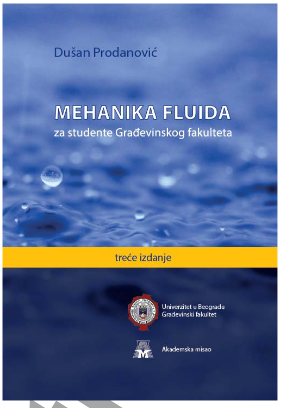


Glava 4

Osnove dinamike fluida

U prethodnoj glavi je izučavana *hidrostatika*, oblast mirovanja fluida konstantne gustine. Prefiks "hidro" je korišćen da se naglasi nestišljivost fluida, odnosno, da se radi sa fluidima koji su slični vodi. Od ove glave knjige, pa nadalje, izučavaće se *kretanje (strujanje ili tečenje) fluida*, pri čemu će se izvesti opšte jednačine, koje važe i za gasove i za tečnosti. Korišćenje naslova poput *hidrodinamika*, stoga ne bi bilo korektno, tako da se koristi opštiji pojam: *dinamika fluida*.

Izučavanje kretanja realnog fluida je veoma složeno. U ispisivanju jednačina koristiće se analogija sa Mehanikom krutog tela, uz uvođenje potrebnih dodatnih veza. Tri osnovne grupe jednačina koje će se izvesti su: jednačina održanja mase, količine kretanja i energije. Dobijene jednačine su u opštem slučaju nerešive, pa su potrebna određena uprošćenja, kao i obiman eksperimentalni rad, kojim će se analizirati rezultat tih uprošćenja.

U nastavku ove glave će se prvo dati osnovni pojmovi vezani za kretanje fluida. Nakon toga će se objasniti različiti pristupi u izučavanju kretanja fluida, kao i koncept kontrolne zapremine. Osnovne jednačine održanja će se izvesti za elementarnu zapreminu u diferencijalnom obliku i za konačnu zapreminu u integralnom obliku. Za određene primere postaviće se uslovi u okviru kojih se te jednačine svode na nivo algebarskih, rešivih jednačina.

U sledećoj glavi 7, *Ustaljeno tečenje fluida kroz cevi*, detaljnije će se obraditi slučaj kretanja tečnosti (tečenja) u cevima, u razvijenom turbulentnom režimu. Analiza režima tečenja u cevima, zajedno sa otporima trenja, će biti data u posebnoj glavi 6, *Hidrodinamički otpori*. U istoj glavi će se obraditi i otpori trenja ravnih ploča u fluidu, kao i otpori oblika. Na kraju, oblast kretanja fluida se završava glavom 8, *Otvoreni tokovi*, gde će se analizirati ustaljeno tečenje u prizmatičnim otvorenim kanalima.

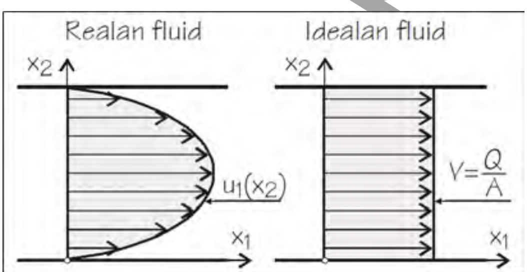
4.1 Pojmovi i osnovne karakteristike toka

U oblasti kretanja fluida se uvodi dosta novih pojmova, kao što su turbulencija, dimenzionalnost strujanja, strujnica i slično. U nastavku ovog poglavlja će se dati kratka objašnjenja i definicije za neke od tih pojmova. Takođe, izvršiće se podela strujanja prema osnovnim karakteristikama toka (linijsko ili prostorno strujanje, promenljivo kroz vreme ili nepromenljivo, režimi strujanja) i prema karakteristikama fluida (realan ili idealan fluid, stišljiv ili nestišljiv). Deo o režimima strujanja je, međutim, ovde dat veoma kratko, jer će znatno detaljnije biti obrađen u poglavlju 6.1, *Trenje pri jednolikom tečenju kroz cev kružnog poprečnog preskeka.*

4.1.1 Materijalni delić, strujanje realnog i idealnog fluida

U Mehanici krutih tela, masa (ili telo), za koju se pišu jednačine, jasno je definisana. U Mehanici fluida se jednačine najčešće postavljaju za deo fluidnog prostora, za *materijalni* ili *fluidni delić*, koji je beskonačno mali deo. On poseduje dovoljnu masu da može, kao elementarni deo, da reprezentuje ceo fluid, a istovremeno je dovoljno veliki da poseduje sve osobine cele fluidne mase. Fluidni delić može da menja oblik i zapreminu, ali ne i masu. Veze između fluidnih delića su iste kao i veze između konačnih masa fluida.

Korišćenje fluidnog delića pretpostavlja da je *fluid neprekidan* (potpuno zauzima prostor, nema prekida, rupa), tako da se u strujanju neće pojaviti delovi prostora koji nisu ispunjeni fluidom i *izotropan* (sve osobine se podjednako ispoljavaju u različitim pravcima, odnosno, u svim pravcima ima ista fizička svojstva, istovetno se ponaša).



Slika 4.1: Raspored brzina u cevi pri strujanju realnog i idealnog fluida

Jedna od osnovnih, fizičkih karakteristika svih fluida je viskoznost (poglavlje 2.2 *Viskoznost*). Zahvaljujući viskoznosti, između fluidnih delića se prenose uticaji, trenje, odnosno, tangencijalni naponi. Veličina, odnosno, stepen trenja, zavisi od relativne brzine između delića (jednačina (2.6)).

Prilikom rešavanja zadataka iz Mehanike fluida, kada se trenje uzima u obzir, odnosno, viskoznost, fluidi se nazivaju *realni fluidi.* Međutim, u analizi strujanja fluida često je neophodno da se pretpostavi da ne postoji trenje između fluidnih delića kako bi se rešile jednačine. Takav fluid se tada naziva *idealan fluid* (strana 17), a viskoznost μ se zanemaruje.

Posledica zanemarenja trenja, odnosno, nepostojanja tangencijalnih napona, je bezvrtložnost fluida: fluidni delići se tako deformišu da ne dolazi do njihove rotacije (strana 111), pa se kod idealnog fluida ne javljaju ni lokalni gubici energije (strana 162), odnosno, ne postoji gubitak energije na trenje (slika 7.15 na strani 306). Posledica nepostojanja trenja je prikazana na slici 4.1: kod realnog fluida, zid preko trenja koči deliće, dok kod idealnog fluida nema trenja pa svi delići u preseku imaju istu brzinu.

4.1.2 Stišljiv i nestišljiv, homogen i nehomogen fluid

U poglavlju 2.5, *Elastične deformacije, stišljivost fluida*, razmatrana je stišljivost fluida kao jedna od bitnih fizičkih karakteristika. Tada je rečeno da su svi fluidi u izvesnoj meri stišljivi. Kod gasova je ta stišljivost u većini zadataka tolika da se ne može zanemariti, dok je kod tečnosti stišljivost mala, pa se najčešće zanemaruje, a za tečnosti se kaže da su *nestišljive* (jednačina (4.21) na strani 110).

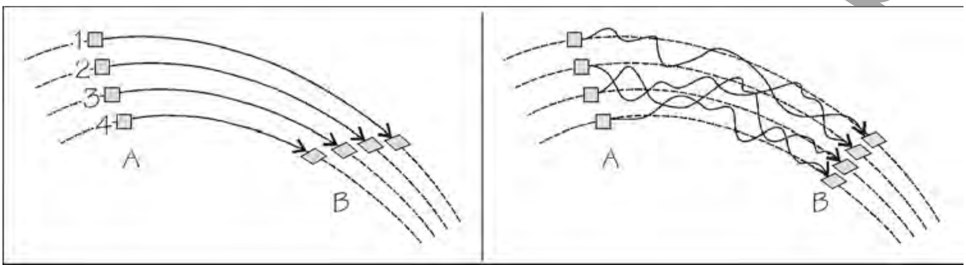
Postoje mnogi zadaci Mehanike fluida u kojima načinjena podela na stišljive gasove i nestišljive tečnosti nije korektna. Na primer, prilikom izučavanja otpora oblika, ukoliko se telo nalazi u vazduhu i ukoliko su brzine vazduha relativno male, može se pretpostaviti da je vazduh nestišljiv, čime se znatno uprošćava proračun (strana 249). Ili, kod tečenja vode u cevovodima, usled nagle promene brzine, može se javiti hidraulički udar, pojava u kojoj talas visokog pritiska brzo putuje kroz cevovod, pod uticajem upravo stišljivosti vode u sadejstvu sa elastičnošću zida cevi.

Prilikom rešavanja diferencijalnih jednačina kretanja fluidnog delića, često je potrebno definisati osobine fluida po prostoru. Fluid je *homogen* ako u svim tačkama ima iste osobine, pa se ne mora voditi računa o položaju fluidnog delića. U suprotnom, fluid je *nehomogen* i sve fizičke osobine su funkcija položaja.

U zadacima se često postavlja uslov $\rho = \text{Const.}$ Ovaj uslov znači da je fluid homogen, ali ne znači automatski i da je fluid nestišljiv. I obrnuto, nestišljiv fluid ne mora biti istovremeno i homogen: na primer, voda u jezeru ima različitu temperaturu po dubini, a samim tim i gustinu iako je voda nestišljiva.

4.1.3 Laminarno i turbulentno strujanje

U zavisnosti od uslova strujanja i brzine, fluidni delić se može kretati po "glatkoj" putanji, bez mešanja i presecanja svoje putanje sa putanjama drugih delića, ili može haotično da prepliće svoju putanju sa drugim delićima, da formira vrtloge i talase, a da ipak na kraju stigne do istog odredišta kao i onaj delić koji je išao po "glatkoj" putanji.



Slika 4.2: Kretanje fluidnog delića pri laminarnom (levi deo slike) i turbulentnom strujanju (desni deo slike)

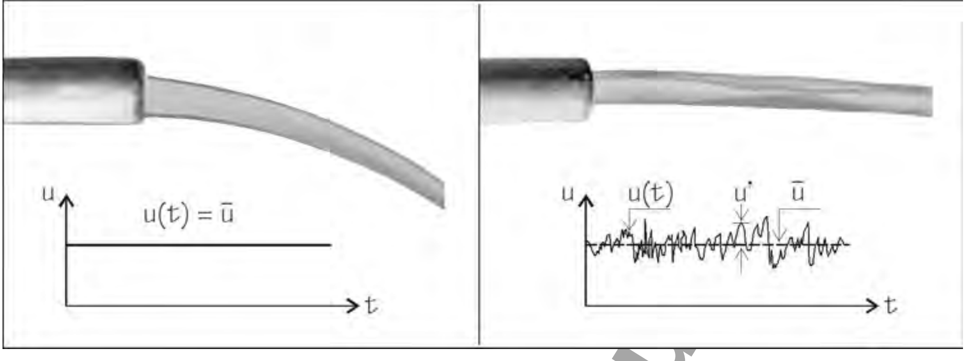
Uredno, glatko kretanje fluidnih delića se naziva *laminarno strujanje* (levi deo slike 4.2) dok se haotično, ili uzburkano kretanje, prikazano na desnom delu slike, naziva *turbulentno strujanje*. Laminarno strujanje je povezano sa malim brzinama, gde je viskoznost dovoljno jaka da zadrži deliće na svojoj putanji i da ne dozvoli bržem deliću 1 (sa slike 4.2) da, usled kočenja od strane sporijeg delića 2, bude povučen ka tom deliću, ili obrnuto, da sporiji delić usled ubrzavanja promeni svoju putanju. Ako je brzina dovoljno velika, viskoznost neće više moći da spreči mešanje delića i pojaviće se turbulencija.

Na slici 4.2 se vidi još jedan rezultat turbulencije. Zbog intenzivnog mešanja delića, sporiji delići koče brže, a brži ubrzavaju sporije, pa je rezultat tog procesa bolje uprosečavanje svih veličina po strujnom polju. Delići koji su bili sporiji, sada se u preseku B kreću brže, a oni brži su malo usporili. Kada ne bi bilo turbulencije, na primer, zagađenje usled ispuštanja prljave vode iz kolektora u reku bi teklo kao jedna zagađena nit, ne bi se pomešalo i razblažilo sa ostatkom vode.

Prve razlike u ponašanju fluida pri malim i velikim brzinama su detaljnije opisane tokom 1830-ih godina. Tada je postalo jasno da se radi o različitim *režimima strujanja*, da nisu isti uticaji dominantni pri malim brzinama strujanja i pri velikim, te da treba odvojeno istraživati te oblasti. Veliki doprinos u istraživanju je dao Osborn Rejnolds,[1] izvodeći 1883-će eksperi-

[1]Osborne Reynolds (1842 - 1912), britanski inženjer i naučnik. Potiče iz poznate i obrazovane svešteničke familije. Posle završenog Kembridža, zapošljava se u inženjerskoj firmi u Londonu, da bi 1868. prešao na Owens Colledge (današnji Univerzitet u Mančesteru) kao prvi profesor inženjerstva, gde je ostao sve do svoje penzije. Rejnolds je dao značajan doprinos u proučavanju fluida, uslova strujanja u cevima i prelaza iz

mente tečenja vode u glatkim cevima, upravo u prelaznim režimima. Po njemu je nazvan i bezdimenzionalan broj koji definiše granicu dva strujanja.



Slika 4.3: Laminarno i turbulentno isticanje vode iz cevi: izgled mlaza vode i izmerene brzine kroz vreme

U prirodi je laminarno strujanje retko ostvaruje. To su uglavnom strujanja gde su brzine izuzetno male: u podzemnim vodama, u jezerima usled temperaturne neravnomernosti ili izlazak dima iz dimnjaka po mirnom danu, kada nema vetra. Turbulentno strujanje je češće u rekama, kanalima, vodovodnim mrežama ili kada duva vetar. Na slici 4.3 je prikazan primer isticanja vode iz cevi malog prečnika, kada je tečenje u mlazu pri manjim brzinama laminarno, a pri nešto većim brzinama (i protocima) postaje turbulentno (u mlazu se primećuje uzburkanost). Ako bi se dalje povećavao protok, mlaz bi postao isprekidan, sa potpuno razvijenom turbulencijom.

Na donjem delu slike 4.3, dati su dijagrami brzina. Dok je strujanje laminarno, brzina je kroz vreme konstantna $u(t) = \overline{u} = \text{Const.}$ (gde je sa $\overline{u}$ označena srednja brzina). Kada strujanje postane turbulentno, brzina više nije konstantna već je promenljiva kroz vreme $u = u(t)$. Radi lakšeg izučavanja turbulentnog strujanja, moguće je brzinu razdvojiti na dve komponente: jednu koja je jednaka srednjoj vrednosti brzine $\overline{u}$ i koja je konstantna i drugu, slučajnu komponentu u', koja se naziva *fluktuacije*:

$$u(t) = \overline{u} + u' \quad \Rightarrow \quad u' = u(t) - \overline{u}$$

Pošto su fluktuacije razlika između trenutnih i osrednjenih brzina, srednja vrednost fluktuacija je nula $\overline{u'} = 0$, ali srednja vrednost kvadrata fluktuacija

laminarnog u turbulentan tok. Među prvima se bavio i izučavanjem turbulencije, gde je predložio osrednjavanje toka po vremenu razdvajanjem turbulentnog toka na osrednjenu brzinu i na fluktuacije. Intenzivno se bavio i modeliranjem, teorijom podmazivanja kao i uslovima stabilnosti toka.

nije nula $\overline{u'^2} \neq 0$.

Ovde je kao primer turbulencije uzeta brzina delića. Naravno, kao i brzina, tako i sve ostale veličine koje se vezuju za delić su u turbulentnom strujanju promenljive kroz vreme, te se mogu razdvojiti na osrednjeni i fluktuacioni deo.

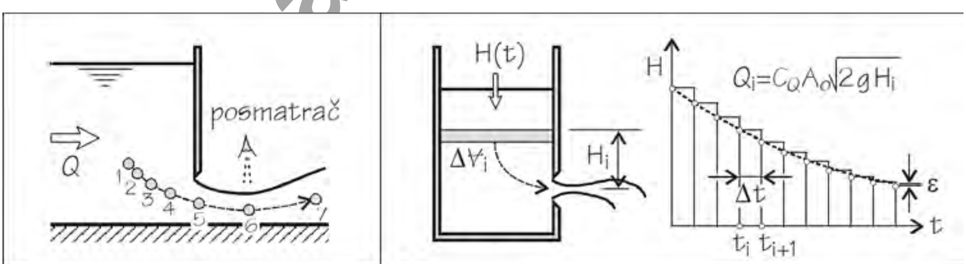
Princip osrednjavanja jednačina i uvođenje fluktuacione komponente nije predmet ove knjige, jer se ne izučava na redovnim studijama na Građevinskom fakultetu. Jednačine, koje će se u nastavku ove glave izvesti, važe samo za laminarno strujanje. Da bi se primenile na osrednjeni deo turbulentnog strujanja, neophodno je u jednačine uneti uticaj fluktuacija na osrednjeni tok, što se najčešće sprovodi kroz "turbulentnu viskoznost". Međutim, turbulencija će se spominjati i u narednim poglavljima. U poglavlju 6, *Hidrodinamički otpori*, jer upravo turbulencija bitno utiče na otpore, tako da će se u tom poglavlju dati malo detaljnije objašnjenje mehanizma nastajanja vrtloga. Takođe, u poglavljima 7, *Ustaljeno tečenje fluida kroz cevi*, i 8, *Ustaljeno tečenje u otvorenim tokovima*, razmatra se samo turbulentno tečenje, ali se u tim poglavljima uticaj turbulencije obračunava posredno, kroz različite koeficijente.

4.1.4 Ustaljeno i neustaljeno strujanje

Ukoliko se posmatrane veličine ne menjaju u određenom, konačnom vremenskom intervalu, strujanje je *ustaljeno*. Uslov za ustaljenost je:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{u intervalu} \quad (t_1, t_2)$$

odnosno, veličina φ je funkcija samo položaja a ne i vremena: $\varphi = \varphi(x, y, z)$. Ukoliko se veličina φ menja sa vremenom, onda je strujanje *neustaljeno*.



Slika 4.4: Ustaljeno ili neustaljeno strujanje i kako ga računati

Da li je strujanje ustaljeno ili ne često zavisi i od načina kako se posmatra određena veličina. Na levom delu slike 4.4, dat je primer isticanja vode ispod ustave. Ako je protok koji dotiče, jednak onome koji ističe, nivo vode ispred ustave će biti konstantan, nepromenljiv kroz vreme, znači ustaljen. Posmatranjem brzine u suženom preseku (na slici je nacrtano oko posmatrača), takođe će se "videti" ustaljene brzine. Međutim, ako se posmatra brzina jednog delića, od trenutka 1 do trenutka 7, on menja svoju brzinu, pa je njegova brzina neustaljena.

Neustaljenost donosi dosta problema u rešavanju jednačina Mehanike fluida. Ukoliko su promene kroz vreme relativno spore, pa su članovi, koji sadrže ubrzanje, u jednačinama zanemarljivi u odnosu na ostale koji unose uticaje težine, trenja i pritiska. Proračun se može značajno uprostiti primenjujući princip *kvaziustaljenosti*: strujanje se u nekom kratkom vremenskom intervalu posmatra kao da je ustaljeno, odrede se nepoznate veličine, a onda se sa tim veličinama koriguje početno stanje. Kao primer, na slici 4.4 desno je prikazano isticanje vode iz rezervoara, gde nivo postepeno pada pa se i protok smanjuje. U vremenskom trenutku t_i, za poznati nivo, može se izračunati protok koristeći jednačinu za ustaljeno tečenje. Pretpostavljajući da je protok konstantan u intervalu $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ može se izračunati novi nivo u rezervoaru u trenutku t_{i+1}. Ako se uzme relativno mali korak Δt u proračunu, razlike između stvarne promene nivoa (isprekidana linija) i izračunate (na slici je ta razlika označena sa ϵ), biće prihvatljivo male.

4.1.5 Jednoliko i nejednoliko strujanje

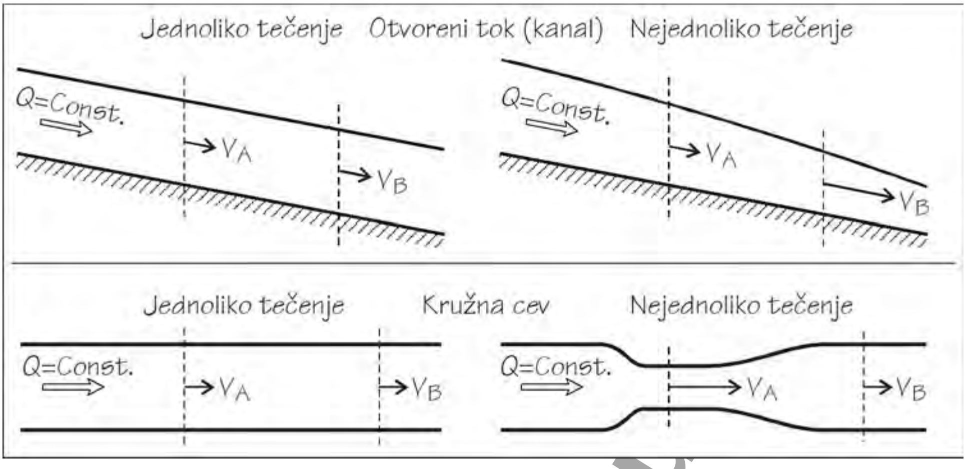
U prethodnom poglavlju je na levom delu slike 4.4, pokazano da je moguće imati neustaljenost brzine delića, iako su nivo vode i protok ustaljeni. Ta neustaljenost je rezultat promene geometrije proticajnog preseka.

Ukoliko su veličine koje su bitne za izučavani problem istovetne u svim posmatranim poprečnim presecima fluidne struje, u jednom vremenskom trenutku, kaže se da je strujanje *jednoliko* (leva strana slike 4.5). Uslov za jednoliko strujanje je:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \qquad \text{za trenutak: } t = t_j$$

Ako se niz fluidnu struju neka od veličina menja, iako su možda sve ostale veličine konstantne, strujanje je *nejednoliko*. Na slici 4.5 sa desne strane, prikazano je nejednoliko tečenje u otvorenom kanalu gde se menjaju dubina vode i brzina iako je protok konstantan, kao i nejednoliko tečenje u cevi, gde se menja prečnik cevi, pa i brzina vode.

Studenti pojmove jednoliko/nejednoliko i ustaljeno/neustaljeno često mešaju. Ustaljenost je vezana za promenu po vremenu u jednom preseku



Slika 4.5: Jednoliko i nejednoliko tečenje u kanalu i u kružnoj cevi

fluidne struje (gleda[2] se kroz duži period samo jedan presek), a jednolikost za promenu duž fluidne struje u jednom vremenskom trenutku (pogleda[3] se na kratko duž cele fluidne struje).

4.1.6 Dimenzionalnost problema: 3D, 2D, 1D

U opštem slučaju pri strujanju fluida delići imaju komponente brzina u sva tri koordinatna pravca $u = u(x, y, z, t)$. Takvo strujanje se naziva *prostorno strujanje* ili skraćeno *3D (tro-dimenzionalno strujanje)*. Svakodnevni primeri 3D strujanja su opstrujavanje automobila, tečenje vode u zoni vodozahvata ili opstrujavanje mostovskog stuba.

Ukoliko je jedna komponenta brzine zanemarljiva u odnosu na ostale dve, strujanje se naziva *ravansko* ili *2D strujanje*: $u = u(x, y, t)$. Primer ravanskog strujanja je opstrujavanje avionskog krila u srednjem delu, izvan uticaja tela aviona i kraja krila. Rezultat izučavanja polja brzina u jednoj presečnoj ravni se može primeniti na sve ostale presečne ravni.

Često je strujanje na "granici" između 3D i 2D. Na primer, strujanje vode u velikim jezerima ima sve tri komponente brzine, ali je dubina znatno manja veličina od dužine i širine. U računskim modelima takvih strujanja,

[2]Ustaljenost/neustaljenost tečenja reke bi mogla da se snimi kamerom. Potrebno je namestiti kameru na stativ, postaviti je vertikalno na dole i pustiti je da snima nivo vode u samo jednom preseku toka.

[3]Jednolikost/nejednolikost tečenja u kanalu se može snimiti fotoaparatom, sa kratkom ekspozicijom, slikajući iskosa nivo vode duž kanala.

često se treća komponenta brzine obračunava "skraćeno", osrednjeno, čime se proračun svodi na nivo 2D modela, uz zadržavanje uticaja i treće komponente brzine. Takvi računski modeli se često nazivaju i *2,5D modeli*.

Ako postoji samo jedna, podužna komponenta brzine, takvo strujanje se naziva *linijsko* ili *1D strujanje*: $u = u(x, t)$. Sva tečenja u cevima, prizmatičnim otvorenim kanalima, kanalima za klimatizaciju i drugim linijskim elementima spadaju u 1D strujanja.

Jasno je da složenost rešavanja zadataka Mehanike fluida raste od linijskog ka prostornim strujanjima. Osnovni inženjerski problem je do koje mere neko složeno prostorno strujanje sme da se uprosti, a da se dobije prihvatljivo tačno rešenje. Na primer, iako je tečenje vode u prirodnim rekama sigurno prostorni problem, proračun nivoa reka Save i Dunava se može raditi kao linijski problem ako se posmatraju nivoi reka duž njihovog toka u našoj zemlji. Ako nas interesuje prostiranje zagađenja koje Beograd ispušta u Dunav i njegovo razblaženje nizvodno, tok u dužini od nekih 10-tak kilometara će se rešavati sa 2D jednačinama. Ako se analizira strujna slika u zoni ušća Save u Dunav, koristiće se 3D model, ali samo za lokalitet ušća.

4.1.7 Trajektorija, strujnica i emisiona linija

Postoje tri načina za praćenje kretanja fluidnih delića. Prvi je da se obeleži samo jedan fluidni delić i da se prati njegovo kretanje kroz vreme. Trag koji delić ostavlja zove se *trajektorija*[4]. Drugi način je istovremeno praćenje kretanja velikog broja fluidnih delića. Ako se u kratkom vremenskom intervalu zabeleže tragovi svih delića, dobiće se *strujnice*[5], intenziteti i pravci brzina tih delića. Treća mogućnost vizuelizacije fluidnog toka je da se u tok kontinualno ubacuje (injektira) traser, odnosno, da se kontinualno obeležavaju fluidni delići koji prolaze kroz jednu tačku. Ako se u određenom trenutku snimi položaj svih obeleženih delića, dobija se *emisiona linija*[6] za taj vremenski trenutak.

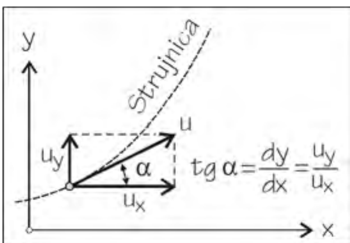
Na slici 4.6, prikazane su sve tri linije: trajektorija delića prilikom isticanja ispod ustave, strujnice oko avionskog krila i emisiona linija u cevi, u laminarnom režimu tečenja koji postepeno prelazi u turbulentno. Trajektorije se najčešće dobijaju tako što se određeni deo fluidne struje slika fotoaparatom, koji miruje i na kome se drži dugačko vreme ekspozicije. Ako se jedan fluidni delić obeleži nekim fluorescentnim traserom i cela fluidna struja osvetli ultraljubičastim zracima (UV svetlo), posmatrani delić će se jasno razlikovati od

[4] Engleski termin: Pathline
[5] Engleski termin: Streamline
[6] Engleski termin: Streakline

Slika 4.6: Primeri trajektorije, strujnica i emisione linije

ostalih delića i fotoaparat će zabeležiti njegovu putanju, trajektoriju. Kod snimanja trajektorija na rekama, često se koriste mali plovci na koje se stavi sveća.

Strujnice su linije koje imaju u svakoj svojoj tački tangentu, koja je u pravcu brzine u toj tački. Kod neustaljenog strujanja, *strujnica se vezuje i za vremenski trenutak*: ona pokazuje istovremene pravce brzina u svim tačkama. Strujnice se dobijaju fotografisanjem fluidne struje, koristeći kratko vreme ekspozicije. U celu fluidnu struju se obično ubacuje[7] fluorescentni prah koji se kreće isto kao i fluidni delići. Na snimku se dobijaju, u stvari, trajektorije trasera ali za kratak vremenski interval, tako da te trajektorije pokazuju tangente na brzine.



Slika 4.7: Jednačina strujnice

U izučavanju strujanja oko tela, strujnice se često vizuelizuju korišćenjem tankih štapića koji su pričvršćeni upravno na konturu tela a na čijem drugom kraju se nalazi tanak končić. Iz položaja svih končića u jednom trenutku se dobijaju strujnice[8].

Jednačina strujnice se dobija iz uslova da je tangenta u tački istog nagiba kao i vektor brzine (slika 4.7):

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{u_y}{u_x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{u_x} = \frac{\mathrm{d}y}{u_y} = \frac{\mathrm{d}z}{u_z} \tag{4.1}$$

Pošto strujnica u svakoj svojoj tački ima isti smer kao i vektor brzine, sledi i važna posledica: upravno na strujnicu ne postoji komponenta brzine, odnosno, *nema protoka fluida upravno na strujnicu.* Ako se uoče bilo koje dve susedne strujnice na srednjoj slici 4.6, ovo znači da protok koji je bio između te dve strujnice na početku slike, ispred avionskog krila, mora ostati unutar te dve strujnice. Drugim rečima, dve strujnice se mogu posmatrati kao zidovi cevi, pa se u Mehanici fluida često koristi i pojam *strujna cev.*

[7]Termin koji se koristi je "zasejati", jer je potrebno uneti u celu fluidnu struju fluorescentni prah ili neki drugi traser čiji delići moraju biti dovoljno mali a opet lako vidljivi.

