I = 0$, presek

suženog mlaza svega 0,62 preseka cevi. Toliko je i ovde, i onda se presek mlaza postepeno povećava do preseka naglavka – razume se, uz odgovarajuće smanjivanje brzine, a onda uz povećanje pijezometarske kote. (Isto je bilo i kod sužavanja cevi.) Pijezometarska kota sa Π_s poraste do izlaza iz naglavka na Π_{II} (vidi sliku 107–2b).

U slučaju (a) mlaz se do suženog preseka oblikuje isto kao u slučaju (b), pa je suženi presek isti. U oba slučaja – (a) i (b) – brzina v_s u suženom preseku, na osnovu jednačine energije primenjene na presek u sudu i na presek suženog mlaza, iznosi:

$$v = C_v(\Pi_I - \Pi_s)$$

gde su Π_I i Π_s pijezometarske kote u sudu, odnosno suženom mlazu. U slučaju (a) $\Pi_s = \Pi_{II}$, a u slučaju (b) $\Pi_s < \Pi_{II}$, pa iz toga sledi da je u slučaju (b) brzina veća – razume se za istu visinu isticanja $H = \Pi_I - \Pi_{II}$. Povećanje brzine u (b), u odnosu na (a), omogućavaju potpritisci u (b), dok u (a) takva mogućnost ne postoji, jer je mlaz slobodan (oslobođen od pritisaka). U slučaju (b) propusna moć je veća zahvaljujući što je suženi mlaz proširen na ceo presek otvora, uprkos toga što je gubitak energije veći, a izlazna brzina manja.

Na kraju, slučaj „c” sa slike 107–2 prikazuje *otvor prilagođen strujanju*, gde nema ni skupljanja mlaza, a gubici energije su zanemarljivi. Tu je $C_A = 1$, a iza izraza (107–5) navedeno da se za dobro oblikovan otvor može računati sa $C_v = 0,98$, ili zaokruženo $C_v = 1$, pa je onda $C_Q = 1$.

Obavljene procene vrednosti koeficijenta proticaja C_Q za sva tri slučaja upisane su na slici 107–2. Međusobni odnos proticaja je sledeći:

$$Q_a < Q_b < Q_c$$

Približno je:

$$\frac{Q_a}{Q_c} = 0,6 \quad \frac{Q_b}{Q_c} = 0,8$$

Za brzine odnosi su drukčiji, jer je:

$$v_a \approx v_c > v_b$$

a približno je $v_c/v_b = 0,8$.

* * *

Sud sa otvorom na dnu može da posluži za određivanje proticaja merenjem dubine u sudu. Prethodno se mora odrediti zavisnost proticaja Q od dubine H , tj. $Q = Q(H)$, većim brojem opita gde se mere obe veličine. Proticaj se meri na neki drugi način, najbolje je volumetrijski, tj. merenjem istekle zapremine V kroz vreme T (proticaj $Q = V/T$).

Sud namenjen merenju može da ima više otvora na dnu da bi se povećao raspon proticaja koji će se meriti. Zavisno od proticaja koji se meri biće otvoren potreban broj otvora, dok su ostali zatvoreni. Za proticaje bliske minimalnom otvoren je samo jedan otvor, a za one bliške maksimalnom svi otvori su otvoreni. Uz to svi otvori ne moraju biti iste površine.

* * *

Razmatra se ravanski zadatak isticanja kroz otvor površine A na dnu suda (sl. 107–3). Otvor je oblikovan tako da je prilagođen strujanju, pa je gubitak energije zanemarljiv ($C_v \approx 1$), a nema ni skupljanja mlaza ($C_A = 1$), pa se može računati sa:

$$v = \sqrt{2gH}, \quad Q = vA \quad (107-11)$$

Napisani izraz za brzinu v podrazumeva da je brzina u sudu, u preseku (I) zanemarljiva. To se podrazumevalo u svim prethodnim razmatranjima isticanja iz suda.

Namerno se razmatra ravanski zadatak, jer to omogućava pregledno prikazivanje pritiska na dno na slici 107–3, a zaključci se mogu preneti i na zadatak koji nije ravanski. Prikaz na navedenoj slici nacrtan je na osnovu sledećeg rasuđivanja.

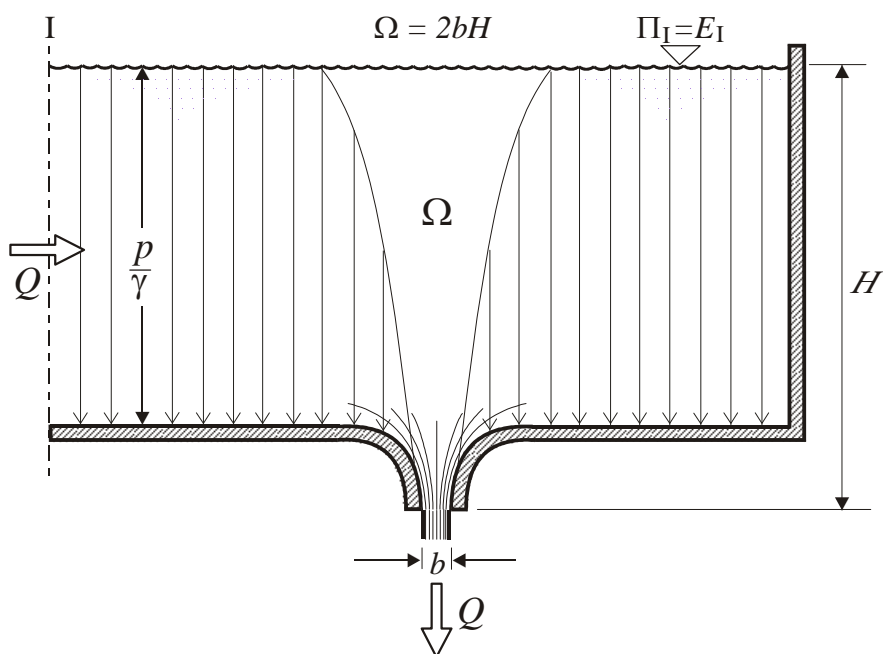
Sile koje u vertikalnom pravcu deluju na masu fluida između preseka (I) u sudu i preseka izlazećeg mlaza su: težina tečnosti G , vertikalna komponenta K_Z sile K kojom čvrsta granica deluje na fluid i inercijalna „sila” I koja se svodi silu u izlaznom preseku.

Jednačina „ravnoteže” navedenih sila izražena je sa:

$$G = K_Z + I \quad (107-12)$$

Sila I je jednaka:

$$I = \rho Qv = \rho Av^2 = 2\gamma A \frac{v^2}{2g} = 2\gamma AH \quad (107-13)$$



Slika 107-3 Opterećenje na dno suda pri isticanju kroz otvor na dnu

Ona je najpre izražena prema izloženom u Poglavlju 82, a onda je proticaj Q zamenjen sa Av jer nema skupljanja mlaza, i na kraju, $v^2/2g$ je zamenjeno sa H shodno (107-11). Zamenom I , u (107-12), napisanim sa (107-13) dobija se za silu kojom na fluid deluje dno, odnosno na silu kojom fluid potiskuje dno:

$$K_Z = G - 2\gamma AH \quad (107-14)$$

Ova jednačina pokazuje da sud prima silu K_Z manju od težine vode u njemu za $2\gamma AH$, a težina vode iznad otvora je γAH . Prema tome, sud prima silu manju od težine vode u njemu za dvostruku težinu koju bi primila površina koja bi zatvarala otvor kada ne bi bilo isticanja.

Na osnovu sprovedenog postupka ne može se odrediti raspored pritiska na dno koji daju silu K_Z . Za to bi trebalo raspolagati dopunskim saznanjima. Iako se ne može tačno nacrtati opterećenje na dno, može se približno, kako je to i učinjeno na slici 107-3. Uz sam otvor pritiska nema, a udaljavanjem od otvora pritisak raste (jer se brzina smanjuje)

da bi na kratkom rastojanju došlo do pritiska koji daje hidrostatički raspored pritiska, jer su odatle brzine zanemarljive.

Ovaj zaključak potpomaže u crtanju pritisaka na dno na sl. 107-3, a uz to se koristi saznanje da površina - na slici mora da bude $2bH$. Naime, primenio se postupak koji je grafički prikazivao opterećenje u ravanskim hidrostatičkim zadacima, i koji izložen u Odeljku III Poglavlja 72 (vidi sliku 72-10).

