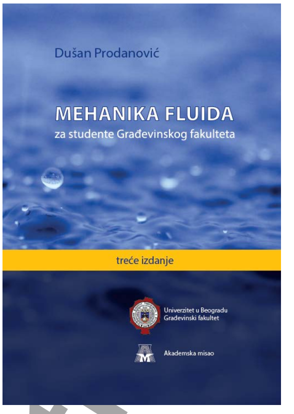


Glava 5

Dimenzionalna analiza, sličnost i modeli

U prethodnoj glavi 4, *Osnove dinamike fluida*, izvedene su jednačine održanja u diferencijalnom obliku. Te jednačine su u opštem slučaju nerešive i za svaki konkretan zadatak Mehanike fluida potrebna su uprošćavanja i provere kroz eksperimente na modelu ili na stvarnom sistemu. Rešenje strujanja realnog fluida je najčešće kombinacija osmišljenog eksperimenta i primene uprošćenih jednačina u tumačenju dobijenih eksperimentalnih podataka.

Kao i u drugim inženjerskim oblastima (mašinstvo, elektrotehnika, konstruktivni deo građevine), eksperimenti su sastavni deo oblasti Mehanike fluida te je neophodno poznavati pravila kako se određeni problem koji se izučava, iz realnog života (ili iz *prirode*) može preneti u laboratoriju, kako napraviti *model*, koje veličine na modelu treba eksperimentalno izučiti i kako ih posle tumačiti u realnom sistemu. Cilj svakog eksperimenta je da se dobiju opšta rešenja, primenljiva ne samo na jednom, konkretnom problemu, već uporediva i sa drugim, sličnim sistemima i eksperimentima koje su sproveli drugi istraživači.

U ovoj glavi će se prvo dati osnove *dimenzionalne analize*, oblasti koja proučava veličine i dimenzije, kao i odnose između njih. Dimenzionalna analiza nije isključivo vezana uz Mehaniku fluida već se može primeniti u bilo kojoj oblasti tehnike. Upoređujući dimenzije veličina, koje učestvuju u fenomenu koji se izučava, određuju se međusobne zavisnosti, a time se omogućava uspostavljanje novog *dimenzionalnog sistema*. U tom novom dimenzionalnom sistemu, *pravi se fizički model* uz postavljanje uslova *zadovoljenja sličnosti* strujanja i odnosa dominantnih uticaja. Rezultati merenja i zaključci dobijeni na modelu se zatim *preslikavaju* na prirodu.

5.1 Dimenzionalna analiza

5.1.1 Uvod u dimenzionalnu analizu

Dimenzionalna analiza je oblast koja se bavi analizom dimenzija veličina koje učestvuju u pojavi koja se istražuje. Analiza se zasniva na pretpostavci da *veza između veličina koje učestvuju u pojavi a koja unapred nije poznata i tek treba da se istraži, mora biti ista kao i veza između njihovih dimenzija.* Drugim rečima, analizirajući veze između dimenzija veličina koje učestvuju u istraživanoj pojavi, istraživači dobijaju i moguće veze između veličina bez detaljnijeg ulaženja u same jednačine kojima se opisuje pojava.

Dimenzionalna analiza je direktno povezana sa korišćenjem dimenzionalnih sistema. U poglavlju 2.1, *Veličine, dimenzionalni sistem i jedinice mere* (na strani 10), data je osnovna definicija pojma *veličina* kao i razlog postojanja dimenzionalnog sistema i potreba da se on propiše, unificira. Međutim, činjenica da je dimenzionalni sistem propisan zakonom, istovremeno znači da on nije optimalan za svaku od izučavanih pojava, te da je često u analizama bolje koristiti neki drugi dimenzionalni sistem.

Primer 5.1.1

Analizira se zapremina flaša na jednoj proizvodnoj liniji. Ispravne flaše treba da budu zapremine $\mathcal{V} = 1{,}50\ \mathrm{dm}^3$ (1,5 L). Merenjem na kraju proizvodne linije, uz poštovanje SI sistema, dobijene su vrednosti $1{,}50; 1{,}52; 1{,}49; 1{,}51; 1{,}48; \ldots\ \mathrm{dm}^3$. Da li radnik na kontroli ima jasan uvid u greške nastale u proizvodnji flaša? Šta ako se ista linija koristi i za proizvodnju flaša od 2 L?

Ako se za prikaz rezultata merenja zapremine umesto SI sistema i dužine kao osnovne veličine koristi očekivana zapremina flaše od 1,5 L tada proizvedene flaše imaju zapremine $1{,}000; 1{,}013; 0{,}993; 1{,}007; 0{,}987 \ldots$ odnosno, radnik na proizvodnoj liniji može odmah videti relativna odstupanja zapremina. Promenom proizvodnog programa sa flaše od 1,5 L na 2 L potrebno je promeniti i dimenzionalni sistem, pa se sada kao jedinica mere uzima očekivana zapremina od 2 L.

Primenom dimenzionalne analize se po pravilu odustaje od standardnog SI dimenzionalnog sistema i prelazi na sistem koji bolje fizički interpretira razmatranu pojavu. Kao rezultat promene dimenzionalnog sistema dolazi do smanjenja broja nezavisno promenjivih veličina čime se omogućuje *jednostavnije skaliranje* problema na *relaciji priroda - model* uz *neophodna zanemarivanja.*

Prilikom izbora novih osnovnih veličina, moraju se ispoštovati tri osnovna pravila:

1. da osnovne veličine budu *međusobno nezavisne* jer ako su međusobno zavisne, onda nisu osnovne veličine i jedna od njih se može predstaviti kao kombinacija ostalih;

2. da budu *karakteristične za fiziku problema koji se izučava* inače se u razmatranom problemu neće smanjiti broj nezavisno promenljivih veličina;

3. osnovne jedinice moraju biti *sveobuhvatne*, moraju omogućavati izražavanje svih ostalih izvedenih veličina preko izabranih osnovnih.

Vrednosti ovako izabranih osnovnih veličina predstavljaju novu *mernu jedinicu*.

Primer 5.1.2

Koje od ponuđenih kombinacija su prihvatljive kao nove osnovne veličine a koje kombinacije nisu i zašto?

Vel. 1	Vel. 2	Vel. 3	Komentar
Masa	Dužina	Površina	Nije dobar izbor jer ne figuriše vreme a dužina i površina su međusobno zavisne veličine
Masa	Vreme	Dužina	U redu
Vreme	Ubrzanje	Dužina	Nije dobar izbor, jer nema mase
Sila	Dužina	Vreme	U redu
Gustina	Protok	Dužina	U redu

U zadacima Mehanike fluida najčešće se kao osnovne veličine usvajaju dužina (čime se opisuje geometrija problema), brzina (da bi se opisalo polje brzina) i gustina (kao nosilac mase).

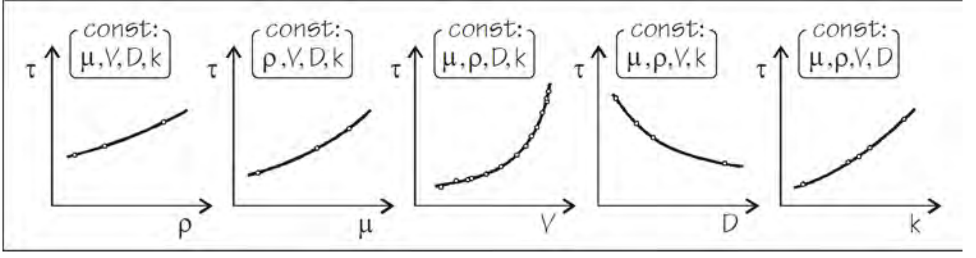
Izborom novog dimenzionalnog sistema se postiže pojednostavljenje u eksperimentalnom izučavanju razmatrane pojave. Ako se, na primer, izučava trenje u kružnoj cevi prilikom jednolikog ustaljenog tečenja (poglavlje 6.1.1 *Koeficijent linijskog gubitka energije*) dobija se da pad energije duž cevi zavisi od tangencijalnog napona (jednačina (6.7) na strani 220):

$$I_e = I_{\Pi} = \frac{\tau}{\rho g R} = \text{Const.} \tag{5.1}$$

U daljem izvođenju je pretpostavljeno da viskoznost fluida i geometrijski uslovi ne utiču na trenje, te je dobijena jednostavna veza gubitka energije i koeficijenta trenja λ. U realnosti je, međutim, tangencijalni napon složena funkcija sledećih veličina:

$$\tau = \varphi(\rho, \mu, V, D, k) \tag{5.2}$$

gde su ρ i μ fizička svojstva fluida, V brzina koja opisuje kinematičnost i D (prečnik cevi) i k (hrapavost zida cevi) geometrijski parametri koji opisuju uslove strujanja. Izučavanje te funkcionalne zavisnosti podrazumeva pravljenje eksperimenta: uspostavljanje ustaljenog strujanja kroz cev konstantnog prečnika D i hrapavosti k, pri čemu se meri pad pritiska na nekom rastojanju L pri tečenju različitih fluida pri različitim brzinama.



Slika 5.1: U $[M, L, T]$ dimenzionalnom sistemu analiza tangencijalnog napona od ostalih zavisnih veličina zahteva veliki broj eksperimenata

Opisani eksperiment bi bio obiman, jer bi zahtevao da se u instalaciji varira samo jedan parametar (slika 5.1), dok se svi ostali zadržavaju konstantnim. Za sve te izmerene rezultate bi se nalazila odgovarajuća veza, da bi se na kraju pokušalo sa formiranjem neke opšte relacije.

Primenjujući dimenzionalnu analizu moguće je odabrati nove osnovne veličine koje su primerenije problemu trenja u cevi. Umesto SI sistema $[M, L, T]$ zgodnije je odabrati sistem gde se osnovne veličine već nalaze u spisku veličina datih u jednačini (5.2). Ako se, na primer, odaberu $[\rho, V, D]$, ostale veličine se mogu izraziti kao njihova kombinacija[1]:

$$\tau = N_\tau \times \rho^1 V^2 D^0 \quad \Rightarrow \quad N_\tau = \frac{\tau}{\rho V^2} \tag{5.3}$$

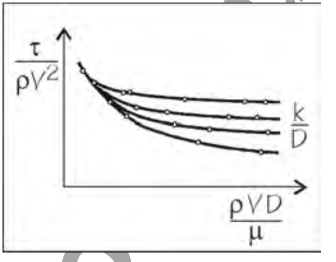
$$\mu = N_\mu \times \rho^1 V^1 D^1 \quad \Rightarrow \quad N_\mu = \frac{\mu}{\rho V D} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{N_\mu} = \frac{\rho V D}{\mu} \tag{5.4}$$

$$k = N_k \times \rho^0 V^0 D^1 \quad \Rightarrow \quad N_k = \frac{k}{D} \tag{5.5}$$

gde je sa N označen merni broj (rezultat merenja veličine u novom dimenzionalnom sistemu) pa se dimenzionalni izraz (5.2) može napisati u bezdimenzionalnom obliku:

$$\frac{\tau}{\rho V^2} = \phi\left(\frac{\rho V D}{\mu}, \frac{k}{D}\right) \tag{5.6}$$

[1] Uobičajeno je da se fizičke konstante fluida pišu u bezdimenzionalnim sistemima u imeniocu izraza, pa je to iskorišćeno u izrazu (5.4).