[8]I zastava koja se viori na vetru, u stvari, pokazuje trenutni pravac vetra u toj tački.

Primer 4.1.1

Ako je na snimku opstrujavanja avionskog krila (srednja slika 4.6) razmak između dve strujnice ispred krila 5 mm i na tom mestu su brzine 35 m/s, kolika je brzina na mestu iznad krila gde su strujnice na međusobnom rastojanju od 3 mm?

Pretpostaviće se da je treća dimenzija, upravna na snimak, jednaka 1 m. Tada je protok kroz strujnu cev ispred krila:

$$Q = AV = 0{,}005 \times 1{,}0 \times 35 = 0{,}175\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

Brzina iznad krila je:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0{,}175}{0{,}003 \times 1{,}0} = 58{,}3\mathrm{m/s}$$

Emisiona linija (desna slika 4.6) se često koristi za vizuelizaciju toka. Upravo je Osborn Rejnolds, pomoću vizuelizacije emisione linije, pokazao mehanizam prelaska iz laminarnog u turbulentno tečenje, kao i postojanje graničnog sloja (slika 6.11 na strani 231). Sam postupak injektiranja trasera je prilično komplikovan, jer se ne sme pokvariti prirodna strujna slika a ni traser svojim osobinama ne sme uticati na tok. Emisiona linije se češće koristi u laboratoriji za vizuelizaciju, nego u samoj analizi strujnog polja.

U opštem slučaju, trajektorija, strujnica i emisiona linija se ne poklapaju. Međutim, u *ustaljenom strujanju su sve tri linije iste*, poklapaju se. Linije se mogu poklapati i u posebnom slučaju neustaljenosti, ali samo ako se neustaljenost ogleda u promeni intenziteta brzine.

Primer 4.1.2

Voda izlazi iz prskača praveći polje brzina: $u = U_0 \sin[\omega(t - y/V_0)]$, $v = V_0$ i $w = 0$ gde su U_0, V_0 i ω konstante (prskač osciluje u (x, y) ravni) [20]. a) Odrediti jednačinu strujnice koja prolazi kroz koordinatni početak u vremenskim trenucima $t_1 = 0$ i $t_2 = \pi/2\omega$. b) Odrediti jednačinu trajektorije za iste vremenske trenutke. c) Kako izgleda emisiona linija za koordinatni početak?

a) Za dati raspored brzina može se napisati jednačina strujnice (4.1):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v}{u} = \frac{V_0}{U_0 \sin[\omega(t - y/V_0)]}$$

Razdvajanjem varijabli, dobija se integralna jednačina za bilo koji trenutak t:

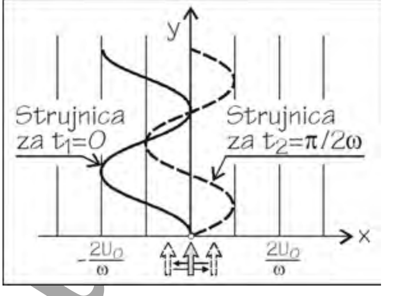
$$V_0 \int \mathrm{d}x = U_0 \int \sin[\omega(t - y/V_0)]\,\mathrm{d}y$$

Uvodeći smenu $\omega\,(t - y/V_0) = \varphi$ dobija se rešenje integralne jednačine:

$$V_0 x + C = U_0 \frac{V_0}{\omega} \cos\left[\omega\left(t - \frac{y}{V_0}\right)\right]$$

Za trenutak $t_1 = 0$ u koordinatnom početku $x = y = 0$ vrednost konstante je $C = U_0 V_0/\omega$ pa je jednačina strujnice:

$$x = \frac{U_0}{\omega}\left[\cos\left(\frac{\omega\, y}{V_0}\right) - 1\right] \quad \text{za} \quad t = t_1 = 0$$



U trenutku $t_2 = \pi/2\omega$ vrednost konstante je $C = 0$ pa se sređivanjem jednačina strujnice svodi na:

$$x = \frac{U_0}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\, y}{V_0}\right) \qquad \text{za} \quad t = t_2 = \pi/2\omega$$

Na slici su prikazane dve strujnice, za izabrane vremenske trenutke t_1 i t_2. Linije su različite jer je strujanje neustaljeno. Na primer, brzina u koordinatnom trenutku je u trenutku t_1 jednaka $u = 0, v = V_0$, dok je u trenutku t_2 brzina $u = U_0, v = V_0$.

b) Iz uslova da su brzine $u = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ i $v = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, za poznat raspored brzina se mogu odrediti trajektorije:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = U_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{y}{V_0}\right)\right] \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = V_0$$

Drugi izraz $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ se može integrisati jer je V_0 konstanta, pa se dobija: $y = V_0 t + C_1$. Ako se y zameni u prvom izrazu dobija se:

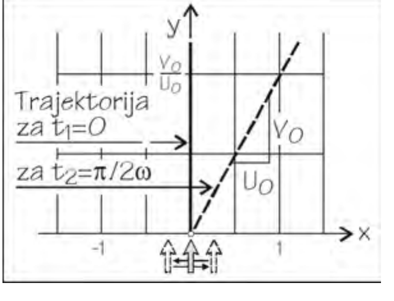
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = U_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{V_0 t + C_1}{V_0}\right)\right] = -U_0 \sin\left(\frac{\omega\, C_1}{V_0}\right) = \mathrm{Const.}$$

Integracijom se dobija x komponenta trajektorije:

$$x = -\left[U_0 \sin\left(\frac{\omega\, C_1}{V_0}\right)\right] t + C_2$$

Konstante se određuju za date početne uslove. Za slučaj $t_1 = 0$ i za koordinatni početak $(x = y = 0)$ njihova vrednost je $C_1 = C_2 = 0$ pa je jednačina trajektorije prava linija $y = V_0\, t$. Za drugi slučaj $t_2 = \pi/2\omega$ vrednosti konstanti su $C_1 = -\pi V_0/2\omega$ i $C_2 = -\pi U_0/2\omega$ pa je jednačina trajektorije data sa:

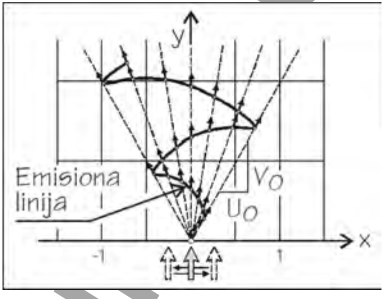
$$x = U_0\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right) \quad \text{i} \quad y = V_0\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right)$$



Eliminišući t iz jednačina njihovim deljenjem, dobija se jednačina trajektorije:

$$y = \frac{V_0}{U_0}\, x$$

Iz jednačine trajektorije sledi da su to prave linije koje se zrakasto šire iz koordinatnog početka. Na slici su prikazane trajektorije za dva delića: jednog koji je bio u koordinatnom početku u trenutku t_1 a drugog u trenutku t_2. Trajektorije i strujnice se ne poklapaju, jer je strujanje neustaljeno.



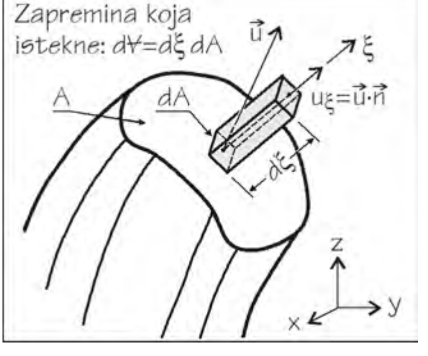
c) Emisiona linija u trenutku $t = t_3$ se dobija spajanjem svih delića koji su prošli kroz koordinatni početak. Svi delići putuju duž trajektorija koje su prave linije pod nagibom $\pm V_0/U_0$. U zavisnosti od trenutka $t < t_3$ kada su delići prošli kroz koordinatni početak, trajektorije i udaljenja su različiti. Kad bi se kontinualno ubrizgavao traser u fluidnu struju u koordinatnom početku, linija koja bi se videla bi izgledala kao prikazana emisiona linija. Slična emisiona
linija se dobija kada se prskač creva za zalivanje trave oscilatorno pomera.

4.1.8 Protok fluida i srednja brzina

Posmatra se zapremina $\mathcal{V}$ ograničena površinom A. Iz te površine A, kroz elementarnu površinu dA izlazi fluid koji sa sobom nosi neku karakterističnu veličinu. Ta veličina može biti zapremina, masa, količina kretanja ili neka druga karakteristika.

Na slici 4.8 je prikazano kako kroz dA ističe zapremina d$\mathcal{V}$. U jedinici vremena je isteklo $\mathrm{d}\mathcal{V} = \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}A$, gde je ξ normala na površ dA, pa je protok zapremine:

$$\mathrm{d}Q = \frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = u_\xi\,\mathrm{d}A \qquad (4.2)$$



Slika 4.8: Zapremina koja ističe

jer je $\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}t = u_\xi$. Brzina u_ξ je komponenta vektora brzine $\vec{u}$, na mestu dA, u pravcu ξ i jednaka je skalarnom proizvodu vektora brzine i orta posmatrane elementarne površine dA:

$$u_\xi = \vec{u}\cdot\vec{n}$$

Rezultat skalarnog proizvoda dva vektora $\vec{u}\cdot\vec{n}$ je skalar, jednak zbiru proizvoda odgovarajućih komponenata tih vektora:

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = u_x \times n_x + u_y \times n_y + u_z \times n_z$$

U radu sa vektorima, često je zgodnije pravac vektora obeležavati indeksom[9] i, gde je $i = x, y, z$ ili opštije $i = 1, 2, 3$. Ako se usvoji pravilo da u jednom monomu mogu da se ponove isti indeksi i da tada oni označavaju trinom koji je zbir monoma za sva tri koordinatna pravca, tada se skalarni proizvod može napisati kao:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = u_i n_i = u_1 \times n_1 + u_2 \times n_2 + u_3 \times n_3$$

Elementarni protok zapremine kroz dA dat jednačinom (4.2) je:

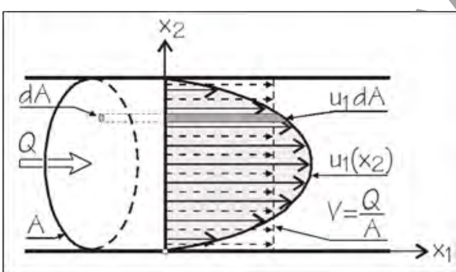
$$\mathrm{d}Q = u_i n_i \,\mathrm{d}A$$

dok je ukupni protok suma elementarnih protoka po celoj površini A:

$$Q = \int_A \vec{u} \cdot \vec{n} \,\mathrm{d}A = \int_A u_i n_i \,\mathrm{d}A \tag{4.3}$$

Iz jednačina (4.2) i (4.3) se vidi da je *protok pozitivan kada fluid ističe, napušta posmatranu zapreminu.* Ukoliko se zapremina d$\forall$, koja ističe kroz dA, u jednačini (4.2), pomnoži sa gustinom, ρd$\forall$, dobija se isticanje elementarne mase. Ukupan protok mase kroz površinu A je tada:

$$Q_M = \int_A \rho \, u_i n_i \,\mathrm{d}A \tag{4.4}$$



Slika 4.9: Stvarni raspored brzina u preseku $u(x_2)$ i srednja brzina V koja se često koristi kao reprezentativna profilska brzina

Uopšteno, može se napisati protok bilo koje veličine B koja je po jedinici zapremine jednaka φ kao:

$$Q_B = \int_A \varphi \, u_i n_i \,\mathrm{d}A \tag{4.5}$$

odnosno, veličine B koja je po jedinici mase jednaka b kao:

$$Q_B = \int_A \rho b \, u_i n_i \,\mathrm{d}A \tag{4.6}$$

Ako se izučava kretanje fluida kroz konačni presek A, po pravilu brzine u preseku nisu konstantne (na primer, na slici 4.9 je prikazano tečenje fluida kroz kružnu cev, gde se brzine menjaju od nule uz sam zid cevi do maksimalne vrednosti u centru cevi). U većini praktičnih zadataka promenljivost brzine po preseku $u(x)$ nije interesantna,

[9] Detaljniji prikaz obeležavanja skalarnih, vektorskih i tenzorskih veličina se može naći u poglavlju 15 knjige *Mehanika fluida, osnove* G. Hajdin, 1977-2002 [9].

već nam je dovoljna jedna brzina V, koja bi bila konstantna po preseku[10]. Ta brzina se naziva *srednja profilska brzina* i dobija se iz uslova da je $V \times A$ jednako zapreminskom protoku kroz cev (jednačina (4.3)):

$$V \times A = \int_A u_1(x_2)\,\mathrm{d}A \quad \Rightarrow \quad V = \frac{Q}{A} \tag{4.7}$$

Samo u malom broju zadataka, kada se u izrazu pojave trenutne brzine $u(x)$ na drugi ili treći stepen i kada se želi postići veća tačnost proračuna, uvode se korekcioni faktori: Businesov faktor β (poglavlje 4.5.5 *Rešenje integralne jednačine održanja količine kretanja za ustaljeno tečenje homogenog fluida u cevi*, strana 150) i Koriolisov faktor α (poglavlje 4.6.3 *Rešenje integralne jednačine održanja energije za ustaljeno tečenje homogenog fluida u cevi*, strana 165).

Primer 4.1.3

U ustaljenom ravanskom strujanju izmedju dve paralelne nepokretne ploče, koje su na međusobnom rastojanju h, raspored brzina je dat sa:

$$u_1 = U_0\left[1 - \left(\frac{x_3 - \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2\right] \qquad u_2 = u_3 = 0 \qquad \text{za} \qquad 0 \le x_3 \le h$$

Za razmak izmedju ploča od $h = 1$ cm i protok za jedan metar širine fluidne struje $B = 1$ m od $Q = 6$ dm^3/s ($0 \le x_2 \le 1$), kolika je vrednost konstante U_0?

Protok između dve ploče je dat integralom:

$$Q = \int_A u\,\mathrm{d}A = \int_0^h u_1 B\,\mathrm{d}x_3 \qquad \text{gde je} \qquad B = 1 \text{ m}$$

Ako se zameni raspored brzina u_1 u integralu, gde su B i U_0 konstante, dobija se:

$$Q = B\int_0^h U_0\left[1 - \left(\frac{x_3 - \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2\right]\mathrm{d}x_3 = BU_0\int_0^h \mathrm{d}x_3 - BU_0\int_0^h\left(\frac{x_3 - h/2}{h/2}\right)^2\mathrm{d}x_3$$

$$Q = BhU_0 - BU_0\frac{4}{h^2}\int_0^h\left(x_3^2 - hx_3 + \frac{h^2}{4}\right)\mathrm{d}x_3 = BhU_0 - BU_0\frac{4}{h^2}\frac{h^3}{12} = \frac{2}{3}BhU_0$$

Za date podatke, vrednost konstante U_0 je:

$$U_0 = \frac{3Q}{2Bh} = \frac{3 \times 0{,}006}{2 \times 1 \times 0{,}01} = 0{,}9 \text{ m/s}$$

---

[10] U poglavlju 4.1.1 *Materijalni delić, strujanje realnog i idealnog fluida* je kao primer razlike strujanja realnog i idealnog fluida upravo uzeto strujanje kroz cev.

4.2 Metode opisivanja kretanja fluida

U opisivanju strujnog polja, moguća su dva različita pristupa:

Sistemski pristup Traži se rešenje bez sagledavanja šta se događa unutar *sistema*[11]. To je moguće uraditi na dva načina:

1. Posmatra se *inercijalni*[12] *sistem sa konstantnom masom*. Pristup je uobičajen u klasičnoj mehanici, gde se izučava kretanje krutih tela. Svi klasični zakoni kretanja (I i II Njutnov zakon, termodinamički zakon) važe za sistem sa konstantnom masom. Kod fluida, jednačinama se opisuje kretanje jednog delića konstantne mase $\mathrm{d}m = \rho\, \mathrm{d}V\!\!\!\!/$.

2. Posmatra se *inercijalni sistem sa konstantnom zapreminom* (ili sa *kontrolnom zapreminom*). Zgodniji pristup za analizu kretanja fluida jer se ne prati kretanje jednog (određenog) delića već se posmatra jedna konstantna zapremina, koja se kroz vreme ne pomera, a kroz koju prolaze fluidni delići (slika 4.11 na strani 103). Jednačinama se prati samo ukupni bilans neke od veličina unutar zapremine (promena veličine u zapremini kroz vreme, protok kroz granicu zapremine i "proizvodnja" te veličine unutar zapremine moraju biti u ravnoteži) dok sama prostorna raspodela te veličine unutar zapremine nije bitna. Jednačine su dosta jednostavnije od onih koje prate kretanje delića, ali je *neophodno klasične zakone kretanja prevesti iz oblika za konstantnu masu u oblik za konstantnu zapreminu*.

   Sistemi sa konstantnom zapreminom se nekada nazivaju i *otvoreni sistemi*. Po definiciji, sistemski pristup zahteva praćenje uvek istih atoma ili fluidnih delića. Kod kontrolne zapremine to nije slučaj, jer jedni fluidni delići napuštaju posmatranu zapreminu dok drugi ulaze u nju. Međutim, svi fluidni delići *kontinualno prolaze* kroz posmatranu zapreminu jer nema "rupa" u fluidnom polju, a fizička svojstva (osobine) im se *kontinualno menjaju*: nema skokovite, nagle promene neke od osobina (gustine, pritiska, temperature i slično).

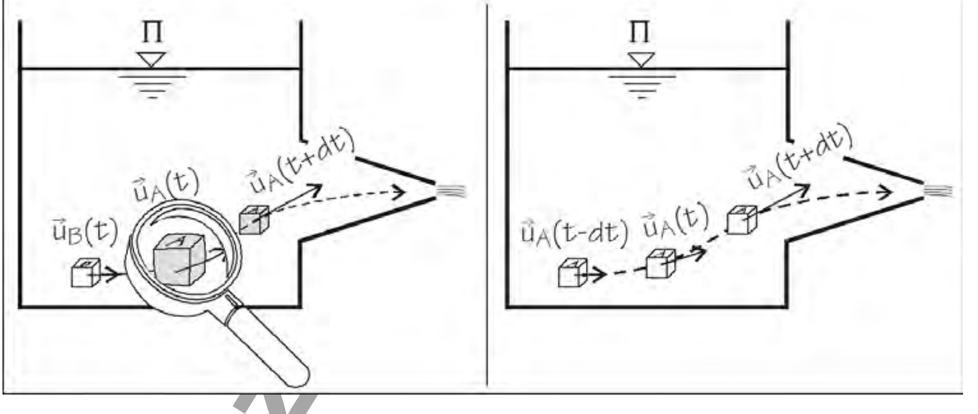
[11] Prema jednoj od definicija, sistem je zbir čestica istih svojstava (uvek isti atomi ili fluidni delići) koje mogu da se kreću, teku i stupaju u interakciju sa okolinom.

[12] Osnovna osobina inercijalnih sistema je da je u odnosu na njih prostor homogen i izotropan a vreme homogeno.

Zadatak inženjera građevine se uglavnom svodi na proračun ukupne sile na objekat (ventil na cevovodu, zgradu), usled opstrujavanja fluida, bez zalaženja u detalje (šta se događa sa fluidnim delićem dok se provlači kroz poluotvoreni ventil ili kroz nečiju sobu). Zbog toga će se u ovoj knjizi uglavnom koristiti sistem sa konstantnom zapreminom. U sledećem poglavlju, prvo će biti izvedene jednačine koje povezuju konstantnu masu i konstantnu zapreminu, a u nastavku, na osnovu tih jednačina, biće izvedeni osnovni zakoni održanja.

Jednačine koje se dobijaju sistemskim pristupom se najčešće rešavaju u integralnom obliku, jer se posmatra cela masa odnosno kontrolna zapremina. Za ovakve jednačine se često kaže da su *konzervativne, jer bilans posmatrane veličine u celokupnoj posmatranoj zapremini mora biti uvek zadovoljen.* Uz dopunske pretpostavke o ustaljenom strujanju homogenog i idealnog fluida, jednačine se svode na obične algebarske jednačine.

Analiza strujnog polja Proučava se kretanje delića u svakoj tački koordinatnog sistema. Moguća su dva pristupa u praćenju delića:



Slika 4.10: Ojlerov pristup: prate se promene u jednoj tački polja (levo); Lagranžeov pristup: prate se promene koje se događaju jednom deliću (desno)

1. Ojlerov[13] pristup: manje detaljan pristup gde se *posmatraju parametri polja kroz vreme, ali u fiksnoj tački prostora.* Ne zna

[13] Leonhard Euler (1707 - 1783) švajcarski matematičar koji je dao znatan doprinos Njutnovskoj mehanici formulišući jednačine kretanja idealnog fluida i čvrstih tela. Bio je đak Jakoba Bernulija a dobar prijatelj sa Danijelom Bernulijem. Zbog bolesti je izgubio vid prvo na jednom, pa zatim i na drugom oku, ali to ga nije sprečilo da nastavi svoj izuzetan rad.

se tačno koji je delić unutar posmatrane tačke, jer jedan delić napusti tačku, a drugi dolazi na njegovo mesto (levi deo slike 4.10, posmatra se trenutno delić A, koji će otići, a na njegovo mesto će doći delić B).

2. Lagranžeov[14] pristup: najdetaljniji način izučavanja fluidne struje, gde se *prati svaki delić pojedinačno i karakteristike polja vezane uz taj delić* (na slici 4.10 desno, prati se delić A). Ovaj pristup je najkomplikovaniji ali i daje potpuni uvid u strujno polje.

U analizi strujnog polja se polazi od jednačina za fluidni delić i one se najčešće rešavaju u diferencijalnom obliku. Jednačine *nisu konzervativne*, jer se posmatra samo jedan delić, a bilans neke posmatrane veličine će biti zadovoljen na nivou celokupne zapremine. Kod neustaljenog strujanja homogenih ili nehomogenih fluida, do rešenja jednačina se uglavnom dolazi numeričkim putem, približnim metodama.

Bez obzira da li se radi na nivou sistema ili na nivou delića u strujnom polju, jednačine koje se dobijaju su, u opštem slučaju, analitički nerešive. Da bi se rešile, neophodno je uvesti određena uprošćenja, koja su opravdana u konkretnom zadatku. Može se reći, u stvari, da je *predmet mehanike fluida razvoj matematičkih metoda za rešavanje opštih jednačina mehanike kao i vrste uprošćavanja, koja se moraju primeniti da bi jednačine bile rešive.*

4.3 Koncept kontrolne zapremine

Osnovni zakoni održanja koji se primenjuju u klasičnoj mehanici, kao što su zakoni održanje mase, Njutnovi zakoni i zakoni termodinamike, odnose se na sisteme sa konstantnom masom. U izučavanju fluida, zgodnije je posmatrati fiksnu, konstantnu zapreminu, koja se ne pomera kroz vreme i kroz koju protiče fluid. Pri tome, potrebno je uspostaviti vezu između sistema sa konstantnom masom i sistema sa konstantnom zapreminom[15],

[14] Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) smatra se francuskim matematičarem i astronomom, mada je rođen u Torinu, Italija. I pored toga što je u matematičkom obrazovanju bio samouk, već sa 19 godina postaje profesor matematike na Kraljevskoj Artiljerijskoj školi u Torinu. Objavljuje, pod nadzorom Ojlera, račun verovatnoće, bavi se teorijom oscilacija žica, gde koristi diskretni model masa i rešava sisteme od $(n+1)$ diferencijalnih jednačina. Analizirao je rešavanje diferencijalnih jednačina u oblasti mehanike fluida, ali i u oblasti astronomije. Za svoje zasluge u oblasti matematike je dobio 1808. od Napoleona orden Legije časti.

[15] U literaturi se prelazak sa sistema koji posmatra masu na sistem koji posmatra zapreminu, ili region, često naziva Rejnoldsova transportna teorema.

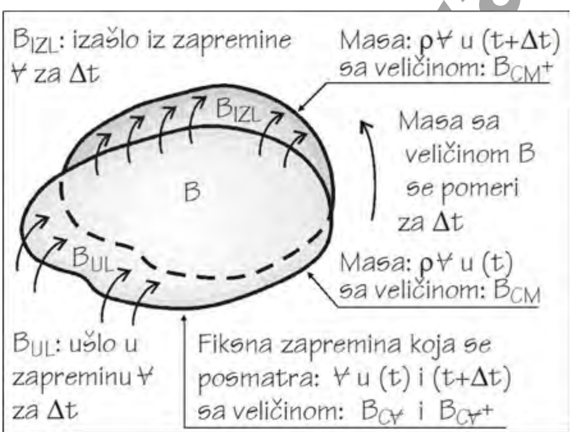
kako bi mogle da se iskoriste osnovne jednačine održanja na fluid u posmatranoj zapremini.

U nastavku će se prvo uspostaviti veza između konstantne mase i zapremine, odakle će se dobiti opšti *izraz za promenu neke karakteristične veličine vezane uz masu (koja se pomera), posmatranjem nepokretne zapremine*. Uvešće se pojam materijalnog izvoda, koji se odnosi na kretanje određenog fluidnog delića, kao i pojam brzine deformacije fluidnog delića. Kako materijalni izvod prati promenu delića, odnosno određene mase fluida koja se kreće kroz prostor, da bi zadržali koncept korišćenja nepokretne konstantne zapremine, na kraju će se uspostaviti veza između materijalnog izvoda i konstantne zapremine.

4.3.1 Prelazak sa konstantne mase na konstantnu zapreminu

Posmatra se određeni *inercijalni sistem* mase m. Veličina B je neka *karakteristična veličina* tog sistema (masa, impuls mase ili energija). Kako je masa mera inercije sistema, uvodi se veličina b koja je jednaka veličini B po jedinici mase[16], tako da je:

$$B = bm$$



Slika 4.11: Konstantna masa se nalazila u posmatranoj zapremini u trenutku (t) da bi deo te mase napustio zapreminu u $(t + \Delta t)$

Ako se posmatra deo fluidne struje, masa fluidnog delića je $\mathrm{d}m = \rho\, \mathrm{d}\forall$, a vrednost karakteristične veličine delića je $\mathrm{d}B = b\, \mathrm{d}m$. Sumiranjem vrednosti karakteristične veličine po celokupnoj posmatranoj masi fluida, dobija se:

$$B = \int_{\forall} \rho b \, \mathrm{d}\forall \tag{4.8}$$

Na slici 4.11, prikazana je konačna masa fluida sa karakterističnom veličinom B. U trenutku t, vrednost karakteristične veličine je B_{CM}, a kada

[16]U nekim knjigama se kao karakteristika inercijalnog sistema uvodi veličina Φ i veličina ϕ jednaka Φ po jedinici zapremine. Prema ovde usvojenim oznakama važe sledeće relacije: $\Phi = B$, $\phi = \rho b$ i $\Phi = \int \phi \, \mathrm{d}\forall$.

se posle nekog malog vremena Δt konačna masa pomeri u novi položaj, uz poštovanje osnovnih zakona održanja klasične mehanike, vrednost karakteristične veličine će biti B_{CM^+}.

Koncept konstantne zapremine *zahteva praćenje promene karakteristične veličine* B *unutar zapremine koju je konačna masa zauzimala u trenutku* t. Ako se sa $C\forall$ označi ta zapremina, tada je $B_{C\forall}$ vrednost karakteristične veličine u trenutku t a $B_{C\forall^+}$ u trenutku $t + \Delta t$. Sa slike 4.11, vidi se da mora biti ispunjen uslov:

$$B \text{ u trenutku } t = B_{CM} = B_{C\forall} \tag{4.9}$$

U trenutku $t+\Delta t$, kada se posmatrana masa pomeri, vrednost njene karakteristične veličine je:

$$B \text{ u trenutku } t + \Delta t = B_{CM^+} = B_{C\forall^+} + B_{IZL} - B_{UL}$$

gde su B_{IZL} i B_{UL} količine karakteristične veličine koje za vreme Δt napuste ili uđu u konstantnu zapreminu. Promena karakteristične veličine u vremenu je, uz zamenu B_{CM} sa $B_{C\forall}$ na osnovu jednačine (4.9):

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{B_{CM^+} - B_{CM}}{\Delta t} = \frac{B_{C\forall^+} - B_{C\forall}}{\Delta t} + \frac{B_{IZL} - B_{UL}}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{\Delta B_{C\forall}}{\Delta t} + \frac{B_{IZL} - B_{UL}}{\Delta t}$$

Smanjenjem vremenskog koraka sa Δt na $\mathrm{d}t$, dobija se *veza između sistema sa konstantnom masom i sistema sa konstantnom zapreminom* (Rejnoldsova transportna teorema):

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}B_{C\forall}}{\mathrm{d}t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_{IZL} - B_{UL}}{\Delta t}$$

Izvod po vremenu $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ je promena bilo koje osobine sistema sa konstantnom masom, $\mathrm{d}B_{C\forall}/\mathrm{d}t$ je promena te osobine unutar kontrolne zapremine, a zadnji član je ukupno izašla karakteristična veličina kroz konturu konstantne zapremine. Koristeći (4.8) prethodna jednačina se može napisati u sledećem obliku:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\forall} \rho b \, \mathrm{d}\forall = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{C\forall} \rho b \, \mathrm{d}\forall + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_{IZL} - B_{UL}}{\Delta t}$$

pri čemu se *granica prvog integrala pomera sa pomeranjem posmatrane mase*, a *granica drugog integrala je nepokretna* (sa desne strane jednakosti). Kako je granica nepokretna, nije funkcija vremena pa se izvod po vremenu može uvući unutar drugog integrala:

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\forall} \rho b \,\mathrm{d}\forall = \int_{C\forall} \frac{\partial(\rho b)}{\partial t}\,\mathrm{d}\forall + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{B_{IZL} - B_{UL}}{\Delta t} \tag{4.10}$$

Zadnji član jednačine predstavlja protok karakteristične veličine B kroz granicu konstantne zapremine (izlaz - ulaz). U poglavlju 4.1.8 *Protok fluida i srednja brzina* je pokazano da je protok veličine B kroz površinu A (jednačina (4.6)) jednak:

$$Q_B = \int_{CA} \rho b\, u_i n_i \,\mathrm{d}A$$

Da bi se naglasilo da je *granica integracije konstantna, da se ne pomera kroz vreme*, umesto integracije po A u izrazu se piše integracija po CA.