Površina otvora A je na slici 107-3 prikazana sa širinom otvora b , jer je $A = Lb$, gde je L proizvoljna dužina otvora (meri se u ravni normalnoj na crtež). Zamenom A sa Lb u (107-13) dobija se da je:

$$I = 2bH\gamma L \quad (107-15)$$

a sila po postupku sa već pomenute slike 72-10 je jednaka proizvodu iz površine - koja predstavlja silu i γL , pa onda prethodni izraz pokazuje da je $I = - \gamma L$, iz čega sledi:

$$- = 2bH \quad (107-16)$$

Ovo je u skladu sa ranijim navodom da je inercijalna „sila” I jednaka dvostrukoj vrednosti težine stuba vode iznad otvora, a tu težinu u grafičkom prikazu ravanskog zadatka predstavlja površina bH jednaka - /2.

Ako se izostavi pretpostavka o idealnom fluidu, iz jednačine (107-4) se dobija:

$$\frac{v^2}{2g} = C_v^2 H \quad (107-17)$$

pa se umesto (107-13) dobija:

$$I = 2\gamma AHC_v^2 \quad (107-18)$$

Ova sila iznosi silu za idealan fluid pomnoženu sa C_v^2 . Može se uzeti da je otprilike $C_v^2 = 0,95$.

I za zadatak isticanja kroz otvor na dnu suda, koji nije ravanski, ako nema skupljanja mlaza, važi jednačina (107-13), odnosno (107-18), ali se opterećenje na dno ne može prikazati površinom u ravni crteža.

* * *

Komponenta inercijalne „sile” u preseku mlaza koji ističe („reaktivna sila”) za slučajeve na slici 107–2 izražena je sa:

$$I = \rho Qv = \rho \frac{Q^2}{A} = 2\gamma AHC_v^2 C_A^2 \quad (107-19)$$

Do ovoga izraza se došlo korišćenjem (107–8) za zamenjivanje Q^2 .

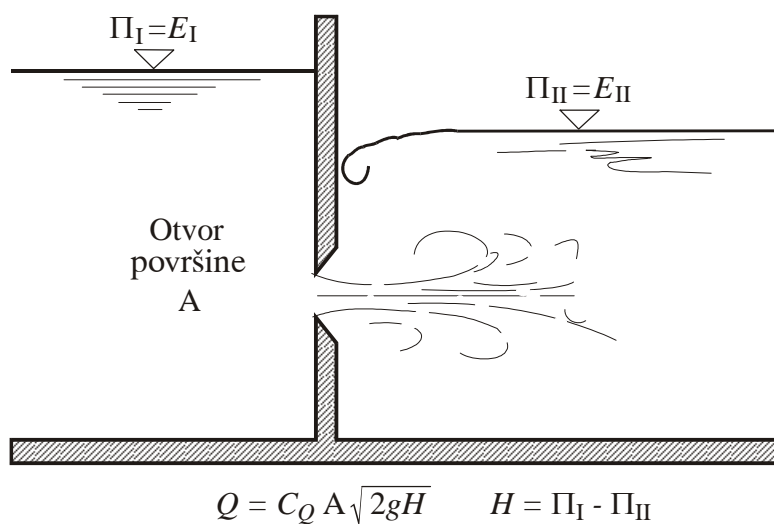
$C_v^2 C_A^2 (= C_Q^2)$ izražava odnos „reaktivne sile” u pojedinačnom slučaju i te sile za idealan fluid i bez skupljanja mlaza. Taj odnos iznosi $0,6^2$ za slučaj (a) na sl. 107–2, za slučaj (b) on je $0,8^2$, dok je za slučaj (c) blizak jedinici.

* * *

Do sada se razmatralo slobodno isticanje iz suda, bez uticaja sa nizvodne strane, što se može nazvati *nepotopljeno isticanje*. Za *potopljeno isticanje* – slika 107–4 – treba računati sa pijeziometarskom razlikom $H = \Pi_I - \Pi_{II}$, gde su Π_I i Π_{II} pijeziometarske kote u uzvodnom, odnosno nizvodnom sudu.

Proticaj izražava jednačina:

$$Q = C_Q A \sqrt{2g(\Pi_I - \Pi_{II})} \quad (107-20)$$



Slika 107–4 Potopljeno isticanje kroz otvor

Podrazumeva se da su brzine u sudovima zanemarljive, jer je presek otvora veoma malen u odnosu na preseke struje u sudovima (to su preseki postavljeni normalno na pravac isticanja i dovoljno su udaljeni od otvora da se u njima ne oseća uticaj isticanja kroz otvor).

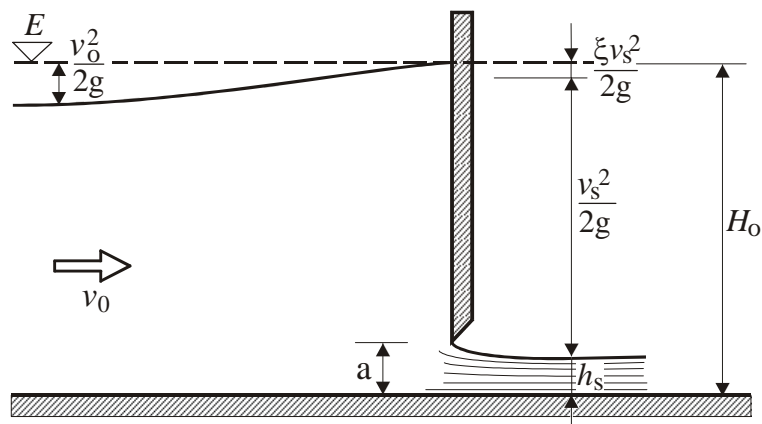
Uz prethodno mora se primetiti da neispunjavanje prethodnih uslova dovodi do nivoa iznad otvora, a neposredno uz pregradni zid sa nizvodne strane, koji je nešto niži od nivoa u udaljenom preseku, gde se uticaj isticanja više ne oseća. Računanje sa nivoom neposredno uz pregradni zid je ispravnije (i daje nešto veći proticaj) od računanja sa nivoom u udaljenom preseku. Međutim prvi navedeni nivo nije lako odrediti, dok je drugi poznati granični uslov. Da je prvi nivo niži lako je objasniti, primenom jednačine „uravnoteženja sila” za masu između preseka neposredno iza pregrade i onoga udaljenijeg gde je strujanje neporemećeno isticanjem. Za prvi presek ulaze sila pritiska i komponenta inercijalne „sile” u ističućem mlazu, a za drugu sila pritiska i inercijalna. Kako je u preseku ističućeg mlaza brzina znatno veća od one u udaljenom preseku, komponenta inercijalne „sile” u prvom preseku je veća, pa je onda sila pritiska manja – odatle niži nivo u prvom preseku (i to se pretpostavljalo).

II ISTICANJE ISPOD USTAVE

Slika 107–5 prikazuje *isticanje ispod ustave* pod sledećim uslovima:

- a) ustava je oštroična;
- b) isticanje je nepotopljeno, a to i ovde, kao i svuda ranije, znači da nizvodni uslovi ne utiču na isticanje;
- c) ustava je smeštena u pravougaonom kanalu širine b , a tolika je i širina ističućeg mlaza, pa se zadatak rešava kao ravanski.

Od oštre ivice ustave gornja površina vode je zakrivljena čime se dubina a smanji na h_s (a je visina otvora ustave) u preseku gde je strujanje pravolinijsko i paralelno. Taj presek (sa dubinom h_s) je onda pogodan da bude jedan od preseka za ispisivanje jednačine energije. Drugi presek, uzvodniji, uzima se ispred ustave, u njemu je dubina H . Taj presek mora se udaljiti od ustave, jer u njemu strujanje treba da bude pravolinijsko i paralelno, sa malenom neravnomernošću brzina po



Slika 107-5 Ravansko, nepotopljeno isticanje ispod ustave

preseku. Uz samu ustavu gornji deo strujanja je „zaustavna oblast” i stoga se nivo uz ustavu malo podigne, otprilike za $v_0^2/2g$ (v_0 je brzina u preseku sa dubinom H). Smanjivanje brzine sa v_0 na nulu dovodi do povećanja pijezometarske kote (povećanja nivoa) za $v_0^2/2g$. U donjem delu struje neposredno pred ustavom dolazi do naglog povećanja brzina.

Pošto su odabrani preseci, napisaće se jednačina energije za struju između njih:

$$H + \frac{v_0^2}{2g} = h_s + \frac{v_s^2}{2g} + \xi \frac{v_s^2}{2g} \quad (107-21)$$

v_0 i v_s su brzine u presecima gde su dubine H , odnosno h_s , a poslednji član predstavlja gubitak energije između preseka.

Energetska visina H_0 u uzvodnom preseku je:

$$H_0 = H + \frac{v_0^2}{2g} \quad (107-22)$$

a to je leva strana u jednačini (107-21) pa se uvođenjem H_0 u tu jednačinu dobija:

$$v_s = \sqrt{\frac{1}{1+\xi}} \sqrt{2g(H_0 - h_s)} = C_v \sqrt{2g(H_0 - h_s)} \quad (107-23)$$

C_v je koeficijent brzine koji se korisito već nekoliko puta, poslednji put malo pre kod isticanja iz suda.