Slika 5.2: U novom dimenzionalnom sistemu $[\rho, V, D]$ tangencijalni napon postaje koeficijent koji zavisi od dve bezdimenzionalne veličine

Promenom dimenzionalnog sistema, umesto tangencijalnog napona dobijen je koeficijent tangencijalnog napona, pri čemu on zavisi samo od dve bezdimenzionalne veličine, $\rho VD/\mu$ i k/D. Projektovanje eksperimenta je sada mnogo jednostavnije. Potrebno je varirati samo dve bezdimenzionalne veličine sa desne strane izraza (5.6) a svi dobijeni rezultati se mogu predstaviti na samo jednom dijagramu 5.2. Eksperiment je jednostavan i zbog toga što sada nije neophodno koristiti različite fluide da bi se odredila zavisnost trenja od viskoznosti i gustine. Takođe, postupak omogućuje potpunu nezavisnost od izabranog sistema jedinica za osnovne veličine, jer je analiziran bezdimenzionalan izraz.

5.1.2 Bakingemova Π teorema

U prethodnom primeru je pokazano da se izraz sa šest dimenzionalnih veličina (5.2) sveo na izraz sa tri bezdimenzionalne veličine (5.6) nakon promene dimenzionalnog sistema. Odnos broja dimenzionalnih i bezdimenzionalnih veličina je definisan Bakingemovom[2] Π (pi) teoremom: *Ako je jednačina sa* (m) *varijabli dimenziono homogena, može se svesti na* $(m-n)$ *nezavisnih bezdimenzionoh proizvoda, gde je* (n) *minimalan broj osnovnih veličina potrebnih da se opišu varijable.*

Bezdimenzionalni proizvodi se često nazivaju *pi članovi*, a za njihovo pisanje koristi se simbol Π. Sam dokaz Π teoreme je veoma komplikovan. U primeru sa analizom otpora u kružnoj cevi, gde se pošlo od dimenzionalnog izraza šest veličina (5.2) $(m = 6)$ nakon uzimanja prečnika cevi, brzine u cevi i gustine vode kao osnovnih veličina $(n = 3)$ dobijen je bezdimenzionalan izraz (5.6) sa $m - n = 3$ Π člana:

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3) \quad \text{gde su pojedini } \Pi \text{ članovi:}$$

[2]Edgar Buckingham (1867 - 1940) američki naučnik koji je stekao obrazovanje na Harvardu i univerzitetu Lajpcig. Radio je u američkom birou za zemljište i u birou za nacionalne standarde. Oblasti interesovanja su mu bile fizika zemljišta, osobine gasova, akustika, mehanika fluida i zračenje crnih tela. Mada je više istraživača, uključujući i Lorda Rayleigha (1842 - 1919), radilo pre njega na razvoju dimenzionalne analize, Bakingem je prvi u svojim radovima (1914) formulisao Π teoremu.

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \tau \times \rho^{-1} V^{-1} D^0 \\ \Pi_2 &= \mu \times \rho^{-1} V^{-1} D^{-1} \\ \Pi_3 &= k \times \rho^0 V^0 D^{-1}\end{aligned}$$

što je u skladu sa Bakingemovom Π teoremom. U našoj praksi se umesto Π člana češće koristi forma u kojoj se pojavljuje *merni broj N koji je količnik dimenzionalne veličine i novih osnovnih veličina dignutih na odgovarajući eksponent*. Izraz (5.6) je napisan upravo u takvoj formi.

Postupak određivanja bezdimenzionalnih mernih brojeva N se može formalno definisati kroz sledeće korake:

1. Nabrojati sve varijable, dimenzionalne i bezdimenzionalne (konstante) koje su uključene u razmatrani problem:

   $$X_1 = \varphi(X_2, X_3, \ldots, X_m)$$

   Ovo je verovatno najvažniji korak jer je od suštinske važnosti da se u razmatranje uključe sve dominantne veličine. Spisak varijabli se formira na bazi znanja eksperimentatora i fizičkih zakona koji su uključeni u fenomen. Da bi spisak varijabli bio što kraći (i time se olakšali eksperimenti) važno je da sve varijable budu nezavisne. Na primer, ako su za fenomen bitni prečnik cevi i njena površina, dovoljno je uzeti jednu od te dve veličine.

2. Izraziti svih m varijabli u osnovnom dimenzionalnom sistemu. Najčešće se koristi SI sistem $[M, L, T]$ ili ponekad sistem u kome je sila osnovna veličina $[F, L, T]$. U prilogu A su date neke izvedene veličine.

3. Izabrati minimalan broj n varijabli koje su bitne za razmatrani problem i koje mogu da se koristite kao osnovne veličine. Proveriti da li su međusobno nezavisne i da li se pomoću njih mogu izraziti sve ostale veličine. Merni broj za osnovne veličine je $N = 1$.

4. Za sve ostale varijable (kojih ima $m - n$) odrediti merni broj N kao količnik veličine i osnovnih varijabli dignutih na odgovarajući stepen, tako da merni broj bude bezdimenzionalan.

5. Formirati bezdimenzionalnu relaciju oblika:

   $$N_1 = \phi(N_2, N_3, \ldots, N_{m-n})$$

Kako su merni brojevi u stvari bezdimenzionalni koeficijenti, treba razmotriti da li je moguće reorganizovati ih na neki smisleniji način, kako bi se dobio fizički logičniji izraz. Na primer, u bezdimenzionalnom izrazu (5.3) za tangencijalni napon, ako se merni broj N_τ pomnoži i podeli sa 1/2, dobija se izraz:

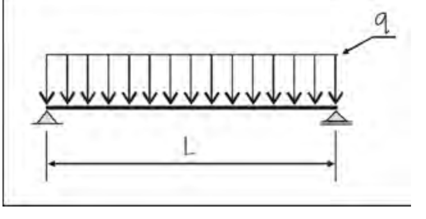
$$\frac{1}{2}N_\tau = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho V^2} = C_\tau \tag{5.7}$$

U imeniocu se javlja prepoznatljiv član, zaustavni pritisak, veličina koja predstavlja jednu od karakteristika strujanja (poglavlje 4.5.3.2). Bezdimenzionalni merni broj N_τ postaje neki drugi bezdimenzionalni broj, koji se najčešće zove *koeficijent tangencijalnog napona* C_τ.

5.1.3 Primeri primene dimenzionalne analize

Prosta greda Prvi primer primene Bakingemove teoreme je iz oblasti statike konstrukcija. Potrebno je analizirati moment savijanja proste grede u zavisnosti od raspodeljenog opterećenja i raspona grede $M_0 = \varphi(q, L)$.

Nepoznata veza momenta na sredini grede, raspona grede i opterećenja se može dobiti iz eksperimenta: napravi se greda, postave merne trake na sredini grede kako bi se merio moment M_0 i opterećuje se greda različitim opterećenjima q. Takođe, potrebno je napraviti i drugu seriju eksperimenata sa gredama različitih dužina L pri čemu se sve grede opterećuju istim opterećenjem q.



Slika 5.3: Određivanje momenta savijanja proste grede dimenzionalnom analizom

Druga mogućnost je da se sprovede dimenziona analiza i da se odredi koliki je bezdimenzionalni moment. Veličine koje su od interesa su M_0, q i L. One se mogu predstaviti bilo u SI sistemu $[M, L, T]$ ili, još jednostavnije u sistemu gde su sila i dužina osnovne veličine $[F, L]$:

Veličina	$[M, L, T]$ sistem	$[F, L]$ sistem
M_0	$M^1L^2T^{-2}$	F^1L^1
q	M^1T^{-2}	F^1L^{-1}
L	L^1	L^1

Kao osnovne veličine mogu se uzeti raspodeljeno oterećenje q i dužina L. Te veličine su međusobno nezavisne, a obe veličine su potrebne da bi se dimenziono izrazio moment, tj. nije moguće napisati izraz: $M_0 = N_M \times q^a$ ni izraz: $M_0 = N_M \times L^a$ gde bi a bio bilo koji eksponent.

Biranjem q i L za osnovne veličine, moment na sredini grede može da se napiše:

$$M_0 = N_M \times q^a \; L^b$$

Eksponenti a i b se određuju korišćenjem zajedničkog sistema $[F, L]$:

$$[F^1 L^1] = [F^1 L^{-1}]^a \; [L]^b$$

Izjednačujući eksponente uz iste veličine, dobija se:

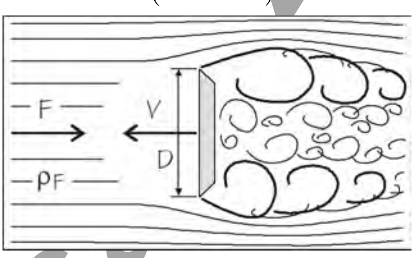
$$\begin{aligned} \text{Uz silu } F \quad &: \quad 1 = a \qquad\quad \Rightarrow \quad a = 1 \\ \text{Uz dužinu } L \quad &: \quad 1 = -a + b \quad \Rightarrow \quad b = 2 \end{aligned}$$

pa je:

$$M_0 = N_M q^1 L^2 \quad \Rightarrow \quad N_M = \frac{M_0}{qL^2} = \text{Const.} \tag{5.8}$$

Polazni dimenzionalni izraz u kome moment zavisi od dve veličine se sveo u $[q^1 L^2]$ dimenzionalnom sistemu na jednu konstantu, na merni broj N_M odnosno na bezdimenzionalni moment koji ne zavisi ni od jedne veličine. Ovo znači da je potreban svega jedan eksperiment i da je vrednost konstante koja se odredi u tom eksperimentu primenljiva na sve raspone greda i na sve veličine raspodeljenog opterećenja.

Opstrujavanje tela Analizira se sila na telo oblika kružne ploče prečnika D postavljeno upravno na fluidnu struju, usled delovanja fluida koji se kreće brzinom V (slika 5.4).



Slika 5.4: Sila otpora oštroivičnog diska brzine V

Pretpostaviće se da su veličine od značaja za silu brzina fluida V, gustina fluida ρ i prečnik ploče D. Dimenzionalno, sila se može predstaviti kao funkcionalna zavisnost 3 veličine:

$$F = \varphi(\rho, V, D) \tag{5.9}$$

a svaka od tih veličina se može izraziti preko SI sistema $[M, L, T]$:

$$
\begin{aligned}
[F] &= [MLT^{-2}] \\
[\rho] &= [ML^{-3}] \\
[V] &= [LT^{-1}] \\
[D] &= [L]
\end{aligned}
$$

Kao nove osnovne veličine uzimaju se ρ, V i D jer su međusobno nezavisne i sveobuhvatne. Koristeći novi sistem, moguće je napisati silu kao:

$$F = N_F \times \rho^a\, V^b\, D^c \tag{5.10}$$

Eksponenti se određuju korišćenjem zajedničkog SI sistema, izjednačavanjem eksponenata uz L, T i M:

$$
\begin{array}{rcccl}
[MLT^{-2}] & = & [ML^{-3}]^a\,[LT^{-1}]^b\,[L]^c & & \\
\text{Eksponenti uz } [M] & : & 1 = a & \Rightarrow & a = 1 \\
[T] & : & -2 = -b & \Rightarrow & b = 2 \\
[L] & : & 1 = -3a + b + c & \Rightarrow & c = 2
\end{array} \tag{5.11}
$$

Prema Bakingemovoj teoremi trebalo bi odabrati najmanji mogući broj novih osnovnih veličina. Ako se pokuša sa izborom ρ i V kao osnovnih veličina, jer su sveobuhvatne i međusobno nezavisne, dobija se da izraz:

$$F = N_F \times \rho^a\, V^b$$

nije moguće rešiti:

$$
\begin{array}{rcccl}
[MLT^{-2}] & = & [ML^{-3}]^a\,[LT^{-1}]^b & & \\
\text{Eksponenti uz } [M] & : & 1 = a & \Rightarrow & a = 1 \\
[T] & : & -2 = -b & \Rightarrow & b = 1 \\
[L] & : & 1 = -3a + b & \Rightarrow & 1 \neq -3 + 1
\end{array}
$$

Na osnovu izračunatih koeficijenata (5.11), dimenzionalni izraz (5.10) za silu u novom sistemu dužina, brzina, gustina je:

$$F = N_F \times \rho V^2 D^2$$

gde je N_F merni broj. Bezdimenzionalna sila je:

$$N_F = \frac{F}{\rho V^2 D^2}$$

Početni izraz $F = \varphi(\rho, V, D)$ koji je imao četiri dimezionalne nezavisne veličine ($m = 4$), izborom tri veličine kao osnovnih veličina ($n = 3$) se sveo na ($m - n = 1$) bezdimenzionalnih veličina $N_F = \phi(1, 1, 1)$ odnosno na jednu konstantu $N_F = Const.$ Ako se istražuje sila na ploču, odavde sledi da je dovoljan samo jedan eksperiment da se odredi konstanta N_F, umesto serije eksperimenata sa različitim gustinama fluida ρ, pri različitim brzinama V i sa različitim veličinama ploče D.