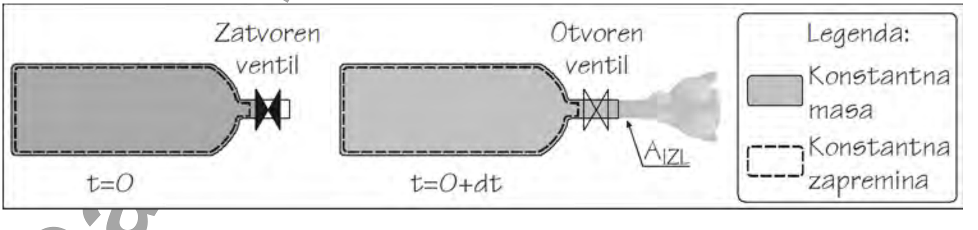
Sređivanjem jednačine (4.10), dobija se tražena veza između promene veličine B za sistem sa konstantnom masom i za sistem sa konstantnom zapreminom, koji će se koristiti u daljim izvođenjima:

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \int_{C\forall} \frac{\partial(\rho b)}{\partial t}\,\mathrm{d}\forall + \int_{CA} \rho b\, u_i n_i \,\mathrm{d}A \tag{4.11}$$

Prvi, zapreminski integral, predstavlja lokalnu promenu veličine B kroz vreme, unutar fiksne kontrolne zapremine ($C\forall$), a drugi, površinski integral, protok veličine B kroz površinu (CA), omotač fiksne kontrolne zapremine.

Primer 4.3.1

U sudu konstantne zapremine se pod pritiskom nalazi fluid. U početnom trenutku $t = 0$ sud je zatvoren. U trenutku $t = 0 + \mathrm{d}t$ naglo se ovori ventil i fluid počne da ističe. Napisati izraz za promenu mase fluida u sudu kada se otvori ventil?



Na slici je, sa leve strane, prikazan sud sa zatvorenim ventilom, se celokupnom masom fluida unutar suda, dok je sa desne strane prikazan trenutak kada se otvori ventil i kada fluid počne da izlazi iz suda. Posmatra se masa fluida, pa je karakteristična veličina $B = m$ a njena vrednost po jedinici mase $b = 1$. Jednačina (4.11) se svodi na:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \int_{C\rlap{-}V} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}\rlap{-}V + \int_{CA} \rho\, u_i n_i\,\mathrm{d}A$$

Prema osnovnom zakonu mehanike, masa sistema je nepromenljiva, pa je leva strana jednačine nula. Ako se pretpostavi da je fluid homogen, parcijalni izvod po vremenu sa desne strane jednačine može da izađe ispred integrala, jer je gustina samo funkcija vremena, a ne i prostora.

Poslednji član jednačine je protok mase kroz konturu, u trenutku kada se otvori ventil. Ako se sa A_1 označi proticajna površina, a brzina kojom fluid napušta sud sa V_1, tada je protok mase $(+\rho V_1 A_1)$. Prethodna jednačina se svodi na:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{C\rlap{-}V} \rho\,\mathrm{d}\rlap{-}V + \rho V_1 A_1$$

Integral $\int_{C\rlap{-}V} \rho\,\mathrm{d}\rlap{-}V$ je jednak masi fluida koja je ostala u sudu $m_{C\rlap{-}V}$, pa se dobija finalna jednačina:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_{C\rlap{-}V}\right) = -\rho V_1 A_1$$

odnosno, smanjenje mase fluida u sudu je jednako masi fluida, koja izađe iz suda u jedinici vremena.

Površinski integral iz jednačine (4.11) se, na osnovu Gausove[17] teoreme, može pretvoriti u zapreminski integral[18]:

$$\int_{CA} \rho b\, u_i n_i\,\mathrm{d}A = \int_{C\rlap{-}V}\left[\frac{\partial(\rho b u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho b u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho b u_z)}{\partial z}\right]\mathrm{d}\rlap{-}V \tag{4.12}$$

Korišćenjem udvojenog indeksa i (notacija koja će se koristiti u ovoj knjizi) ili operatora gradijenta nabla $\vec{\nabla}$, sumiranje parcijalnih izvoda po koordinatnim pravcima (4.12) se može prikazati kompaktnije:

$$\int_{CA} \rho b\, u_i n_i\,\mathrm{d}A = \int_{C\rlap{-}V} \frac{\partial(\rho b u_i)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\rlap{-}V = \int_{C\rlap{-}V} \vec{\nabla}\cdot(\rho b \vec{u})\,\mathrm{d}\rlap{-}V \tag{4.13}$$

[17] Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) je poznati nemački matematičar koji je dao veliki doprinos fundamentalnoj algebri, teoriji brojeva, teoriji diferencijalnih jednačina, teorijskoj astronomiji, hipergeometrijskim funkcijama i neeuklidskoj geometriji. Zajedno sa Veberom je radio na otkriću Kirhohovih pravila kao i na uspostavljanju svetske mreže za merenje Zemljinog magnetizma.

[18] Detaljno izvođenje se može naći u poglavlju 23 knjige *Mehanika fluida, osnove* G. Hajdin, 1977-2002.

Zamenom površinskog intergrala zapreminskim u jednačini (4.11), dobija se izraz za promenu u vremenu karakteristične veličine B, vezane za konstantnu masu, prilikom kretanja te mase, a posmatranjem konstantne, nepokretne, zapremine:

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \int_{C\forall} \left[\frac{\partial(\rho b)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho b u_i)}{\partial x_i} \right] \mathrm{d}\forall \tag{4.14}$$

Prema principu održanja veličine B, promena u vremenu $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ mora biti jednaka nekoj drugoj veličini S, koja se odnosi na celokupnu masu:

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = S \tag{4.15}$$

Na primer, ako je B masa, tada je $S = 0$, jer masa ne može ni da se stvori ni da nestane. Za količinu kretanja $B = mV$, veličina S je prema drugom Njutnovom zakonu suma sila, koja izaziva promenu količine kretanja posmatrane mase. Takođe, prema prvom zakonu termodinamike, za unutrašnju energiju $B = \mathbf{E}$, veličina S je jednaka razlici dovedene količine toplote i rada koji sistem utroši na okolna tela. U narednim poglavljima 4.4, 4.5 i 4.6, detaljno će se izučiti principi održanja posmatranjem konstantne zapremine fluida.

4.3.2 Praćenje kretanja materijalnog delića

U opštem slučaju brzina fluidnog delića, kao i ostale veličine koje su vezane uz delić (gustina, pritisak, koncentracija zagađivača i slično), su funkcija i vremena i prostora $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$. U Mehanici fluida se često koristi izvod veličine φ po vremenu. Ako je u pitanju, na primer, koncentracija dima u vazduhu C, taj izvod je moguće odrediti na tri načina. Prvi bi bio da se postavi instrument za merenje koncentracije dima na određeno, fiksno mesto i da se kontinualno beleži koncentracija. Brzina promene koncentracije je tada jednaka $\partial C/\partial t$, parcijalnom izvodu koncentracije po vremenu.

Druga mogućnost je da se montira instrument na avion, koji će leteti nekom svojom trajektorijom a da instrument kontinualno meri koncentraciju C. Instrument će zabeležiti brzinu promene koncentracije u jednoj tački, ali i brzinu promene koncentracije po prostoru usled kretanja aviona:

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial C}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

Izvodi pomeranja aviona po vremenu su komponente njegove brzine u_x^A, u_y^A i u_z^A pa se prethodni izraz može napisati u obliku:

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x}u_x^A + \frac{\partial C}{\partial y}u_y^A + \frac{\partial C}{\partial z}u_z^A \tag{4.16}$$

Treća mogućnost je da se instrument postavi u balon i da se pusti da vazdušna struja slobodno nosi balon. Promena koncentracije po vremenu je slična onome što je zabeleženo i kada je instrument bio u avionu, sa tom razlikom što je sada balon pratio kretanje vazduha, pa se umesto brzine aviona sada uzima brzina vazduha, odnosno brzina materijalnog delića:

$$\frac{\mathrm{D}C}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x}u_x + \frac{\partial C}{\partial y}u_y + \frac{\partial C}{\partial z}u_z = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x_i}u_i \tag{4.17}$$

U jednačini je za izvod po vremenu $\mathrm{D}C/\mathrm{D}t$ upotrebljeno veliko slovo da bi se naglasilo da se radi o izvodu koji prati kretanje fluidnog delića. Takav izvod po vremenu se zove *materijalni (supstancijalni) izvod*, jer je vezan za kretanje materijalne tačke.

Na slici 4.12, prikazan je jedan fluidni delić u trenutku t, sa svojom trajektorijom i strujnicom. Uz delić se prati neka veličina φ. U sledećem trenutku $t + \mathrm{d}t$, kad bi delić mogao da se pomeri u bilo kom pravcu $\mathrm{d}x$, promena veličine φ bi bila $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ (4.16). Međutim, materijalni delić može samo da nastavi po svojoj trajektoriji i jedini mogući pravac njegovog kretanja je $\mathrm{D}x$. Izvod veličine φ po vremenu je:

$$\frac{\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u_x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + u_z\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Izraz se može napisati u notaciji sa indeksima, gde udvajanje indeksa i označava tri sabirka, tako da se dobija uopšteni oblik materijalnog izvoda:

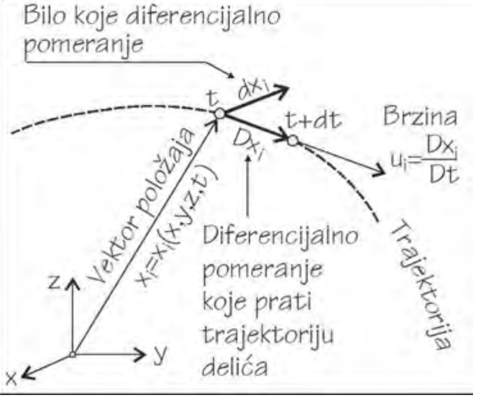
$$\frac{\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u_i\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \tag{4.18}$$

Ako je, na primer, veličina φ komponenta brzine u pravcu y tada je ubrzanje delića u tom pravcu jednako materijalnom izvodu:

$$\frac{\mathrm{D}u_y}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_i\frac{\partial u_y}{\partial x_i}$$

odnosno, za bilo koji pravac i:

$$\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{4.19}$$



Slika 4.12: Iz položaja x_i, delić se u sledećem trenutku ne može pomeriti za bilo koje diferencijalno pomeranje $\mathrm{d}x_i$ već samo za $\mathrm{D}x_i$, duž svoje trajektorije

Indeks j, u prethodnoj jednačini, označava sumiranje tri člana, dok indeks i daje pravac vektora.

U jednačini (4.18) prvi sabirak predstavlja promenu veličine φ kroz vreme, dok se delić nalazi u fiksnoj tački pa se taj član često naziva *lokalna komponenta izvoda*. U lokalnom izvodu je fiksiran prostor, delić se ne pomera već se samo gleda promena veličine φ kroz vreme.

Drugi sabirak jednačine (4.18) daje promenu veličine φ, koja je nastala usled promene položaja materijalnog delića. Taj član se naziva *konvektivna komponenta izvoda*. Kod konvektivne komponente je fiksirano vreme, a gleda se kolika je promena veličine φ po prostoru.

Primer 4.3.2

Iz rezervoara u kome se nivo vode postepeno smanjuje, izlazi horizontalna cev čiji se prečnik postepeno povećava. U preseku 1 je prečnik cevi $D_1 = 0{,}15$ m a u preseku 2, koji se nalazi 2 m nizovodno, prečnik je $D_2 = 0{,}17$ m. U trenutku $t_a = 10$ s u preseku 1 je izmerena brzina $V_1^a = 1{,}5$ m/s a u trenutku $t_b = 15$ s brzina $V_1^b = 1{,}4$ m/s. Koliki je materijalni izvod brzine V u preseku 1 u trenutku t_a?

Brzina u preseku 2 se može odrediti iz uslova nestišljivosti vode $Q_1 = Q_2$, odnosno, $V_1 A_1 = V_2 A_2$ gde su A_1 i A_2 površine poprečnih preseka cevi:

$$V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2} = V_1 \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = V_1 \left(\frac{0{,}15}{0{,}17}\right)^2 = 0{,}7785 V_1$$

Za vremenski trenutak t_a brzina u preseku 2 je $V_2^a = 1{,}1678$ m/s (za trenutak t_b brzina $V_2^b = 1{,}0899$ m/s nije potrebna za proračun). Materijalni izvod brzine V u preseku 1 i u trenutku t_a je za date uslove:

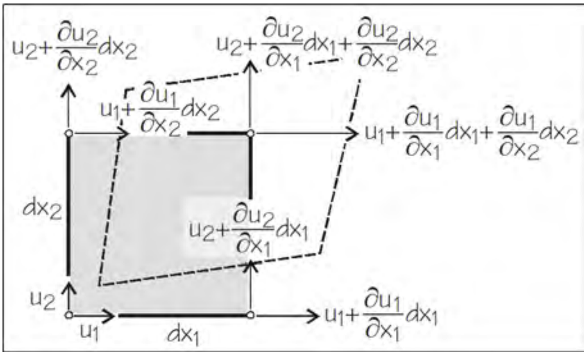
$$\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1{,}4 - 1{,}5}{15 - 10} + 1{,}5\frac{1{,}1678 - 1{,}5}{2} = -0{,}269 \text{ m/s}^2$$

4.3.3 Brzina deformacije materijalnog delića

Fluidni, materijalni delić se kreće nekom svojom trajektorijom, brzinom koja je, u opštem slučaju, promenljiva duž trajektorije i kroz vreme. Takvo strujno polje je promenljivo po prostoru i vremenu. Ako se posmatra samo jedan delić, veličine $\mathrm{d}x_1 \times \mathrm{d}x_2 \times \mathrm{d}x_3$, brzine njegovih temena će biti različite, jer se nalaze u različitim delovima strujnog polja. Za razliku od krutog tela, fluidni delić će se deformisati tokom putovanja jer pored apsolutnog pomeranja svih tačaka u fluidu, dolazi i do relativnog pomeranja: rastojanja između pojedinih tačaka se vremenom menjaju.

Na slici 4.13 je prikazana samo jedna strana materijalnog delića, u ravni x_1, x_2. Brzina donjeg levog temena u vremenskom trenutku t je (u_1, u_2). U istom tom trenutku, brzine ostalih temena su:

- donje desno teme: $\left(u_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1, u_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\right)$
- gornje levo teme: $\left(u_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2, u_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\right)$
- gornje desno teme: $\left(u_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2, u_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\right)$



Slika 4.13: Komponente brzine fluidnog delića u x_1, x_2 ravni

Zahvaljujući različitim brzinama, materijalni delić će u narednom vremenskom trenutku $t+\mathrm{d}t$ da se deformiše. Od kvadratnog oblika dobiće oblik sličan onom prikazanom isprekidanom linijom na slici 4.13.

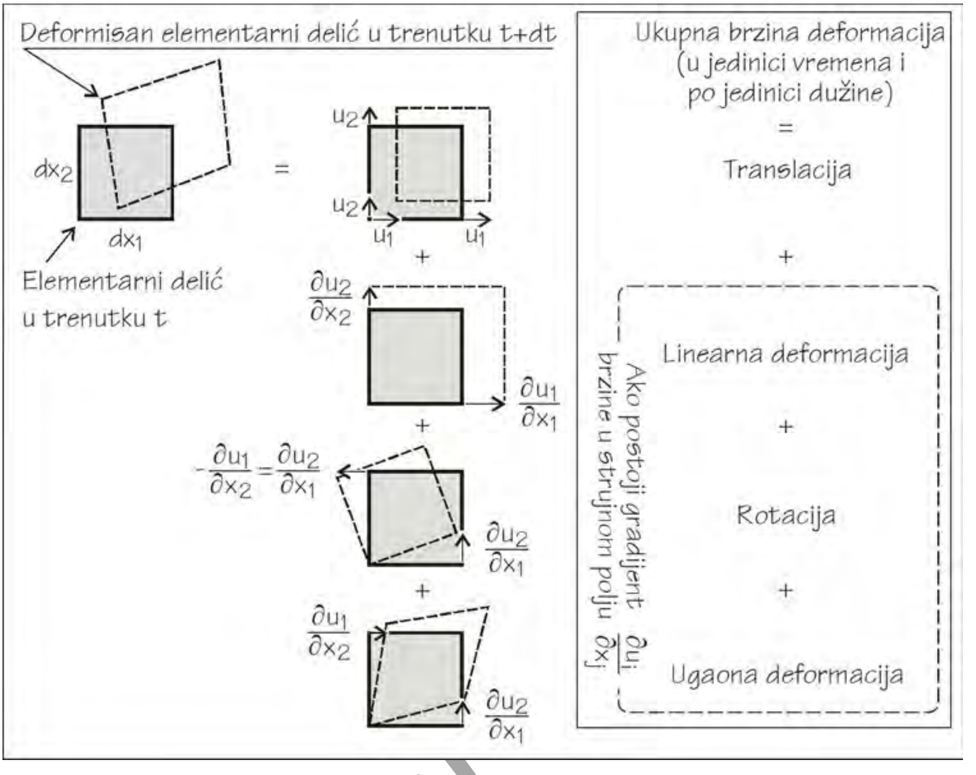
Brzina kojom se materijalni delić deformiše zavisi od veličine delića $\mathrm{d}x_i$ i od vremenskog inkrementa $\mathrm{d}t$. Ako se posmatra brzina deformacije u jedinici vremena i po jedinici dužine, ona se može razdvojiti na sledeće komponente (slika 4.14): translaciju gde sva temena imaju istu brzinu, linearnu deformaciju gde stranice ostaju i dalje međusobno paralelne, rotaciju gde delić ostaje istog oblika i zapremine i ugaonu deformaciju gde dolazi do promena uglova u deliću.

Linearna deformacija delića je brzina izdužavanja stranica, odnosno, brzina dilatacije. Na primer, za ravan (1,2) i stranicu $\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$, to bi bila brzina $\partial u_1/\partial x_1$. Pošto se istovremeno sve tri stranice pomeraju, može se definisati *brzina zapreminske dilatacije* kao brzina kojom se menja zapremina delića:

$$\omega_{ii} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{4.20}$$

Ako je fluid nestišljiv, brzine dilatacija stranica delića moraju biti takve da ne dolazi do ukupne promene zapremine delića. Na osnovu toga, može se napisati da je uslov za nestišljivost brzina zapreminske dilatacije nula:

$$\omega_{ii} = 0 \quad \text{za nestišljiv fluid} \tag{4.21}$$



Slika 4.14: Brzina deformacije fluidnog delića, u jedinici vremena i po jedinici dužine, se može razdvojiti na jednostavnije komponente: translaciju, linearnu deformaciju, rotaciju i ugaonu deformaciju

Brzina obrtanja stranica u ravni (1,2), odnosno, ugaone brzine kojima se stranice obrću, su $\partial u_1/\partial x_2$ i $\partial u_2/\partial x_1$. U opštem slučaju se to može napisati kao:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \text{uz uslov} \quad i \neq j \tag{4.22}$$

Da bi se delić rotirao bez deformisanja, potrebno je ispuniti uslov da su rotacije u jednoj ravni iste, ali suprotnih znakova:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad \text{za} \quad i \neq j \tag{4.23}$$

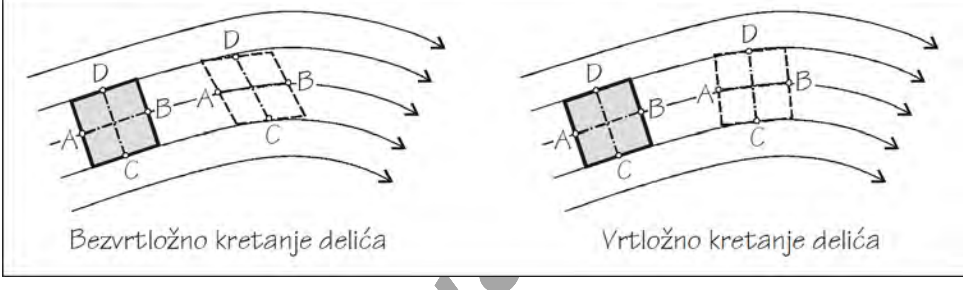
U složenom strujnom polju delić se i rotira i deformiše, pa se *komponenta rotacije može odrediti preko brzine rotacije simetrale uglova.* Za ravan (1,2) bi to bila brzina rotacije u smeru (3):

$$\Omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \tag{4.24}$$

dok je u opštem slučaju brzina rotacije:

$$\Omega_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \tag{4.25}$$

gde je simbol ϵ_{ijk} permutacioni simbol. On ima vrednost +1 ako su indeksi i, j, k u rastućem smeru (1,2,3; 2,3,1; 3,1,2) odnosno za parnu permutaciju skupa (1,2,3), vrednost -1 ako su indeksi u opadajućem smeru (3,2,1; 2,1,3; 1,3,2) odnosno za neparnu permutaciju skupa (1,2,3) i za sve ostale slučajeve vrednost nula.



Slika 4.15: Bezvrtložno i vrtložno kretanje fluidnog delića

Ukoliko u toku kretanja delića ne dolazi do njegove rotacije, takvo kretanje se zove *bezvrtložno kretanje*. Odsustvo rotacije pokazuje da ne postoji moment tangencijalnih napona, što je uslov za *idealan fluid*. Na slici 4.15 sa leve strane je prikazan primer bezvrtložnog kretanja: mada dolazi do ugaone deformacije, rotacija prave AB i CD su iste, samo u suprotnim smerovima, pa je rotacija simetrale jednaka nuli. Sa desne strane je pokazano kako bi izgledalo tečenje realnog fluida, u kome postoji i rotacija.

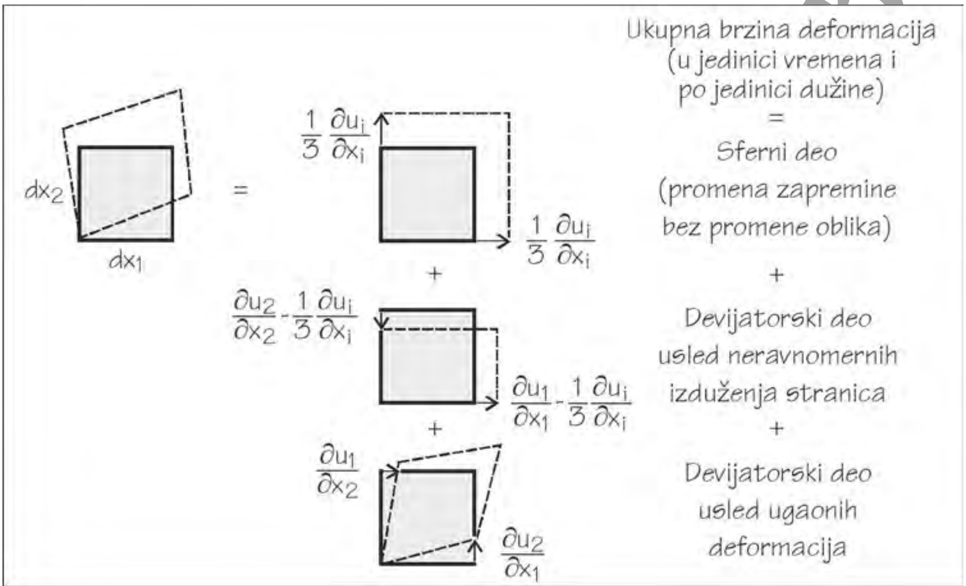
Pošto su u opštem slučaju ugaone brzine za sve stranice različite, kao mera ugaone brzine deformacije (4.22), često se koristi srednja vrednost brzine promene pravog ugla (ili sklapanja koordinatnih osa), *brzina klizanja*. Za ravan (1,2) bi to bilo:

$$\omega_{12} = \omega_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

odnosno, u opštem slučaju, uz uslov $i \neq j$:

$$\omega_{ij} = \omega_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{4.26}$$

Prethodna jednačina se može koristiti i za slučaj $i = j$, kada se dobijaju *brzine dilatacija*.



Slika 4.16: Podela brzine deformacije fluidnog delića, u jedinici vremena i po jedinici dužine, na sferni i devijatorski deo

Pored podele brzine deformacija na osnovne komponente (slika 4.14), moguće je ukupnu deformaciju podeliti na deo koji menja zapreminu fluidnog delića, a čuva oblik, i na deo koji menja oblik delića (slika 4.16). Prvi deo se zove *sferni deo*, a drugi *devijatorski deo* tenzora brzine deformacija:

$$\omega_{ij} = \omega_{ij}^{sf} + \omega_{ij}^{d} \tag{4.27}$$

Sferni deo brzine deformacija je skalar. Jednak je srednjoj vrednosti svih brzina dilatacija, odnosno, jednoj trećini zapreminske dilatacije (4.20):

$$\overline{\omega} = \frac{1}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Izraz se može opštije napisati u (i, j) notaciji koristeći Kronekerov simbol δ_{ij} koji ima vrednost $\delta_{ij} = 1$ za $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ za $i \neq j$:

$$\omega_{ij}^{sf} = \overline{\omega} = \delta_{ij}\frac{1}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \tag{4.28}$$

Devijatorski deo brzine deformacije jednak je zbiru brzine klizanja i razlici između brzine dilatacije i sfernog dela brzine deformacija:

$$\omega_{ij}^{d} = (1-\delta_{ij})\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\delta_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{1}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)$$

Prvi sabirak postoji samo za slučaj različitih indeksa ($i \neq j$) dok drugi sabirak postoji za slučaj kada su indeksi isti ($i = j$). Spajanjem izraza u jedinstven izraz, dobija se devijatorski deo brzine deformacije:

$$\omega_{ij}^{d} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\delta_{ij}\frac{1}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \omega_{ij}-\delta_{ij}\frac{1}{3}\omega_{kk} \tag{4.29}$$

4.3.4 Veza materijalnog izvoda i kontrolne zapremine

Promena karakteristične veličine B, vezane za celokupnu masu koja se pomera, a na osnovu posmatranja elementarnih delića ρb u konstantnoj zapremini $\mathcal{V}$, koja se ne pomera, je data jednačinom (4.14). Pošto se prate elementarne mase delića koji se kreću, ukupna promena veličine B mora imati neku vezu i sa materijalnim izvodom (4.18) definisanim u poglavlju 4.3.2, *Praćenje kretanja materijalnog delića*.