Množenjem brzine v_s sa površinom preseka struje, jednakom bh_s , dobija se proticaj:

$$Q = bh_s v_s = bh_s C_v \sqrt{2g(H_0 - h_s)} \quad (107-24)$$

Sa praktičnog stanovišta pogodnije je proticanje računati sa površinom otvora, jednakom ba . Zato se uzima u račun „koeficijent skupljanja“:

$$C_A = \frac{h_s}{a} \quad (107-25)$$

pa se uvođenjem $h_s = C_A a$ u (107-23), proticaj izrazi sa

$$Q = bC_A a C_v \sqrt{2g(H_0 - h_s)} \quad (107-26)$$

ili

$$Q = C_Q b a \sqrt{2g(H_0 - h_s)} \quad (107-27)$$

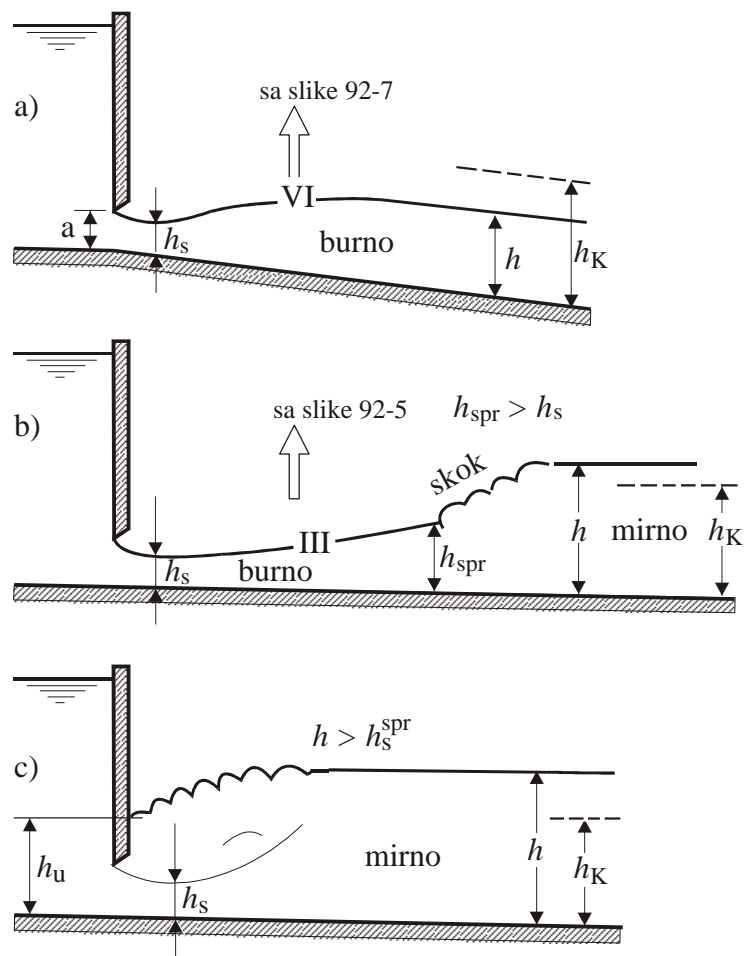
Ovde je, kao kod isticanja iz suda, uveden i koeficijent proticaja $C_Q = C_A C_v$.

Vrednosti za C_v i C_A kreću se otprilike u sledećim granicama: C_v je blizak jedinici, a C_A zavisi od odnosa a/H , i raste za povećanjem toga odnosa, i to od 0,65 za malene vrednosti za a/H , a za $a/H = 0,5$ dostigne otprilike 0,75.

Naglašava se da se prethodno izlaganje odnosi na nepotopljeno isticanje – to je odmah u početku izlaganja naglašeno uslovom (b). U nastavku će se ustanoviti kada je nepotopljenost obezbeđena, a kada nije, kada nizvodni uslovi ne utiču na isticanje, odnosno utiču.

Nepotopljenost je obezbeđena za prikazano pod (a) i (b) na slici 107-6. U prvom slučaju dubina iza ustave h (upravo dubina koja bi tu bila da nema ustave) manja je od kritične ($h < h_K$), a uz to je visina otvora $a < h$. Znači da je iza ustave tečenje burno i dubina sa h_s se popne do neporemećene dubine h . U drugom slučaju – (b) – tečenje iza ustave je mirno ($h > h_K$), a dubina h je manja od dubine koja se sa dubinom h_s spreže u skok ($h < h_s^{\text{SPF}}$). Dakle, dubina je nemoćna da spreči prodor burnog tečenja, ono prodire, dubina se poveća sve do dubine h^{SPF} koja onda sa dubinom h obrazuje hidraulički skok.

Potopljeno isticanje nastaje ako je dubina iza ustave dovoljna da spreči prodor burnog tečenja, tj. ako je $h > h_s^{\text{SPF}}$. To je slučaj (c) na slici 107-6. U potopljenom isticanju voda potopi nizvodnu ivicu ustave



	isticanje	neporemećeno tečenje iza ustave	
a	nepotopljeno	burno	linija nivoa bez skoka
b		mirno	burno tečenje potiskuje mirno - "odbaćeni skok"
c	potopljeno		"skok navučen" na ustavu

Slika 107-6 Uslovi za nepotopljeno/potopljeno isticanje ispod ustave

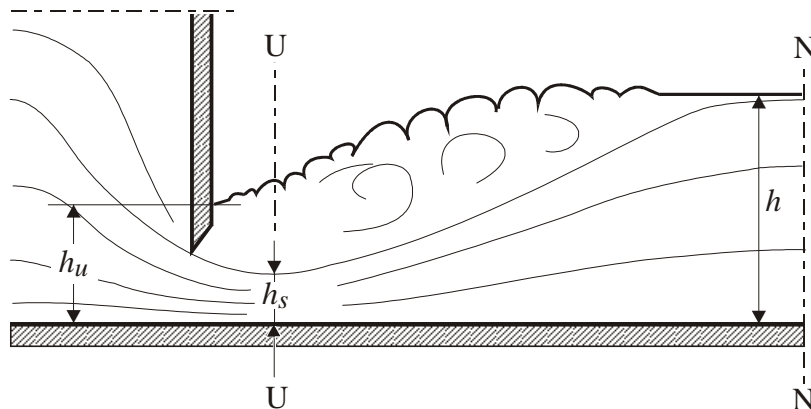
i neposredno iza ustave je dubina h_u (vidi sliku 107–7), koja je veća od dubine h_s mlaza koji ističe, ali je manja od neporemećene dubine h , tj. $h_s < h_u < h$. Ne može se primeniti jednačina (107–24) i umesto nje se primenjuje:

$$Q = bh_s C_v \sqrt{2g(H_0 - h_u)} \quad (107-28)$$

Ova jednačina je napisana pod pretpostavkom da je u preseku neposredno iza ustave hidrostatički raspored pritisaka koji odgovara dubini h_u . Upravo pijeometarska kota za taj presek je u nivou vode sa dubinom h_u . Napisana jednačina je samo zamenila dubinu h_s u (107–23) sa h_u . Za proticanje je merodavan presek sa dubinom h_s iznad koga je vrtložna oblast kojom se ne obavlja proticanje. Primena jednačine (107–27) zahteva da se odredi i dubina h_u , i zbog toga treba raspolagati sa još jednom jednačinom. To je jednačina „uravnoteženja sila” koje u horizontalnom pravcu deluju na masu tečnosti između preseka neposredno iza ustave i preseka gde su prestali uticaji ustave. Ti preseki obeleženi su sa U, odnosno N, na slici 107–7. Ta jednačina glasi:

$$\frac{1}{2}\gamma b h_u^2 + \rho b h_s v_s^2 = \frac{1}{2}\gamma b h^2 + \rho b h v^2 \quad (107-29)$$

U prvom preseku sila pritiska je računata sa dubinom h_u , a komponenta inercijalne „sile” samo za deo preseka gde se tečnost prenosi,