Bezdimenzionalnu konstantu N_F treba preurediti kako bi se dobio fizički "opravdaniji" izraz. Umesto ρV^2 može se napisati zaustavni pritisak a umesto prečnika ploče D^2 staviti površinu kruga:

$$N_F = \frac{\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}F}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{\pi}N_F = C_F = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

Nova bezdimenzionalna konstanta C_F se obično naziva *koeficijent sile* i može se protumačiti kao odnos realne sile na ploču i neke referentne sile, koja bi se dobila ako bi celokupni zaustavni pritisak proizveo silu na ploču:

$$\left[\begin{array}{c}\text{Koeficijent}\\ \text{sile}\end{array}\right] = \frac{[\text{Realna sila}]}{[\text{Zaustavni pritisak}]\,\text{x}\,[\text{Površina}]} \tag{5.12}$$

Sprovedenom dimenzionalnom analizom je dobijeno da je koeficijent sile C_F konstanta. Međutim, u nizu eksperimenata, merenjima se pokazalo da C_F nije konstantno već da zavisi i od viskoznosti fluida kao i od debljine ploče. To znači da je polazna pretpostavka o dominantnim uticajima na silu bila pogrešna i da spisak dimenzionalnih veličina treba dopuniti:

$$F = \varphi(\rho, V, D, \mu, d) \tag{5.13}$$

gde su μ viskoznost fluida i d debljina ploče. Ako ρ, V, D ostanu osnovne veličine, sila F se u bezdimenzionalnom obliku i dalje izražava preko koeficijenta sile:

$$C_F = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

Bezdimenzionalna debljina ploče se može predstaviti kao:

$$d = N_d \times D \quad \Rightarrow \quad N_d = \frac{d}{D}$$

gde se N_d obično naziva *relativna debljina ploče*.

Viskoznost fluida μ je u novom dimenzionalnom sistemu:

$$\mu = N_\mu \times \rho^a\, V^b\, D^c$$

Koristeći SI sistem, moguće je odrediti eksponente a, b i c:

$$\begin{array}{rcllcl} & [ML^{-1}T^{-1}] & = & [ML^{-3}]^a\,[LT^{-1}]^b\,[L]^c & & \\ \text{Eksponenti uz} & [M] & : & 1 = a & \Rightarrow & a = 1 \\ & [T] & : & -1 = -b & \Rightarrow & b = 1 \\ & [L] & : & -1 = -3a + b + c & \Rightarrow & c = 1 \end{array}$$

pa je bezdimenzionalni izraz za viskoznost:

$$N_\mu = \frac{\mu}{\rho V D}$$

Uobičajena praksa je da se bezdimenzionalni izrazi za materijalne konstante fluida ($\mu, \nu, \delta, \ldots$) pišu tako da materijalna konstanta bude u imeniocu razlomka:

$$\frac{1}{N_\mu} = Re = \frac{\rho V D}{\mu} \tag{5.14}$$

Inverzna vrednost bezdimenzionalne viskoznosti predstavlja Rejnoldsov[3] broj. On pokazuje odnos inercijalnih uticaja (gustina i brzina u brojiocu) i viskoznih uticaja (viskoznost u imeniocu). Što je veći Rejnoldsov broj, to je viskoznost slabija i ne uspeva da smiri vrtloge u toku.

Kao rezultat dimenzionalne analize sile na ploču, dobija se bezdimenzionalni izraz:

$$C_F = \phi\left(Re, \frac{d}{D}\right)$$

Izraz pokazuje da koeficijent C_F nije konstantan, već da je funkcija Rejnoldsovog broja Re i relativne debljine ploče $\dfrac{d}{D}$.

Primer 5.1.3

Za slučaj opstrujavanja ploče (slika 5.4) odrediti bezdimenzionalni merni broj za pritisak, ako su osnovne veličine gustina fluida ρ, brzina dolazne fluidne struje V i prečnik ploče D.

Traži se izraz za pritisak u obliku: $p = N_p \times [\rho^a\, V^b\, D^c]$. Koristeći SI sistem kao pomoćni sistem, nepoznati eksponenti se određuju izjednačavanjem eksponenata uz

[3] Biografija Rejnoldsa je data u fusnoti 1 na strani 88.

veličine L, T i M:

$$
\begin{array}{rcll}
[ML^{-1}T^{-2}] & = & [ML^{-3}]^a\,[LT^{-1}]^b\,[L]^c & \\
[M] & : & 1 = a & \Rightarrow \quad a = 1 \\
[T] & : & -2 = -b & \Rightarrow \quad b = 2 \\
[L] & : & -1 = -3a + b + c & \Rightarrow \quad c = 0
\end{array}
$$

Bezdimenzionalni izraz za pritisak je:

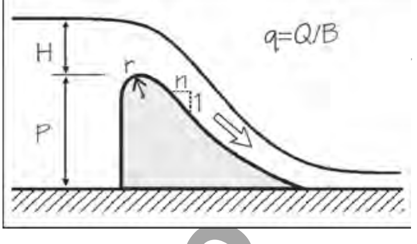
$$N_p = \frac{p}{\rho V^2} \quad \Rightarrow \quad C_p = \frac{p}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

gde je C_p koeficijent pritiska, koji je jednak količniku pritiska i zaustavnog pritiska:

$$\left[\begin{array}{c}\text{Koeficijent}\\ \text{pritiska}\end{array}\right] = \frac{[\text{Pritisak}]}{[\text{Zaustavni pritisak}]} \tag{5.15}$$

Dobijeni izraz je sličan izrazu za bezdimenzionalni tangencijalni napon (5.7). To je i logično, jer su i pritisak i tangencijalni napon sile po jedinici površine: pritisak je rezultat normalne sile, a tangencijalni napon rezultat tangencijalne sile.

Prelivanje preko brane Preko brane preliva voda protokom Q (slika 5.5). Naći jednačinu za jedinični protok $q = Q/B$, gde je B širina brane, pretpostavljajući da je sloj vode na brani dovoljno debeo da se mogu zanemariti uticaji površinskog napona, kao i da je uticaj gravitacije znatno veći od uticaja viskoznosti.



Slika 5.5: Prelivanje preko brane visine P i širine B

Veličine koje su bitne za prelivanje preko brane su visina vode H, visina brane P, zaobljenje krune brane r, mizvodni nagib n i gravitaciono ubrzanje g:

$$q = \varphi(g, H, P, r, n)$$

Sve veličine izražene preko SI sistema su:

$$
\begin{array}{rcl}
[q] & = & [L^2T^{-1}] \\
[g] & = & [LT^{-2}] \\
[H]\;\;[P]\;\;\text{i}\;\;[r] & = & [L]
\end{array}
$$

Potrebne su samo dve veličine kao osnovne. Ako se izaberu g i H, jedinični protok se može izraziti kao:

$$q = N_q \times g^a\ H^b$$

Sređivanjem izraza po vremenu i dužini, dobija se:

$$\begin{array}{rrcl} & [L^2T^{-1}] & = & [LT^{-2}]^a\,[L]^b \\ \text{Eksponenti uz } [T] & : & -1 = -2a & \Rightarrow \quad a = 1/2 \\ [L] & : & 2 = a + b & \Rightarrow \quad b = 3/2 \end{array}$$

pa je traženi izraz za jedinični protok:

$$q = N_q \times g^{1/2} H^{3/2} = C_q \sqrt{gH^3} \tag{5.16}$$

Izraz je napisan u standardnoj formi, koja se koristi u oblasti otvorenih tokova. Koeficijent C_q je *koeficijent protoka* i za idealan fluid je jednak jedinici a za realan fluid je manji od jedan.

Iz polazne dimenzionalne veze za q, sledi da protok zavisi i od visine brane P, poluprečnika krune brane i nagiba brane (koji je već bezdimenzioni parametar). Bezdimenzionalna visina brane se može napisati kao H/P a poluprečnik kao r/P, pa se polazni dimenzionalni izraz svodi na sledeći bezdimenzionalni:

$$C_q = \phi\left(\frac{H}{P}, \frac{r}{P}, n\right) \tag{5.17}$$

gde se vidi da C_q nije "pravi" koeficijent, jer zavisi od tri bezdimenzionalne veličine.

5.1.4 Komentari u vezi dimenzionalne analize

Postupak dimenzionalne analize izložen u prethodnim poglavljima je u principu jednostavan. Koristeći SI sistem ili neki drugi pogodan opšti dimenzionalni sistem, uspostavlja se veza između varijabli, koje su izabrane za osnovne veličine, i ostalih varijabli koje opisuju razmatrani fenomen. U nastavku će se razmotriti kriterijumi za izbor svih varijabli koje učestvuju u nekom fenomenu i ograničenja u vezi toga, kao i da li su dobijena rešenja jedinstvena, odnosno, da li rešenja zavise od izbora dimenzionalnog sistema. Na kraju će se još jednom analizirati veza dobijenih bezdimenzionalnih veličina sa sâmim eksperimentima, zbog kojih se uglavnom i radi dimenzionalna analiza.

5.1.4.1 Izbor varijabli

Prvi korak u dimenzionalnoj analizi je nabrajanje svih varijabli, dimenzionalnih i bezdimenzionalnih (konstanti) koje su bitne za razmatrani fenomen:

$$X_1 = \varphi(X_2, X_3, \ldots, X_m)$$

Za analizu i eksperimentalni rad sigurno je dobro u spisku imati što manje varijabli. Sa druge strane, ako se ne uključe sve dominantne varijable, dimenzionalna analiza neće moći da pruži dobar uvid u njihovu međuzavisnost.

Koje sve varijable treba uzeti kao dominantne? Nema jednostavne procedure kojom se to može definisati. Neophodno je dobro poznavanje fenomena i osnovnih fizičkih zakonitosti, kao i veliko iskustvo u eksperimentalnom radu. Česta greška je da se uključe nepotrebne varijable koje opisuju geometriju, kao na primer prečnik cevi i površina, ili dužine pravih deonica cevi ispred i iza zatvarača, ili dve brzine vode u sistemu sa dva prečnika cevi, i slično.