Član sa leve strane jednačine (4.14) $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$, može se napisati koristeći zamenu (4.8):

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \rho b \,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{C\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(\rho b)\,\mathrm{d}\mathcal{V}\right]$$

gde je zamenjen redosled diferenciranja i integraljenja, jer je oblast integracije ($\mathcal{V}$) konstantna ($C\mathcal{V}$). U dobijenom integralu sa desne strane se nalazi izvod proizvoda $(\rho b)\times(\mathrm{d}\mathcal{V})$, nad kojim se može primeniti pravilo diferenciranja:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\rho b)\times(\mathrm{d}\mathcal{V})] = \mathrm{d}\mathcal{V}\frac{\mathrm{d}(\rho b)}{\mathrm{d}t}+\rho b\,\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}\mathcal{V})}{\mathrm{d}t}$$

Poslednji član se može pomnožiti sa $\mathrm{d}\mathcal{V}/\mathrm{d}\mathcal{V}$, jer je zapremina $\mathrm{d}\mathcal{V}$ različita od nule, pa se dobija:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\rho b)\times(\mathrm{d}\mathcal{V})] = \mathrm{d}\mathcal{V}\frac{\mathrm{d}(\rho b)}{\mathrm{d}t}+\rho b\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}(\mathrm{d}\mathcal{V})}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}\mathcal{V}}\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

Ovako napisan poslednji član izraza $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}\mathcal{V})/\mathrm{d}\mathcal{V}$ predstavlja brzinu promene zapremine fluidnog delića po jedinici zapremine delića. Brzina kojom se menja zapremina delića je jednaka brzini zapreminske dilatacije (4.20) (slika 4.14) pa se poslednji član može zameniti sa $\omega_{ii} = \partial u_i / \partial x_i$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\rho b) \times (\mathrm{d}V\!\!\!\!-)] = \left[\frac{\mathrm{d}(\rho b)}{\mathrm{d}t} + \rho b \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right] \mathrm{d}V\!\!\!\!-$$

Polazna jednačina (4.14) zamenom $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ sa dobijenim izrazom, sada postaje:

$$\int_{CV\!\!\!\!-} \left[\frac{\mathrm{d}(\rho b)}{\mathrm{d}t} + \rho b \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right] \mathrm{d}V\!\!\!\!- = \int_{CV\!\!\!\!-} \left[\frac{\partial(\rho b)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho b\, u_i)\right] \mathrm{d}V\!\!\!\!- \tag{4.30}$$

Integracija se obavlja po istoj, konstantnoj zapremini $CV\!\!\!\!-$ pa integrandi moraju biti isti da bi jednačina bila uvek ispunjena. Diferenciranjem proizvoda u zadnjem desnom članu, jednačina (4.30) postaje:

$$\frac{\mathrm{d}(\rho b)}{\mathrm{d}t} + \rho b \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} + \rho b \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial(\rho b)}{\partial x_i}$$

po jedinici zapremine, jer je jednačina (4.30) podeljena sa $\mathrm{d}V\!\!\!\!-$. Skraćivanjem, dobija se:

$$\frac{\mathrm{d}(\rho b)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} + u_i \frac{\partial(\rho b)}{\partial x_i}$$

Veličina ρb je (masa po jedinici zapremine, odnosno, masa delića jedinične zapremine)×(osobina koja se prati po jedinici mase) sistema sa konstantnom masom (jednačina (4.8) na strani 103). Pošto se prati kretanje materijalnog delića, izvod po vremenu $\mathrm{d}(\rho b)/\mathrm{d}t$ je *materijalni izvod*, pa se može napisati:

$$\frac{\mathrm{D}(\rho b)}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} + u_i \frac{\partial(\rho b)}{\partial x_i} \tag{4.31}$$

Do iste jednačine je moglo da se dođe dosta jednostavnije. Kako je ρb karakteristična veličina nekog materijalnog delića koji se kreće brzinom u_i, izvod veličine φ po vremenu je materijalni izvod. Zamenom $\varphi = \rho b$ u jednačini (4.18) direktno se dobija jednačina (4.31).

Izraz (4.31) se može napisati i u drugačijem obliku. Član $\partial(\rho b)/\partial t$, lokalni izvod karakteristične veličine po vremenu se može izraziti iz prethodne jednačine:

$$\frac{\partial(\rho b)}{\partial t} = \frac{\mathrm{D}(\rho b)}{\mathrm{D}t} - u_i \frac{\partial(\rho b)}{\partial x_i}$$

pa se može staviti u polazni izraz (4.14). Ako se zadnji član jednačine (4.14) razvije kao izvod proizvoda, nakon skraćivanja se dobija nešto drugačiji oblik izraza (4.15):

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \int_{C\forall} \left[\frac{\mathrm{D}(\rho b)}{\mathrm{D}t} + \rho b \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] \mathrm{d}\forall = S \tag{4.32}$$

Kako je $\omega_{ii} = \partial u_i / \partial x_i$ brzina zapreminske dilatacije delića, poslednji član se može shvatiti kao promena unutrašnje zalihe veličine ρb. Ceo izraz (4.32) pokazuje da je promena kroz vreme veličine B, koja je vezana za ceo sistem, (odnosno njen porast ili opadanje, ili proizvodnja i potrošnja) jednaka sumi svih promena te veličine vezanih za elementarni delić unutar nepomerljive granice sistema i povećanju ili smanjenju zalihe.

4.4 Princip održanja mase

U klasičnoj mehanici, kod sistema sa konstantnom masom, zakon konzervacije ili održanja mase je po definiciji ispunjen, pa se o njemu i ne govori. U izučavanju fluida, gde se koristi sistem sa konstantnom zapreminom, masa se mora ekspicitno održavati konstantnom, odnosno, *mora se eksplicitno obezbediti konzervativnost mase.* U nastavku će se prvo dati osnovna jednačina u opštem slučaju, a zatim će se jednačina uprostiti za ustaljeno strujanje homogenog fluida. Na kraju će se dati primer za tečenje u cevi.

4.4.1 Jednačina održanja mase

Ako se u prethodno izvedenim jednačinama koje se odnose na kontrolnu, konstantnu zapreminu, stavi da je veličina B ukupna masa sistema, tada je b masa po jedinici mase, odnosno jedinica ($b = 1$). Iz osnovnog principa održanja mase[19] sledi da je brzina promene konstantne mase nula $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t = 0$, pa jednačina (4.11) postaje:

$$\int_{C\forall} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}\forall + \int_{CA} \rho\, u_i n_i \,\mathrm{d}A = 0 \tag{4.33}$$

Napisana jednačina pokazuje da je povećanje mase u posmatranoj zapremini, plus razlika protoka mase kroz konturu (izlaz - ulaz), jednako nuli. Ili, da je povećanje mase zapremine $\forall$ jednako razlici ulaza i izlaza protoka mase

[19] Princip klasične mehanike, da je masa nepromenljiva, i nije baš tačan. U nuklearnim reakcijama se masa može pretvoriti u energiju. Međutim, čak i u nuklearnim reaktorima, masa koja se “uništi” je zanemarljivo mala.

kroz konturu. Ista jednačina se može napisati i u integralnom obliku, po konstantnoj zapremini (jednačina (4.14)):

$$\int_{C\rlap{\,-}V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} \right] \mathrm{d}\rlap{\,-}V = 0 \tag{4.34}$$

Napisane dve jednačine (4.33) i (4.34) predstavljaju *jednačinu održanja mase u konačnoj zapremini* $\rlap{\,-}V$ *ograničenoj površinom* A. Jednačina održanja mase se često naziva još i *jednačina kontinuiteta* ili *jednačina nepromenljivosti mase*.

Kontrolna zapremina $C\rlap{\,-}V$ može obuhvatiti bilo koje granice integracije. Da bi se zadovoljila prethodna jednačina (4.34), neophodno je da integrand u svakoj tački prostora bude nula. Iz tog uslova se dobija *jednačina održanja za elementarnu masu*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{4.35}$$

koja važi u bilo kojoj tački prostora $C\rlap{\,-}V$. Prvi sabirak jednačine predstavlja promenu mase u jedinici vremena unutar konstantne zapremine, dok drugi sabirak kaže da, *ako postoji promena mase, ona mora biti jednaka protoku mase kroz granicu te zapremine*. Sa desne strane jednačine stoji nula, jer produkcija mase nije moguća.

Ako se u jednačini (4.35) drugi sabirak diferencira, dobija se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0$$

Prvi i treći član jednačine predstavljaju lokalni i konvektivni član materijalnog izvoda gustine (ako se u jednačinu (4.18) stavi $\varphi = \rho$), pa se prethodna jednačina može napisati i u obliku:

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{odnosno} \quad \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\, \omega_{ii} = 0 \tag{4.36}$$

Prvi sabirak predstavlja promenu (povećanje) gustine jednog delića u jedinici vremena, a drugi član ekspanziju delića usled povećanja gustine, jer pozitivna vrednost brzine zapreminske dilatacije ω_{ii} (izraz (4.20) na strani 110) znači da se delić povećava.

Do iste jednačine održanja elementarne mase se moglo doći i na osnovu izraza (4.32), zamenom $b = 1$, postavljanjem uslova da je proizvodnja/potrošnja mase nula $S = 0$, deljenjem izraza sa elementarnom zapreminom $\mathrm{d}\rlap{\,-}V$ i postavljanjem uslova da integrand mora biti nula u svakoj tački prostora.

Primer 4.4.1

U posmatranoj tački fluidnog prostora, u trenutku t_0 gustina delića stišljivog fluida iznosi $\rho = 1050\ \mathrm{kg/m^3}$, a brzine dilatacija u pravcima 2 i 3 su $\partial u_2/\partial x_2 = 0{,}05\ \mathrm{s^{-1}}$ i $\partial u_3/\partial x_3 = -0{,}02\ \mathrm{s^{-1}}$. Gustina se kroz vreme menja. U trenutku t_0 vrednost materijalnog izvoda gustine je $D\rho/Dt = -42\ \mathrm{kgm^{-3}s^{-1}}$. Kolika je vrednost brzine dilatacije u pravcu x_1 u trenutku t_0?

Na osnovu jednačine održanja mase (4.36) napisane za pravce 1, 2 i 3, u trenutku $t = 0$ mora biti ispunjen uslov:

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) = -42 + 1050\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 0{,}05 - 0{,}02\right) = 0$$

Sređivanjem po nepoznatoj brzini dilatacije u pravcu x_1 dobija se:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0{,}01\ \mathrm{s^{-1}}$$

4.4.2 Ustaljeno strujanje nehomogenog i homogenog fluida

Uslov ustaljenosti strujanja znači da je u jednačini održanja mase (4.35) lokalna komponenta promene gustine nula $\partial\rho/\partial t = 0$ pa se jednačina svodi na:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \tag{4.37}$$

U integralnom obliku jednačina održanja mase (4.33) se svodi na:

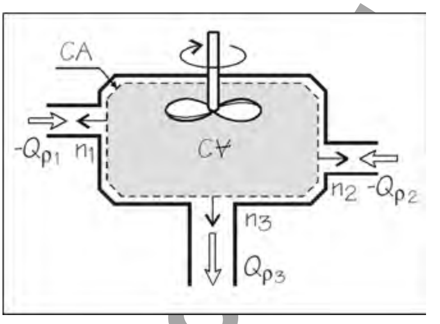
$$\int_{CA} \rho\, u_i n_i\, \mathrm{d}A = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_M = 0$$

odnosno, na uslov da je protok mase (4.4) (strana 98) kroz granicu nula.

Primer 4.4.2

U rezervoar za pravljenje smeše ustaljeno dotiču voda ($\rho_1 = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$) protokom $Q_1 = 0{,}2\ \mathrm{m^3/s}$ i hemikalija X specifične težine $\gamma_2 = 7500\ \mathrm{N/m^3}$ kroz cev preseka $A_2 = 0{,}05\ \mathrm{m^2}$ i brzinom $V_2 = 4\ \mathrm{m/s}$. Iz rezervoara izlazi smeša čija je gustina $\rho_3 = 940\ \mathrm{kg/m^3}$. Koliki su maseni Q_{ρ_3} i zapreminski Q_3 protoci smeše?

U jednačini (4.33) zbog ustaljenog strujanja je prvi sabirak nula, pa ostaje samo drugi sabirak:



$$\int_{CA} \rho\, u_i n_i \mathrm{d}A$$

koji se svodi na tri masena protoka (uz pretpostavku da je brzina $u = V$ konstantna po prečniku cevi):

$$-Q_{\rho_1} - Q_{\rho_2} + Q_{\rho_3} = 0$$

Maseni protok kroz izlaznu cev je:

$$Q_{\rho_3} = \rho_1 Q_1 + \frac{\gamma_2}{g} V_2 A_2 = 1000 \times 0{,}2 + \frac{7500}{9{,}81}\, 4 \times 0{,}05 = 352{,}9 \text{ kg/s}$$

Volumetrijski protok se dobije deljenjem masenog sa gustinom fluida:

$$Q_3 = \frac{Q_{\rho_3}}{\rho_3} = \frac{352{,}9}{940} = 0{,}375 \text{ m}^3\text{/s}$$

Interesantno je proveriti u prethodnom primeru da li su volumetrijski protoci u ravnoteži, odnosno da li je ispunjeno $\sum Q_i = 0$:

$$Q_1 = 0{,}2\ ;\ Q_2 = V_2 A_2 = 0{,}2\ ;\ Q_3 = 0{,}375 \quad \Rightarrow \quad 0{,}2 + 0{,}2 > 0{,}375$$

Rezultat pokazuje da u rezervoar dotiče više vode i hemikalije X nego što ističe rastvora. Ovo je moguće kod fluida koji ne čine idealan rastvor, pa se oni izmešaju na nivou atoma: molekuli jednog fluida se uvuku u molekule drugog fluida. Zbog toga je *konzervacija mase fundamentalni zakon prirode, a ne konzervacija zapremine*. Volumetrijski protoci bi bili u ravnoteži samo kod fluida sa istom gustinom ili fluida koji čine idealan rastvor.

Ako se pored uslova o ustaljenosti tečenja postavi i uslov da je fluid homogen, konstantne gustine[20] $\rho = \text{Const}$, gustina se može izvući ispred diferencijala pa se jednačina održanja mase (4.37) svodi na uslov da je zbir brzina dilatacija u sva tri koordinatna pravca jednak nuli:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \omega_{ii} = 0 \tag{4.38}$$

[20] Pojam *homogen* je definisan u poglavlju 4.1.2, *Stišljiv i nestišljiv, homogen i nehomogen fluid*. Ovde se još jednom naglašava da *homogen* nije isto što i *nestišljiv*: nestišljiv fluid može menjati gustinu pod uticajem temperature ili rastvorenih materija. Promena koncentracije rastvorene soli u vodi, na primer, menja gustinu i po prostoru i kroz vreme, iako je voda nestišljiva.

gde je ω_{ii} brzina zapreminske dilatacije delića (4.21). U integralnom obliku jednačina održanja mase se svodi na:

$$\int_{CA} u_i n_i \,\mathrm{d}A = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = 0$$

odnosno, na uslov da je protok zapremine (4.3) (strana 98) kroz granicu posmatrane zapremine jednak nuli.

Primer 4.4.3

Za ustaljeno strujanje homogenog fluida dat je raspored brzina:

$$u_x = U_0\, L\, \frac{-x}{x^2+y^2} \qquad u_y = U_0\, L\, \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad u_z = 0$$

Da li je ovakav raspored brzina moguć?

Uslov održanja mase (4.36) mora biti ispunjen za svako strujanje fluida. Za homogen fluid i za ustaljeno strujanje uslov se svodi na (4.38) $\partial u_i/\partial x_i = 0$. Za date uslove, brzine dilatacija su:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = U_0\, L \left[\frac{-1}{x^2+y^2} - x(-1)\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, 2x\right] = U_0\, L \left[\frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = U_0\, L \left[\frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

Njihov zbir treba da bude jednak nuli:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = U_0\, L \left[\frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = U_0\, L \left[\frac{-2}{x^2+y^2} + \frac{2\left(x^2+y^2\right)}{(x^2+y^2)^2}\right] = U_0\, L\, \frac{-2+2}{x^2+y^2} = 0$$

4.4.3 Primer tečenja u cevi

Posmatra se ustaljeno tečenje homogenog i nestišljivog fluida kroz cev. U integralnoj jednačini održanja mase (4.33):

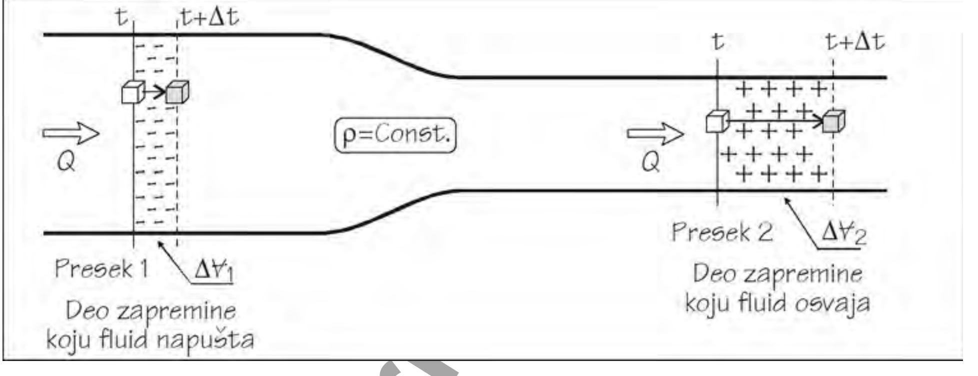
$$\int_{C\forall} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}\forall + \int_{CA} \rho\, u_i n_i \,\mathrm{d}A = 0$$

Prvi član je nula jer je tečenje ustaljeno, a u drugom članu gustina ρ se može napisati ispred integrala, jer je fluid homogen pa je gustina konstantna:

$$\rho \int_{CA} u_i n_i \, \mathrm{d}A = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{CA} u_i n_i \, \mathrm{d}A = 0$$

Ako se pogleda prethodna jednačina, kao i jednačina (4.3) na strani 98, vidi se da je dobijeni integral jednak ukupnom zapreminskom protoku Q kroz *celokupnu površinu* CA, koja se nalazi oko posmatrane konstantne zapremine $C\mathcal{V}$, pa se jednačina kontinuiteta svodi na uslov:

$$\Sigma Q_i = 0 \tag{4.39}$$



Slika 4.17: Deo zapremine koju fluid napušta za Δt mora biti jednak delu zapremine koju osvaja

Isti oblik jednačine kontinuiteta se dobija i ako se direktno primeni princip održanja mase na tečenje u cevi. Na slici 4.17 je prikazana cev, čiji se poprečni presek niz fluidnu struju smanjio. Za ustaljeno tečenje, masa fluida koja napusti presek 1, mora biti jednaka masi fluida koja osvoji presek 2, jer je fluid nestišljiv i neprekidan:

$$\rho\, \mathcal{V}_1 = \rho\, Q_1 \times \Delta t \qquad \rho\, \mathcal{V}_2 = \rho\, Q_2 \times \Delta t \tag{4.40}$$

Iz uslova jednakosti dve mase, odnosno iz uslova jednakosti dve zapremine (jer je gustina konstantna), dobija se jednačina kontinuiteta[21]:

$$\rho\, \mathcal{V}_1 = \rho\, \mathcal{V}_2 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = Q_2 \tag{4.41}$$

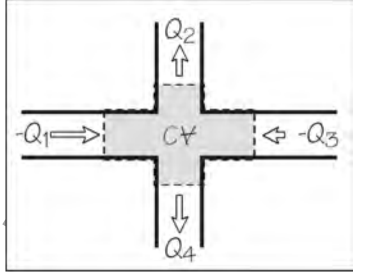
[21] Jednačina kontinuiteta će biti izvedena i u sledećem poglavlju 7.2.1 (strana 290), koristeći ovaj integralni pristup.

Jednačina se često piše i u formi srednje brzine po preseku (4.7):

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \qquad \text{ili} \qquad V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2} \tag{4.42}$$

odakle se, za dati primer na slici 4.17, jasno vidi da će se u smanjenom nizvodnom preseku A_2, brzina V_2 povećati.

Na slici 4.18 je dat primer primene jednačine kontinuiteta na spoj četiri cevi. Kroz granice konstantne zapremine (osenčeno na slici) prolaze protoci $-Q_1$ (negativan protok jer je suprotnog smera u odnosu na smer normale na omotač zapremine), Q_2, $-Q_3$ i Q_4. Prema jednačini kontinuiteta (4.39) mora biti ispunjeno:



Slika 4.18: Detalj spoja četiri cevi, sa konstantnom zapreminom za koju se piše jednačina kontinuiteta

$$-Q_1 + Q_2 - Q_3 + Q_4 = 0$$

odnosno, *protok koji ulazi u posmatranu zapreminu mora biti isti kao protok koji izlazi iz te zapremine*: $Q_1 + Q_3 = Q_2 + Q_4$.

4.5 Održanje količine kretanja

Kad god se promeni brzina fluida ili kada se menja smer tečenja, javlja se sila. Prema zakonu akcije i reakcije, sila se prenosi sa fluida na konturu koja je izazvala promenu. Primeri su brojni: sila udara mlaza vode u lopatice turbine ili sila vetra na dimnjak ili sila uzgona koja omogućava avionu da leti.

Osnovni zakon koji se bavi silama i koji važi u mehanici krutog tela je Drugi Njutnov zakon: "Promena količine kretanja srazmerna je sili koja dejstvuje na telo i vrši se u pravcu dejstva sile" [21]. Taj princip se odnosi na konstantnu, pokretnu masu. Primenom Rejnoldsove teoreme, taj princip će se primeniti na celu (nepokretnu) zapreminu fluida. Postaviće se integralna jednačina, kao i jednačina koja se odnosi na delić konstantne zapremine koji je nepokretan (ne prati se kretanje jednog delića) ali koji može biti bilo gde u posmatranoj zapremini - diferencijalna jednačina. Rešavanjem tih jednačina dobijaju se dve vrste rešenja: u integralnom pristupu se uvodi fiktivna inercijalna sila koja je jednaka priraštaju količine kretanja celokupne mase u posmatranoj zapremini, u jedinici vremena i ta inercijalna sila je u ravnoteži sa ostalim površinskim i zapreminskim silama. U diferencijalnom pristupu, nakon neophodnih uprošćavanja dobija se Bernulijeva jednačina koja važi duž jedne strujnice i koja ima energetski karakter: zbir kinetičke energije, potencijalne energije i energije toka usled razlike pritisaka duž jedne strujnice je konstantan.

4.5.1 Integralna i diferencijalna jednačina održanja količine kretanja

Količina kretanja ili impuls čestice je vektor, proizvod mase i brzine, i predstavlja osobinu inercijalnog sistema: $\vec{B} = m\vec{u}$. Prema (4.8), veličina b je tada vektor brzine $\vec{b} = \vec{u}$, a S iz (4.15) je, prema drugom Njutnovom zakonu kretanja, jednak sumi svih *pravih sila*[22] koje deluju na sistem sa konstantnom masom. Jednačina održanja količine kretanja u najopštijem smislu je:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \tag{4.43}$$

Prelaskom sa konstantne mase na kontrolnu zapreminu, prema (4.11), prethodna jednačina se može napisati u sledećem, integralnom, obliku:

$$\int_{C\forall} \frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t}\,\mathrm{d}\forall + \int_{CA} \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}A = \vec{F} \tag{4.44}$$

Sila $\vec{F}$ je suma svih zapreminskih i površinskih sila koje deluju na fluid u kontrolnoj zapremini $C\forall$ sa površinom CA.

Pretvaranjem površinskog integrala u zapreminski (jednačina (4.14)) i smanjenjem kontrolne zapremine do nivoa elementarnog fluidnog delića $\mathrm{d}\forall$, ukupna sila $\vec{F}$ postaje *sila $\vec{f}$ po jedinici zapremine*. Diferencijalna jednačina u vektorskoj notaciji tada glasi:

$$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\vec{u}u_j)}{\partial x_j} = \vec{f}$$

odnosno, *jednačina održanja količine kretanja za jediničnu zapreminu*[23] za pravac i je:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = f_i \tag{4.45}$$

[22]Sve sile se mogu podeliti u dve kategorije: *prave sile* koje potiču od uzajamnog sadejstva između tela i za koje važe Njutnovi zakoni i *inercijalne sile* koje potiču od ubrzanja posmatranog sistema i za koje ne važe Njutnovi zakoni.

[23]Pošto jednačina održanja količine kretanja opisuje kretanje fluida, često se naziva i *dinamička jednačina*.

Udvojeni indeks j, iz prethodne dve jednačine, označava zbir parcijalnih izvoda u tri glavna pravca, a indeks i daje pravac za koji se piše jednačina. Levi deo jednačine predstavlja bilans količine kretanja u konstantnoj zapremini: prvi sabirak je promena količine kretanja u jedinici vremena, a drugi sabirak je protok količine kretanja kroz graničnu površinu. Suma svih pravih sila po jedinici zapremine, koja se nalazi sa desne strane jednačine, treba da doda ostvarenu promenu količine kretanja i količinu kretanja koja istekne kroz granicu.

Za pravac $i = x$, na primer, jednačina održanja količine kretanja za jediničnu zapreminu (4.45) glasi:

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_x u_z)}{\partial z} = f_x$$

Jednačina (4.45) se može preurediti diferenciranjem proizvoda iz oba sabirka sa leve strane:

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} + \rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j}\right) = f_i$$

Izraz u zagradi je jednak nuli na osnovu jednačine održanja mase (4.35). Sređivanjem se dobija *drugi oblik jednačine održanja količine kretanja za jediničnu zapreminu*:

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i \quad \Rightarrow \quad \rho\frac{\mathrm{D}U_i}{\mathrm{D}t} = f_i \tag{4.46}$$

Jednačina važi u tački, za delić fluida, ali, za razliku od prethodne jednačine (4.45), više nije konzervativna (poglavlje 4.2 na strani 101). Da bi važila za celokupnu zapreminu, uz ovu jednačinu je potrebno rešavati i jednačinu kontinuiteta (4.35).

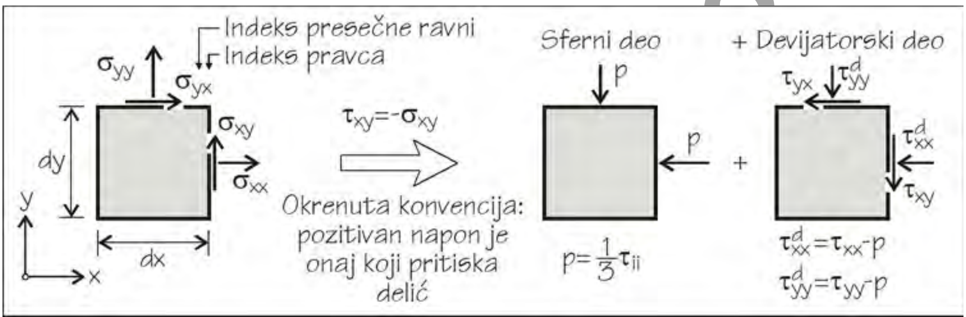
Prave sile koje deluju na konstantnu zapreminu fluida (odnosno, na fluidni delić) su *zapreminske* i *površinske* sile. Od zapreminskih sila u ovoj knjizi se uzima u obzir samo *gravitaciona sila*[24], odnosno, težina, pri čemu je težina elementarnog delića dimenzija $\mathrm{d}x_1 \times \mathrm{d}x_2 \times \mathrm{d}x_3 = \mathrm{d}\forall$ jednaka $\mathrm{d}G = \rho g \mathrm{d}\forall$ (slika 3.1 na strani 34). Sila usled gravitacije po jedinici zapremine je $\vec{f} = \rho\vec{g}$ i *uvek deluje vertikalno na dole.* Ako se koristi indeks i za

[24]Pored gravitacione sile, u zadacima u kojima se kreće kontrolna zapremina, odnosno čvrsta kontura u okviru koje se nalazi fluid koji teče, treba uzeti i silu usled ubrzanja mase fluida. U poglavlju 3.4, *Relativno mirovanje fluida*, na strani 79, prikazan je slučaj kada fluid miruje u sudu koji konstantno ubrzava ili u sudu koji se okreće konstantnom ugaonom brzinom.

pisanje vektorske jednačine, neophodno je projektovati $\vec{g}$ na bilo koji pravac i, tako da *sila usled gravitacije po jedinici zapremine* postaje:

$$(f_i)_g = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} \tag{4.47}$$

gde znak $(-)$ daje pravac na dole a sa h je označena *vertikalna osa sa smerom na gore*[25].



Slika 4.19: Naponi - normalni i smičući u svom pozitivnom smeru (jer izazivaju pozitivne brzine deformacija, levi deo slike) i konvencija koja se koristi u Mehanici fluida: normalni naponi su pozitivni ako pritiskaju delić (desni deo slike)

Površinske sile na fluidni delić su rezultat delovanja površinskih normalnih i smičućih napona. Na slici 4.19, sa leve strane, nacrtan je fluidni delić, u (x, y) ravni sa odgovarajućim naponima u presečnoj ravni x i ravni y. Nacrtani su naponi koji zatežu delić, tako da su brzine deformacija pod dejstvom tih napona pozitivne. Međutim, u Mehanici fluida je *uobičajeno da se kao pozitivni naponi uzimaju naponi koji pritiskaju fluidni delić.* Na desnom delu slike su nacrtani usvojeni pozitivni naponi na fluidni delić, pri čemu je sada promenjena oznaka: umesto normalnih i smičućih napona σ_{ij} koriste se tangencijalni naponi $\tau_{ij} = -\sigma_{ij}$.

Kada fluid miruje, na delić deluje samo pritisak. Normalni naponi su jednaki $\tau_{xx} = \tau_{yy}$ (slika 4.19), dok su tangencijalni naponi nula, jer nema promene brzine između dva delića (jednačina (2.6) na strani 16). U opštem slučaju, kada postoje naponi $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ normalni naponi neće biti jednaki, pa je zgodno da se pritisak na delić definiše kao (negativna) srednja vrednost

[25] Osa h je isto što i osa z, ali se ovde naglašava da je *isključivo vertikala na gore.* U literaturi se često koristi i veliko slovo Z.

svih normalnih napona:

$$p = -\frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}\tau_{ii} \tag{4.48}$$

Pod dejstvom pritiska fluidni delić menja zapreminu, ali ne i oblik, pa se u skladu sa terminima koji su uvedeni u poglavlju 4.3.3, *Brzina deformacije materijalnog delića*, jednačina (4.27), pritisak može posmatrati kao *sferni deo tangencijalnih napona*. Ostatak normalnog napona (napisan u opštoj (i, j) notaciji):

$$\tau_{ij}^{d} = \delta_{ij}\tau_{ij} - p = \delta_{ij}\left(\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\right) \tag{4.49}$$

i svi (negativni) smičući naponi $(1-\delta_{ij})\tau_{ij}$ čine *devijatorski deo tangencijalih napona* (desni deo slike 4.19):

$$\tau_{ij}^{d} = (1-\delta_{ij})\tau_{ij} + \delta_{ij}\left(\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\right) = \tau_{ij} - \delta_{ij}\frac{1}{3}\tau_{kk} = \tau_{ij} - \delta_{ij}p \tag{4.50}$$

Od površinskih sila na elementarni delić, u jednačini (4.46), u obzir se uzimaju dve sile: *sila pritiska* i *sila usled tangencijalnih napona*. Sile se mogu odrediti ako se posmatra elementarna prizma zapremine $\mathrm{d}\forall$, čiji se centar nalazi u (x, y, z), sa pritiscima (slika 3.1, samo u y i z pravcima) i naponima koji deluju na njene stranice (slika 4.20, samo u y pravcu).