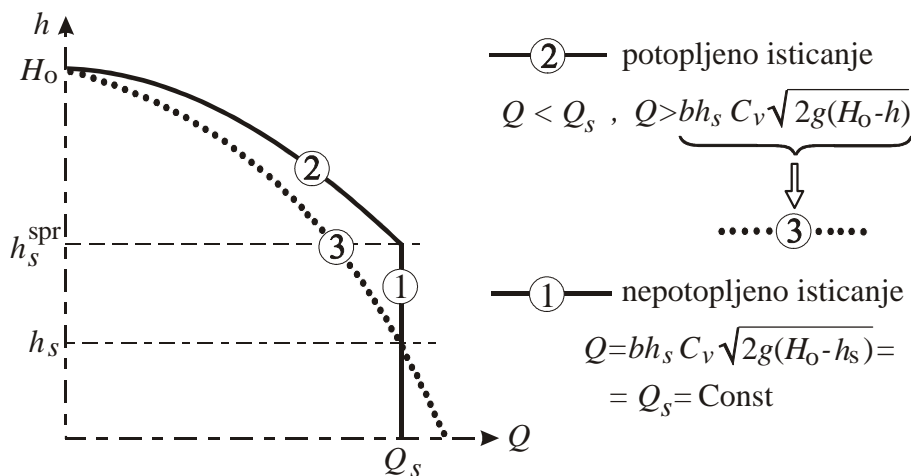
Slika 107–7 Pri potopljenom isticanju ispod ustave dubinom h_u potapa se ističući mlaz dubine h_s ($h_s < h_u < h =$ neporemećena dubina nametnuta nizvodnim graničnim uslovom)

upravo sa dubinom h_s . Komponenta inercijalne „sile” ρQv napisana je uz zamenu Q sa $bh_s v_s$, odnosno bhv . Deljenjem prethodne jednačine sa γ dobija se:

$$\frac{1}{2}h_u^2 + h_s \frac{v_s^2}{g} = \frac{1}{2}h^2 + h \frac{v^2}{g} \quad (107-30)$$

Sistem jednačina (107-28) i (107-30) omogućava rešavanje praktičnih zadataka. Za poznati proticaj Q i za njega poznatu nizvodnu dubinu h i njoj pripadajuću brzinu v , navedeni sistem jednačina određuje dubinu h_u i još jednu veličinu od sledeće dve (H_0 ili h_s), dok je druga zadata. Za zadatu dubinu h_s (a to znači zadatu visinu otvora a ispod ustave, ako je poznat koeficijent skupljanja $C_A = h_s/a$) i njoj pripadajuću brzinu v_s , primenom (107-29) dolazi se do dubine h_u , a onda (107-27) određuje energetska visinu H_0 ispred ustave (a onda je poznata i dubina H). Ili, za zadatu vrednost za H_0 sistem jednačina će pored h_u odrediti i h_s , a to znači potrebnu otvorenost ustave da bi se propustio zahtevani proticaj Q .

Slikom 107-8 pokušalo se da se prikaže uticanje, odnosno neuticanje nizvodnih uslova na isticanje ispod ustave. Na slici se prikazuje zavisnost proticaja Q od neporemećene dubine h nizvodno od ustave (ta



Slika 107-8 Zavisnost proticaja Q od neporemećene dubine h iza ustave pri istoj energetska visini ispred ustave ($H_0 = \text{const}$) i istoj dubini h_s mlaza koji ističe

dubina bi bila i na mestu ustave ako bi se ustava podigla iznad vode), upravo na slici je grafički prikaz funkcije $Q = Q(h)$, a za konstantne vrednosti H_0 i h_s . Pošto se ne menja dubina h_s ni energetska visina H_0 ispred ustave, koeficijent skupljanja se ne menja, pa $h_s = \text{const}$ znači i da je visina otvora $a = \text{const}$.

Dok je $h < h_s^{\text{spr}}$, prema objašnjenju uz sliku 107–6b isticanje je nepotopljeno i proticaj se računa jednačinom (107–24) koja daje $Q = \text{const}$ za konstantne vrednosti za H_0 i h_s . Kada dubina h nadvisi h_s^{spr} isticanje je potopljeno (slika 107–6c) i treba računati jednačinom (107–28). Pošto je $h_u < h_s$ ta jednačina će dati proticaj veći nego da se računa sa h (umesto h_u), pa se za proticaj može napisati:

$$Q > bh_s C_v \sqrt{2g(H_0 - h)} \quad (107-31)$$

Proticaj koji bi bio jednak desnoj strani ove nejednačine grafički je prikazan tačkastom linijom na slici 107–8. To je omogućilo da se prikaže kako otprilike izgleda zavisnost proticaja Q od neporemećene dubine h za potopljeno isticanje.

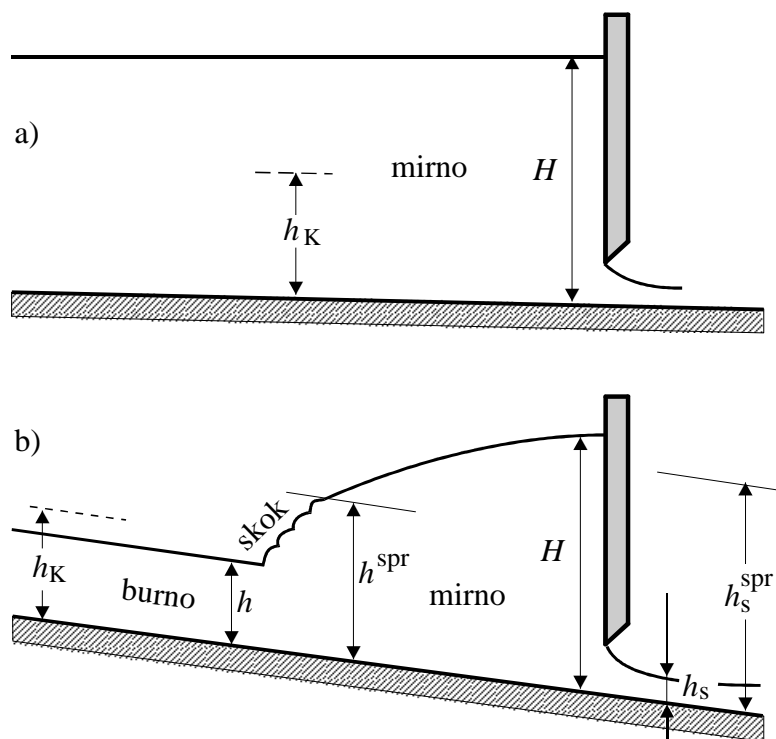
* * *

Raspraviće se uticaj ustave na tok ispred nje.

Ako je tečenje bez dejstva ustave (ona je podignuta iznad vode) mirno (dubina veća od kritične), pritvaranje ustave podiže nivo i ispred nje je mirno tečenje usporeno, a dubine se računaju uzvodnim smerom od dubine H ispred ustave (sl. 107–9a). Ta dubina je određena sračunatom visinom H_0 , koja se za zadat proticaj Q sračuna jednačinom (107–24) ako je isticanje nepotopljeno, odnosno jednačinom (107–28) ako je potopljeno.

Ako bi tečenje bez uticaja ustave bilo burno, ustava zaustavlja burno tečenje i preobraća ga u mirno (sl. 107–9b). Neporemećeno burno tečenje ima dubinu h , a pritvaranjem ustave dubina iza nje je h_s , pa je $h_s < h$. Na slici 107–5a prikazan je prelaz sa dubine h_s na dubinu h . Na osnovu dubine h_s , primenom (107–24) sračuna se dubina H ispred ustave. Da bi se zaista ostvarilo malo pre rečeno, da se burno tečenje zaustavlja pre ustave, potrebno je da je:

$$H > h^{\text{spr}} \quad (107-32)$$



Slika 107–9 Uticaj ustave na uzvodni mirni (a) i burni (b) tok

Sa h^{spr} je označena dubina koja se sa dubinom h spreže u hidraulički skok, pa prethodni izraz kazuje da je dubina H sposobna da zaustavi burno tečenje.

Dokaz da se ostvaruje napisano prethodnom nejednačinom je sledeći. Umesto upoređivanja energije, upoređiće se specifična energija e , jer se radi o bliskim presecima, pa je zanemarljiva razlika u kotama dna. Ostvaruje se:

$$e(H) > e(h_s), \quad e(h_s) > e(h_s^{\text{spr}}), \quad e(h_s^{\text{spr}}) > e(h^{\text{spr}})$$

Prva nejednačina iskazuje da je energija za dubinu H (ispred ustave) veća od energije za dubinu h_s (zbog gubitka energije između preseka ispred i iza ustave).

Druga nejednačina izražava da je energija ispred skoka veća od energije iza skoka (jer se u skoku gubi energija), jer bi se skok mogao uspostaviti od dubine h_s do h_s^{spr} .

Treća nejednačina napisana je na osnovu poznate zakonitosti da je dubina iza skoka veća ako je dubina ispred njega manja (a ovde je $h_s < h$).