Prilikom izvođenja bezdimenzionalnih brojeva, može se dogoditi da nije moguće odrediti sve eksponente uz novoizabrane osnovne veličine. Razlog za to može da bude loš izbor novih osnovnih veličina koje nisu sveobuhvatne ili nekompletan spisak svih dominantnih varijabli. Usled neiskustva, može se dogoditi da se izaberu nove osnovne veličine koje jesu međusobno nezavisne i koje jesu sveobuhvatne, ali koje na kraju neće dati dobar uvid u fizičko značenje bezdimenzionalnih brojeva. Na primer, bezdimenzionalni pritisak u sistemu $[\rho, V, L]$ je fizički prepoznatljiv (5.15) (primer 5.1.3) dok se to ne može reći za rešenje (5.18) u sistemu $[\mu, V, L]$.

Opasnija greška je, ako se izostave bitne varijable, pa se nakon dimenzionalne analize ne pojave u bezdimenzionalnoj funkciji bitni bezdimenzionalni brojevi. U datom primeru opstrujavanja tela, na strani 186, krenulo se od pretpostavke da sila na telo zavisi, pored brzine fluida i prečnika diska, samo od gustine fluida, a ne i od viskoznosti (5.9). U nizu sprovedenih eksperimenata se, međutim, pokazalo da ta pretpostavka ne daje dobre rezultate i da je neophodno u spisak dominantnih varijabli dodati još i viskoznost i debljinu ploče (5.13).

Prilikom sastavljanja liste bitnih varijabli, treba razmotriti sve veličine kojima se može u potpunosti opisali strujanje:

- geometrijske, odnosno konturne uslove L_i,
- kinematske uslove date ili preko brzina V_i ili protoka Q, q, i
- materijalne konstante: $\rho, \mu, g, \delta, K, \ldots$

U većini neustaljenih fenomena su bitni i početni uslovi, odnosno, stanje svih varijabli na početku eksperimenta i tokom vremena. Zbog toga je ponekad u spisak bitnih varijabli potrebno uključiti i potreban broj vremenskih trenutaka t_i.

5.1.4.2 Jedinstvenost rešenja

Izbor novih osnovnih veličina iz spiska bitnih varijabli se vrši uglavnom na osnovu iskustva. Različit skup osnovnih veličina daje i različita rešenja za bezdimenzionalne merne brojeve. Da li su ta rešenja međusobno nezavisna pa samim tim i nose neke nove informacije?

Ako se analizira pritisak na telo usled opstrujavanja, kao bitne veličine se mogu uzeti gustina i viskoznost fluida, brzina fluida i prečnik ploče:

$$p = \varphi(\rho, \mu, V, D)$$

Nove osnovne veličine mogu biti ili $[\rho, V, D]$ (prva kombinacija), ili $[\mu, V, D]$ (druga kombinacija). Bezdimenzionalni broj za pritisak je za prvu kombinaciju osnovnih veličina:

$$\frac{p}{\rho V^2} = \phi_0 \left(\frac{\mu}{\rho V D} \right) = \phi_1 \left(\frac{\rho V D}{\mu} \right)$$

dok je za drugu kombinaciju:

$$\frac{pD}{\mu V} = \phi_2 \left(\frac{\rho V D}{\mu} \right) \tag{5.18}$$

Oba rešenja za bezdimenzionalni pritisak će na kraju dovesti do istog izraza za pritisak p mada su funkcije ϕ_1 i ϕ_2 različite. Rešenja nisu međusobno nezavisna, jer je moguće napraviti proizvod bezdimenzionalnih brojeva iz prve relacije da bi se dobio bezdimenzionalni broj iz druge relacije:

$$\left(\frac{p}{\rho V^2} \right)^a \left(\frac{\rho V D}{\mu} \right)^b = \frac{pD}{\mu V}$$

pri čemu su eksponenti $a = 1$ i $b = 1$.

Da li je prvi ili drugi oblik bezdimenzionalnog broja bolji za opisivanje fenomena, u mnogome zavisi od potreba, a i samih mogućnosti da se napravi eksperiment. Dobro je koristiti bezdimenzionalne brojeve koji su opšteprihvaćeni u Mehanici fluida jer se time olakšava razmena podataka i međusobno upoređivanje rezultata eksperimenata.

5.1.4.3 Veza sa eksperimentima

Dimenzionalna analiza se najčešće koristi za analizu pojava čija direktna analitička veza sa drugim veličinama nije unapred poznata te je tu vezu neophodno istražiti kroz eksperimente. Na osnovu ustanovljenih veza bezdimenzionalnih brojeva, projektuje se eksperiment i kasnije se tumače dobijeni rezultati. Pri tome važi opšte pravilo da sa porastom broja bezdimenzionalnih brojeva raste i kompleksnost eksperimenata.

Ako je rezultat dimenzionalne analize samo jedan bezdimenzionalni broj, to znači da je on konstanta, čiju vrednost treba ustanoviti samo jednim eksperimentom. Dobra praksa je, naravno, da se uradi više ponovljenih eksperimenata u promenjenim uslovima, kako bi se i merenjima potvrdila ispravnost rezultata dimenzionalne analize. Takođe, usled neizbežnih slučajnih grešaka u merenjima, najverovatnija vrednost konstante se dobija kao srednja vrednost više rezultata merenja.

Primer 5.1.4

U primeru sa prostom gredom (strana 185) dimenzionalna analiza pokazuje da je merni broj za moment konstanta, da ne zavisi od drugih bezdimenzionalnih veličina:

$$N_M = \frac{M_0}{qL^2}$$

U sprovedenom eksperimentu, za gredu dužine $L = 1$ m, pri različitim opterećenjima su izmereni momenti M_0. Izračunati bezdimenzionalni moment N_M.

Veličina	Dimenzija	1	2	3	4	5
q	kN/m	0,818	1,522	2,010	3,153	4,050
M_0	Nm	0,103	0,191	0,251	0,392	0,505
N_M	–	0,1259	0,1251	0,1249	0,1243	0,1247

Iz izmerenih momenata na sredini grede izračunat je bezdimenzionalni moment N_M (poslednji red u tabeli). Rezultat bi trebalo da bude jedan, konstantan broj, ali on varira zbog neizbežnih grešaka u merenju. Najverovatnija vrednost bezdimenzionalnog momenta je jednaka srednjoj vrednosti:

$$N_M = \frac{1}{5}(0{,}1259 + 0{,}1251 + 0{,}1249 + 0{,}1243 + 0{,}1247) = 0{,}12498 = 0{,}125$$

Analitičko rešenje istog problema daje moment na sredini grede:

$$M_0 = \frac{1}{8}qL^2$$

što je u potpunoj saglasnosti sa rezultatima obavljenog eksperimenta.

Kada su dva bezdimenzionalna broja rezultat dimenzionalne analize, oblika:

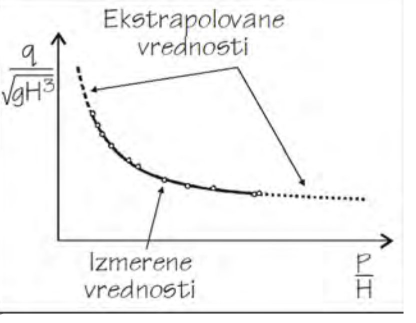
$$N_1 = \phi(N_2)$$

rezultati eksperimenta se mogu prikazati jednom linijom, na dijagramu sa osama N_1 i N_2. U primeru prelivanja preko brane (strana 190) pokazano je u izrazu (5.17) da koeficijent protoka zavisi od relativne visine brane:

$$C_q = \frac{q}{\sqrt{gH^3}} = \phi\left(\frac{P}{H}\right)$$

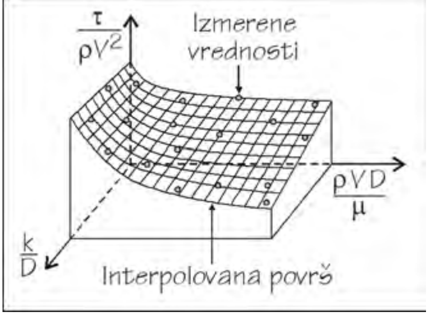
U eksperimentu treba napraviti opite sa nekoliko različitih visina prelivnog mlaza H dok samu visinu brane P nije neophodno menjati. Naravno, ako se želi postići veliki opseg promena P/H, neophodno je napraviti i eksperimente sa različitim visinama brane P.

Na slici 5.6, dat je primer dobijenih rezultata merenja (tačke) i fitovane krive kroz te tačke (puna linija). Oblik krive, koja se koristi za fitovanje izmerenih rezultata zavisi od problema koji se izučava i trebalo bi da bude zasnovan na teorijskoj analizi. Na osnovu rezultata fitovanja, moguće je u određenoj meri i ekstrapolovati funkciju ϕ (isprekidana linija na slici 5.6), mada u tome treba biti posebno pažljiv.



Slika 5.6: Funkcija ϕ - veza dva bezdimenzionalna broja

Kako raste broj bezdimenzionalnih brojeva, tako i kompleksnost samog eksperimenta i obrade podataka značajno raste. Kod tri bezdimenzionalna broja opšta zavisnost je oblika $N_1 = \phi(N_2, N_3)$ i nju je još uvek moguće prikazati na standardnim dijagramima sa N_1 i N_2 osama, pomoću familije krivih linija sa konstantnim N_3 brojem. Na slici 5.2 je na taj način prikazana zavisnost mernog broja za tangencijalni napon u odnosu na merni broj za viskoznost (odnosno, Rejnoldsov broj) za različite vrednosti mernog broja za hrapavost (odnosno, pri konstantnoj relativnoj hrapavosti).



Slika 5.7: Prostorni prikaz veze tri bezdimenzionalna broja

U poslednje vreme su popularni i trodimenzionalni prikazi prostornih površina koje su definisane funkcijom ϕ (slika 5.7). Kroz izmerene tačke se interpoluje teorijska funkcija primenom, obično, metode najmanjih kvadrata razlika između izmerenih i fitovanih vrednosti. Ako nije poznat teorijski oblik površine, tada se najčešće smatra da su izmerene tačke apsolutno tačne, a prostor između tačaka se interpoluje nekom od korelacionih ili statističkih metoda.

5.1.5 Standardni bezdimenzionalni brojevi u Mehanici fluida

U oblasti Mehanike fluida, bezdimenzionalne veličine se često koriste kao način sporazumevanja. Na primer, kao uslov za izbor dobrog mesta za postavljanje merila protoka na cevi, obično se kaže da mora postojati prilazna pravolinijska deonica minimalne dužine $10D$. Ovo je mnogo praktičnije nego da se definišu potrebne dužine u metrima, u zavisnosti od prečnika cevi.

Najčešće veličine koje se koriste kao osnovne veličine u dimenzionalnoj analizi su gustina, brzina i dužina. Kroz gustinu fluida se u analizu unosi masa, kao pokazatelj inercijalnosti. Brzina može biti srednja brzina fluida u cevi, brzina objekata koji se kreće kroz fluidnu struju koja miruje ili brzina nekog karakterističnog fluidnog delića. Brzina je pokazatelj kinematičnosti toka i kroz nju se u analizu unosi vreme. Na kraju, sa odabranom karakterističnom dužinom ili prečnikom se opisuju geometrijski uslovi zadatka.

U svakom zadatku Mehanike fluida su uključene jedna ili više materijalnih (dimenzionalnih) konstanti čije vrednosti mogu biti nepromenljive (konstantne) ili promenljive u prostoru i vremenu. Za usvojeni novi dimenzionalni sistem $[\rho, V, L]$ moguće je naći bezdimenzionalne brojeve materijalnih konstanti. U tabeli 5.1, date su neke najčešće korišćene materijalne konstante u bezdimenzionom obliku, a u nastavku se daju i komentari o nekoliko najčešće korišćenih brojeva.