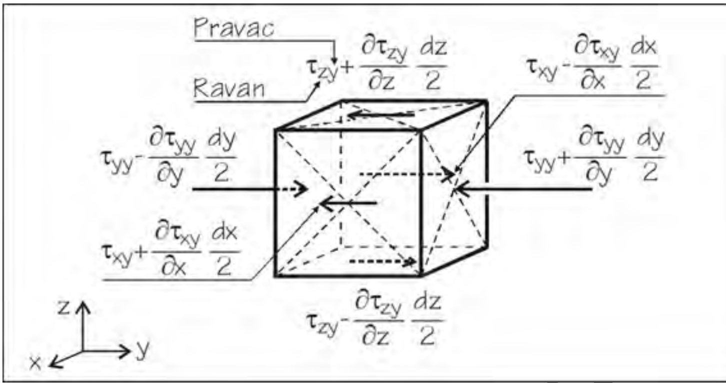
Sila usled pritiska se dobija sabiranjem komponenti u izabranom pravcu, slika 3.1 na strani 34. Pozitivan pritisak je onaj koji pritiska elementarni fluidni delić, jednačina (4.48) na strani 126. Za prikazani y pravac, ukupna sila na elementarnu prizmu je:

$$\mathrm{d}P_y = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = -\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}\forall$$

Deljenjem ukupne sile sa zapreminom elementarne prizme i uvođenjem indeksa i kojim se daje pravac sile, dobija se *sila usled pritiska po jedinici zapremine*:

$$(f_i)_p = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{4.51}$$

Svi tangencijalni naponi koji deluju na elementarnu prizmu u y pravcu, prikazani su na slici 4.20. Normalni napon $\tau_{yy} = \tau_{yy}^{d}$ je devijatorski deo napona dat jednačinom (4.49), odnosno, razlika između punog normalnog



Slika 4.20: Naponi koji deluju na elementarnu zapreminu (na slici su prikazani samo naponi u y pravcu)

napona i proseka normalnih napona, koji je prebačen u pritisak. Za pravac y sila usled tangencijalnih napona je:

$$dT_y = -\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)\mathrm{d}\forall$$

U opštem slučaju *sila od viskoznih tangencijalnih napona na jedinicu zapremine* za pravac i se može napisati kao:

$$(f_i)_\tau = -\frac{\partial\tau^d_{ji}}{\partial x_j} \tag{4.52}$$

gde udvojeni indeks j označava zbir tri parcijalna izvoda.

Stavljajući dobijene tri komponente sile (4.47), (4.51) i (4.52) u jednačinu (4.46), dobija se:

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\rho g\frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial\tau^d_{ji}}{\partial x_j} \tag{4.53}$$

diferencijalna jednačina održanja količine kretanja za jediničnu zapreminu[26] ili kako se još naziva, diferencijalna jednačina kretanja za tačku, za i-ti pravac.

[26]Zbog usvojene suprotne orijentacije tangencijalnih napona $\tau_{ij} = -\sigma_{ij}$, u jednačini (4.53), poslednji je član negativan. U literaturi se mogu naći i izvođenja gde se zadržava originalni, sferni deo napona, bez promenjenog znaka, pa je zadnji član jednačine pozitivan. Naravno, ova razlika nema kasnije nikakvog uticaja na konačna rešenja dinamičke jednačine ukoliko se dosledno poštuje usvojen sistem.

Primer 4.5.1

Napisati jednačinu kretanja (4.53) za vertikalni z pravac, u opštem obliku, a zatim za slučaj fluida u mirovanju.

U jednačini (4.53) indeks i treba zameniti pravcem z, a udvojeni indeks j se menja zbirom po pravcima x, y i z. U opštem obliku, jednačina glasi:

$$\rho\frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + \rho u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + \rho u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \tau^d_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau^d_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau^d_{zz}}{\partial z}$$

U slučaju kada fluid miruje, sve tri komponente brzina su jednake nuli. Takođe, i svi tangencijalni naponi su nula, pa se prethodna jednačina svodi na:

$$0 = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{odnosno} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Dobijena diferencijalna jednačina mirovanja fluida je ista kao i diferencijalna jednačina hidrostatike (3.4) izvedena u poglavlju 3.1.2 *Osnovna jednačina hidrostatike.*

Jednačina (4.53) prati kretanje fluidnog delića, pa nije ni čudno što se sa leve strane jednačine pojavljuje materijalni izvod brzine (jednačina (4.19)), odnosno, *ubrzanje delića*:

$$\rho\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} = -\rho g\frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau^d_{ji}}{\partial x_j} \tag{4.54}$$

Napisana jednačina znači sledeće: masa pomnožena ubrzanjem delića jedinične zapremine, jednaka je sumi sila koje deluju na taj delić: gravitacionoj sili, sili usled pritiska i viskoznim ili silama trenja.

4.5.2 Rešenje diferencijalne jednačine održanja količine kretanja za određena pojednostavljenja

Diferencijalna jednačina (4.53), izvedena u prethodnom poglavlju, u opštem slučaju je nerešiva. U nastavku će se uvesti određena uprošćavanja koja će dovesti do analitičkog rešenja jednačine održanja količine kretanja, odnosno dinamičke jednačine.

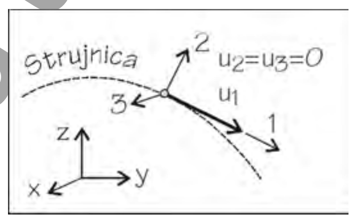
Ako se *pretpostavi da je fluid idealan* (poglavlje 2.2 na strani 17), član u jednačini koji je posledica viskoznih tangencijalnih napona postaje nula $\tau^d_{ji} = 0$. Jednačina (4.53) se može podeliti sa gustinom ρ, čime se dobija dinamička jednačina poznata pod nazivom *Ojlerova jednačina*:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -g\frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{4.55}$$

Ovako napisana Ojlerova jednačina predstavlja skup od 3 nezavisne jednačine, za proizvoljne pravce 1, 2 i 3, dok je 5 veličina nepoznato: brzine u_1, u_2 i u_3, pritisak p i gustina ρ. Pored Ojlerove jednačine na raspolaganju je i jedna jednačina održanja mase (4.35) (jednačina kontinuiteta, strana 117), tako da je potrebna još jedna, peta jednačina, da bi sistem jednačina bio određen.

Peta jednačina je jednačina stanja, koja za tečnosti obično ima *uprošćen oblik* $\rho = \text{Const}$, dok kod gasova jednačina stanja zavisi od vrste procesa. Na primer, za spori izotermni proces, gde ne dolazi do promene temperature, koristi se veza $p = \rho RT = \rho \times \text{Const}$.

Sa napisanih pet jednačina dobijen je određen sistem. Na žalost, njegova integracija nije moguća analitički već samo približno, numerički, za određene konkretne početne i granične uslove.



Slika 4.21: U koordinatnom sistemu određenom strujnicom postoji samo jedna komponenta brzine

Za analitičko rešenje potrebno je uprostiti sistem jednačina. U nekom (x,y,z) koordinatnom sistemu, koji je nezavisan od strujanja, brzina u ima sve tri komponente različite od nule (slika 4.21). Ako se, međutim, postavi tako koordinatni sistem, da se pravac 1 poklapa sa pravcem brzine, postojaće samo jedna komponenta brzine u_1 različita od nule dok su druge dve komponente jednake nuli. Time se pojednostavljuje rešavanje dinamičke jednačine *uz ograničenje jednačine samo na pravac strujanja*. Ojlerova jednačina se sada može napisati u obliku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

gde je izostavljen indeks 1 jer je u napred rečeno da jednačina prati brzinu u, odnosno, da jednačina *prati strujnicu*. Drugi sabirak sa leve strane se može malo preurediti, pa se dobija jednačina:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} = -g\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Dalje uprošćavanje zahteva i postavljanje uslova *ustaljenosti strujanja*, čime prvi sabirak iz prethodne jednačine postaje nula. Sada se jednačina može napisati u obliku zgodnom za integrisanje duž strujnice:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho}\right) = 0$$

Parcijalni izvod člana u zagradi je nula, pa se zaključuje da ceo član u zagradi nije funkcija pravca vektora brzine x. Sledi da *duž strujnice* važi:

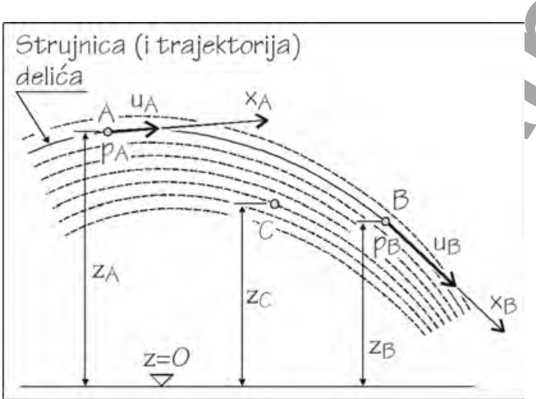
$$\frac{u^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = \text{Const1} \tag{4.56}$$

Deljenjem cele jednačine sa g, jednačina dobija dimenziju dužine:

$$\frac{u^2}{2g} + h + \frac{p}{\rho g} = \text{Const2} \quad [\text{m}] \tag{4.57}$$

Dobijena jednačina se naziva *Bernulijeva*[27] *jednačina*[28]. Izvedena je iz jednačine održanja količine kretanja (odnosno iz dinamičke jednačine) u diferencijalnom obliku uz sledeće pretpostavke:

- idealan fluid, fluid bez viskoznosti, odnosno bez unutrašnjeg trenja,
- konstantna gustina fluida (što je oštriji uslov od uslova nestišljivosti),
- jednačina važi samo duž jedne strujnice, i
- strujanje je ustaljeno.



Slika 4.22: Bernulijeva jednačina važi samo za jednu strujnicu

Poslednji uslov, ustaljeno strujanje, znači da se pritisak i brzina u jednoj tački strujnice ne menjaju kroz vreme (naravno, u jednom trenutku i duž jedne strujnice se pritisak i brzina mogu menjati). Pošto su strujnica i trajektorija u ustaljenom strujanju jedna ista linija, sledi da *Bernulijeva jednačina važi i duž trajektorije.*

Ojlerova jednačina (4.55), u dimenzionalnom smislu, predstavlja silu po jedinici mase, jer je nastala deljenjem sile po jedinici zapremine (jednačina (4.53)) sa gustinom ρ. Nakon integracije Ojlerove jednačine duž strujnice x, sila po jedinici mase se množi sa dužinom i dobija se rad po jedinici mase ili, ako se podeli sa gravitacionim ubrzanjem, rad po jedinici težine (4.57).

Na slici 4.22 je šematski prikazano ustaljeno strujanje idealnog fluida, sa 8 strujnica. Ako se koordinatni sistem tako postavi da je z osa vertikalna,

[27] Daniel Bernoulli (1700 - 1782), švajcarski matematičar, rođen u Holandiji u "matematičkoj" porodici: otac Johann (1667-1748), stric Jacob (1654-1705), stariji brat Nicolaus II (1695-1726) i mlađi brat Johann II (1710-1790) su se, takođe, bavili matematikom. Na žalost, unutar porodice Bernuli je vladala izrazita ljubomora i rivalstvo. Danijel je bio dobar prijatelj sa Ojlerom, sa kojim je zajedno radio na mehanici vibrirajućih tela. Bavio se problemima mirovanja i kretanja fluida i prvi je uveo reč *hidrodinamika* 1738. godine.

[28] Jednačina je nazvana u čast Bernulija mada ju je izveo ili Ojler ili Lagranž.

tada se za deliće koji se nalaze u tačkama A i B i koji *leže na jednoj strujnici*, može napisati Bernulijeva jednačina, zato što su iste integracione konstante (Const2 iz jednačina (4.57)):

$$\frac{u_A^2}{2g} + z_A + \frac{p_A}{\rho g} = \frac{u_B^2}{2g} + z_B + \frac{p_B}{\rho g} \tag{4.58}$$

Za delić C se ovakav izraz ne može napisati, jer je na drugoj strujnici i konstanta u Bernulijevoj jednačini ima drugu vrednost.

Sređivanjem gornjeg izraza, dobija se:

$$\frac{u_B^2 - u_A^2}{2g} = (z_A - z_B) + \frac{p_A - p_B}{\rho g} \tag{4.59}$$

U skladu sa prethodnim dimenzionalnim razmatranjem, član sa leve strane Bernulijeve jednačine (4.59) predstavlja rad koji je, usled povećanja brzine delića, potreban za povećanje kinetičke energije delića jedinične težine. Taj potreban rad se dobija iz dva izvora: smanjenjem potencijalne energije, odnosno, radom sile težine usled smanjenja visine delića (prvi sabirak sa desne strane) i radom sile pritiska usled smanjenja pritiska u tačkama A i B (drugi sabirak), sve po jedinici težine delića.

Poslednji član u prethodnoj jednačini je rezultat rada sila pritiska, jer se fluidni delić pomerio iz tačke A, u kojoj vlada pritisak p_A, u tačku B sa pritiskom p_B. Rad se ostvaruje kretanjem fluida, pa se taj član po nekada naziva i *rad toka* ili *rad na pomeranju*. Često je u upotrebi i naziv *potencijalna energija usled pritiska*. U jezičkom smislu taj naziv nije korektan jer fluid, čak i kad je stišljiv, ne poseduje "energiju pritiska" kao što to poseduju čvrsta elastična tela. Sabijanjem fluida i povećanjem pritiska se ne skladišti energija pritiska, već se ona prenosi kretanjem fluida a da sam fluid tu energiju ne poseduje (kao što, na primer, poseduje kinetičku energiju).

Spajanjem, odnosno grupisanjem drugog i trećeg člana u jednačini (4.57), dobija se *uslov održanja mehaničke energije duž jedne strujnice*:

$$\frac{u^2}{2g} + \left(h + \frac{p}{\rho g}\right) = \mathrm{Const2} \tag{4.60}$$

koji glasi: zbir kinetičke i potencijalne energije po jedinici težine fluidnog delića je konstantan duž jedne strujnice.

Za praktičnu primenu Bernulijeve jednačine problem predstavlja konstanta Const2 koja menja vrednost od jedne do druge strujnice. Kako je u izvođenju Bernulijeve jednačine pretpostavljeno da je fluid idealan, neviskozan, kao *posledica nepostojanja tangencijalnih napona je i bezvrtložnost*: fluidni delići se tako deformišu da ne dolazi do njihove rotacije (slika 4.15 na strani 112). Uslov bezvrtložnosti je dat sa uslovom $\Omega_k = 0$ (4.25) odnosno sa:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

Ako se ovaj uslov primeni na Ojlerovu jednačinu (4.55), u drugom sabirku sa leve strane se može izvod po pravcu j zameniti sa izvodom po pravcu i, pa cela jednačina postaje:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{4.61}$$

Primenjujući uslov konstantne gustine i ustaljenosti toka, uvlačenjem brzine u_j pod parcijalni izvod u drugom sabirku i grupisanjem svih izvoda po x_i, dobija se:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_j u_j}{2} + gh + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

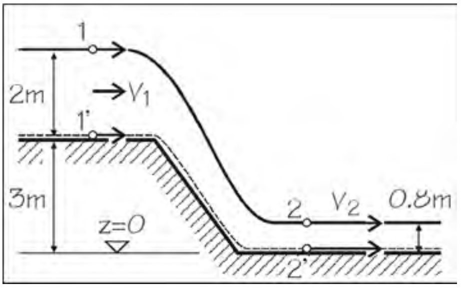
Proizvod brzina $u_j u_j$ je jednak zbiru kvadrata po svim pravcima, što je jednako brzini duž strujnice na kvadrat: $u_j u_j = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = u^2$. Da bi prethodna jednačina bila zadovoljena, mora biti ispunjen uslov da je po bilo kom pravcu i izraz u zagradi nezavistan od tog pravca, odnosno, da je izraz u zagradi konstantan:

$$\frac{u^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = \text{Const3} \tag{4.62}$$

Dobijena je Bernulijeva jednačina koja ima isti oblik kao i jednačina (4.56), pri čemu *nije korišćen uslov integracije po jednoj strujnici već uslov bezvrtložnosti*, pa jednačina *važi za celo strujno polje*. Jednačina se može podeliti sa gustinom ρ, tako da se dimenzionalno dobije energija po jedinici težine delića, odnosno, dimenzija dužine (kao i jednačina (4.57)).

Primer 4.5.2

Voda se iz dovodnog kanala, u kome teče brzinom od 1 m/s i sa dubinom od 2 m, naglo spušta u donji kanal, u kome je dubina 0,8 m. Ako je denivelacija dna 3 m, kolika je brzina vode u donjem kanalu?



Kod kratkih objekata, često se usvaja pretpostavka da je fluid idealan i da je raspored brzina po preseku konstantan. Takođe, u preseku treba da bude i hidrostatička raspodela pritiska. Za tačke 1 i 2, koje su na površini vode, može se postaviti Bernulijeva jednačina:

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$

Pošto su obe tačke na površini vode, $p_1 = p_2 = 0$. Zamenom ulaznih podataka, dobija se:

$$\frac{1{,}0^2}{2 \times 9{,}81} + (3+2) + 0 = \frac{V_2^2}{2 \times 9{,}81} + 0{,}8 + 0 \quad \Rightarrow \frac{V_2^2}{2 \times 9{,}81} = 4{,}251$$

pa je brzina V_2 jednaka:

$$V_2 = \sqrt{4{,}251 \times 2 \times 9{,}81} = 9{,}13 \text{ m/s}$$

Isto rešenje bi se dobilo i za bilo koju drugu strujnicu. Na primer, ako se odabere strujnica koja je blizu dna, brzina $V_{1'}$ je ista kao i V_1, kota tačke $z_{1'} = 3$ m a visina pritiska u tački je $p_{1'}/\rho g = 2$ m. Kota tačke 2' je nula, a visina pritiska je $p_{2'}/\rho g = 0{,}8$ m. Bernulijeva jednačina ima isti oblik kao i prethodno napisana, pa je i rešenje za brzinu u tački 2' isto.

4.5.3 Primeri primene Bernulijeve jednačine

Bernulijeva jednačina prati mehaničku energiju jednog delića duž strujnice idealnog fluida. Ukoliko strujnice polaze i završavaju u rezervoarima, gde svi delići imaju istu mehaničku energiju (jednaku potencijalnoj), jednačina se može pisati za tačke 1 i 2, koje leže na bilo koje dve strujnice, jer je konstanta Const2 iz jednačine (4.60) ista za sve strujnice.

Bernulijeva jednačina je izvedena za slučaj strujanja idealnog fluida. Taj uslov znači da se zanemaruje trenje, koje niz struju postepeno smanjuje raspoloživu mehaničku energiju fluidnom deliću. U praktičnoj primeni jednačine, često se prvo pretpostavi da je fluid idealan i za tu pretpostavku se nađe rešenje, na primer, protok ispod ustave u otvorenom kanalu. Zatim se dobijeno rešenje "popravlja" za slučaj realnog fluida, množenjem sa *koeficijentom protoka*, koji je odnos realnog i idealnog protoka i čija je vrednost uvek manja od jedinice. Za svaki konkretan slučaj vrednost koeficijenta protoka se određuje eksperimentalnim merenjima.

U izvođenju Bernulijeve jednačine pretpostavljeno je ustaljeno tečenje. U mnogim zadacima u građevinskoj hidrotehnici, neustaljenost se iskazuje kroz relativno spore promene, kao na primer isticanje vode iz rezervoara, gde se protok postepeno smanjuje usled smanjenja nivoa u rezervoaru. Takvi problemi se zovu *kvaziustaljeni* (poglavlje 4.1.4 na strani 90) i mogu se rešavati primenom Bernulijeve jednačine uz korišćenje i jednačine kontinuiteta, kojom će se u vremenskim intervalima od nekoliko minuta korigovati promene u graničnim uslovima.

U nastavku će se dati nekoliko primera primene Bernulijeve jednačine za tečenje nestišljivog fluida u cevima i u otvorenim tokovima. Pri tome se neće ulaziti detaljnije u prirodu raznih koeficijenta kojima se rešenje za idealno tečenje svodi na realno. Time bi se došlo do neophodnosti praćenja ukupne energije, a ne samo mehaničke energije delića, a to je oblast koja će se razmatrati u poglavlju 4.6 *Održanje energije sistema*.

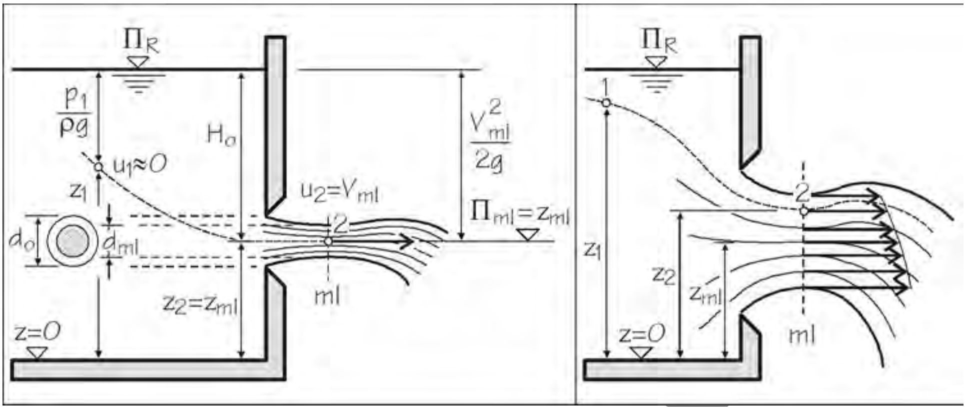
4.5.3.1 Isticanje kroz oštroivični otvor

U Hidrotehnici se često koriste *oštroivični* otvori, prelivi i ustave. Ako se otvor u konturi kroz koju prolazi fluid tako napravi da je sa uzvodne strane zid konture upravan na fluidnu struju, a sa nizvodne strane zasečen pod uglom od 45^0 (slika 4.23) tako da se formira oštra ivica, dobija se precizno definisan oblik izlazne fluidne struje koja će imati minimalan kontakt sa konturom pa, samim tim i minimalan efekat trenja. Kada otvor nije oštroivični, strujanje zavisi i od debljine zida konture, njegove hrapavosti kao i kapilarnih napona.

Na slici 4.23, prikazano je isticanje iz rezervoara kroz oštroivični otvor. Zid rezervoara je namerno nacrtan uveličano, da bi se jasno video detalj preseka. Fluidni delići iz rezervoara formiraju paraboličnu putanju kako bi prošli kroz oštroivični otvor. Zbog inercije, u preseku otvora delići ne mogu naglo da promene putanju, pa se nešto nizvodnije od otvora formira suženi presek[29] u kome su sve strujnice međusobno paralelne i upravne na presek. Taj suženi presek se često naziva *vena contracta* ili *mlaz fluida* (na slici 4.23 je to presek ml). Odnos površina preseka mlaza prema površini otvora je:

$$C_A = \frac{A_{ml}}{A_o} = \left(\frac{d_{ml}}{d_o}\right)^2$$

[29]Suženi presek se obično formira nizvodno na rastojanju od oko 1/2 prečnika otvora. Na slici 4.23 je suženi presek odmaknut da bi se lakše prikazao tok fluida. Kod malih brzina, postoji izražen uticaj gravitacije na mlaz fluida, ali čak i tada postoji suženi presek nizvodno od otvora u kome se taj uticaj može zanemariti.



Slika 4.23: Isticanje kroz mali oštroivični otvor (levi deo slike) i kroz veliki otvor gde pretpostavka o konstantnoj brzini po preseku otvora više ne važi (desni deo slike)

i naziva se *koeficijent kontrakcije mlaza*. Koeficijent kontrakcije se određuje pažljivim merenjem. Za kružni otvor njegova vrednost je približno konstantna i jednaka $C_A = 0,65$.

Zbog uslova paralelnosti strujnica u mlazu, moguće je postaviti Bernulijevu jednačinu (4.59) između tačke 1, koja se nalazi negde u rezervoaru, i tačke 2, koja je u centru mlaza (levi deo slike 4.23):

$$\frac{u_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{u_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$

Za veliki rezervoar i tačku 1, koja je dovoljno udaljena od otvora, brzina u_1 je zanemarljivo mala. Zbir položajne kote tačke 1 i visine pritiska je jednak pijezometarskoj koti (jednačina (3.11) sa strane 38), koja se poklapa sa kotom rezervoara:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \Pi_R$$

Tačka 2 se nalazi u suženom preseku, gde je fluid u kontaktu sa atmosferom. Pritisak u tački je jednak atmosferskom pritisku, pa je $p_2 = 0$. Sređivanjem izraza dobija se:

$$\Pi_R = \frac{u_2^2}{2g} + z_2 \quad \Rightarrow \quad u_2 = \sqrt{2g(\Pi_R - z_2)} = \sqrt{2gH_o} = u_{ml} \tag{4.63}$$

gde je H_o rastojanje od osovine mlaza do pijezometarske kote rezervoara. Za mlaz čiji je prečnik relativno mali u odnosu na visinu H_o promena brzine po visini mlaza se može zanemariti, pa se može staviti da je brzina u mlazu konstantna i jednaka brzini u tački 2.

Zavisnost brzine fluida, pri isticanju iz rezervoara, od kvadratnog korena rastojanja do nivoa u rezervoaru, 1643. godine je eksperimentalno dokazao Toričeli, pa se u njegovu čast jednačina (4.63) često naziva još i Toričelijeva jednačina. Brzina $u_2 = u_{ml}$ je brzina u suženom preseku, dok u sâmom preseku otvora u ravni zida rezervoara i brzina i pritisak nisu uniformni, pa u tom preseku se *ne sme primenjivati Bernulijeva jednačina*.

Za mlaz prikazan na desnoj strani slike 4.23 se ne može smatrati da su brzine po preseku konstantne. Za tačku 2, koja sada nije u centru mlaza, već na bilo kojoj strujnici, postavlja se Toričelijeva jednačina:

$$u_2 = \sqrt{2g(\Pi_R - z_2)} \tag{4.64}$$

odakle se dobija brzina. Rešavanjem jednačine za sve tačke u preseku mlaza (u kome još uvek važi uslov da je sužen i da su strujnice međusobno paralelne i upravne na presek) dobija se raspored brzina $u_2 = u_2(z_2)$. Protok kod velikog otvora je integral brzina u_2 po preseku mlaza, odnosno, suma proizvoda brzina i pripadajućih proticajnih površina.

Toričelijeva jednačina isticanja važi samo za idealan fluid. Brzina isticanja realnog fluida je nešto manja zbog postojanja trenja, pa se uvodi koeficijent brzine C_V. Prava brzina mlaza i protok kroz otvor su:

$$V_{ml} = C_V \sqrt{2gH_o}$$

$$Q = A_{ml} V_{ml} = C_V A_{ml} \sqrt{2gH_o}$$

Često je zgodnije protok izraziti u funkciji površine otvora u zidu a ne suženog mlaza. Korišćenjem koeficijenta kontrakcije, može se zameniti $A_{ml} = C_A A_o$ pa se dobija:

$$Q = C_A C_V A_o \sqrt{2gH_o} = C_Q A_o \sqrt{2gH_o} \tag{4.65}$$

Koeficijent $C_Q = C_A C_V$ se zove *koeficijent protoka*. Tipična vrednost za koeficijent brzine kod kružnog oštroivičnog otvora je $C_V = 0{,}95 \sim 0{,}98$ pa je koeficijent protoka obično u granicama $C_Q = 0{,}61 \sim 0{,}64$.

Primer 4.5.3

U zatvorenom rezervoaru u kome se nalazi voda gustine $\rho = 1\ \mathrm{kg/dm^3}$ i dubine 3 m, pritisak u vazduhu iznad vode je $p_{VAZ} = 15$ kPa. U dnu rezervora je oštroivični kružni otvor prečnika $d = 1$ cm. Ako je izmeren prečnik mlaza nizvodno od otvora $d_{ml} = 0{,}81$ cm i ako je koeficijent brzine $C_V = 0{,}96$, koliki je protok kroz otvor?