Sve tri nejednačine dovode do:

$$e(H) > e(h^{\text{spr}})$$

Kako se radi o specifičnim energijama za dubine veće od kritične, veća energija odgovara većoj dubini, pa se na kraju zaključuje da je:

$$H > h^{\text{spr}}$$

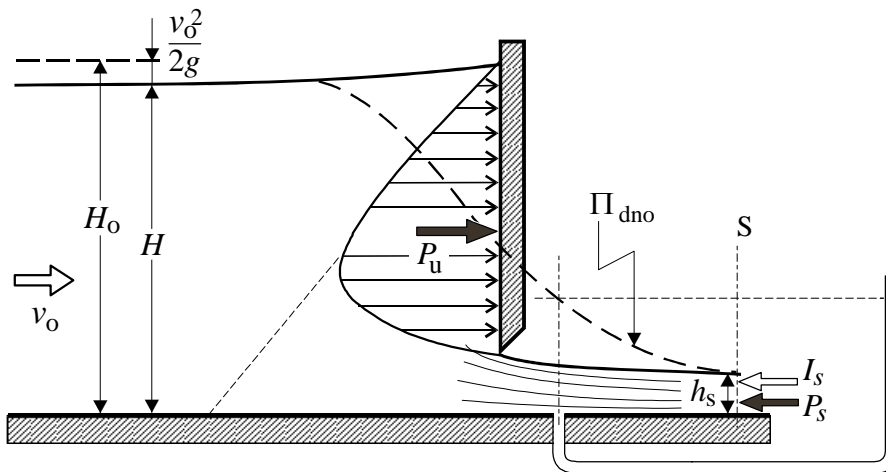
a to je unapred napisano sa (107–32), a sada je i dokazano.

U slučaju „b” sa sl. 107–6 do hidrauličkog skoka dolazi iza ustave, a u slučaju „a”, na koji se odnosi i slika 107–9b, skok je ispred ustave. Utvrđivanje mesta skoka računa se kako je objašnjeno uz sliku 105–16.

* * *

Na slici 107–10 prikazano je kako otprilike izgleda raspored pritiska na ustavu i na dno.

Uz ustavu brzine su zanemarljive, izuzevši blizinu otvora, gde pritisci napuštaju hidrostatičku zakonitost, na ivici otvora pritiska nema.



Slika 107–10 Pritisci na ustavu i dno u njenoj blizini

Slikom je učinjen pokušaj da se prethodno navedeno iskoristi za grafički prikaz pritisaka, a oščenjena površina predstavlja opterećenje na ustavu. Ta površina je određena silom P_u kojom ustava deluje na tečnost odnosno silom kojom tečnost pritiskuje ustavu. Do sile P_u kojom ustava deluje na tečnost dolazi se jednačinom „uravnoteženja sila” koje deluju na masu tečnosti između preseka za koje je napisana jednačina (107–21):

$$(P + I)_H = (P + I)_s + P_u \quad (107-33)$$

Sile P i I su sile pritiska i komponente inercijalne „sile” u preseccima gde su dubine H , odnosno h_s . Sile pritiska računaju se pod pretpostavkom hidrostatičkog rasporeda pritisaka po preseku, a komponente inercijalne „sile” izražene su na uobičajeni način:

$$I_H = \rho Q v_0 = \rho b H v_0^2 \quad I_s = \rho Q v_s = \rho b h_s v_s^2 \quad (107-34)$$

U prethodnom proticaju Q je zamenjen sa bHv_0 , odnosno $bh_s v_s$ (b = širina kanala).

Ako se sile u (107–33) zamene prema neposredno napisanom sa (107–34) i potom se jednačina подели sa γb dobija se:

$$\frac{P_u}{\gamma b} = \frac{H^2}{2} + \frac{H v_0^2}{g} - \frac{h_s^2}{2} - \frac{h_s v_s^2}{g} \quad (107-35)$$

Leva strana ove jednačine jednaka je oščenjenoj površini na slici 107–10, jer se kod ravanskog zadatka sila dobija množenjem površine (koja predstavlja silu) sa γb . Tako je bilo i kod prikazivanja opterećenja dna suda iz koga tečnost ističe – slika 107–3.

Da bi se dobio raspored pritiska na ustavu, a time bi se utvrdila i napadna tačka sile, trebalo bi raspolagati sa dopunskim saznanjima. Da bi se napisala jednačina momenta svih sila na ustavu (iz koje bi se odredila napadna tačka sile P_u) morao bi se znati raspored pritisaka na dno. Sila pritiska kojom dno deluje na posmatranu masu tečnosti mora da bude jednaka težini te mase, jer se vertikalne sile međusobno uravnotežuju. Napadne tačke te dve sile nisu, međutim, na istom pravcu, što se vidi iz slike 107–10 gde je nacrtano kako otprilike izgleda piježometarska linija za deliće na dnu (Π_{dno}). Površina ispod te linije (do dna) predstavlja silu pritiska, i površina ispod linije nivoa predstavlja težinu. Te dve površine međusobno su jednake, ali im težišta nisu u istoj tački, a u

težištima su napadne tačke. Dakle, vertikalne sile stvaraju momenat i on sa momentima horizontalnih sila ulazi u jednačinu momenata iz koji se određuje napadna tačka sile.

Da linija Π_{dno} izgleda kako je nacrtana na slici 107–10 može da posluži sledeće objašnjenje:

U preseku sa dubinom H strujanje je paralelno i pravolinijsko sa hidrostatičkim rasporedom pritiska (sa piježometarskom kotom u nivou tečnosti). Isto je i u preseku sa dubinom h_s . Približavanjem ustavi sa uzvodne strane, brzine u donjem delu preseka se naglo povećavaju, dok se brzine u gornjem delu smiruju. Prosečna brzina u preseku sve je veća i stoga je prosečna piježometarska kota za presek sve manja, a to se postiže smanjivanjem te kote za deliće pri dnu, jer je za deliće u blizini nivoa u samom nivou. To se na slici 107–10 prikazalo spuštanjem kote za Π_{dno} .

Neposredno iza ustave strujanje je zakrivljeno, a linija nivoa se može smatrati kao strujnica na unutrašnjoj strani krivine, a za nju je piježometarska na njoj samoj.

U istom preseku piježometarska kota raste od unutrašnje strane krivine, a to znači da je na dnu iznad nivoa (a tako je i na sl. 107–10). Čim strujanje postane pravolinijsko i paralelno ista piježometarska kota je za ceo presek, pa i za deliće na dnu, a ona je u nivou – tako je nacrtano za presek sa dubinom h_s .

Pri crtanju linije Π_{dno} imao se u vidu prethodno objašnjeni uslov da površina ispod te linije mora da bude jednaka površini ispod linije nivoa, što je u skladu sa ranijim objašnjenjem.

III PRIMENA DIMENZIONALNE ANALIZE

Za primenu dimenzionalne analize na isticanje iz suda može se koristiti napisano za dijafragmu u Poglavlju 103, gde je bezdimenzionalna veličina koja povezuje proticaj Q , karakterističnu visinsku razliku H i karakterističan poprečni presek A struje, uz sadejstvo gravitacionog ubrzanja g , napisana na levoj strani izraza (103–11). Prema tom izrazu ta bezdimenzionalna veličina zavisi od graničnih uslova, izraženih bezdimenzionalnim veličinama, napisanih simbolično sa Ko , i od Re -broja. Iza toga izraza pokazano je da se njegova leva strana, shodno osnovnoj

jednačini za dijafragmu (103–10), može zameniti sa $1/2C_Q^2$, pa se došlo do funkcije $C_Q = C_Q(Ko, Re)$.

Kod isticanja iz suda merodavne veličine su proticaj Q , visina isticanja H , presek otvora A , a proces se odvija pod dejstvom težine, čiji je predstavnik gravitaciono ubrzanje, pa se i ovde povezuju 4 iste veličine (Q, H, A, g) kao i kod dijafragme, i onda obrazuju istu bezdimenzionalnu veličinu, napisanu kao leva strana izraza (103–11) i koja je ovde, upoređujući sa (107–10), jednaka $1/2C_Q^2$. Međutim, ovde C_Q zavisi ne samo od Ko i Re , jer se mora upisati i We -broj, pošto na isticanje iz suda utiče i površinski napon (utiče kapilarnost). Dakle, može se napisati:

$$C_Q = C_Q(Ko, Re, We) \quad (107-36)$$

Ako se isticanje odvija pod premoćnim uticajem koga nameće sam otvor, a zanemarljivi su uticaji ostalih graničnih uslova, u Ko u prethodnom izrazu ulazi samo geometrijski opis otvora (razume se, izražen bezdimenzionalnim veličinama). To će se zaista i ostvariti ako je otvor dovoljno udaljen od nivoa vode i od zidova suda koji bi usmeravali isticanje, i ako je uz to i površina otvora malena u odnosu na presek suda.

Za isticanja prikazana na slikama 107–1 i 107–2 pretpostavlja se da su navedeni uslovi ispunjeni pa onda u Ko ulazi samo geometrijski opis otvora.

Svi primeri oštroičnog otvora (sl. 107–1a) međusobno su geometrijski slični (dovoljno je da oštra ivica odbacuje mlaz), pa se C_Q onda svodi na niz konstanti koje važe za sve oštroične otvore. Prema tome za sve takve otvore C_Q ima konstantnu vrednost, ako se uz to pretpostavi (i to treba naglasiti) da su Re i We zanemarljivo uticajni. To će se i ostvariti u pretežnom broju praktičnih primera isticanja vode, jer su presek otvora i brzina isticanja obično dovoljno veliki da viskoznost i površinski napon zanemarljivo utiču na isticanje. Ranije, uz opis koji prati navedenu sliku 107–2a rečeno je da se oštroični otvor može računati sa $C_Q = 0,6$ (konstantna vrednost).