Bezdimenzionalna viskoznost Bezdimenzionalni broj koji predstavlja viskoznost je *Rejnoldsov broj*, sa oznakom Re. Rejnoldsov broj je veoma značajan za većinu zadataka Mehanike fluida i u prethodnim primerima je već pokazano kako se on dobija (5.14):

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu}$$

U izrazu za Rejnoldsov broj μ je *dinamički koeficijent viskoznosti*, a odnos μ/ρ je *kinematski koeficijent viskoznosti* (jednačina (2.8), na strani 16).

Rejnoldsov broj se najčešće tumači kao *odnos inercijalnih i viskoznih uticaja*. Ako se inercijalna sila definiše preko proizvoda mase i ubrzanja i izrazi se u dimenzionalnom sistemu $[\rho, V, L]$ dobija se:

$$F_I = ma = \rho L^3 \times V^2\ L^{-1} = \rho V^2\ L^2 \tag{5.19}$$

Bezdim. grupa	Ime Oznaka	Tumačenje (odnos sila)	Primena
$\frac{\rho V L}{\mu}$	Rejnoldsov broj Re	$\frac{\text{inercijalne}}{\text{viskozne}}$	Generalno važno za većinu hidrotehničkih zadataka
$\frac{V^2}{gL}$	Frudov broj Fr	$\frac{\text{inercijalne}}{\text{gravitacione}}$	Tok sa slobodnom površinom, talasi
$\frac{p}{\rho V^2}$	Euler-ov broj Eu	$\frac{\text{pritisak}}{\text{inercijalne}}$	Problemi gde je bitan pritisak ili razlika pritiska)
$\frac{\rho V^2 L}{\delta}$	Veberov broj We	$\frac{\text{inercijalne}}{\text{površ. napon}}$	Problemi gde je površinski napon dominantan (male dubine)
$\frac{V}{c}$	Mahov broj Ma	$\frac{\text{inercijalne}}{\text{stišljivost}}$	Tok sa izraženom stišljivošću fluida (c je brzina zvuka)
$\frac{\rho V^2}{K}$	Košijev broj Ca	$\frac{\text{inercijalne}}{\text{stišljivost}}$	Tok sa izraženom stišljivošću fluida (K je modul stišljivosti)
$\frac{\omega L}{V}$	Strouhal-ov broj St	$\frac{\text{inerc. lokalne}}{\text{inerc. konvekt.}}$	Neustaljeni tok sa karakterističnim frekvencijama ω oscilacija

Tabela 5.1: Najčešće korišćeni bezdimenzionalni brojevi u Mehanici fluida

Viskozna sila je proizvod tangencijalnog napona i površine, pa izražena u istom dimenzionalnom sistemu je jednaka:

$$F_V = \tau A = \mu V L \tag{5.20}$$

Sada se vidi da je odnos te dve sile jednak Rejnoldsovom broju:

$$\frac{F_I}{F_V} = \frac{\rho V^2 L^2}{\mu V L} = \frac{\rho V L}{\mu} = Re$$

Kod razvijenog laminarnog toka ovakvo tumačenje Rejnoldsovog broja nije dobro, jer je inercijalna sila nula dok je Rejnoldsov broj veći od nule. Isti fenomen se može posmatrati i preko odnosa karakterističnih vremenskih skala koje učestvuju u fenomenu. Viskoznost je “zadužena” za molekularni, difuzni transfer, koji se obavlja sa vremenskom razmerom T_{DIF}, dok se konvektivni transfer vrši pomeranjem delića brzinom V, pa je vremenska skala T_{KON}:

$$T_{DIF} = \frac{L^2}{\nu} \qquad T_{KON} = \frac{L}{V}$$

gde je L karakteristična dužina. Inverzni odnos tih vremena, odnosno, odnos brzina kojima se obavljaju konvektivni i difuzni transfer, je jednak Rejnoldsovom broju:

$$\frac{1/T_{KON}}{1/T_{DIF}} = \frac{T_{DIF}}{T_{KON}} = \frac{L^2}{\nu}\frac{V}{L} = \frac{V\ L}{\nu} = Re$$

Dobijena relacija daje i drugo fizičko tumačenje Rejnoldsovog broja kao *odnosa brzina konvektivnog i difuznog transfera momenta* u fluidu. Kod malih Rejnoldsovih brojeva, u laminarnom tečenju, difuzni transfer je dominantan, jer je brzina približno jednaka nuli. Kod velikih Rejnoldsovih brojeva turbulencija i velika srednja brzina su zaduženi za konvektivni transfer a difuzni transfer je zanemarljiv.

Bezdimenzionalna gravitacija Bezdimenzionalni broj, koji predstavlja gravitaciju. je *Frudov*[4] *broj*, sa oznakom Fr. Gravitaciono ubrzanje g se može napisati kao:

$$g = N_G \times \frac{L}{T^2} = N_G \times \frac{V^2}{L}$$

pa se sređivanjem dobija Frudov broj[5]:

$$Fr = \frac{1}{N_G} = \frac{V^2}{gL} \tag{5.21}$$

Frudov broj je značajan u oblasti dinamike fluida, gde sila gravitacije utiče na kretanje fluidnih delića. Svi zadaci sa otvorenim tokovima spadaju u ovu oblast. Takođe i zadaci koji izučavaju otpore na telo moraju uzeti u

[4]William Froude (1810 - 1870), engleski inženjer građevine, matematičar i poznati projektant brodova. Froude je obavio pionirska istraživanja u oblasti modeliranja brodova vučenjem kroz bazen.

[5]Važna napomena: U anglosaksonskoj stručnoj literaturi je uobičajeno da se koristi Frudov broj koji je kvadratni koren iz recipročne vrednosti mernog broja N_G:

$$Fr = \frac{1}{\sqrt{N_G}} = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

obzir Frudov broj, ako se telo nalazi samo delimično potopljeno u fluid, kao na primer otpor kretanja broda ili opterećenje mostovskog stuba.

Frudov broj se može tumačiti i kao odnos inercijalne sile (čiji je predstavnik brzina) i gravitacione, koja pod dejstvom dubine i gravitacije pokušava da "smiruje" fenomen. Gravitaciona sila (sila težine) je proizvod mase i gravitacionog ubrzanja. Ako se masa izrazi u $[\rho, L]$ dimenzionalnom sistemu, dobija se:

$$F_G = mg = \rho g L^3 \tag{5.22}$$

pa se vidi da je odnos inercijalne sile (5.19) i gravitacione sile jednak Frudovom broju:

$$\frac{F_I}{F_G} = \frac{\rho V^2\, L^2}{\rho g L^3} = \frac{V^2}{gL} = Fr \tag{5.23}$$

Ako je Frudov broj veći od 1, znači da je inercijalna sila "jača" od gravitacione i da su uticaji brzine dominantni. Takvo tečenje je povezano sa "silovitim" tečenjem. Obrnuto, ako je Frudov broj manji od 1, tečenje je sa malim brzinama, "mirno", jer je gravitacija "jača".

Bezdimenzionalna kapilarna konstanta U Mehanici fluida, na Građevinskom fakultetu, za najveći broj zadataka, bitni su viskoznost i gravitacija, pa se zato najčešće i koriste Rejnoldsov i Frudov broj. U manjem broju zadataka su interesantni kapilarna konstanta i stišljivost (zajedno sa brzinom propagacije talasa), dok se ostale materijalne konstante veoma retko sreću.

Bezdimenzionalni broj, koji predstavlja kapilarnu konstantu, je *Veberov*[6] *broj*, sa oznakom We. Površinski napon (kapilarna konstanta) δ, može se napisati kao sila po jedinici dužine:

$$\delta = N_\delta \times F L^{-1} = N_\delta \times \rho L V^2$$

pa je Veberov broj inverzna vrednost bezdimenzionog mernog broja:

$$We = \frac{1}{N_\delta} = \frac{\rho L V^2}{\delta} \tag{5.24}$$

Veberov broj je od značaja za strujanja sa izraženim uticajem granice dva fluida ili kod strujanja tankog sloja fluida preko čvrste granice. Kod većine površinskih tokova, kada je veoma mala dubina (ili tanak sloj vode koji teče) kapilarne sile postaju značajne i treba ih, pored gravitacije, uzeti u obzir. Takođe, u analizi vlage u zemljištu, kapilarne sile mogu biti za red veličine veće od gravitacionih sila.

[6] Moritz Weber (1871 - 1951), nemački profesor pomorske mehanike. Uveo je u upotrebu standardne bezdimenzionalne brojeve kao osnovu za istraživanje sličnosti.

Bezdimenzionalni moduo stišljivosti Bezdimenzionalni broj, koji predstavlja stišljivost, je *Košijev*[7] *broj*, sa oznakom Ca. Prema definiciji (2.10) (strana 22), relativno smanjenje zapremine je jednako odnosu povećanja pritiska i zapreminskog modula stišljivosti K:

$$K = N_K \times p = N_K \times ML^{-1}T^{-2} = N_K \times \rho V^2$$

Košijev broj je jednak mernom broju:

$$Ca = N_K = \frac{\rho V^2}{K} \tag{5.25}$$

Pokazatelj stišljivosti fluida je i brzina propagacije talasa kroz fluid c koja je jednaka korenu odnosa modula stišljivosti i gustine:

$$c = N_c \times \sqrt{\frac{K}{\rho}} = N_c \times \sqrt{\frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-3}}} = N_c \times \sqrt{\frac{L^2}{T^2}} = N_c \times V$$

Bezdimenzionalni broj za brzinu propagacije, zove se Mahov[8] broj, sa oznakom Ma:

$$Ma = \frac{1}{N_c} = \frac{V}{c} \tag{5.26}$$

Može se uspostaviti veza između Mahovog i Košijevog broja, ako se u Mahovom broju brzina propagacije talasa napiše preko stišljivosti:

$$Ma = \frac{V}{c} = \frac{V}{\sqrt{\frac{K}{\rho}}} = V\sqrt{\frac{\rho}{K}} \quad \Rightarrow \quad Ma^2 = \frac{\rho V^2}{K} = Ca$$

tako da se oba broja mogu koristiti za opisivanje uticaja stišljivosti fluida, odnosno, kao pokazatelj odnosa inercijalnih sila i sila stišljivosti. Kada je Mahov broj relativno mali (ispod 0,3), inercijalne sile izazvane kretanjem fluida su relativno slabe i ne mogu da naprave značajniju promenu gustine fluida. Zbog toga se u praktičnim zadacima određivanja opterećenja građevinskih objekata od strane vetra može značajno uprostiti rešenje zanemarujući stišljivost vazduha.

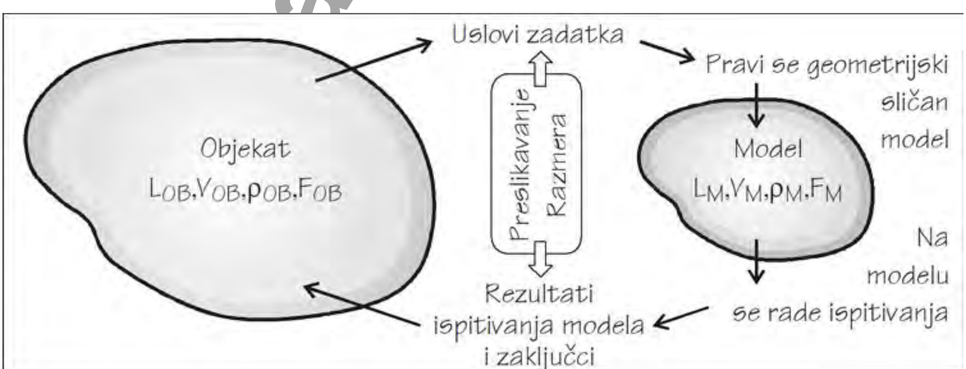
[7] Augustin Louis de Cauchy (1789 - 1857), francuski inženjer hidrodinamike i matematičar. Bavio se analizom realnih i kompleksnih brojeva, teorijom permutacija, kao i konvergencijom i divergencijom beskonačnih nizova, diferencijalnih jednačina, determinanti i verovatnoća u matematici i fizici.