Referentna ravan se može postaviti na koti otvora, odnosno dna suda. Pritisak na koti površine vode je zadati pritisak vazduha, pa je pijezometarska kota vode:

$$\Pi = \frac{p}{\rho g} + z = \frac{15}{1 \times 9{,}81} + 3 = 4{,}529 \text{ m}$$

Koeficijent kontrakcije mlaza je odnos površina mlaza i otvora u dnu suda:

$$C_A = \frac{A_{ml}}{A} = \left(\frac{d_{ml}}{d}\right)^2 = \frac{0{,}81^2}{1^2} = 0{,}656$$

Protok kroz otvor na dnu je:

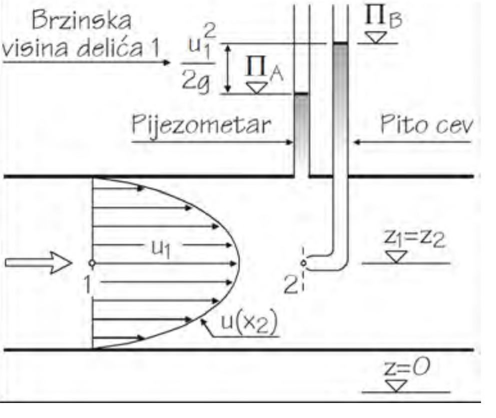
$$Q = C_A C_V A \sqrt{2g(\Pi - z_{ml})} = 0{,}656 \times 0{,}96 \frac{0{,}01^2 \pi}{4} \sqrt{2 \times 9{,}81(4{,}529 - 0)}$$

$$Q = 0{,}000466 \text{ m}^3/\text{s} = 0{,}466 \text{ L/s}$$

4.5.3.2 Pito i Pito-Prantlova cev

Zbir kinetičke i potencijalne energije duž jedne strujnice idealnog fluida je, prema Bernulijevoj jednačini, konstantan. Povećanje brzine delića je moguće samo na račun smanjenja potencijalne energije i obrnuto, usporavanjem delića kinetička energija se pretvara u potencijalnu.

Na slici 4.24 je prikazan fluidni delić 1 koji ima brzinu u_1. Na njegovom putu, neposredno nizvodno, nalazi se otvor savijene cevi (presek 2) u kojoj svi fluidni delići stoje. Kada delić 1 dođe do tačke 2, njegova brzina naglo padne sa u_1 na nulu. Za taj delić se može napisati Bernulijeva jednačina:



Slika 4.24: Pito cev pokazuje kolika je ukupna mehanička energija po jedinici težine fluida u jednoj strujnici

$$\frac{u_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{u_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$

Pošto je $z_1 = z_2$ i brzina $u_2 = 0$, jednačina se svodi na:

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g}$$

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho g} = \frac{u_1^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad p_2 - p_1 = \Delta p = p_u = \frac{1}{2}\rho u_1^2 \tag{4.66}$$

Dobijena veličina p_u ima dimenziju pritiska [Pa]. Ona se zove *zaustavni pritisak*, jer predstavlja maksimalno povećanje pritiska koje se dobija kada se fluidni delić naglo zaustavi. Pojam zaustavnog pritiska se često koristi u Mehanici fluida i o njemu će biti više priče u oblasti otpora i opstrujavanja tela, u poglavlju 6.4, *Otpori oblika*. Zaustavni pritisak kao maksimalno mogući pritisak je, takođe, zgodna mera za izražavanje relativnih pritisaka u fluidnoj struji i koristi se u oblasti Dimenzionalne analize, koja će biti obrađena u glavi 5.

U savijenoj cevi B, kojoj pripada i delić 2, svi fluidni delići miruju, tako da se za deo fluida unutar cevi može napisati osnovna jednačina hidrostatike:

$$\Pi_B = \frac{p_2}{\rho g} + z_2$$

Iz prethodno dobijene jednačine, sledi da se pritisak p_2 poveća u odnosu na neporemećeni pritisak p_1 za zaustavni pritisak p_u, pa je pijezometarska kota za fluid u cevi B:

$$\Pi_B = \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_2$$

Ako se umesto zadnjeg člana z_2 stavi kota tačke 1, prethodna jednačina se svodi na:

$$\Pi_B = \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{u_1^2}{2g} + \Pi_1$$

gde je Π_1 pijezometarska kota fluida na mestu gde je fluidni delić 1.

Kako su strujnice u preseku 1 paralelne i upravne na presek, pijezometarska kota Π_1 važi za ceo presek 1 pa će se i fluid u pijezometarskoj cevi A, nacrtanoj na slici 4.24, popeti upravo do te kote. Prethodna jednačina postaje:

$$\Pi_B = \frac{u_1^2}{2g} + \Pi_A \quad \Rightarrow \quad \Pi_B - \Pi_A = \frac{u_1^2}{2g} = \frac{p_u}{\rho g}$$

odakle se vidi da razlika dve kote $\Pi_B - \Pi_A$ predstavlja visinu zaustavnog pritiska $\frac{p_u}{\rho g}$, odnosno, brzinsku visinu $\frac{u_1^2}{2g}$ fluidnog delića na koti z_1. Merenjem te razlike pijezometarskih kota može se odrediti brzina delića, a pomeranjem cevi B po visini preseka, može se odrediti kompletan raspored brzina $u(x_2)$. Ako je tok fluida sa slobodnom površinom, tada je sâma slobodna površina pijezometarska kota, pa druga pijezometarska cev A nije potrebna.

Savijena cev B se zove Pito cev, po francuskom inženjeru Anriju Pitou[30], koji ju je prvi upotrebio za merenje brzine vode u reci Seni 1732 godine. Interesantno je da je tek nekih 200 godina kasnije, nemac Ludvig Prantl[31], napravio elegantnu konstrukciju spajanjem dve cevi u jednu celinu, čime je dobijena jednostavna i tačna sprava za merenje brzine fluida.

4.5.3.3 Oštroivični preliv

Ukoliko se u otvoreni tok postavi vertikalna pregrada u kojoj se nalazi *oštroivični preliv*, moguće je uspostaviti vezu između visine mlaza fluida na prelivu i protoka. Oštroivični prelivi se najčešće prave tako da imaju otvor u pregradi celom širinom toka ili pravougaoni otvor sa širinom manjom od širine kanala (slika 4.25). Takođe, koriste se i prelivi sa otvorom posebnih oblika, kao na primer trougaoni "V" preliv sa uglom od 90^0.

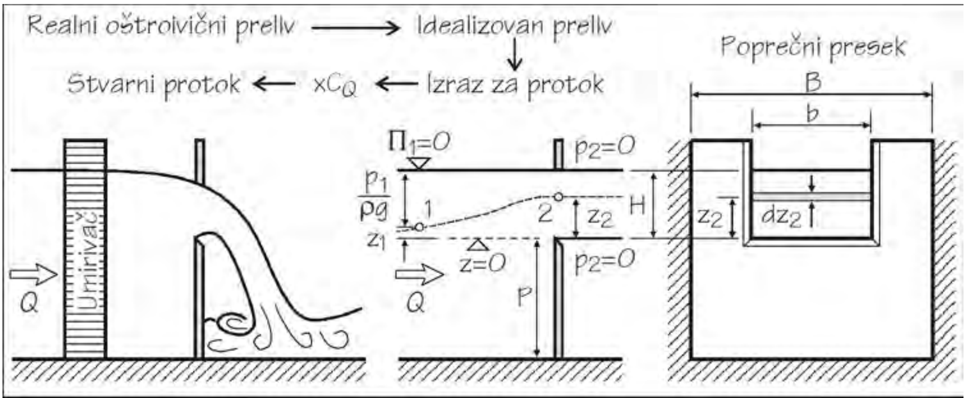
Strujna slika uzvodno i nizvodno od preliva je veoma kompleksna (levi deo slike 4.25), tako da ne postoje uslovi za direktnu primenu Bernulijeve ili Ojlerove jednačine. Mada je nizvodno od preliva moguće obezbediti atmosferski pritisak sa obe strane mlaza, zbog nesimetrične zakrivljenosti strujnica ne postoji suženi presek u kome bi strujnice bile paralelne i upravne na presek a pritisak uniforman. Na protok preko preliva utiču i turbulencija u dolaznoj fluidnoj struji kao i postojanje dolazne brzine, čiji raspored zavisi od geometrije dovodnog kanala i trenja u kanalu.

Analitičku zavisnost visine prelivnog mlaza od protoka je prvi uspostavio nemački inženjer Vajsbah[32], usvajajući sledeća značajna pojednostavljenja

[30] Henri de Pitot (1695 - 1771) francuski matematičar i fizičar. Radio je kao građevinski inženjer na odvodnjavanju močvarnog zemljišta, konstrukciji mostova, sistema za navodnjavanje i sistema za odbranu od poplava. 1732 godine je upotrebio efekat zaustavnog pritiska za merenje brzine u reci Seni tako što je savio staklenu cev pod 90^0 i njome u nizu tačaka u profilu reke merio brzinsku visinu $u^2/2g$.

[31] Ludwig Prandtl (1875 - 1953) nemački inženjer koga najčešće nazivaju i ocem moderne mehanike fluida, ali koji nikada nije bio priznat kao pravi naučnik. U svojim istraživanjima, koristeći vizuelizaciju toka, uočio je postojanje sloja oko tela u kojima je gradijent brzine veliki i definisao je teoriju graničnog sloja, prema kojoj se fluidni tok može razdvojiti na deo uz samu čvrstu granicu, gde viskoznost ima dominantnu ulogu i na udaljeniji deo gde se fluid smatra neviskoznim i idealnim (poglavlje 6.3.2 *Raspored brzina i granični sloj oko tanke ploče*, strana 250). Takođe, dao je teorijske osnove za proračun sile uzgona na krila aviona čime je značajno doprineo razvoju avijacije početkom dvadesetog veka. U toku rada na eksperimentima, doprineo je razvoju merne opreme, između ostalog i pravljenjem etalonske, referentne Pito-Prantlove sonde.

[32] Julius Weisbach (1806 - 1871) nemački inženjer i profesor matematike i geometrije, mineralogije, rudarstva, geodezije, optike, mašinstva, ... Interesantno je da je pre početka svoje profesorske karijere, 1830. godine proveo šest meseci pešačeći kroz Mađarsku, Tiroliju i Bavariju. Hidraulikom se "zarazio" za vreme posete Pariskom sajmu industrije, 1839.



Slika 4.25: Kompleksno tečenje preko oštroivičnog preliva se može uprostiti, uz primenu empirijskih koeficijenta na dobijene izraze

(slika 4.25 sa desne strane):

1. uzvodno od preliva dolazna brzina je uniformna sa hidrostatičkom raspodelom pritisaka po preseku,

2. mlaz preko preliva je horizontalan, svi fluidni delići se u ravni preliva kreću horizontalno, upravno na prelivnu ivicu,

3. pritisak oko preliva kao i u samom prelivu je atmosferski,

4. zanemaruje se efekat viskoznosti i površinskog napona.

Za usvojene uslove Bernulijeva jednačina duž jedne strujnice je:

$$\frac{u_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{u_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$

i svodi se na oblik:

$$\frac{u_1^2}{2g} + \Pi_1 = \frac{u_2^2}{2g} + z_2$$

Ako je referentni sistem ($z = 0$) postavljen na koti vrha prelivne ivice, tada je pijezometarska kota Π_1 jednaka visini H od ivice preliva do nivoa fluida u preseku 1. Iz prethodne jednačine se dobija brzina u mlazu:

$$u_2 = \sqrt{2g\left(H - z_2 + \frac{u_1^2}{2g}\right)}$$

godine. Svoje najznačajnije radove, čiji se rezultati i danas koriste, je publikovao baš iz oblasti hidraulike.

koja nije konstantna po visini mlaza z_2. Često se kod oštroivičnih preliva zbir visine prelivnog mlaza i brzinske visine u dolaznom preseku 1 označava sa H_0:

$$H_0 = H + \frac{u_1^2}{2g}$$

Protok preko preliva se dobija kao suma proizvoda svih brzina $u_2(z)$ i pripadajućih elementarnih površina dA. U slučaju pravougaonog, oštroivičnog preliva, datog na slici 4.25, elementarne površine su pravougaonici konstantne širine b i visine dz_2, pa je protok preko preliva:

$$\begin{aligned}
Q_{id} &= \int_A u_2 \,\mathrm{d}A = b\int_0^H u_2 \,\mathrm{d}z_2 = \\
&= b\sqrt{2g}\int_0^H \sqrt{\left(H - z_2 + \frac{u_1^2}{2g}\right)}\,\mathrm{d}z_2 = \\
&= -\frac{2}{3}b\sqrt{2g}\left[\left(H - z_2 + \frac{u_1^2}{2g}\right)^{3/2}\right]_0^H = \\
&= \frac{2}{3}b\sqrt{2g}\left[\left(H + \frac{u_1^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{u_1^2}{2g}\right)^{3/2}\right]
\end{aligned}$$

Dobijena jednačina za protok nije direktno rešiva, jer se sa desne strane nalazi brzina u_1 koja je funkcija protoka[33] $u_1 = Q/A_1$. Do rešenja se dolazi iterativnim postupkom, pri čemu se u prvoj iteraciji dolazna brzina u_1 može zanemariti, a u narednim iteracijama, uzima se brzina u_1, koja se računa iz protoka dobijenog prethodnom iteracijom. Često se u rešavanju protoka dolazna brzinska visina skroz zanemaruje, pa izraz za protok postaje:

$$Q_{id} = \frac{2}{3}b\sqrt{2gH^3}$$

Da bi se odredio protok na realnom prelivu, potrebno je dobijeni analitički izraz pomnožiti sa koeficijentom protoka C_Q:

$$Q = C_Q \times Q_{id}$$

Koeficijent protoka se određuje za svaku geometriju preliva i dolaznih uslova laboratorijskim merenjima. Koeficijent u sebi uključuje i neravnomernost brzina u presecima 1 i 2, tako da se u izrazima za protok ne koriste brzine

[33] Prilikom rešavanja zadataka, pravi se česta greška u obračunu poprečnog preseka A_1. Kao poprečni presek treba uzeti celokupni proticajni presek dubine $(H+P)$, od dna kanala do površine fluida, a ne samo dubinu H!

delića u_1 i u_2 već srednje profilske brzine V_1 i V_2. U literaturi [1, 12], mogu se naći tablice i dijagrami iz kojih se određuje koeficijent protoka za većinu standardnih oblika preliva.

Primer 4.5.4

Voda teče pravougaonim kanalom konstantne širine $B = 1$ m. Visina prelivnog mlaza je $H = 25$ cm a preliv je oštroivični pravougaoni, širine $b = 0{,}4$ m i visine $P = 0{,}3$ m. Koliki je protok kanalom ako je za date geometrijske uslove koeficijent protoka $C_Q = 0{,}61$?

Kao prva iteracija proračuna protoka može se uzeti da je dolazna brzina u kanalu nula:

$$Q^{(1)} = C_Q \frac{2}{3} b \sqrt{2gH^3} = 0{,}61 \frac{2}{3} 0{,}4 \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 0{,}25^3} = 0{,}09007 \text{ m}^3/\text{s} = 90{,}07 \text{ L/s}$$

Dolazna brzina za tako sračunat protok je:

$$V_1 = \frac{Q^{(1)}}{A_1} = \frac{Q^{(1)}}{B(H+P)} = \frac{0{,}09007}{1{,}0(0{,}25+0{,}3)} = 0{,}164 \text{ m/s}$$

a član brzinske visine u preseku 1 je:

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{0{,}164^2}{2 \times 9{,}81} = 0{,}001371 \text{ m} = 1{,}371 \text{ mm}$$

Kako se u izrazu za protok pojavljuje zbir visine prelivnog mlaza H i brzinske visine, rezultat prve iteracije pokazuje opravdanost pretpostavke o zanemarenju dolazne brzine. U drugoj iteraciji, protok je:

$$\begin{aligned} Q^{(2)} &= C_Q \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \left[\left(H + \frac{V_1^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{V_1^2}{2g} \right)^{3/2} \right] = \\ &= 0{,}61 \, \frac{2}{3} \, 0{,}4 \sqrt{2 \times 9{,}81} \left[(0{,}25 + 0{,}001371)^{3/2} - 0{,}001371^{3/2} \right] = \\ &= 0{,}09077 \text{ m}^3/\text{s} = 90{,}77 \text{ L/s} \end{aligned}$$

Dobijeni protok je veći od protoka iz prve iteracije za 0,7%. U većini proračuna, greška manja od 1% se smatra prihvatljivom. Ako bi se nastavilo sa iteracijama, brzina V_1 u drugoj iteraciji je 0,1650 m/s a brzinska visina 1,388 mm, dok je protok $Q^{(3)} = 90{,}78$ L/s, što se može konačno usvojiti kao tačna vrednost.

4.5.4 Navie-Stoksove jednačine

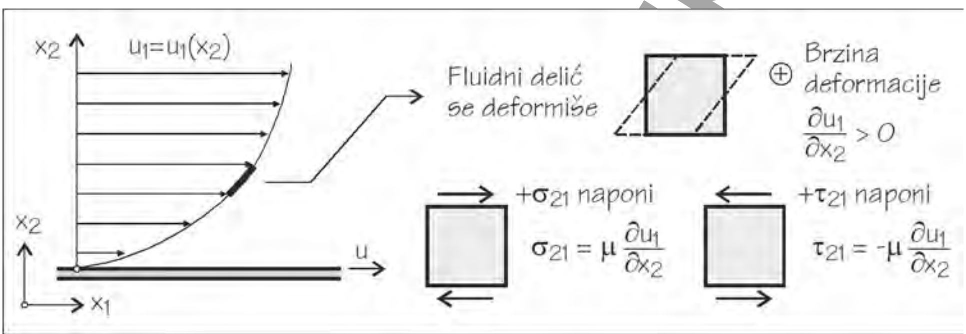
Dinamička jednačina (4.53), odnosno (4.54), na strani 128, sadrži član $\dfrac{\partial \tau_{ji}^d}{\partial x_j}$ koji predstavlja *površinsku silu* od devijatorskog dela napona $(-\sigma_{ij}^d)$.

Kao posledica delovanja te sile dolazi do deformacija, pa bi trebalo da postoji veza *između tangencijalnih napona* (τ_{ij}^d) *i brzina deformacija* (ω_{ij}).

Za strujanje fluida konstantne gustine, pri čemu postoji samo jedna komponenta brzine u_1, a druge dve su nula $u_2 = u_3 = 0$, izvodi komponenti 2 i 3 su takođe nula, pa važi i da je:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$$

na osnovu uslova (4.38) da je zbir brzina dilatacija u sva tri pravca jednak nuli. Brzina u_1 je samo funkcija pravca 2 (uz pretpostavku da je strujanje u dve ravni), odnosno, $u_1 = u_1(x_2)$.



Slika 4.26: Pozitivni smerovi brzina deformacija i napona na fluidni delić

U poglavlju 2.2 *Viskoznost* je jednačinom (2.6) na strani 16, data veza između tangencijalnog napona i ugaone brzine (jednačina (4.22), strana 111):

$$\tau(y) = \mu \frac{du}{dy}$$

Za date uslove, veza se može napisati u sledećem obliku:

$$\tau_{21} = \tau_{12} = -\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \tag{4.67}$$

gde je u skladu sa konvencijom o pozitivnim smerovima napona (slika 4.19 na strani 125 i slika 4.26), u izrazu za tangencijalni napon promenjen znak.

Za opisane uslove strujanja, brzina deformacija ω_{ij} je:

$$\omega_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \quad \Rightarrow \quad \omega_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

jer je $u_2 = 0$. Kombinujući prethodni izraz sa izrazom (4.67) dobija se:

$$\tau_{12} = -2\,\mu\,\omega_{12}$$

Dobijena relacija se može proširiti na ceo devijatorski deo napona i deformacija (4.29):

$$(-\sigma_{ji}^d =)\ \tau_{ji}^d = -2\,\mu\,\omega_{ji}^d = -2\,\mu\left(\omega_{ji} - \delta_{ij}\frac{1}{3}\,\omega_{kk}\right) \tag{4.68}$$

Sređivanjem izraza zamenom članova koji nose deformaciju ω_{ji} (4.26) i ω_{kk} (4.20), dobija se veza između tangencijalnog napona i brzine deformacija:

$$\tau_{ji}^d = -\mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \frac{2}{3}\,\mu\,\delta_{ij}\,\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \tag{4.69}$$

Površinska sila u pravcu i je izvod tangencijalnog napona τ_{ji}^d po koordinatnom pravcu x_j:

$$\frac{\partial \tau_{ji}^d}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\mu\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\mu\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\,\delta_{ij}\,\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) \tag{4.70}$$

Kod drugog člana zbira se može promeniti redosled diferenciranja, pa će se dobiti sledeći oblik:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\mu\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\,\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) \tag{4.71}$$

U trećem članu zbira (4.70), mogu se spojiti parcijalni izvod x, po pravcu j i Kronekerov simbol δ_{ij}, tako da se dobija parcijalni izvod po pravcu i:

$$\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\,\delta_{ij}\,\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) = \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\,\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) = \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\,\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) \tag{4.72}$$

U izrazu je i udvojeni indeks k zamenjen indeksom j, jer se radi o zbiru po tri osnovna koordinatna pravca, pa je svejedno koja se oznaka koristi.

Spajanjem drugog (4.71) i trećeg (4.72) člana izraza, dobija se:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\,\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) + \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\,\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) = -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\,\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)$$

Kada se uvrste sređeni članovi u jednačinu (4.70), dobija se veza između površinske sile i brzine deformacija:

$$\frac{\partial \tau_{ji}^d}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\,\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) \tag{4.73}$$

Stavljanjem te veze u dinamičku jednačinu (4.54) (strana 128), dobija se:

$$\rho \frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) \tag{4.74}$$

dinamička jednačina za viskozni, Njutnovski fluid. Jednačina je vektorska, što znači da su izrazom (4.74) napisane tri jednačine, za osnovne koordinatne pravce $i = 1$, $i = 2$ i $i = 3$. One se najčešće zovu *Navie*[34]*-Stoksove*[35] *jednačine.*

Izvedene Navie-Stoksove jednačine važe za viskozne fluide, kod kojih je viskoznost promenljiva po prostoru $\mu = \mu(x_i)$. To je najčešće slučaj kod strujanja fluida koji su izloženi temperaturnim uticajima. Ako se pretpostavi da je fluid homogen, tako da viskoznost ne zavisi od koordinatnog pravca, tada se koeficijenat viskoznosti μ može izvući ispred parcijalnog izvoda po x_i, odnosno po x_j. Treći član zbira (4.74), tada se može napisati u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \, \partial x_j} = -\mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2}\right)$$

gde je pokazano da član, sa udvojenim indeksom $(\partial x_j \, \partial x_j)$, predstavlja zbir tri člana, po pravcima 1, 2 i 3. Četvrti član zbira (4.74) se može napisati u obliku:

$$\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{3}\,\mu \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

pa Navie-Stoksove jednačine za homogen fluid postaju:

$$\rho \frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \, \partial x_j} + \frac{1}{3}\,\mu \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \tag{4.75}$$

[34]Claude-Louis Marie Henri Navier (1785 - 1836) francuski inženjer i kasnije profesor, koji se specijalizovao za mehaniku elastičnih tela. Radio je na projektovanju mostova i prvi je dao potpunu teoriju visećih mostova. Danas je poznatiji po radovima iz mehanike fluida, gde je 1821. godine dao prvi oblik Navie-Stoksove jednačine za nestišljive fluide, a godinu dana kasnije i za viskozne fluide. Interesantno je da je do korektnog oblika jednačina došao bez poznavanja koncepta tangencijalnih napona, već direktno uzimajući sile među molekulima kao meru trenja.

[35]George Gabriel Stokes (1819 - 1903) engleski matematičar i fizičar, irskog porekla, jedan od predsednika Kraljevskog udruženja engleskih naučnika. Kombinujući izvrsno matematičko znanje i sklonost ka eksperimentalnom radu, u mnogim oblastima je postavio fundamentalne matematičke principe. U svojim prvim radovima iz 1842. i 1843. se bavio ustaljenim kretanjem nestišljivog fluida, da bi kasnije počeo da se bavi i talasnim kretanjima i viskoznošću. Velike doprinose je dao i u teoriji prostiranja svetlosti kao i u razvoju opšte matematičke fizike.

pri čemu je član površinske sile za homogeni fluid:

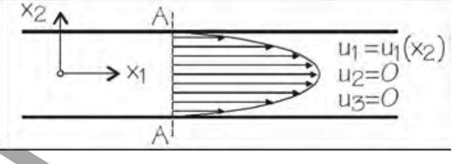
$$\frac{\partial \tau_{ji}^{d}}{\partial x_j} = -\mu\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\,\partial x_j} - \frac{1}{3}\,\mu\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \tag{4.76}$$

Ako se pretpostavi da je fluid homogen i nestišljiv ($\rho = \mathrm{Const.}$) tada je na osnovu jednačine održanja mase (4.38) (strana 119) član $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$, pa se Navie-Stoksove jednačine svode na:

$$\rho\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} = -\rho g\frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\,\partial x_j} \tag{4.77}$$

Primer 4.5.5

Za jednoliku ravansku ustaljenu struju homogenog, viskoznog i nestišljivog fluida, pokazati da je pijezometarska kota konstantna po preseku struje.



Prema datoj skici, brzine su $u_1 = u_1(x_2)$, $u_2 = u_3 = 0$. Za date uslove je i $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$ jer iz uslova $\rho = \mathrm{Const.}$ sledi $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$.

Za homogen nestišljiv fluid primenjuju se Navie-Stoksove jednačine (4.77). Za slučaj jednolikog (izvodi po x_1 su nula) i ustaljenog (izvodi po vremenu su nula) strujanja, član sa leve strane, materijalni izvod brzine je nula:

$$\rho\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} = 0$$

pa su Navie-Stoksove jednačine:

$$0 = -\rho g\frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\,\partial x_j}$$

Deljenjem sa ρg jednačina se piše za pravac 2, upravno na fluidnu struju:

$$0 = -\frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{p}{\rho g}\right) + 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial}{\partial x_2}\,(\Pi) = 0 \quad\Rightarrow\quad \Pi = \mathrm{Const.}$$

odakle sledi da je pijezometarska kota konstantna duž preseka, u pravcu 2. Da bi se videlo od čega zavisi pijezometarska kota, napisaće se i Navie-Stoksova jednačina za pravac 1:

$$0 = -\frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{p}{\rho g}\right) + \frac{\mu}{\rho g}\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial}{\partial x_1}\,(\Pi) = \frac{\mu}{\rho g}\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}$$

Iz uslova da Π zavisi samo od x_1 a brzina u_1 od x_2, dolazi se do toga da su oba člana izraza konstante, pa se parcijalni izvodi mogu zameniti totalnim:

$$\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\mu}{\rho g}\frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}x_2^2} = \text{Const.} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}x_1} = I_\Pi = \text{Const.}$$

Za date granične uslove, izraz se može integrisati, odakle će se dobiti raspored brzina i nagib pijezometarske linije.

4.5.5 Rešenje integralne jednačine održanja količine kretanja za ustaljeno tečenje homogenog fluida u cevi

Integralna jednačina (4.44) održanja količine kretanja, odnosno dinamička jednačina data na strani 123, napisana za bilo koji pravac i glasi:

$$\int_{C\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}\,\mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{CA} \rho u_i (u_j n_j)\,\mathrm{d}A = F_i \tag{4.78}$$

Sa leve strane jednačine se nalazi priraštaj količine kretanja u jedinici vremena, po određenoj zapremini $\mathcal{V}$, uvećan za protok količine kretanja u jedinici vremena kroz omotač, graničnu površinu A posmatrane zapremine $\mathcal{V}$. Drugi sabirak je pozitivan ako je protok koji napušta zapreminu veći od onoga koji u nju ulazi. Prema drugom Njutnovom zakonu, vektorski zbir ova dva člana F_i mora biti jednak zbiru pravih sila koje deluju na konačnu zapreminu.

Prethodna jednačina se u najopštijem obliku može napisati kao uslov da je zbir dva vektora, odnosno dve sile, jednak nuli:

$$\vec{I} + \vec{F} = 0 \tag{4.79}$$

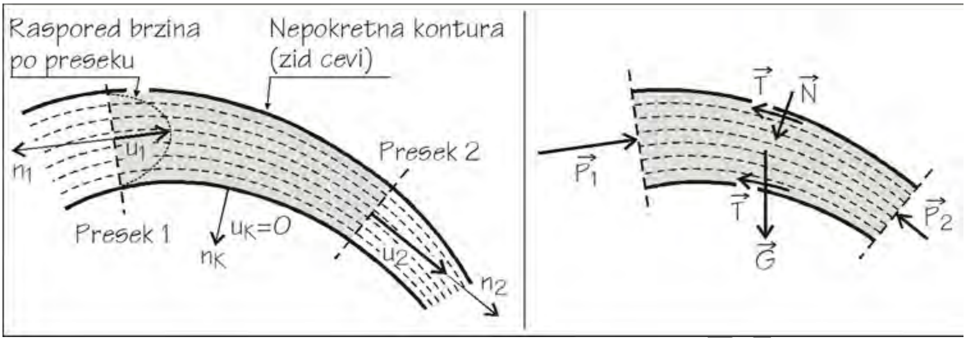
odakle je prema jednačini (4.78), sila $\vec{I}$ za pravac i negativan zbir prva dva sabirka:

$$I_i = -\left(\int_{C\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}\,\mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{CA} \rho u_i (u_j n_j)\,\mathrm{d}A\right) \tag{4.80}$$

Ovako definisana sila $\vec{I}$, zove se *inercijalna sila* ili *fiktivna sila* i predstavlja primenu Dalamberovog[36] principa, kojim se zadaci dinamike fluida svode na statiku: iako se fluid kreće, može se smatrati da posmatrano telo zapremine $\mathcal{V}$ miruje pošto su sve prave sile i inercijalne sile u ravnoteži.

---

[36] Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783) kontraverzni francuski matematičar, koji je lako ulazio u svađu sa svima oko sebe. Dao je izvanredan doprinos primeni matematike u fizici, posebno u oblasti održanja kinetičke energije, poboljšanjem Njutnove definicije sile. Bavio se statikom i dinamikom fluida, primenjujući integralni pristup umesto Bernulijevog diferencijalnog, usput tvrdeći da je njegov pristup bolji! Radio je na pisanju Enciklopedije sa Volterom i Didroom, gde je bio zadužen za matematiku i fizičku astronomiju. Sarađivao je, a i intenzivno svađao, sa Ojlerom.