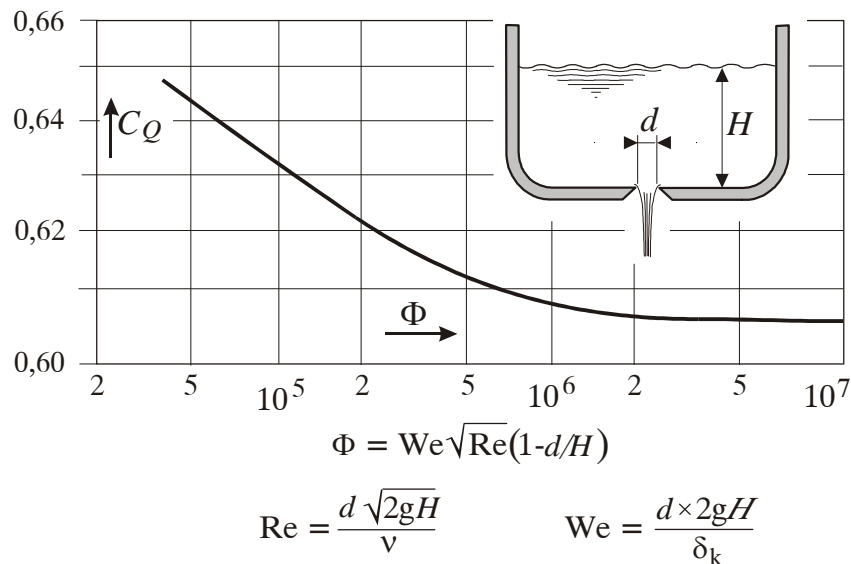
Za otvor sa naglavkom (sl. 102–2) može se na isti način objasniti da se C_Q svodi na konstantnu vrednost za sve takve otvore, jer su svi geometrijski slični. Dužina naglavka jednaka trostrukom prečniku dovoljna je da se mlaz sužen na početku naglavka pre njegovog kraja proširi na ceo presek, pa je presek izlaznog mlaza jednak preseku naglavka (koeficijent $C_A = 1$). Ranije je napisano da se može za sve

otvore sa naglavkom računati sa konstantnom prednošću C_Q jednakom približno 0,8.

Kod oblikovanog otvora (sl. 102–2c), on se oblikuje tako da nema skupljanja mlaza, a gubitak energije se svodi na zanemarljivu meru tako da je C_Q približno jedinica.

O uticaju Re - i We -broja može se steći utisak iz prikazanog na slici 107–11. Koeficijent isticanja C_Q zavisi od Re , We , d/H (d = prečnik kružnog otvora, H = visina isticanja). Brojevi Re i We su izraženi na način kako je napisano na slici – u stvari karakteristična dužina je d , a karakteristična brzina $\sqrt{2gH}$ (to je brzina isticanja za idealan fluid). Sve tri veličine od kojih zavisi C_Q povezane su u jednu, u Φ , što je uprostilo međusobnu vezu veličina, ali se mora pravdati eksperimentalnim rezultatima koji su omogućili tako prostu vezu. Otvor je na dnu suda, a bočni zidovi suda su dovoljno udaljeni od otvora da presek suda ne utiče na proticaj.

Račun sa $C_Q = \text{const} = 0,61$, uz prihvatljivo odstupanje od $\pm 1\%$ obuhvata oblast $\Phi > 3 \times 10^5$. (To se zaključuje iz prikazanog na slici 107–11.) Vrednosti za kinematičke koeficijente viskoznosti i površinskog napona (ν, δ_k) za vodu (uz uobičajene temperature) napisani su



Slika 107–11 Zavisnost koeficijenta isticanja C_Q za kružni otvor na dnu suda

sa (106–70). Račun sa tim vrednostima, za $d = 0,02$ m i $H > 0,30$ m, daje ϕ veće od 3×10^5 , što znači da za tako maleni otvor može se za visine isticanja veće od 30 cm računati sa $C_Q = 0,61$. Za veće otvore visina H može da bude čak i manja.

U niz navrata (suženje cevi ili kanala) navedeno je da koeficijent C_A skupljanja iznosi 0,62 za najizrazitije suženje struje, a takvo se može shvatiti i u posmatranom slučaju isticanja. Uz to je koeficijent umanjnjenja brzine C_v blizak jedinici pa se za $C_A C_v = C_Q$ može uzeti 0,61, koliko je malo pre navedeno. Ranije uz sliku 107–2a pomenuta je približna (i zaokružena) vrednost $C_Q = 0,6$.

* * *

Za ravansko isticanje ispod ustave, uticaji Re - i We - broja su neznatni pa je $C_Q = C_Q(a/H)$, jer u bezdimenzionalni opis otvora ulazi samo a/H (a = visina otvora, vidi sl. 107–3). Ako pravougaoni kanal u koga je celom njegovom širinom smeštena ustava nije dovoljno širok (da bi se strujanje moglo proučavati kao ravansko), C_Q zavisi ne samo od a/H nego i od b/H , gde je b širina kanala. Za ravansko isticanje i za oštroični otvor rečeno je da se C_Q kreće od približno 0,65 do 0,75 za a/H od veoma malene vrednosti do 0,50.

IZMENA ENERGIJE IZMEĐU FLUIDA I ČVRSTE POKRETNE GRANICE – HIDRAULIČKE MAŠINE

Dosadašnja razmatranja, kroz sva prethodna poglavlja, odnosila su se na struju fluida gde nema prenosa energije sa fluidne struje na njen omotač, ili sa omotača na struju, gde je omotač čvrsta nepokretna površina koja ne može obaviti rad (jer se ne kreće), pa ni preneti energiju. Deo omotača može da bude i slobodna površina tečnosti (ona se kreće), pa voda predaje energiju vazduhu. Međutim, ta predaja energije je zanemarljiva u odnosu na izgublenu energiju u tečnosti, pa se o toj predaji energije i ne vodi računa. O tome je bilo reči u nekoliko navrata u ranijim razmatranjima.

Predmet narednih izlaganja biće primeri gde je njihova suština baš u prenošenju energije između fluida i čvrste granice.

Pumpa ili *crpka* smeštena je između dva preseka struje – slika 108–1 – predaje energiju fluidu, pa se energije u struji fluida povećava. Po jedinici težine povećava se za $E_{II} - E_I = H$. Isto tako bi se povećala energija da se masa fluida podigne za visinu H . Stoga se H naziva „visina dizanja”.

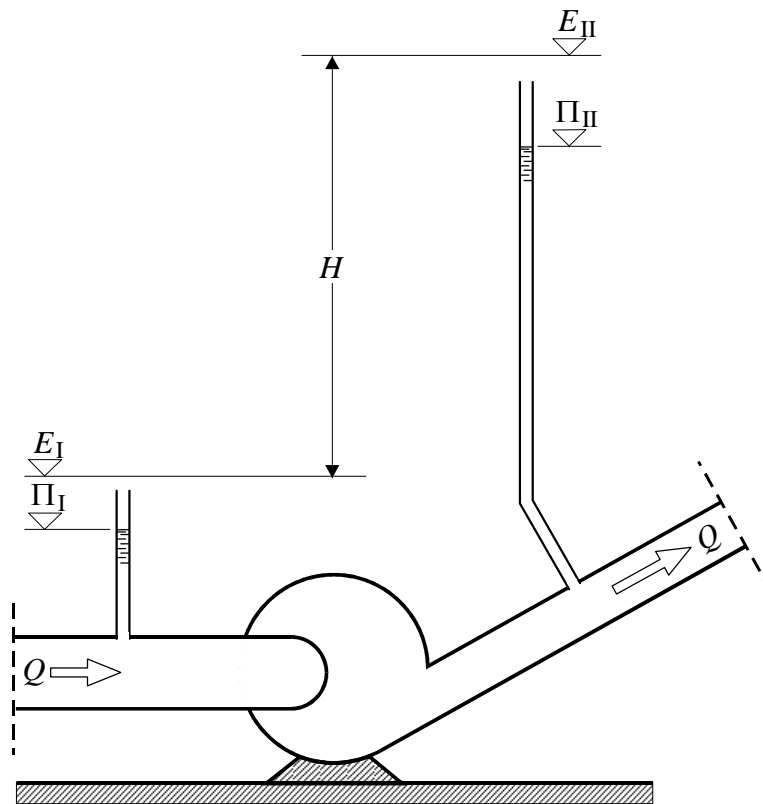
Energija u jedinici vremena je snaga. U jedinici vremena podigne se težina γQ (γ = specifična težina, Q = proticaj) za visinu H , pa je snaga koju koristi fluid:

$$S = \gamma Q H \quad (108-1)$$

i ona je posledica delovanja pumpe koja troši snagu S_p , veću od snage S , jer se jedan deo snage pumpe ne može iskoristiti zbog unutrašnjih gubitaka energije u njoj, u mehanizmu pumpe, i spoljnih u fluidu od preseka (I) do preseka (II), gde ulazi i gubitak u fluidu unutar pumpe.