[8] Ernst Mach (1838 - 1916), češko-austrijski fizičar i filozof. U oblasti fizike se bavio interferencijom, difrakcijom, polarizacijom i refrakcijom svetla, kao i supersoničnim brzinama i pojavom stojećih talasa.

5.2 Sličnost i fizički modeli

Postoji veliki broj problema, koji zahtevaju korišćenje *geometrijski sličnog* modela, na kome će se u *kontrolisanim uslovima* izučavati određene pojave. Svi veći inženjerski projekti, kao što su izrade velikih rečnih i morskih luka, brana na rekama, brodova, aviona, superbrzih vozova, mostova sa velikim rasponom i slično, zahtevaju pravljenje modela. Sve do kraja 20-og veka su pravljeni skoro isključivo fizički modeli, dok se danas često kombinuju fizički i matematički modeli. Fenomeni, koji su dobro istraženi i koji mogu da se modeliraju za određenu geometriju uprošćenim matematičkim modelima turbulencije, računaju se upotrebom 2D ili 3D simulacija (akustika pozorišne sale, strujanje vode u jezeru, itd.). Svi ostali detalji, koji su prekomplikovani za matematičko modeliranje ili gde postojeći matematički modeli strujanja nisu dovoljno tačni (višefazno strujanje, mešavina vode i vazduha na brzotocima preliva, komplikovani granični uslovi, itd.) i dalje zahtevaju pravljenje fizičkih modela.

Opšta definicija modela bi mogla da bude da je to *sve ono na čemu se nešto proučava*, dok je definicija prirode, odnosno objekta da je to *sve ono na šta se proučavanja odnose*. Ovakva definicija obuhvata razne vrste modela: matematičke, fizičke, ali i foto modele, ekonomske modele kao i sociološke modele. Sam pojam *fizički model* vezuje se za ispitivanje nekih fizičkih fenomena na modelu (na primer, automobil ili avion u aerotunelu, ili preliv na brani), a zatim na *prenošenje dobijenih rezultata na prirodu.* Problem sa kojim je suočen svaki modelar je *kakav* i *koliko veliki* (odnosno, mali) treba da bude model, kao i *kako uspostaviti relacije* između izmerenih veličina na modelu i istih u prirodi.



Slika 5.8: Objekat i geometrijski sličan model

Da bi rezultati merenja na modelu bili uporedivi sa prirodom, model i strujna slika na modelu moraju biti *slični* prirodi, odnosno objektu u prirodi. Sličnost znači *mogućnost preslikavanja* nekog problema sa objekta na model (slika 5.8). Sa objekta na model se prenose uslovi zadatka, a sa modela na objekat rezultati dobijeni ispitivanjima modela kao i zaključci dobijeni tokom eksperimenta. Odnos veličina koje se prenose između objekta i modela se naziva *razmera*. Za neku veličinu X razmera je:

$$X_\star = \frac{X_O}{X_M} \quad [-]$$

Simbol zvezde ($\star$) se koristi kao oznaka za razmeru[9]. Razmera za veličinu $X_\star$ je uvek bezdimenzionalni broj jer je količnik dve iste veličine.

Uslov da su model i objekat *geometrijski slični* je prilično jasan: koeficijent gubitka energije na leptirastom zatvaraču, na primer, sigurno najviše zavisi upravo od konstrukcije zatvarača i ne bi imalo smisla koristiti neki drugi, na primer kuglični zatvarač, da se modelira leptirasti. Koji su još uslovi sličnosti koje treba da ispuni model? Strujna slika oko objekta je sigurno bitna za većinu fenomena, pa bi bilo dobro da se i ona verno predstavi na modelu, odnosno, da bude ispunjena *kinematska sličnost*. Kako se na modelu istražuju sile koje treba preneti na prirodu, neophodno je da bude ispunjena i *dinamička sličnost*.

5.2.1 Geometrijska sličnost

Geometrijska sličnost podrazumeva da su *objekat i model istog oblika ali različitih veličina*. Sve razmere za dužine treba da budu iste:

$$L_\star = \frac{L_{1_O}}{L_{1_M}} = \frac{L_{2_O}}{L_{2_M}} = \frac{L_{3_O}}{L_{3_M}} = \ldots = \frac{L_{n_O}}{L_{n_M}}$$

Razmera za površine je $A_\star = L_\star^2$ a za zapremine $\cancel{V}_\star = L_\star^3$.

Kompletnu geometrijsku sličnost, na žalost, često nije moguće postići. Ako se, na primer, modelira transport finog nanosa u kanalu, koristeći model razmere za dužine $L_\star$, model tečenja vode u betonskom kanalu zahteva smanjenje hrapavosti dna na modelu u istoj razmeri kao i smanjenje dužina. To bi značilo da je na modelu potrebno napraviti izuzetno glatko dno, što

[9] Neki autori kao oznaku za razmeru koriste malo slovo r od engleske reči *ratio* - odnos, pa je razmera za dužine, na primer $L_r = L_O/L_M$. Često se koristi i *modelska razmera* sa oznakom λ koja je jednaka inverznoj vrednost razmere $L_\lambda = 1/L_\star = L_M/L_O$. Za modelsku razmeru za dužine od 1:20 ili $\lambda = 0,05$ odgovarajuća razmera za dužine je 20:1 odnosno $L_\star = 20$. Modelska razmera se standardno koristi u kartografiji.

često nije moguće. Kretanje peska po dnu u prirodi treba modelirati sa prahom koji je $L_\star$ puta manji od peska, a tada su kohezione sile drukčije nego kod peska. Pa čak ni uslovi tečenja u samom modelu verovatno neće biti isti, jer će zbog velikog smanjenja poprečnog preseka doći do smanjenja Rejnoldsovog broja, pa će tečenje biti laminarno umesto turbulentnog koje je na objektu.

Rešenje se često nalazi u svesnoj distorziji modela, kada se usvajaju različite razmere za dužinu, širinu, hrapavost ili neku drugu dužinsku dimenziju. Takvi modeli su, po pravilu, komplikovaniji za analizu i za prenošenje rezultata na objekat i zahtevaju detaljno izučavanje efekta distorzije na dobijene rezultate.

5.2.2 Kinematska sličnost

Kinematska sličnost znači da je, pored geometrijske sličnosti, postignuta i *sličnost za brzine*. Razmere za brzine u svim odgovarajućim tačkama objekta i modela treba da budu iste:

$$V_\star = \frac{V_{1_O}}{V_{1_M}} = \frac{V_{2_O}}{V_{2_M}} = \frac{V_{3_O}}{V_{3_M}} = \ldots = \frac{V_{n_O}}{V_{n_M}}$$

Zahvaljujući geometrijskoj i kinematskoj sličnosti, strujna slika oko modela će biti ista kao i strujna slika u prirodi.

Primer 5.2.1

Ako je automobil dužine 4,0 m (objekat) a njegov model dužine 0,5 m, kolika je razmera za dužine? Ako se model automobila kreće brzinom od 10 m/s, kolika je brzina automobila (objekta)?

Razmera za dužine je odnos dužina objekta i modela:

$$L_\star = \frac{L_O}{L_M} = \frac{4{,}0}{0{,}5} = 8$$

Razmera $L_\star = 8$ važi samo za dužine. Da bi se odredila brzina automobila (objekta) potrebno je prvo naći razmeru za brzine, kao odnos brzina objekta i modela:

$$V_\star = \frac{V_O}{V_M}$$

Ako se uvrsti razmera za dužine u prethodni izraz, dobija se:

$$V_\star = \frac{\dfrac{L_O}{T_O}}{\dfrac{L_M}{T_M}} = \frac{L_O}{L_M}\frac{T_M}{T_O} = L_\star\frac{1}{T_\star} = 8\frac{1}{T_\star}$$

Razmera za vreme po pravilu nije $T_\star = 1$ (vreme ne protiče istom brzinom na objektu, u prirodi, i na modelu) već je u zadatku nepoznata. Bez dodatnih uslova nije moguće odgovoriti kolika će biti brzina automobila (objekta).

U datom primeru je prilikom izvođenja razmere za brzine, pokazano prvo pravilo sličnosti: *Razmere za dimenzionalne veličine se odnose kao dimenzije tih veličina.* Dakle, brzina automobila V, koja može da se izračuna kao pređeni put L, za vreme T:

$$V = \frac{L}{T} \quad \text{ima razmeru} \quad V_\star = \frac{L_\star}{T_\star}$$

Kako se razmere odnose kao i njihove dimenzije, sledi da postoji onoliko nezavisnih razmera koliko i nezavisnih osnovnih veličina. U Mehanici fluida se koriste tri osnovne veličine, pa odatle sledi da su na raspolaganju i tri nezavisne razmere.

Iz prvog pravila posredno sledi i drugo pravilo sličnosti: *Bezdimenzionalne veličine se prenose nepromenjene sa modela na objekat*, odnosno, *Razmera za bezdimenzionalne veličine je 1.* Ako pritisak u nekoj tački može da se izračuna preko izraza:

$$p = C_p \frac{1}{2} \rho V^2$$

tada je razmera za pritisak:

$$p_\star = (C_p)_\star \left(\frac{1}{2}\right)_\star \rho_\star \left(V^2\right)_\star = \rho_\star (V_\star)^2$$

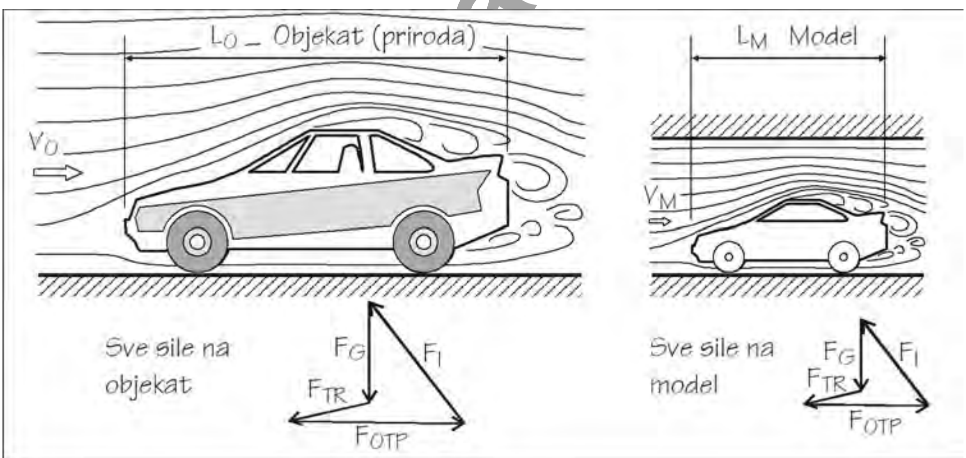
Jedan od problema pri izradi modela je postizanje sličnosti za brzine na granicama modela. Model koji se napravi je uvek "isečak" iz prirode, "prozor" kroz koji se gleda na deo prirodnog strujanja. Strujnu sliku koja je na granicama tog prozora, u prirodi, često je teško ili nemoguće reprodukovati na modelu, jer je na modelu to istovremeno i fizička granica prostora. Na primer, ako se pravi model brane na reci i ako je bitna strujna slika u okolini zahvatnih građevina, veoma je bitno da se na modelu postigne verna strujna slika u uzvodnim presecima. Kako je, međutim, model konačne dužine (obično je sa uzvodne strane dugačak $L/W = 3 - 5$ gde je W širina reke), veoma je teško postići da voda iz nekog rezervoara ulazi u model upravo sa istim rasporedom brzina kao što se to događa u prirodi. Zbog toga je potrebno "kalibrisati" model, proveriti verodostojnost strujne slike na modelu u odnosu na prirodu i oceniti uticaj eventualne razlike strujne slike na rezultate istraživanja.