Slika 4.27: Na deo cevi između preseka 1 i 2 se primenjuje dinamička jednačina: na levom delu slike su prikazane brzine, a na desnom delu slike sve prave sile, koje treba zajedno sa fiktivnim inercijalnim silama da "zatvore" poligon sila (prema jednačini (4.79))

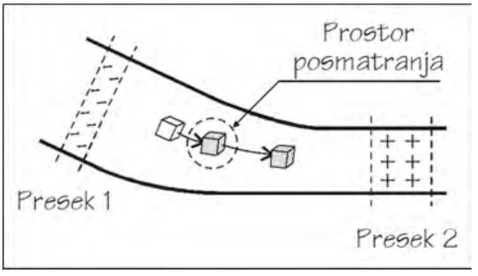
Jednačine (4.78), odnosno (4.79), moraju biti zadovoljene u okviru određene, konstantne zapremine. Na slici 4.27 je prikazan tok fluida kroz cev, koja se *postepeno sužava*. Tečenje je ustaljeno a fluid je homogen. Zapremina u okviru koje se rešava dinamička jednačina je omeđena presecima 1 i 2, kao i nepokretnom konturom cevi.

U dinamičkoj jednačini (4.78), zbog ustaljenog tečenja, član sa parcijalnim izvodom po vremenu je nula. U površinskom integralu, deo površine koji se odnosi na konturu (na levoj strani slike 4.27 je ort konture označen sa n_K), množi se sa brzinom nula, pa ostaje samo deo površine na presecima 1 i 2. Ako se pretpostavi da su brzine u presecima konstantne, jednake V_1 i V_2 (prema (4.7)), tada se rešenje dinamičke jednačine svodi na:

$$\rho Q\vec{V}_2 - \rho Q\vec{V}_1 = \vec{F} \tag{4.81}$$

Negativan znak kod preseka 1 ukazuje da je smer brzine suprotan od smera orta površine, odnosno da je u pitanju dotok količine kretanja.

Sa leve strane jednačine (4.81), nalazi se *priraštaj količine kretanja posmatrane mase u jedinici vremena*, u uslovima ustaljenog tečenja fluida konstantne gustine kroz cev. Do istog izraza se može doći i direktnom primenom osnovnog principa održanja količine kretanja, pri istim uslovima, na deo fluida između dva preseka cevi (slika 4.28). Prema jednačini kontinuiteta (4.42), zbog promene preseka cevi duž fluidne struje, u svakom od preseka delići imaju različite brzine. Delić koji je sivo obojen, u trenutku t, ima količinu kretanja $m\vec{V}_t$. U sledećem vremenskom trenutku $t+\Delta t$, kada napusti svoje mesto i pomeri se niz fluidnu struju, imaće veću brzinu pa će njegova količina kretanja $m\vec{V}_{t+\Delta t}$ da poraste. Međutim, u tom sledećem vremenskom trenutku $t+\Delta t$, na upražnjeno mesto sivog delića će doći beli delić (jer je fluid neprekidan), koji će sada imati brzinu i količinu kretanja jednaku onoj koju je imao sivi delić u trenutku t. Može se zaključiti da unutar posmatranog prostora, kroz vreme, ne dolazi do promene količine kretanja[37].



Slika 4.28: Jedina prava promena količine kretanja se događa na krajevima zapremine, u presecima 1 i 2

Promena količine kretanja se događa samo na krajevima zapremine, u presecima 1 i 2, tako da je dovoljno posmatrati preseke fluidne struje, a ne celu masu fluida. U preseku 1 se oduzima deo mase $m = \rho \not{V} = \rho Q \Delta t$ pa se, uz pretpostavku o tome da je brzina u preseku konstantna i jednaka srednjoj profilskoj brzini, smanjuje količina kretanja za $m\vec{V}_1 = \rho Q \Delta t \vec{V}_1$. U preseku 2 se osvaja ista masa pa se količina kretanja povećava za $m\vec{V}_2 = \rho Q \Delta t \vec{V}_2$. Ukupna promena količine kretanja u vremenskom intervalu Δt je:

$$-\rho Q \Delta t \vec{V}_1 + \rho Q \Delta t \vec{V}_2$$

pa se dobija da je promena količine kretanja u jedinici vremena ista kao i leva strana jednačine (4.81):

$$\rho Q \vec{V}_2 - \rho Q \vec{V}_1$$

Inercijalna sila $\vec{I}$, koja je jednaka negativnoj vrednosti promene količine kretanja (4.80), može se razdvojiti na dve komponente, na preseke 1 i 2. Za tečenje u cevi, u skladu sa jednačinom (4.81) inercijalne sile I_1 i I_2 su:

$$\vec{I}_1 = \rho Q \vec{V}_1 \qquad \vec{I}_2 = -\rho Q \vec{V}_2 \tag{4.82}$$

Zbog promenjenog znaka u izrazu, sila $\vec{I}_1$ deluje u pravcu ulazne brzine $\vec{V}_1$, a sila $\vec{I}_2$ suprotno od izlazne brzine $\vec{V}_2$. Može se zaključiti da je *smer komponente inercijalne sile takav da sila uvek deluje ka poprečnom preseku* kontrolne zapremine, odnosno, da *inercijalna sila uvek deluje ka masi fluida.*

Učinjena pretpostavka u rešavanju jednačine (4.80), o konstantnoj brzini u preseku, bila je korišćena i kod izvođenja jednačine kontinuiteta, jer je srednja brzina V isto što i integralni oblik $\dfrac{1}{A}\displaystyle\int_A u \, \mathrm{d}A$. U dinamičkoj jednačini se unutar integrala javlja proizvod brzine, pa sada više nije V^2 isto što i

[37] Već je rečeno da se koristi Ojlerov pristup u analizi strujnog polja, u kome se neustaljenost vezana za fluidni delić izbegava tako što se posmatra fiksan nepokretan prostor, u kome je onda strujanje ustaljeno.

$\frac{1}{A}\int_A u^2 \ \mathrm{d}A$. Da bi se tačnije rešio integral u uslovima neravnomernog rasporeda brzine po poprečnom preseku (prikazano u preseku A slike 4.27 kao i na slici 4.9, strana 98), uvodi se koeficijent β definisan kao:

$$\beta Q V = \int_A u^2 \,\mathrm{d}A \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{QV}\int_A u^2 \,\mathrm{d}A \tag{4.83}$$

pa je tačno rešenje dinamičke jednačine:

$$\beta_2 \rho Q \vec{V}_2 - \beta_1 \rho Q \vec{V}_1 = \vec{F} \tag{4.84}$$

a inercijalne sile po presecima su:

$$\vec{I}_1 = \beta_1 \rho Q \vec{V}_1 \qquad \vec{I}_2 = -\beta_2 \rho Q \vec{V}_2 \tag{4.85}$$

Koeficijent β, zove se *Businesov*[38] *koeficijent* i on je uvek veći od 1,00. Za parabolični raspored brzina u kružnoj cevi, koji se ostvaruje pri laminarnom tečenju (biće obrađivano u poglavlju 6.1), Businesov koeficijent je $\beta = 4/3 = 1{,}333$, a za razvijeno turbulentno tečenje u cevi, gde su brzine po preseku ujednačenije $\beta = 1{,}01 \sim 1{,}10$. Kod preciznijih obračunavanja sila na konstrukciju potrebno je koristiti Businesov koeficijent, dok će se u nastavku knjige njegov uticaj zanemarivati.

Primer 4.5.6

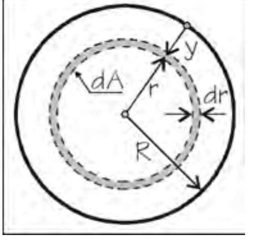
Raspored brzina u kružnoj cevi je dat sledećim izrazom:

$$u = u_{max}\left(\frac{y}{R}\right)^{1/7} \qquad 0 \le y \le R$$

gde je R poluprečnik cevi a y rastojanje od zida cevi. Izračunati koliki je Businesov koeficijent β i prokomentarisati rezultat.

Srednja brzina V je, prema jednačinama (4.3) i (4.7) data sa:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{1}{R^2\pi}\int_A u \,\mathrm{d}A$$



Na slici je prikazan kružni presek. Za osnosimetričan raspored brzine, elementarna površina $\mathrm{d}A$ se može zameniti kružnim prstenom širine $\mathrm{d}r$:

$$\mathrm{d}A = 2r\pi \,\mathrm{d}r \qquad r = R - y \qquad \mathrm{d}r = -\mathrm{d}y$$

Granica integracije je od R do 0. Ako se promeni znak priraštaja $\mathrm{d}y$ integracija će ići od 0 do R:

$$V = \frac{1}{R^2\pi}\int_R^0 2r\pi u \ dr = \frac{2u_{max}}{R^2}\int_0^R (R-y)\left(\frac{y}{R}\right)^{1/7} \mathrm{d}y = \frac{98}{120}\, u_{max}$$

[38] Valentin Joseph Boussinesq (1842 - 1929) francuski matematičar i fizičar, koji je dao značajan doprinos u oblasti hidraulike. Proučavao je talasno kretanje, otpore trenja, raspored brzina kao i fenomen razvoja turbulencije.

Zamenom srednje brzine u jednačinu za Businesov koeficijent β (4.83) dobija se:

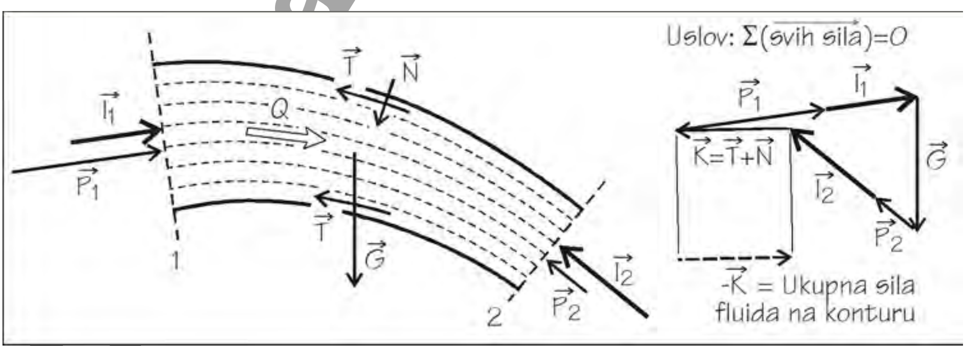
$$
\begin{aligned}
\beta &= \frac{1}{QV}\int_A u^2\,\mathrm{d}A = \frac{2\pi}{AV^2}\int_R^0 r u_{max}^2\left(\frac{y}{R}\right)^{2/7}\mathrm{d}r = \\
&= \frac{2\pi}{R^2\pi}\left(\frac{120}{98}\right)^2\int_0^R (R-y)\left(\frac{y}{R}\right)^{2/7}\mathrm{d}y = \\
&= \frac{2,9988}{R^2}\int_0^R\left(R^{5/7}y^{2/7} - R^{-2/7}y^{9/7}\right)\mathrm{d}y = \frac{2,9988}{R^2}\left(R^2\frac{7}{9} - R^2\frac{7}{16}\right) = 1,02
\end{aligned}
$$

Dobijeni Businesov koeficijent pokazuje da su stvarne inercijalne sile za 2% veće od sila koje se dobijaju uz pretpostavku o konstantnoj, srednjoj brzini po preseku.

Prave sile koje deluju na posmatranu zapreminu, prikazane su na slici 4.27, sa desne strane (sile težine, pritiska i konturna sila), dok su na slici 4.29 dodate i fiktivne sile, čime je postignuta ravnoteža sila:

$$\vec{I_1} + \vec{P_1} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{I_2} + \vec{P_2} = 0 \tag{4.86}$$

Od zapreminskih sila najčešće se uzima samo *sila težine* $\vec{G} = \rho\vec{g}V$ i ona deluje iz težišta zapremine vertikalno na dole. Od površinskih sila, u obzir se uzimaju *sile pritiska na presecima* 1 i 2, koje se računaju po načelima hidrostatike i čiji je pozitivan smer ka preseku (sile $\vec{P}$ na slici), kao i *ukupna sila kojom kontura deluje na fluid* $\vec{K}$, koja je zbir trenja između fluida i zida konture (sila $\vec{T}$) i normalnih napona (sila $\vec{N}$).



Slika 4.29: Vektorski zbir svih sila koje deluju na posmatranu zapreminu fluida, između preseka 1 i 2, je nula

U praktičnim primerima, koji će biti dati u nastavku, najčešće se dinamičkom jednačinom traži rezultujuća sila $-\vec{K}$, kojom *fluid deluje na konturu*. To su sile $\vec{T} + \vec{N}$ sa suprotnim smerom, smerom od fluida ka konturi:

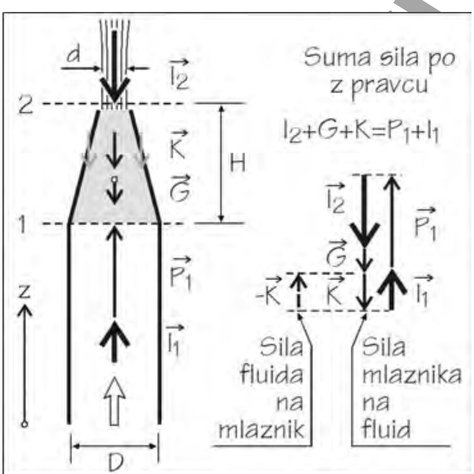
$$-\vec{K} = -(\vec{T} + \vec{N}) = \vec{I_1} + \vec{P_1} + \vec{G} + \vec{I_2} + \vec{P_2} \tag{4.87}$$

4.5.6 Primeri primene jednačine sila

Korišćenjem jednačine održanja količine kretanja u integralnom obliku (4.86), ili kako se češće naziva *dinamičke jednačine* ili *jednačine sila*, dolazi se jednostavno do praktičnih rešenja pri opterećenju konstrukcije fluidom koji se kreće. Pri tome se, zbog integralnog pristupa, ne ulazi u komplikovane jednačine, kojima bi se odredio raspored brzina i pritisaka unutar posmatranog fluida.

U korišćenju jednačine sila treba biti oprezan, jer se *moraju zadovoljiti uslovi* postavljeni pri izvođenju jednačine: ustaljeno tečenje, fluid konstantne gustine, brzina u preseku približna srednjoj brzini i nepokretna kontura. Takođe, neophodno je *korektno obračunati sve sile* koje deluju na izdvojenu masu fluida. U nastavku će se dati dva primera primene jednačine sila: jedan za tečenje u cevi i drugi za tečenje u otvorenom kanalu.

4.5.6.1 Sila na vertikalni mlaznik



Slika 4.30: Određivanje sile vode na vertikalni mlaznik

Posmatra se isticanje vode vertikalno u vis kroz mlaznik, cev koja se pri svom vrhu smanjuje sa prečnika D na manji prečnik d. Pretpostavlja se da je poznat protok kroz cev i pijezometarska kota za presek u cevi pre suženja. Potrebno je odrediti silu kojom voda deluje na mlaznik.

Na levom delu slike 4.30 je prikazan detalj cevi sa mlaznikom. Na desnom delu su nacrtane sve sile koje deluju na posmatranu zapreminu. Za date podatke mogu se odrediti pritisak u preseku 1 i brzine u presecima 1 i 2. Sile na zapreminu su:

- Sila pritiska[39] u preseku 1:
  $P_1 = p_1 A_1$

- Sila pritiska u preseku 2 je nula, jer mlaz izlazi u atmosferu pa je u preseku hidrostatički pritisak nula:
  $P_2 = 0 \quad (p = 0)$

- Inercijalne sile u presecima: $I_1 = \rho Q V_1$ i $I_2 = \rho Q V_2$. Vezu između brzina V_1 i V_2 daje jednačina kontinuiteta:
  $V_1 A_1 = V_2 A_2$

- Sila težine vode između preseka 1 i 2: $G = \rho g \cancel{V}$. Zapremina mlaznika se može izračunati kao zapremina zarubljenog konusa:
  $\cancel{V} = \frac{D^2\pi}{4} \cdot \frac{H}{3} \left(1 + \frac{d}{D} + \frac{d^2}{D^2}\right)$

- Sila konture na fluid K je nepoznata. Pošto je deo cevi sa mlaznikom kratak, može se zanemariti uticaj trenja i smatrati da je celokupna sila rezultat normalnih napona između zida cevi i vode.

Sve sile između preseka 1 i 2 moraju biti u ravnoteži, pa je, sa desne strane slike 4.30, nacrtan poligon sila. Vektorska jednačina sume sila, kada se napiše za pravac z, glasi:

$$P_1 + I_1 - G - (+K) - I_2 = 0$$

gde je za silu K, stavljen predznak $(+K)$, da se zna da je to *sila konture na fluid*. Trazena sila fluida na konturu $(-K)$ je jednaka:

$$(-K) = P_1 + I_1 - G - I_2$$

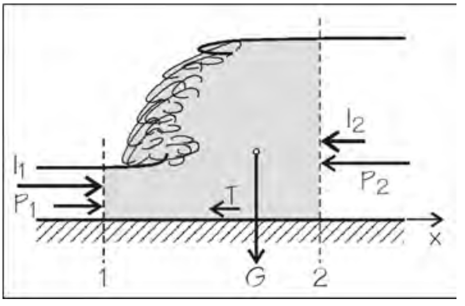
Za proračun sile pritiska potreban je pritisak u preseku 1, a on se ne može odrediti iz do sada pomenutih jednačina.

4.5.6.2 Hidraulički skok

U otvorenim tokovima, rekama i kanalima, dubina vode zavisi od protoka ali i od nagiba dna, trenja i uzvodnih i nizvodnih graničnih uslova. U glavi 8 *Ustaljeno tečenje u otvorenim tokovima* ove knjige će detaljno biti reči o režimima tečenja i pravcima prostiranja uticaja, kao i o uslovima koji nameću promenu dubine duž toka (nejednoliko tečenje).

[39] Da bi se odredio pritisak p_1 potrebna je još i energetska jednačina (4.119), koja će biti izložena kasnije u ovom poglavlju.

Generalno, ako se u toku sa malim nagibom dna, gde bi trebala da bude velika dubina, a veoma mala brzina (pa samim tim i jaka gravitaciona sila), nekim graničnim uslovom (recimo ustavom) nametne vodi mala dubina i velika brzina (odnosno, velika inercijalna sila), doći će do "sukoba" uticaja u kanalu. Sa nizvodne strane trenje i gravitacija nameću veliku dubinu, koja bi trebala da vlada kanalom, a sa uzvodne strane inercijalna sila nameće malu dubinu, sa željom da se ista propagira u nizvodnom pravcu.



Slika 4.31: Hidraulički skok u otvorenom kanalu

Pomirenje ta dva suprotna pravca prostiranja uticaja je u *hidrauličkom skoku*[40]. Voda jedan deo kinetičke energije pretvara u potencijalnu, dižući svoj nivo, a drugi deo kinetičke energije sama sebi oduzima kroz vrtloge, smiruje se i naglo prelazi iz oblasti malih dubina, a velikih brzina u oblast velikih dubina, a malih brzina.

Na slici 4.31 je prikazan hidraulički skok. Zbog velikog gubitka energije u skoku, Bernulijeva jednačina (4.57), koja pretpostavlja tečenje idealnog fluida[41], ne može se koristi. Rešenje skoka se dobija postavljanjem jednačine sila (4.87) (na slici su nacrtane sve sile sa svojim smerovima):

$$\vec{T} + \vec{N} + \vec{I_1} + \vec{P_1} + \vec{G} + \vec{I_2} + \vec{P_2} = 0$$

Vektorska jednačina se postavlja za pravac x, pravac toka vode. Sile pritiska su funkcija dubina ispred i iza skoka i geometrije kanala (oblika poprečnog preseka) $P_x = P_x(h, A(h))$. Inercijalne sile su funkcija protoka i brzine, a brzina zavisi od geometrije poprečnog preseka $I_x = I_x(A(h), Q)$. Ukoliko se kanal tako napravi da nema promena poprečnog preseka, sila $N_x = 0$ je nula. Takođe, ukoliko se dno kanala na mestu skoka tako napravi da bude horizontalno, komponenta sile težine u pravcu toka x je nula $G_x = 0$. Na kraju, sila trenja T_x se može zanemariti, jer je mala u odnosu na sile pritiska i inercijalne sile. Polazna jednačina se svodi na $I_1 + P_1 = I_2 + P_2$ odnosno na:

$$\rho Q V_1 + p_{T1} A_1 = \rho Q V_2 + p_{T2} A_2 \quad \Rightarrow \quad \rho \frac{Q^2}{A_1} + \rho g h_{T1} A_1 = \rho \frac{Q^2}{A_2} + \rho g h_{T2} A_2$$

[40]Detaljnije o hidrauličkom skoku, mehanizmima nastajanja i uklapanju skoka u liniju nivoa u poglavlju 8.5 *Hidraulički skok*.

[41]Upravo su viskozne sile te sile koje treba da u malim vrtlozima skoka potroše višak kinetičke energije i da smire tok.

U ovoj jednačini mora biti poznata dubina sa jedna strane skoka i protok ili su poznate obe dubine, pa se iz jednačine može odrediti protok.

4.6 Održanje energije sistema

U jednačinama koje su dobijene korišćenjem principa održanja količine kretanja, pojavljuje se rad sila kojima se menja energija fluidnog delića iz potencijalne u kinetičku i obrnuto (jednačina (4.59) na strani 131 odnosno jednačina (4.60) na strani 131). To znači da u procesu kretanja fluida dolazi do *transfera energije ka i od fluidnog delića.* Taj transfer energije mora ispuniti jedan od osnovnih principa fizike: *u odsustvu nuklearnih reakcija, energija se ne može ni stvoriti ni uništiti.*

Prvi zakon termodinamike je zakon održanja energije, koji tvrdi da su rad i toplota različiti, ali ekvivalentni oblici transfera energije. Zakon uspostavlja relaciju između količine toplote, koju sistem (telo konstantne mase) primi ili oda, izvršenog rada i promene unutrašnje energije sistema: *količina toplote koja se preda sistemu ide na povećanje unutrašnje energije i na rad koji taj sistem vrši na okolna tela.*

U nastavku će se prvi zakon termodinamike primeniti na fluid pri čemu će se preći sa tela konstantne mase na fluid konstantne zapremine. Izvešće se integralna jednačina održanja ukupne energije, energetska jednačina, kao i jednačina održanja samo mehaničke i samo toplotne energije. Pokazaće se da se, sređivanjem jednačine mehaničke energije, dobija Bernulijeva jednačina (kao i iz jednačine održanja količine kretanja, jer obe jednačine "prate" samo mehaničku energiju), dok se, uprošćavanjem energetske jednačine, za slučaj tečenja u cevi, dobija sličan oblik kao i Bernulijeva jednačina, ali sa članovima koji ukazuju da se deo energije nepovratno "troši" na zagrevanje fluida. Na kraju poglavlja će se navesti nekoliko primera upotrebe energetske jednačine.

4.6.1 Integralna i diferencijalna jednačina održanja energije

Prvi zakon termodinamike se u formi jednačine može napisati kao:

$$\Delta\tilde{Q} = \Delta\mathbf{E} + \Delta\hat{W} \tag{4.88}$$

gde je $\Delta\tilde{Q}$ količina toplote koja se dovede u sistemu, $\Delta\mathbf{E}$ povećanje unutrašnje energije a $\Delta\hat{W}$ rad koji se utroši na okolna tela dok se menja unutrašnja energija.

U prethodnoj jednačini se mogu konačne promene Δ svesti na promene u malom vremenskom intervalu dt. Prebacujući unutrašnju energiju kao jednu od karakteristika inercijalnog sistema na levu stranu izraza, dobija se:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\tilde{q}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\hat{w}}{\mathrm{d}t} \tag{4.89}$$

Unutrašnja energija fluida je zbir dva člana: kinetičke energije fluidnih delića, koja zavisi od njihove brzine $m \times u^2/2$, i interne energije $m \times e$, koja je rezultat oscilovanja atoma u molekulu i uzajamnog dejstva molekula fluida pod uticajem toplote delića[42]:

$$\mathbf{E} = \int_{\forall} \frac{\rho u^2}{2} \, \mathrm{d}\forall + \int_{\forall} \rho e \, \mathrm{d}\forall = \int_{\forall} \rho \left(\frac{u^2}{2} + e \right) \mathrm{d}\forall \tag{4.90}$$

Ako se sa B označi unutrašnja energija $\mathbf{E}$, tada je, prema jednačini (4.8) (strana 103) veličina b jednaka $b = u^2/2 + e$. Jednačina (4.89), koja važi za sistem sa konstantnom masom, u sistemu sa konstantnom zapreminom (u skladu sa (4.11) na strani 105) postaće:

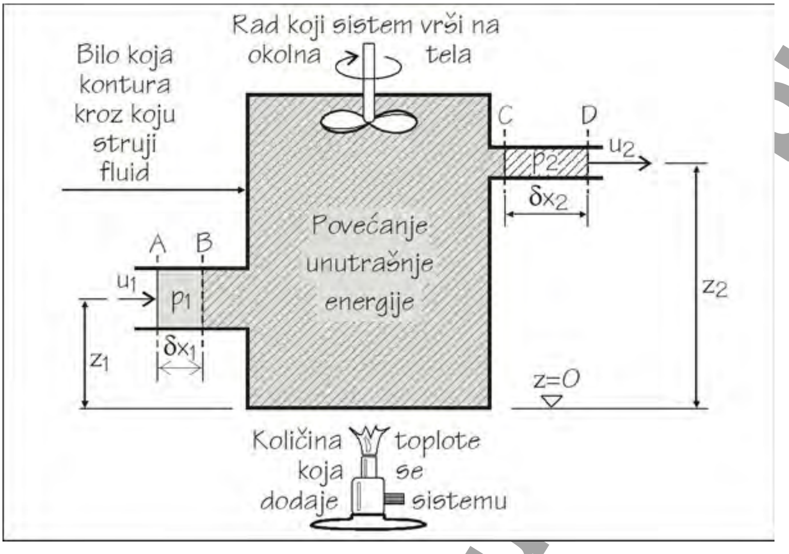
$$\int_{C\forall} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{u^2}{2} + e \right) \right] \mathrm{d}\forall + \int_{CA} \rho \left(\frac{u^2}{2} + e \right) u_i n_i \, \mathrm{d}A = \frac{d\tilde{q}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\hat{w}}{\mathrm{d}t} \tag{4.91}$$

gde je skalarni proizvod vektora $\vec{u} \cdot \vec{n}$ napisan pomoću udvojenog indeksa i. Dobijena jednačina predstavlja *jednačinu održanja energije (ili energetsku jednačinu) za sistem sa konačnom, konstantnom zapreminom, u jedinici vremena.*

Poslednji član d$\hat{w}/$dt u prethodnoj jednačini je ukupno utrošeni rad u jedinici vremena i može se napisati kao zbir rada zapreminske sile, površinskih sila pritiska i trenja po konturi (viskozne sile) i mehaničkog rada koji se upotrebi na pokretanje nekog sistema (turbine, pumpe ili ventilatora), sve u jedinici vremena:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{w}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{w}_g}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\hat{w}_p}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\hat{w}_\tau}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\hat{w}_M}{\mathrm{d}t} \tag{4.92}$$

[42]U većini knjiga Mehanike fluida se zakon održanja energije postavlja za ukupnu energiju tela, gde se pored unutrašnje energije pojavljuje i potencijalna energija. Kako se ovde radi o termodinamičkom procesu, korektnije je poći od unutrašnje energije. Potencijalna energija će se pojaviti kasnije, u toku izvođenja zakona o održanju energije, kao posledica rada zapreminske sile, sile težine. Finalna jednačina će na kraju biti ista, ali se prikazanim postupkom jasno stavlja do znanja kako se došlo do potencijalne energije.



Slika 4.32: Prvi zakon termodinamike: količina toplote, koja se preda sistemu ide na povećanje unutrašnje energije i na rad koji taj sistem vrši na okolna tela

Od zapreminskih sila ovde se razmatra samo sila težine. Rad te sile po jedinici vremena je jednak proizvodu sile težine (jednačina (4.47) na strani 125) i brzine:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{w}_g}{\mathrm{d}t} = -\int_{\forall} -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} u_i \,\mathrm{d}\forall = \int_{\forall} \rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} u_i \,\mathrm{d}\forall \tag{4.93}$$

Znak $(-)$ ispred integrala ukazuje na to da je ukupan rad gravitacione sile negativan, jer gravitacija dodaje rad na zapremini $\forall$, dok je po definiciji pozitivan rad onaj koji zapremina troši.

Rad sile težine u jedinici vremena i po jedinici zapremine se može napisati kao zbir dva člana:

$$\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} u_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho g h\, u_i) - g h \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)$$

Parcijalni izvod u zadnjem članu se na osnovu jednačine održanja mase (4.35) (strana 117) pretvara u negativni parcijalni izvod gustine po vremenu:

$$\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} u_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho g h\, u_i) + g h \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho g h\, u_i) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho g h)$$

Proizvod (gh) ne zavisi od vremena pa je uvučen u parcijalni izvod kao konstanta.