Može se, prema tome, napisati:

$$S = \eta_p S_p \quad (108-2)$$



Slika 108-1 Pumpa podiže kotu energije za visinu dizanja H

gde je $\eta_p < 1$ koeficijent iskoristivosti pumpe. Jasno je da je $\eta_p > 1$.

Pumpa prima snagu od motora koji je pokreće, a on mora da troši snagu S_m koja je veći od snage pumpe S_p , jer se jedan deo energije izgubi u motoru. Stoga se piše:

$$S_p = \eta_m S_m \quad (108-3)$$

gde je $\eta_m =$ koeficijent iskoristivosti motora ($\eta_m < 1$).

Na osnovu (108-2) i (108-3) piše se:

$$S_m = \frac{1}{\eta_m} \frac{1}{\eta_p} S = \frac{1}{\eta} S \quad (108-4)$$

Ovde je $\eta = \eta_m \eta_p$ koeficijent korisnog dejstva pumpnog postrojenja.

Ako se u (108-4) uvrsti snaga S prema (108-1) dobija se:

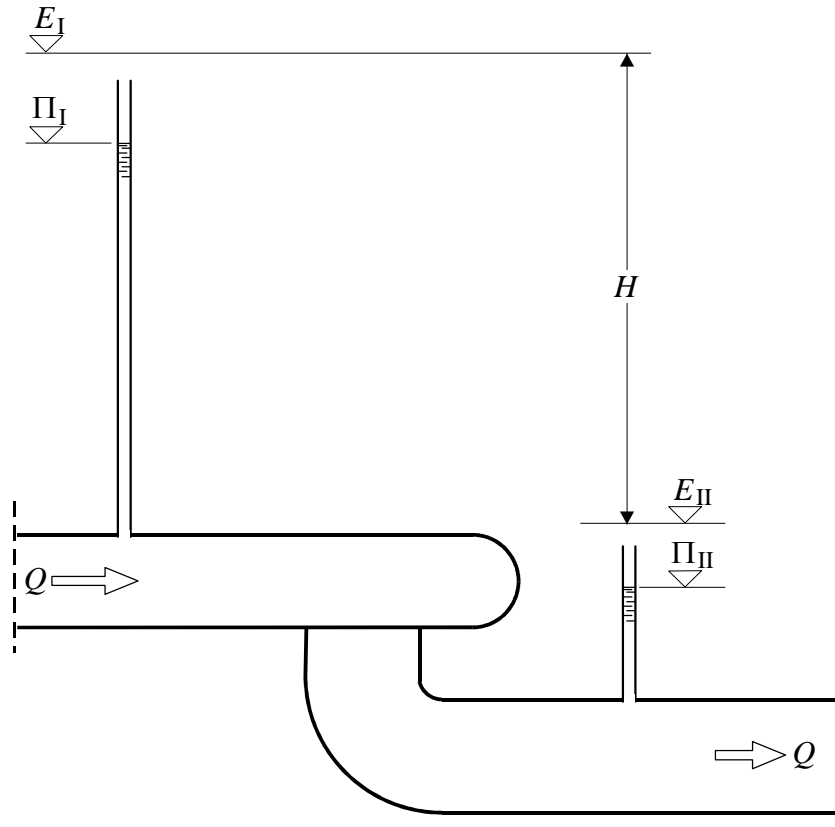
$$S = \frac{1}{\eta} \gamma Q H$$

Snaga pumpnog postrojenja

(108-5)

* * *

Turbina je hidraulička mašina sa prenošenjem energije obrnutim smerom od prenošenja kod pumpe tj. prenos je sa fluida na turbinu. Smanjenje energije, po jedinici težine, u fluidu iznosi $H = E_I - E_{II}$ (vidi sl. 108-2). Ovde se visinska razlika H naziva „spuštanje” ili češće „pad”. Smanjenje energije u jedinici vremena izražava snaga $S = \gamma Q H$.



Slika 108-2 Turbina dovodi do pada H kote energije

Turbina predaje generatoru (koji proizvodi struju) snagu S_t , koja je nešto manja od snage S oduzete fluidu, pa je $S_t = \eta_t S$, gde je $\eta_t < 1$. Iz generatora izlazi snaga S_g koja je nešto manja od snage koju mu je predala turbina, pa je $S_g = \eta_g S_t$. Iz ovih navoda proizilazi:

$$S_g = \eta_g S_t = \eta_g \eta_t S = \eta S \quad (108-6)$$

Sa $\eta = \eta_g \eta_t$ označen je koeficijent korisnog dejstva agregata. Ako je u prethodnom izrazu S zamenjen sa γQH dobija se:

$S_g = \eta \gamma QH$ <p>Snaga turbinskog postrojenja</p>
--

 (108-7)

LITERATURA

- Агроскин И., Димитриев Г., Пиколов, Ф., *Гидравлика*, Ленинград 1964
- Chow V. T., *Open-Channel Hydraulics*, New York 1959
- Comolet R., *Mecanique experimentale des fluides*, Paris 1963
- Чертоусов М., *Гидравлика*, Москва 1962
- De Marchi G., *Idraulica*, Milano 1942
- Henderson F. M., *Open Channel Flow*, New York 1966
- Hinze J., *Turbulence*, New York-London 1959
- Ландау Л., Лифшиц Е., *Механика сплошных сред*, Москва 1954
- Латышенков А., Лобачев В., *Гидравлика*, Москва 1956
- Лоицянский Л., *Механика жидкости и газа*, Москва 1970
- Prager W., *An Introduction to Mechanics of Continua*, New York 1961
- Prandtl L., *Führer durch Strömungslehre*, Braunschweig 1948
- Rouse H., *Advanced Mechanics of Fluids*, New York 1959
- Rouse H., *Hydraulics, Mechanics of Fluids – Engineering Education*, New York 1971
- Rouse H., Ince S., *Hystory of Hydraulics*, Iowa City 1957
- Schlag A., *Hydraulique generale*, Paris 1957
- Schlichting H., *Grenzschicht–Theorie*, Karlsruhe 1951
- Streeter V., *Fluid Mechanics*, New York-London 1957

Prilog 1 Vrednosti Manningovog koeficijenta hrapavosti n [$\text{m}^{-1/3}\text{s}$]