Drugi primer ograničenosti modela da verno reprodukuje strujnu sliku iz prirode se vidi na slici 5.9, gde se model automobila ispituje u vazdušnom tunelu. Uslov da dolazne brzine budu istovetne, ovde je relativno lako postići, dok je drugi uslov, da je iznad automobila "beskonačan" prostor, gotovo nemoguće postići zbog ograničenih dimenzija vazdušnog tunela (na slici je nacrtan zbog toga zid i iznad modela). Znači, pored osnovnih ispitivanja sila na model, neophodno je sprovesti i posebna istraživanja o uticaju blizine drugog zida na strujnu sliku.

5.2.3 Dinamička sličnost

Dinamička sličnost znači da je, pored geometrijske i kinematske sličnosti, postignuta i *sličnost svih odgovarajućih sila*. U obzir se uzimaju realne sile (zapreminske, sila težine F_G i površinske, sila pritiska F_P po preseku i normalno na konturu i viskozna sila F_μ, ili sila trenja) i fiktivna inercijalna sila (slika 7.9 na strani 295), pri čemu mora biti postignuta ravnoteža tih sila (jednačina (7.10) na strani 295):

$$\vec{F_G} + \vec{F_P} + \vec{F_\mu} + \ldots + \vec{F_I} = 0$$



Slika 5.9: Sličnost dimenzija, brzina i sila koje deluju na automobil u mirovanju pri kretanju fluida brzinom V

Kako prema dinamičkoj sličnosti razmere za sve interesantne sile moraju biti iste (slika 5.9), sledi:

$$F_\star = \frac{F_{G_O}}{F_{G_M}} = \frac{F_{P_O}}{F_{P_M}} = \frac{F_{\mu_O}}{F_{\mu_M}} = \ldots = \frac{F_{I_O}}{F_{I_M}}$$

Ako se fiktivna inercijalna sila uzme kao referentna sila, tada se prethodna jednakost n sila može napisati kao $n-1$ nezavisnih uslova:

$$\left(\frac{F_I}{F_G}\right)_O = \left(\frac{F_I}{F_G}\right)_M, \quad \left(\frac{F_I}{F_P}\right)_O = \left(\frac{F_I}{F_P}\right)_M, \quad \left(\frac{F_I}{F_\mu}\right)_O = \left(\frac{F_I}{F_\mu}\right)_M, \ldots \tag{5.27}$$

U poglavlju 5.1.5, *Standardni bezdimenzionalni brojevi u Mehanici fluida*, uvedeni su bezdimenzionalni brojevi za većinu materijalnih konstanti (tabela 5.1). Pokazano je da su svi bezdimenzionalni brojevi u stvari odnosi inercijalnih sila i odgovarajućih realnih sila. Na primer, za Frudov broj (5.21) je pokazano izrazom (5.23) da se dobija kao odnos:

$$Fr = \frac{F_I}{F_G}$$

pa se onda prva jednakost u uslovu dinamičke sličnosti može napisati kao:

$$(Fr)_O = (Fr)_M \quad \Rightarrow \quad Fr_\star = \frac{(Fr)_O}{(Fr)_M} = 1$$

Uslov dinamičke sličnosti nameće da su Frudovi brojevi na objektu i modelu isti, odnosno, da je njihova razmera jednaka jedinici. Slično se može izvesti i za ostale jednakosti iz izraza (5.27), zamenjujući redom odgovarajuće bezdimenzionalne brojeve iz tabele 5.1, što daje $n-1$ nezavisnih uslova sličnosti svih sila:

$$Fr_\star = 1, \quad Eu_\star = 1, \quad Re_\star = 1, \quad We_\star = 1, \ldots \tag{5.28}$$

Na primer, ako je u nekom fenomenu dominantna samo sila težine (od realnih sila), model mora da zadovolji sličnost za sile težine i inercijalne sile, odnosno, da zadovolji da je razmera za Frudov broj $Fr_\star = 1$.

Uvođenjem dinamičke sličnosti, sada je moguće završiti primer 5.2.1, sa strane 203. Potrebno je odrediti koji su uticaji na objekat dominantni, i postaviti uslov da je razmera za odgovarajući broj jedinca. Ako su to uticaji viskoznosti, tada se uvodi uslov:

$$Re_\star = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_\star L_\star}{\nu_\star} = 1$$

Kako se modelira sa istim fluidom kao i na objektu, može se staviti da je $\nu_\star = 1$, pa se dobija nedostajuća veza između razmere za dužinu i za brzinu $V_\star L_\star = 1$, pomoću koje je moguće rešiti primer.

5.2.4 Sloboda izbora razmera za fizičke modele

Ako se kreće u avanturu pravljenja modela, kako odabrati razmere za osnovne veličine, dužinu $L_\star$, brzinu $V_\star$ i gustinu $\rho_\star$? Izbor tih razmera nije slobodan, jer se kroz uslov o zadovoljenju geometrijske, kinematske i dinamičke sličnosti vezuju pojedine razmere.

Najprostiji model treba da obezbedi sličnost samo geometrijskih (konturnih) i početnih uslova, pri čemu se ne postavljaju zahtevi za sličnost sila. Kod takvog modela je slobodan izbor sve tri razmere: $L_\star$, $V_\star$ i $\rho_\star$. Međutim, kako je izbor fluida sa kojima se modelira ograničen, razmera za gustinu mora biti fiksirana. Ako je na modelu i na objektu isti fluid, razmera će biti $\rho_\star = 1,0$, inače je $\rho_\star = \rho_O/\rho_M \neq 1,0$. Ovakva sličnost se naziva *inercijalna, ili geometrijska sličnost*, a istraživač je slobodan da izabere preostale dve razmere prema raspoloživom prostoru i uslovima u laboratoriji.

Ako se pored inercijalne (geometrijske) sličnosti traži i sličnost sila, onda je to *dinamička sličnost*, pa je potrebno ispuniti uslove (5.28), odnosno, obezbediti da razmere bezdimenzionalnih fizičkih karakteristika fluida (Re, We, Ca, Fr), koje u sebi nose odnose traženih sila i inercijalnih sila, budu jednake jedinici. *Dinamička sličnost vezuje broj nezavisnih razmera* tako da svaki dodatni zahtev o sličnosti neke od sila smanjuje za po jedan slobodne dve razmere (treća je vezana inercijalnim uslovom):

- *Broj slobodnih razmera: (3-1)-1=1* Ako se postavi uslov o sličnosti samo jedne, dominantne sile, koja je pod uticajem jedne fizičke karakteristike fluida (na primer, viskoznosti), tada se broj slobodnih razmera smanjuje sa dve na jednu. Obično se kao slobodna razmera uzima dužina.

- *Broj slobodnih razmera: (3-1)-2=0* Ako se traži da model ispuni uslov sličnosti za dve sile, broj slobodnih razmera je nula. Model je (barem teorijski) još uvek moguće napraviti, ali su sve razmere fiksirane. U realnosti, pitanje je da li je izvodljiv takav model, jer je potrebno naći fluid koji će se koristiti na modelu sa tačno definisanim karakteristikama, kako bi se ispunile zahtevane razmere.

- *Broj slobodnih razmera: (3-1)-3=?* I na kraju, ako se traži da model ispuni uslov sličnosti za tri ili više sila, model mora imati sve razmere jednake jedinici, odnosno, *model je isto što i objekat, priroda.*

U okviru kursa Mehanike fluida, na Građevinskom fakultetu, uglavnom se izučavaju fenomeni koji zavise od jedne dominantne sile: ili od sile viskoznosti (svi efekti povezani sa trenjem) ili od gravitacije (otvoreni tokovi):

1. Sličnost za viskozne uticaje (μ) znači uslov da je razmera za Rejnoldsov broj (strana 196, *Bezdimenzionalna viskoznost*) jednaka jedinici:

$$Re_\star = 1,0 = \frac{\rho_\star V_\star L_\star}{\mu_\star} = \frac{V_\star L_\star}{\nu_\star}$$

Ova sličnost se često naziva Rejnoldsova sličnost. Ako je isti fluid na modelu i objektu, Rejnoldsova sličnost se svodi na vezu razmera za brzine i dužine:

$$V_\star L_\star = 1 \quad \Rightarrow \quad V_\star = \frac{1}{L_\star}$$

pa se za 4 puta manji model, na primer, dobija da je potrebno postići 4 puta veće brzine na modelu da bi efekat viskoznosti ostao isti. Upravo zbog ove činjenice se često u modeliranju fenomena koje izaziva voda, na modelu koristi vazduh.

Takođe, treba obratiti pažnju da vreme na modelu znatno brže teče nego na objektu:

$$V_\star = \frac{1}{L_\star} \quad \Rightarrow \quad \frac{L_\star}{T_\star} = \frac{1}{L_\star} \quad \Rightarrow \quad T_\star = L_\star^2$$

a i gravitaciono ubrzanje nije isto:

$$g_\star = \frac{L_\star}{T_\star^2} = \frac{V_\star^2}{L_\star} = \frac{1}{L_\star^3} \tag{5.29}$$

2. Sličnost za gravitacione uticaje (g) znači uslov da je razmera za Frudov broj (strana 198, *Bezdimenzionalna gravitacija*) jednaka jedinici:

$$Fr_\star = 1,0 = \frac{V_\star^2}{g_\star L_\star}$$

Ova sličnost se naziva Frudova sličnost. U najvećem broju slučajeva su objekat i model u uslovima istog Zemljinog ubrzanja pa je uglavnom $g_\star = 1,0$ a Frudova sličnost se svodi na:

$$\frac{V_\star^2}{L_\star} = 1 \quad \Rightarrow \quad V_\star = \sqrt{L_\star}$$

Kod Frudove sličnosti, manji model znači i (sa korenom) manje brzine. Razmera za vreme je:

$$T_\star = \frac{L_\star}{V_\star} = \frac{L_\star}{\sqrt{L_\star}} = \sqrt{L_\star}$$

a za protok:

$$Q_\star = V_\star A_\star = \sqrt{L_\star}\, L_\star^2 = L_\star^{5/2}$$

Prilikom izvođenja razmera za pojedine veličine, koristi se pravilo sličnosti gde se razmere odnose kao dimenzije tih veličina. Da bi se izračunala razmera za neku veličinu, potrebno je napisati neki od najjednostavijih dimenzionalnih obrazaca (na primer, protok Q je proizvod brzine V i površine A, a površina je dužina L na kvadrat), a zatim formirati razmeru: sve dimeznionalne veličine dobijaju u indeksu zvezdicu, a svi bezdimenzionalni brojevi postaju jedinice.

5.2.5 Primeri fizičkih modela

Sličnost za inercijalne i gravitacione uticaje - Frudova sličnost Frudova sličnost se koristi kod fenomena gde je težina fluida dominantna, u oblasti otvorenih tokova (prelivi, propagacija talasa, propusna moć kanala, sile na ustave i slično) i u oblasti otpora kretanja tela koja su delimično uronjena u vodu.

Primer 5.2.2

Model ustave je napravljen prema Frudovoj sličnosti. Razmera za dužine je $L_\star = 16$. Kolika će biti razmera za brzinu ispod ustave, razmera za fluktuacije pritisaka na dno i za silu na ustavu?

Uslov za Frudovu sličnost je da razmera za Frudov broj bude jedan:

$$Fr_\star = 1{,}0 = \frac{V_\star^2}{g_\star L_\star} = \frac{V_\star^2}{L_\star}$$

gde je stavljeno da je razmera za gravitaciono ubrzanje $g_\star = 1$. Tražena razmera za brzine je:

$$V_\star^2 = L_\star \quad \Rightarrow \quad V_\star = \sqrt{L_\star} = \sqrt{16} = 4$$

Dobijena razmera za brzine važi za sve brzine na modelu, pa i za brzinu ispod ustave.

Kako je u pitanju Frudov model pravljen za zadovoljenje gravitacionih uticaja, za razmeru za pritisak je zgodno koristiti obrazac u kome se pojavljuje gravitacija. U hidrostatici se koristi obrazac:

$$p = \rho g(\Pi - z) = \rho g L$$

gde je član $(\Pi - z)$ zamenjen bilo kojom dužinom L. Razmera za pritisak je:

$$p_\star = \rho_\star g_\star L_\star = \rho_\star L_\star$$

Kako nije rečeno da li je isti fluid na objektu i na modelu, pretpostaviće se da se koristi voda u oba slučaja, pa je razmera za gustinu $\rho_\star = 1$. Tražena razmera za pritisak i za fluktuacije pritiska na dno je tada:

$$p_\star = L_\star = 16$$

Razmera za silu na ustavu se jednostavno dobija kada se zna razmera za pritisak:

$$F = pA \quad \Rightarrow \quad F_\star = (\rho_\star g_\star L_\star)L_\star^2 \quad \Rightarrow \quad F_\star = L_\star^3 = 4096$$

opet uz pretpostavku da je isti fluid na modelu i na objektu.

U datom primeru je dobijena velika razmera za sile. To praktično znači da će izmerena sila na modelu biti izuzetno mala: 16 puta smanjujući dužine, sila na modelu se smanjuje 4096 puta! Ovo predstavlja često praktičan problem u izvođenju eksperimenta. Takođe, treba voditi računa da razmera za vreme kod Frudove sličnosti nije jedinica, odnosno, vreme ne protiče istom brzinom na modelu i na objektu.

Istovremena Frudova i Rejnoldsova sličnost Prilikom izbora razmera, postavljanje uslova za istovremenu sličnost za dva uticaja, ukupan broj slobodnih razmera je nula, odnosno, sve razmere su međusobno povezane. Takav model je prilično teško napraviti, jer modelar ima ograničen dijapazon mogućih fluida sa kojima će modelirati prirodu, pa je i razmera za gustinu i viskoznost fluida ograničena.

Primer 5.2.3

Koje uslove treba da zadovolji model koji ima isti odnos inercijalnih i gravitacionih sila, kao i inercijalnih i viskoznih sila, odnosno model koji istovremeno zadovoljava uslove $Fr_\star = 1$ i $Re_\star = 1$?

Postavljeni uslovi daju sledeću vezu razmera za brzine i dužine:

$$Fr_\star = 1 \quad \Rightarrow \quad V_\star^2 = L_\star \tag{5.30}$$

$$Re_\star = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_\star V_\star L_\star}{\mu_\star} = \frac{V_\star L_\star}{\nu_\star} = 1{,}0 \quad \Rightarrow \quad V_\star L_\star = \nu_\star \tag{5.31}$$

Ako se na modelu i objektu koristi isti fluid ($\rho_\star = 1$), tada je razmera za kinematsku viskoznost $\nu_\star = 1$, pa se iz uslova $Re_\star = 1$ dobija veza razmera brzine i dužine:

$$V_\star L_\star = 1 \quad \Rightarrow \quad V_\star = \frac{1}{L_\star} \tag{5.32}$$

Sređivanjem izraza (5.30) i (5.32) dobija se rešenje za razmere $V_\star$ i $L_\star$:

$$\left.\begin{aligned} V_\star^2 &= L_\star \\ V_\star &= \frac{1}{L_\star} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} V_\star &= 1 \\ L_\star &= 1 \end{aligned}$$

Dobijeno rešenje pokazuje da ako se fiksira razmera za gustinu uzimanjem istog fluida, objekat i model moraju biti isti jer je razmera za dužine 1. Ako se na modelu i objektu upotrebe različiti fluidi, brzina iz izraza (5.30) se može staviti u izraz (5.31) i naći razmera za kinematsku viskoznost:

$$V_\star = \sqrt{L_\star} \quad \Rightarrow \quad \nu_\star = V_\star L_\star \quad \Rightarrow \quad \nu_\star = L_\star^{1/2} L_\star = L_\star^{3/2} = V_\star^3 \tag{5.33}$$

Dakle, da bi se ispunio postavljeni uslov, potrebno je na modelu koristiti takav fluid čija je kinematska viskoznost $\nu_M = \nu_O L^{-3/2}$.

Dobijen uslov o potrebnoj razmeri za kinematsku viskoznost u datom primeru nije lako postići. Eksperimentatorima je na raspolaganju veoma sužen opseg mogućih fluida, te je prilično teško napraviti model. Ako se, na primer, voda na objektu zameni vazduhom na modelu, tada je razmera za kinematsku viskoznost (5.33):

$$\nu_\star = \frac{\nu_O}{\nu_M} = \frac{10^{-6}}{1{,}6 \cdot 10^{-5}} = 0{,}0625$$

Model treba da ima razmeru za dužine:

$$L_\star = \nu_\star^{2/3} = 0{,}1575$$

odnosno, model treba da bude veći od objekta. Nešto je "zgodnije" istraživati otpore usled strujanja vazduha na objektu, jer je sada moguće koristiti vodu kao modelski fluid, pa će razmere za dužine i brzine biti:

$$L_\star = \frac{1}{0{,}1575} = 6{,}35 \qquad V_\star = \sqrt{L_\star} = \sqrt{6{,}35} = 2{,}52$$

Objekat i model su iste konstrukcije U hidrotehničkoj praksi se ponekad sreće i situacija da se na objektu obavljaju eksperimenti koristeći neki drugi fluid. Tada se i dalje govori o modeliranju, pri čemu je razmera za dužine $L_\star = 1$ a razmere za gustinu i viskoznost zavise od vrste upotrebljenog fluida. U najvećem broju slučajeva se radi o Rejnoldsovom modelu, a ispitivanja se sprovode radi utvrđivanja koeficijenta otpora (trenja ili oblika).

Primer 5.2.4

Pri pravljenju velikih tunelskih dovoda vode do hidrocentrale, bitno je postići što manje gubitke energije, odnosno, što manji koeficijent linijskog gubitka energije. Parametri tunela se često određuju uduvavanjem vazduha i merenjem pada pritiska na izabranoj deonici. Pri normalnim uslovima, gustina vazduha je $\rho = 1{,}2$ kg/m^3 i viskoznost $\mu = 1{,}92 \cdot 10^{-5}$ Pa s, dok su gustina vode $\rho = 1{,}0$ kg/dm^3 i viskoznost vode $\mu = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ Pa s. Kod trenja je dominantna viskoznost, pa se u modelskoj analizi moraju zadovoljiti sličnosti za inercijalne i viskozne uticaje. Ukoliko se izmeri razlika pritiska između dva preseka na cevovodu $\Delta p = 1{,}0$ kPa pri radu sa vazduhom, kolika će biti razlika pritiska u radu sa vodom?

Iz uslova zadatka sledi da mora biti zadovoljena Rejnoldsova sličnost:

$$Re_\star = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_\star V_\star D_\star}{\mu_\star} = 1 \quad \Rightarrow \quad V_\star = \frac{\mu_\star}{\rho_\star D_\star}$$

Objekat i model su jedan isti cevovod, tako da je razmera za dužine:

$$D_\star = \frac{D_O}{D_M} = 1$$

Na objektu se koristi voda a na modelu vazduh, pa su razmere za gustinu i viskoznost:

$$\rho_\star = \frac{\rho_O}{\rho_M} = \frac{1000}{1{,}2} = 833{,}33$$

$$\mu_\star = \frac{\mu_O}{\mu_M} = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-3}}{1{,}92 \cdot 10^{-5}} = 52{,}0833$$

Iz uslova da se koristi Rejnoldsova sličnost, sledi i razmera za brzine:

$$V_\star = \frac{\mu_\star}{\rho_\star D_\star} = \frac{52{,}0833}{833{,}33} = 0{,}0625$$

Na cevovodu je izmerena razlika pritiska od $\Delta p_M = 1{,}0$ kPa. Da bi se odredila razlika pritiska na objektu, potrebno je naći razmeru za pritisak. Kao dimenzionalni obrazac, koristiće se zaustavni pritisak:

$$p = C_p \frac{1}{2} \rho V^2$$

pa je razmera za pritisak:

$$p_\star = C_{p_\star}\left(\frac{1}{2}\right)_\star \rho_\star V_\star^2 = \rho_\star V_\star^2 = 833{,}33 \times 0{,}0625^2 = 3{,}255$$

Razlika pritisaka na objektu će biti:

$$p_\star = \frac{\Delta p_O}{\Delta p_M} \quad \Rightarrow \quad \Delta p_O = p_\star\, \Delta p_M = 3{,}255 \times 1{,}0 = 3{,}255 \text{ kPa}$$

Interesantno je pogledati kolika treba da bude brzina vazduha na modelu da bi se postigla brzina vode na objektu od 2 m/s. Razmera za brzine je:

$$V_\star = 0{,}0625 = \frac{V_O}{V_M} \quad \Rightarrow \quad V_M = \frac{V_O}{V_\star} = \frac{2}{0{,}0625} = 32 \text{ m/s}$$

pa se dobija prilično velika potrebna brzina vazduha u tunelu od $V = 32$ m/s ili $V = 115$ km/h.

Prilikom izvođenja razmere za pritisak u datom primeru, korišćen je obrazac za zaustavni pritisak. Da li je mogao da se koristi obrazac iz prethodnog primera 5.2.3: $p = \rho g h$? Razmere za gustinu $\rho_\star$ i dužinu $h_\star = D_\star$ su poznate, ali kolika je razmera za gravitaciju $g_\star$? Na strani 208 je pokazano (5.29) da razmera za gravitaciono ubrzanje kod Rejnoldsove sličnosti nije jedinica. Razmera $g_\star$ se može, na primer, posredno odrediti iz brzinske visine:

$$\frac{V_\star^2}{g_\star} = L_\star \quad \Rightarrow \quad g_\star = \frac{V_\star^2}{L_\star} = 0{,}0625^2 = 0{,}003906$$

pa je sada razmera za pritisak ista kao i izvedena preko zaustavnog pritiska:

$$p_\star = \rho_\star g_\star L_\star = 833{,}33 \times 0{,}003906 \times 1{,}0 = 3{,}255$$

Razmeru za gravitaciju je moguće dobiti i iz dimenzija ubrzanja, preko razmere za vreme:

$$g_\star = \frac{L_\star}{T_\star^2} \quad \Rightarrow \quad T_\star = \frac{L_\star}{V_\star} = \frac{1}{0{,}0625}$$

$$g_\star = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{0{,}0625}\right)^2} = 0{,}0625^2 = 0{,}003906$$