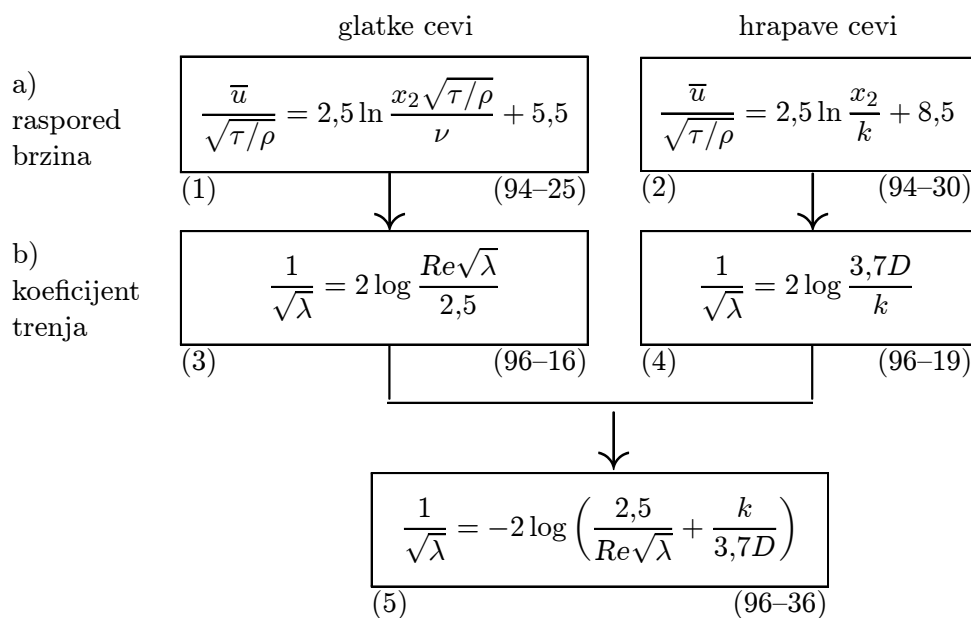
Opis površine	Stanje površine			
	vrlo dobro	dobro	obično	rđavo
1 Mesingane i staklene cevi	0,009	0,013	0,014	0,015
2 Drvene cevi	0,010	0,011	0,012	0,013
3 Čelične cevi (bez šava)	0,010	0,011	0,013	–
4 Livene cevi premazane katranom	0,011	0,012	0,013	–
5 Obične livene cevi	0,012	0,013	0,014	0,015
6 Crne gvozdene cevi	0,012	0,013	0,014	0,015
7 Pocinkovane gvozdene cevi	0,013	0,014	0,015	0,017
8 Obične keramičke drenažne cevi	0,011	0,012	0,014	0,017
9 Kanalizacione cevi sa glazurom	0,010	0,013	0,015	0,017
10 Betonske cevi	0,012	0,013	0,015	0,016
11 Kovane čelične spiralne cevi	0,013	0,015	0,017	–
12 Površina od čistog cementa	0,010	0,011	0,012	0,013
13 Opeke sa glazurom	0,011	0,012	0,013	0,015
14 Premaz cementnim malterom	0,011	0,012	0,013	0,015
15 Zid od opeke u cementnom malteru	0,012	0,013	0,015	0,017
16 Kanal u betonu	0,012	0,014	0,016	0,018
17 Obloga od tesanog kamena	0,013	0,014	0,015	0,017
18 Zid od lomljenog kamena u cementu	0,017	0,020	0,025	0,030
19 Suv zid od od lomljenog kamena	0,025	0,030	0,033	0,035
Drveni žljebovi:				
20 od rendisanih dasaka	0,010	0,012	0,013	0,014
21 od nerendisanih dasaka	0,011	0,013	0,014	0,015
22 od dasaka sa prikovanim dugama	0,012	0,015	0,016	–
Polukružni metalni žljebovi:				
23 čisti	0,011	0,012	0,013	0,015
24 zarđali	0,0225	0,025	0,0275	0,030
Kanali i rečni tokovi:				
25 zemljani kanali pravilnog oblika	0,017	0,020	0,0225	0,025
26 krivudavi sa laganim tokom	0,0225	0,025	0,0275	0,030
27 zemljani iskopani bagerima	0,025	0,0275	0,030	0,033
28 čisto usečeni u steni, pravilnog oblika	0,025	0,030	0,033	0,035
29 zemljano dno i kosine ozidane kamenom	0,028	0,030	0,033	0,035
30 grubo dno od kamena sa zaraslim zemljanim kosinama	0,025	0,030	0,035	0,040
31 grubo usečeni u steni sa nepravilnim presekom	0,035	0,040	0,045	–

Primedbe:

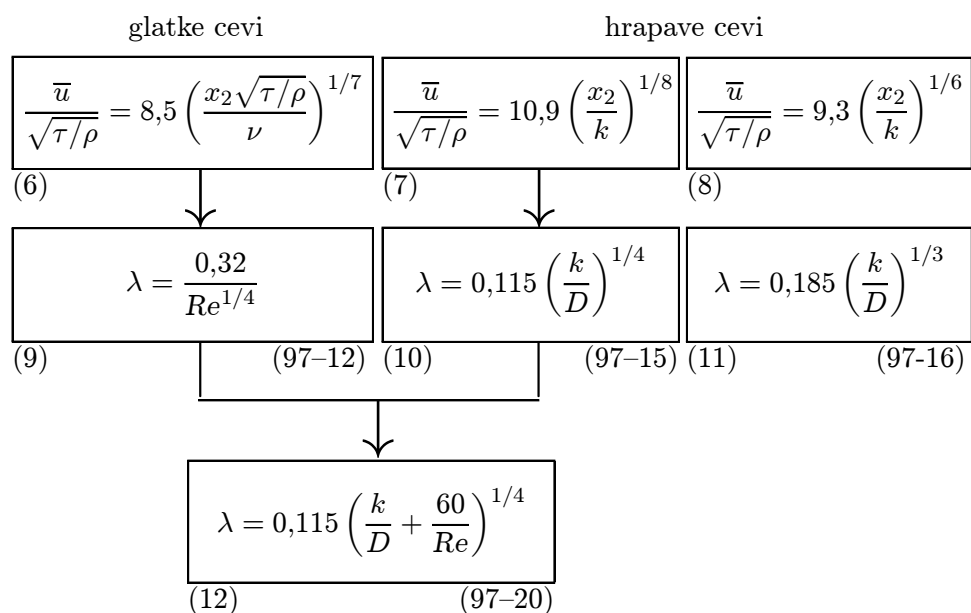
1. Odnos između maksimalne i minimalne vrednosti koeficijenta hrapavosti n za granične površine provodnika vode od istog materijala kreću se između 1,25 i 1,50 za pretežan broj navedenih površina (za 25 od ukupno 31). Kako je isti odnos između maksimalnog i minimalnog proticaja koji se dobija računom (za isti presek i isti nagib linije energije), izbor koeficijenta hrapavosti ima presudan uticaj na valjanost rezultata hidrauličkog računanja, a taj izbor ostavljen je proceni okolnosti u kojima će se objekat graditi i održavati (da li će to biti „rđavo”, „dobro” ili čak „vrlo dobro”).
2. Prikazani spisak je jedan od starijih i kraćih koji prate Maningovu formulu. Duži, i noviji spiskovi sa više opisa materijala, i više razvrstavanja, ne doprinose pouzdanosti u izboru koeficijenta hrapavosti, jer se svuda daje prilično veliki raspon između minimalne i maksimalne preporučene vrednosti.
3. Veza između Maningovog koeficijenta n i apsolutne hrapavosti k izražava (91–35), sa $n = k^{1/6} \sqrt{0,29/(2g)}$. Ta veza može da posluži za sledeće zaključke:
 - (a) Vrednosti za n manje od $0,011 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ nisu preporučljive, jer toj vrednosti odgovara $k = 0,5 \text{ mm}$, a za istu vrednost, shodno (91–40) brzina bi trebalo da bude veća od otprilike 2 m/s , da bi ušlo u kvadratnu zakonitost otpora u kojoj se može primeniti Maningova formula. (Napominje se da se ponegde navodi za neke materijale čak $n = 0,008 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$).
 - (b) Vrednosti $n = 0,035 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ odgovara otprilike $k = 0,6 \text{ mm}$, pa je za veće vrednosti za n veza između n i k neprikladna (za $n = 0,05 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$, dobija se k oko 5 m), pa se ne može otpor dobijen po Maningovoj formuli upoređivati sa onim koji daje jednolika hrapavost. Otpor daju prepreke drukčijih osobina. Na primer, za obrasle površine daje se n od $0,035$ do $0,060 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ za retko džbunje i drveće, zimi, a od $0,040$ do $0,080 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ leti, dok se za gusto džbunje navodi n od $0,045$ do čak $0,110 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$, zimi, a leti od $0,070$ do čak $0,160 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$.

Prilog 2 Pregled rasporeda brzina i koeficijenta trenja

Logaritamske zakonitosti



Eksponecijalne zakonitosti



Primedbe:

- obrazac (9) daje približno iste rezultate kao (3) za Re brojeve od $5 \cdot 10^3$ do 10^5
- obrazac (10) daje približno iste rezultate kao (4) za relativne hrapavosti od $1/100$ do $1/10000$, a obrazac (11) za k/D od $1/20$ do $1/1000$
- obrazac (11) daje približno iste rezultate kao Manningova formula ako se koeficijent hrapavosti uzme $n = k^{1/6} \sqrt{0,29/(2g)}$

Prilog 3 Vrednosti veličina koje određuju fizičke karakteristike vode

Temperatura T [°C]	Specifična težina γ [kN/m ³]	Gustina ρ [kg/m ³]	Modul elastičnosti $E/10^6$ [kPa]	Dinamički koeficijent viskoznosti $\mu \times 10^3$ [Pa s]	Kinematički koeficijent viskoznosti $\nu \times 10^6$ [m ² /s]	Koeficijent površinskog napona δ [N/m]
0	9,805	999,8	1,98	1,781	1,785	0,0756
5	9,807	1000,0	2,05	1,518	1,519	0,0749
10	9,804	999,7	2,10	1,307	1,306	0,0742
15	9,798	999,1	2,15	1,139	1,139	0,0735
20	9,789	998,2	2,17	1,002	1,003	0,0728
25	9,777	997,0	2,22	0,890	0,893	0,0720
30	9,764	995,7	2,25	0,798	0,800	0,0712
40	9,730	992,2	2,28	0,653	0,658	0,0696
50	9,689	988,0	2,29	0,547	0,553	0,0679
60	9,642	983,2	2,28	0,466	0,474	0,0662
70	9,589	977,8	2,25	0,404	0,413	0,0644
80	9,530	971,8	2,20	0,354	0,364	0,0626
90	9,466	965,3	2,14	0,315	0,326	0,0608
100	9,399	958,4	2,07	0,282	0,294	0,0589