Ako se prethodni izraz stavi u jednačinu (4.93) i ako prvi sabirak pređe sa zapreminskog integrala na površinski, dobija se rad sile težine u jedinici vremena:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{w}_g}{\mathrm{d}t} = \int_A \rho g h\, u_i n_i \,\mathrm{d}A + \int_{\forall} \frac{\partial}{\partial t}(\rho g h)\,\mathrm{d}\forall \tag{4.94}$$

Rad sile pritiska se obavlja po konturi A konačne zapremine. Za elementarni delić na konturi $\mathrm{d}A$ koji se pomera brzinom $\vec{u}$, rad sile pritiska u jedinici vremena je proizvod sile i brzine, odnosno:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{w}_p}{\mathrm{d}t} = \int_A p\, u_i n_i \,\mathrm{d}A \tag{4.95}$$

Rad je pozitivan, jer se troši na savlađivanje pritiska, koji je suprotnog smera od smera orta površine $\mathrm{d}A$, a površina $\mathrm{d}A$ se pomera u smeru orta $\vec{n}$.

Sila od viskoznih tangencijalnih napona po konturi posmatrane zapremine je proizvod tangencijalnog napona τ_{ij}^d (jednačina (4.50) na strani 126) i posmatrane površine. Rad u jedinici vremena je površinski integral, koji se može predstaviti i u formi zapreminskog integrala:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{w}_\tau}{\mathrm{d}t} = \int_A \tau_{ij}^d\, u_j n_i \,\mathrm{d}A = \int_{\forall} \frac{\partial(\tau_{ij}^d\, u_j)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\forall \tag{4.96}$$

Ukoliko se kontrolna zapremina tako izabere da nema pokretne granice (kontura je čvrsta), brzina fluida uz granicu će biti nula pa neće biti rada viskoznih sila uz konturu. Takođe, ako se mesto preseka kroz fluidnu struju (presek A, odnosno C na slici 4.32) tako izabere da strujnice budu upravne na presek, u izrazu (4.96) će učestvovati samo normalni viskozni naponi, pri čemu je njihov doprinos zanemarljivo mali.

Izraz (4.92) se može staviti u jednačinu energije (4.91). Ako se rad sila težine (4.94) i pritiska (4.95) sabere sa odgovarajućim površinskim i zapreminskim integralima, dobija se *jednačina održanja energije u integralnom obliku* (u jedinici vremena):

$$\int_{C\forall} \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{u^2}{2} + gh + e\right)\right]\mathrm{d}\forall + \int_{CA} \rho\left(\frac{u^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} + e\right) u_i n_i \,\mathrm{d}A = \\ = \frac{d\tilde{q}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\hat{w}_\tau}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\hat{w}_M}{\mathrm{d}t} \tag{4.97}$$

Član $\left(\frac{\rho u^2}{2} + \rho g h + \rho e\right)$ odnosno $\left(\frac{\rho u^2}{2} + \rho g h + p + \rho e\right)$ je zbir kinetičke energije, potencijalne energije (kod površinskog integrala u potencijalnu energiju spada i pritisak koji omogućava pronos energije kroz konturu, objašnjenje je dato na strani 131) i interne toplotne energije, po jedinici zapremine[43]. Jednačina (4.97) pokazuje da se povećanje energije u posmatranoj zapremini i protok energije, koja izlazi kroz površinu koja okružuje posmatranu zapreminu, nadoknađuje iz dotoka količine toplote (energije) u jedinici vremena umanjenom za rad, koji ta energija utroši u jedinici vremena na savladavanje viskoznih sila i pokretanje nekog mehaničkog sistema.

Jednačina održanja energije se može napisati i u diferencijalnom obliku. Potrebno je prvo u osnovnoj integralnoj jednačini održanja energije (4.97), površinski integral zameniti zapreminskim, primenom Gausove teoreme (jednačina (4.13), na strani 106). Zatim, član jednačine, koji označava rad viskoznih sila, treba zameniti zapreminskim integralom (4.96). Takođe, član koji označava dovedenu količinu toplote u sistem u jedinici vremena, treba napisati kao protok toplote kroz konturu posmatrane zapremine, odnosno, kao promenu količine toplote u posmatranoj zapremini:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{q}}{\mathrm{d}t} = -\int_A \tilde{q}_i n_i \,\mathrm{d}A = -\int_{V\!\!\!/} \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial x_i} \,\mathrm{d}V\!\!\!/ \tag{4.98}$$

Znak $(-)$ ukazuje na to da je pozitivan smer protoka količine toplote kada ona *ulazi u sistem.* Na kraju, u osnovnoj integralnoj jednačini održanja energije (4.97), trebalo bi smanjiti kontrolnu zapreminu do nivoa elementarnog fluidnog delića $\mathrm{d}V\!\!\!/$, što dovodi do diferencijalne jednačine:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{u^2}{2} + gh + e\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\rho u_i\left(\frac{u^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} + e\right)\right] = \\ = -\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial(\tau_{ij}^d u_j)}{\partial x_i}\end{aligned} \tag{4.99}$$

U jednačini je izostavljen mehanički rad, koji ne može da se svede na nivo elementarne zapremine, pa je *diferencijalna jednačina ograničena.* U rešavanju jednačine za poznate konturne uslove, *ako postoji mehanički rad, on se mora naknadno, eksplicitno, uzeti u obzir.*

[43] U izučavanju stišljivih fluida, gasova, često se koristi pojam *entalpija.* To je zbir interne energije i pritiska po jedinici mase $\tilde{h} = e + p/\rho$. Takođe, koristi se i pojam *ukupna entalpija* koja obuhvata entalpiju, kinetičku kao i potencijalnu energiju po jedinici mase $\tilde{H} = \tilde{h} + u^2/2 + gh$.

U prethodnoj jednačini se prvi član, parcijalni izvod po vremenu, može razviti u zbir:

$$\left(\frac{u^2}{2} + gh + e\right)\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^2}{2} + e\right) + \rho g\frac{\partial h}{\partial t} \tag{4.100}$$

a drugi član, parcijalni izvod po pravcu i:

$$\left(\frac{u^2}{2} + gh + e\right)\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} + \rho u_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u^2}{2} + e\right) + \rho g u_i\frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial(p u_i)}{\partial x_i} \tag{4.101}$$

Zbir prvih članova iz (4.100) i (4.101) je, prema jednačini održanja mase (4.35) (strana 117), jednak nuli. Poslednji član u (4.100) je nula, jer vertikalno merena visina h ne zavisi od vremena. Takođe, poslednji član u jednačini (4.101) je zbir parcijalnih izvoda p i u_i po x_i. Sređivanjem preostalih članova dobija se diferencijalna jednačina održanja energije za jediničnu zapreminu:

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^2}{2} + e\right) + \rho u_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u^2}{2} + e\right) = \\ = -\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial(\tau_{ij}^d u_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial(p u_i)}{\partial x_i} - \rho g u_i\frac{\partial h}{\partial x_i} \tag{4.102}$$

Leva strana prethodne jednačine se može napisati i korišćenjem materijalnog izvoda $\mathrm{D}\varphi/\mathrm{D}t$ (jednačina (4.18) na strani 108) gde je veličina φ jednaka internoj energiji po jedinici mase fluidnog delića $\varphi = u^2/2 + e$:

$$\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{u^2}{2} + e\right) = -\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial(\tau_{ij}^d u_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial(p u_i)}{\partial x_i} - \rho g u_i\frac{\partial h}{\partial x_i} \tag{4.103}$$

čime se dobija sličan oblik jednačine, kao i diferencijalna jednačina održanja količine kretanja (4.54), (strana 128).

Dobijena diferencijalna jednačina održanja energije (4.103), pokazuje da je *povećanje unutrašnje (zbir kinetičke i interne) energije po jedinici mase fluidnog delića, jednako dotoku količine toplote umanjenom za rad viskoznih sila, sila pritiska i sile težine, sve u jedinici vremena.* Ne treba zaboraviti da je, prilikom prelaska sa integralnog pristupa na diferencijalni, *izostavljen još i mehanički rad u jedinici vremena*, koji treba naknadno obračunati.

4.6.2 Jednačine mehaničke i toplotne energije

U prethodnom poglavlju je izvedena jednačina održanja ukupne energije, odnosno, *održanja zbira mehaničke i toplotne energije.* U nastavku će se razdvojiti uticaji mehaničke i toplotne energije, uz određivanje procesa koji su zaduženi za konverziju iz mehaničke u toplotnu i toplotne u mehaničku energiju.

Ako se količina kretanja delića (masa×brzina) pomnoži sa polovinom brzine, dobija se mehanička energija $mu^2/2$. Analogno tome, ako se jednačina održanja količine kretanja (4.54), sa strane 128, pomnoži skalarno sa brzinom u_i, pri čemu se leva strana izraza može srediti na sledeći način:

$$u_i\,\rho\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} = \rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{u_i u_i}{2}\right) = \rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

dobija se *jednačina održanja mehaničke energije*:

$$\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{u^2}{2} = -\rho g u_i\frac{\partial h}{\partial x_i} - u_i\frac{\partial p}{\partial x_i} - u_i\frac{\partial \tau^d_{ji}}{\partial x_j} \tag{4.104}$$

Kao što se rešavanjem diferencijalne jednačine održanja količine kretanja (4.54), u poglavlju 4.5.2, došlo do Bernulijeve jednačine (4.57), tako se i diferencijalna jednačina održanja mehaničke energije (4.104) može analitički rešiti uz određena pojednostavljenja. Tako, na primer, za ustaljeno strujanje idealnog fluida konstantne gustine, lokalna komponenta materijalnog izvoda i rad viskoznih napona su nule, pa se izraz (4.104) može napisati kao skalarni proizvod brzine i gradijenta skalara (tri sabirka u zagradi):

$$u_i\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho}\right) = 0$$

Ako se jednačina ograniči na jednu strujnicu[44], i ako se postavi uslov da je brzina različita od nule, dolazi se do Bernulijeve jednačine iste kao i (4.57):

$$\frac{u^2}{2g} + h + \frac{p}{\rho g} = \mathrm{Const2} \quad [\mathrm{m}] \tag{4.105}$$

To što i održanje količine kretanja i održanje mehaničke energije dovode do istog izraza, pokazuje da je isti fizički zakon, drugi Njutnov princip, u osnovi obe jednačine. Međutim, u narednom poglavlju će se dati rešenje

[44] Uz dodavanje uslova bezvrtložnosti $\Omega_k = 0$, Bernulijeva jednačina važi za sve strujnice, odnosno, za celo strujno polje.

integralne jednačine održanja ukupne energije sistema, koje će dovesti do jednačine slične Bernulijevoj, ali sa bitno drugačijim značenjem. U tom rešenju se neće koristiti pretpostavka o idealnom fluidu, jer će upravo viskoznost biti ta koja oduzima jedan deo mehaničke energije fluidnoj struji.

Prethodna jednačina održanja mehaničke energije (4.104), dodavanjem i oduzimanjem sa desne strane članova $p\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}$ i $\tau_{ij}^d\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$, uz malo preuređenje dvojnih indeksa[45], dovodi se u oblik jednačine mehaničke energije:

$$\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{u^2}{2} = -\frac{\partial(\tau_{ij}^d u_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial(p u_i)}{\partial x_i} - \rho g u_i\frac{\partial h}{\partial x_i} + p\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \tau_{ij}^d\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad (4.106)$$

koji je pogodan da se oduzme od jednačine održanja ukupne energije (4.103).

Nakon oduzimanja te dve jednačine, ((4.103)-(4.106)), dobija se *jednačina toplotne energije*:

$$\rho\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} = -\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial x_i} - p\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \tau_{ij}^d\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad (4.107)$$

Poslednja dva člana sa desne strane izraza, sa promenjenim znakom javljaju se i u jednačini mehaničke energije i u jednačini toplotne energije. Kroz njih se obavlja prenos, odnosno, konverzija energije, iz jednog vida u drugi:

1. Član $p\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}$ predstavlja rad sile pritiska po jedinici zapremine i u jedinici vremena na deformaciji fluidnog delića[46] i može biti pozitivan i negativan. Ovaj član nosi reverzibilnu konverziju energije: kroz njega se mehanička energija pretvara u toplotnu, ali i iz toplotne se energija može vratiti u mehaničku.

2. Član $\tau_{ij}^d\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$ predstavlja rad viskoznih sila po jedinici zapremine i u jedinici vremena na deformaciji fluidnog delića[47] i može biti samo ne-

[45]Ukupan rad viskoznih sila je skalar, sa devet sabiraka $\partial(\tau_{ji}^d u_i)/\partial x_j$. Isti rezultat se dobija i ako se zameni redosled indeksa (što je ovde zgodnije), pa se rad viskoznih sila može napisati kao $\partial(\tau_{ij}^d u_j)/\partial x_i = \tau_{ij}^d\partial u_j/\partial x_i + u_j\partial\tau_{ij}^d/\partial x_i$.

[46]Sila pritiska (4.48) je ista u svim pravcima delića i pod njenim dejstvom se delić tako deformiše da menja zapreminu a zadržava oblik. Zbog toga se u literaturi ovaj član često zove i *sferni deo deformacionog rada po jedinici zapremine i jedinici vremena.*

[47]Zbog toga što je rad pod dejstvom devijatorskog dela tangencijalnih napona (4.50), u literaturi se ovaj član često zove i *devijatorski deo deformacionog rada po jedinici zapremine i jedinici vremena.*

gativan[48]. Pretvaranje mehaničke energije u toplotnu kroz viskozne sile je uvek ireverzibilno, pomoću viskoznosti nije moguće vratiti energiju iz toplotne u mehaničku.

Prvi član, koji obezbeđuje konverziju energije u oba smera, kod nestišljivih fluida je nula. Odatle sledi važan zaključak, koji se odnosi na tečnosti, nestišljive fluide kod kojih se trenje ne može zanemariti: *konverzija energije je uvek od mehaničke ka toplotnoj, u suprotnom smeru nije moguća.* Energija koju viskoznost oduzme od mehaničke energije i pretvori u toplotnu je sa stanovišta glavnog strujanja izgubljena, nema člana u jednačini koji je može vratiti, pa se zato drugi član, ireverzibilni, često naziva *član gubitka energije.*

4.6.3 Rešenje integralne jednačine održanja energije za ustaljeno tečenje homogenog fluida u cevi

Na strani 156 je izvedena integralna jednačina održanja energije (4.91). Jednačina važi za konstantnu zapreminu, oivičenu konturom koja u opštem slučaju može biti pokretna. Sređivanjem člana koji nosi ukupno utrošeni rad, jednačina održanja energije je svedena na oblik (4.97). U nastavku se daje rešenje u kome je težište na ireverzibilnoj konverziji energije, na gubicima. U narednom poglavlju ponoviće se rešenje jednačine (4.91), ali uz stavljanje naglaska na radove svih sila koje učestvuju u energetskom bilansu.

Ako se pretpostaviti da je strujanje fluida ustaljeno, tada unutar posmatrane zapremine nema promene ukupne energije kroz vreme (povećanja ili opadanja), tako da se prvi član iz jednačine (4.97), zapreminski integral lokalnog izvoda po vremenu, može zanemariti. Što se tiče protoka ukupne energije kroz konturu, drugog člana sa leve strane jednačine, ako u kontrolnoj zapremini postoji samo jedan ulazni i jedan izlazni presek (kao na slici 4.32 ili kod tečenja u cevi, slika 4.27), površinski integral po konturi posmatrane zapremine može se napisati u vidu zbira dva integrala, po presecima. Polazna jednačina (4.97) održanja energije se tada svodi na jednačinu:

$$\int_{A_1} \rho \left(\frac{u^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} + e \right) u_i n_i \, \mathrm{d}A + \int_{A_2} \rho \left(\frac{u^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} + e \right) u_i n_i \, \mathrm{d}A = \\ = \frac{d\tilde{q}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\hat{w}_\tau}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\hat{w}_M}{\mathrm{d}t} \qquad (4.108)$$

[48]Ovo je u koliziji sa nekim knjigama Mehanike fluida, gde se ovaj član naziva funkcija disipacije Y_{dis} i gde se zaključuje da je on uvek pozitivan. Razlika proizilazi iz usvojenog pozitivnog smera tangencijalnih napona: ovde je prihvaćen pozitivan smer onaj koji pritiska elementarnu zapreminu, kao što je prikazano slikom 4.20 na strani 127.

Ukoliko se ulazni i izlazni kontrolni preseci tako izaberu, da između njih nema pokretnih mehaničkih sistema, iz prethodne jednačine se može izostaviti poslednji član sa desne strane, ukupno utrošeni mehanički rad u jedinici vremena[49].

Kontrolni preseci treba da zadovolje uslov da je u njima brzina upravna na presek i da vlada hidrostatički raspored pritisaka. U tom slučaju je član $\left(gh + \dfrac{p}{\rho}\right)$ konstantan po preseku i može se izvući ispred integrala, a proizvod $u_i n_i$ se svodi na brzinu $-u_1$ odnosno $+u_2$.

Ako se, dalje, postavi uslov da je i kontura posmatrane zapremine nepokretna, prema jednačini (4.96) rad sile trenja duž konture je nula, dok se na samom mestu preseka 1 i 2 može zanemariti, pa je pretposlednji član u jednačini (4.108):

$$\frac{\mathrm{d}\hat{w}_\tau}{\mathrm{d}t} \approx 0$$

U rešavanju integralne jednačine održanja energije, *izostavljanje člana koji nosi viskoznost nije isto što i pretpostavka o idealnom fluidu.* Viskoznost fluida unutar posmatrane zapremine postoji i zadužena je za ireverzibilnu konverziju mehaničke energije u internu, toplotnu energiju. Korišćenjem integralne jednačine se to ne vidi eksplicitno, jer se posmatraju samo protoci kroz konturu i promena stanja sistema, bez ulaženja u procese unutar same zapremine. Ako bi se koristio diferencijalni pristup, kao na primer u jednačini toplotne energije (4.107), na strani 162, videlo bi se da se mehanička energija pretvara u toplotnu upravo kroz viskoznost.

U integralnoj energetskoj jednačini (4.108), kao problem ostaje još rešavanje površinskog integrala. Po istom principu kao što je uveden i Businesov koeficijent (jednačina (4.83) na strani 150), uvođenjem koeficijenta kinetičke energije α ili, kako se još naziva Koriolisovog[50] koeficijenta, promenljiv raspo-

[49]Sistem koji se sastoji od cevovoda i pumpe se obično rešava iz dva dela. Kontrolni preseci se postavljaju od ulaza u cev do ispred pumpe, kao i iza pumpe do izlaza iz cevovoda, dok se energija koju pumpa dodaje fluidu naknadno uzima u obzir. Moguć je i drugačiji pristup, kada se u energetsku jednačinu naknadno dodaje ovaj izostavljeni član, kao što je to pokazano jednačinom (4.122) na kraju ovog poglavlja, strana 173.

[50]Gaspard Gustave de Coriolis (1792 - 1843), francuski profesor mehanike i inženjerske matematike, blizak saradnik Košija (videti fusnotu 7 na strani 200). Bavio se problemima trenja, hidraulike, rada i ergonomije mašina. Uveo je pojmove 'rad' i 'kinetička energija' kao i jedinicu rada 'dynamode'. Pokazao je da se zakoni kretanja mogu koristiti i u rotirajućem referentnom sistemu ukoliko se uvede dodatna sila kroz Koriolisovo ubrzanje (kasnije je u njegovu čast tako nazvano). Koriolisova sila se primenjuje i u analizi kretanja

red brzine po poprečnom preseku u se može zameniti konstantnom srednjom profilskom brzinom V:

$$\alpha \frac{V^2}{2} Q = \int_A \frac{u^3}{2}\, \mathrm{d}A \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{QV^2} \int_A u^3\, \mathrm{d}A \tag{4.109}$$

Primer 4.6.1

Za tok fluida u kružnoj cevi, sa rasporedom brzina istim kao i u primeru 4.5.6:

$$\frac{u}{u_{max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/7} \qquad 0 \le y \le R$$

odrediti koliki je Koriolisov koeficijent α?

Pošto je isti raspored brzina kao i u primeru 4.5.6 (strana 150), ista je i srednja brzina:

$$V = \frac{98}{120}\, u_{max}$$

Zamenom srednje brzine u jednačinu (4.109) i rešavanjem dobija se Koriolisov koeficijent:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{QV^2} \int_A u^3\, \mathrm{d}A = \frac{2\pi}{AV^3} \int_R^0 r u_{max}^3 \left(\frac{y}{R}\right)^{3/7} dr = \\ &= \frac{2\pi}{R^2\pi} \left(\frac{120}{98}\right)^3 \int_0^R (R-y) \left(\frac{y}{R}\right)^{3/7} \mathrm{d}y = \\ &= \frac{3{,}672}{R^2} \int_0^R \left(R^{4/7} y^{3/7} - R^{-3/7} y^{10/7}\right) \mathrm{d}y = \frac{3{,}672}{R^2} \left(R^2 \frac{7}{10} - R^2 \frac{7}{17}\right) = 1{,}058 \end{aligned}$$

Integrisanjem jednačine (4.108) za nestisljiv fluid dobija se *energetska jednačina za fluid između dva preseka* u jedinici vremena:

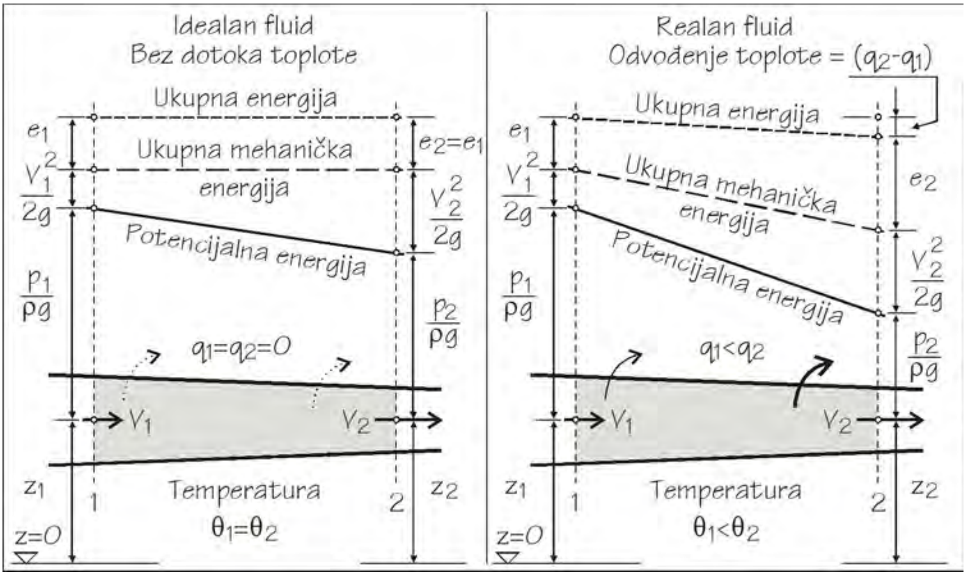
$$\rho Q \left(-\alpha_1 \frac{V_1^2}{2} - g h_1 - \frac{p_1}{\rho} - e_1 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2} + g h_2 + \frac{p_2}{\rho} + e_2 \right) = \frac{d\tilde{q}}{\mathrm{d}t} \tag{4.110}$$

Prebacujući sve veličine uz uzvodni presek sa leve strane, a uz nizvodni presek sa desne strane i deljenjem sa težinom u jedinici vremena $\rho g Q$, dobija se drugi oblik jednačine energije, izražen u metrima:

$$\alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + h_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{e_1}{g} = \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{e_2}{g} + \left(-\frac{1}{\rho g Q} \frac{d\tilde{q}}{dt} \right) \ [\mathrm{m}] \tag{4.111}$$

---

vodenih masa na Zemljinoj površini, pa je u njegovu čast, 1963. francuski istraživački okeanografski brod nazvan "Koriolis".



Slika 4.33: Promene ukupne energije, mehaničke i potencijalne za tečenja idealnog i realnog fluida

Jednačina (4.111) je napisana za ustaljeno strujanje realnog nestišljiog fluida. Za idealan fluid, u uslovima gde nema dodatnog mehaničkog rada i gde je uspostavljena ravnoteža između temperature fluida i spoljne temperature, nema transfera toplote. Kako se temperatura fluida između preseka 1 i 2, ne menja i interne energije e_1 i e_2 su iste. Jednačina (4.111) dobija oblik:

$$\alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + h_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$

sličan Bernulijevoj jednačini (4.58). Na levoj polovini slike 4.33, prikazan je takav slučaj gde je $e_1 = e_2$ i $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = 0$.

Kod tečenja realnog fluida (desna polovina slike 4.33), potrebno je utrošiti rad na savlađivanje viskoznih sila. Energija koja se pri tome troši se transformiše u toplotu, pa temperatura fluida, odnosno interna energija po jedinici mase e, postepeno raste. Sa porastom temperature fluida dolazi i do transfera toplote od fluida ka spoljnoj sredini, pa raste i odvođenje energije po jedinici mase $-q$ (pozitivna vrednost q je kada se toplota dovodi u posmatranu zapreminu). Ukupan gubitak korisne, mehaničke energije po jedinici težine fluida je rezultat trenja:

$$h_T = \frac{e_2 - e_1}{g} - \frac{1}{\rho g Q} \frac{d\tilde{q}}{\mathrm{d}t} \tag{4.112}$$

dok je interna energija na dobitku, za razliku $e_2 - e_1$. Član h_T se često u inženjerskoj praksi uprošćeno naziva *gubitak energije*. U većini praktičnih problema, gubitak energije se eksperimentalno određuje merenjima na modelu ili na prirodnim objektima. Samo povećanje interne energije koje rezultuje podizanjem temperature fluida, kao i prenos toplote kroz konturu, u većini slučajeva nisu od primarnog značaja[51].

Kod stišljivih fluida koji ovde nisu razmatrani (dobijeno rešenje jednačine (4.110) je ograničeno na nestišljive fluide sa konstantnom gustinom), prelazak mehaničke energije u internu nije gubitak za ukupnu energiju, jer je i interna energija zajedno sa mehaničkom deo ukupne, korisne energije. Pretposlednji član u jednačini toplotne energije (4.107), na strani 162, je kod stišljivih fluida različit od nule, tako da se kroz taj član može obaviti konverzija toplotne energije nazad u mehaničku energiju.

Primer 4.6.2

Kaptaža vode za lokalni vodovod se nalazi na koti 432 mnm. Od kaptaže se voda cevovodom spušta do rezervoara potrošača, čija je slobodna površina na koti 360 mnm. Višak energije koju poseduje voda se uništava regulacionim zatvaračem. Ako se pretpostavi da je cevovod termički izolovan od okoline i da je specifični toplotni kapacitet vode $C_p = 4{,}18$ KJ/(kg ^{0}C), za koliko se poveća temperatura vode?

Energetska jednačina se postavlja za kompletan cevovod, gde je ulazni presek na koti 432 m, a izlazni na koti 360 m. Uz pretpostavku da je prečnik cevovoda isti, iste su i brzine V_1 i V_2. Takođe, pritisci na ulaznom i izlaznom preseku su isti, atmosferski. Jednačina (4.111) se svodi na:

$$gh_1 + e_1 = gh_2 + e_2 \;\Rightarrow\; e_2 - e_1 = g(h_1 - h_2) = 9{,}81(432 - 360) = 706{,}32\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

Toplotni kapacitet vode je dat u KJ/(kg ^{0}C). Sređivanjem jedinica, dobija se:

$$C_p = 4{,}18\ \frac{\mathrm{KJ}}{\mathrm{kg}\ {}^0\mathrm{C}} = 4180\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\ {}^0\mathrm{C}} = 4180\ \frac{\mathrm{N\ m}}{\mathrm{kg}\ {}^0\mathrm{C}} = 4180\ \frac{\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{{}^0\mathrm{C}}$$

Povećanje temperature vode je za:

$$\Delta\theta = \frac{e_2 - e_1}{C_p} = \frac{706{,}32}{4{,}18 \cdot 10^3} = 0{,}17\ {}^0\mathrm{C}$$

[51] Jedna od primena u kojoj se mora voditi računa o grejanju vode u toku rada sistema, je ispitna linija za proveru karakteristika pumpi. Te ispitne linije su obično zatvorenog tipa: voda kruži kroz cevi do pumpe, zatim kroz regulacioni zatvarač kojim se uništava energija koju pumpa dodaje vodi i nazad u pumpu. Kod većih snaga pumpi, energija koju treba prevesti u toplotu nije zanemarljiva, pa je neophodno obezbediti i aktivno hlađenje vode u sistemu.

Ako je temperatura vode na izvorištu 10^0C, kod potrošača će usled konverzije mehaničke energije u toplotnu biti približno $10{,}2^0$C, što je zanemarljiva promena.

Energetska jednačina (4.111) se najčešće piše u takvom obliku gde figuriše član koji nosi trenje (4.112):

$$\alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + h_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_T \tag{4.113}$$

gde su α Koriolisov koeficijent, $V^2/2g$ brzinska visina [m], h geodetska visina [m], $p/\rho g$ visina pritiska [m] i h_T gubitak energije na trenje [m].

U najopštijem obliku, energetska jednačina pokazuje da je *energija na ulazu u posmatranu zapreminu jednaka zbiru energije na izlazu i izgubljene energije na putu od ulaza do izlaza*, pa se često piše i u obliku[52]:

$$E_1 = E_2 + \Delta E_{1-2} \tag{4.114}$$

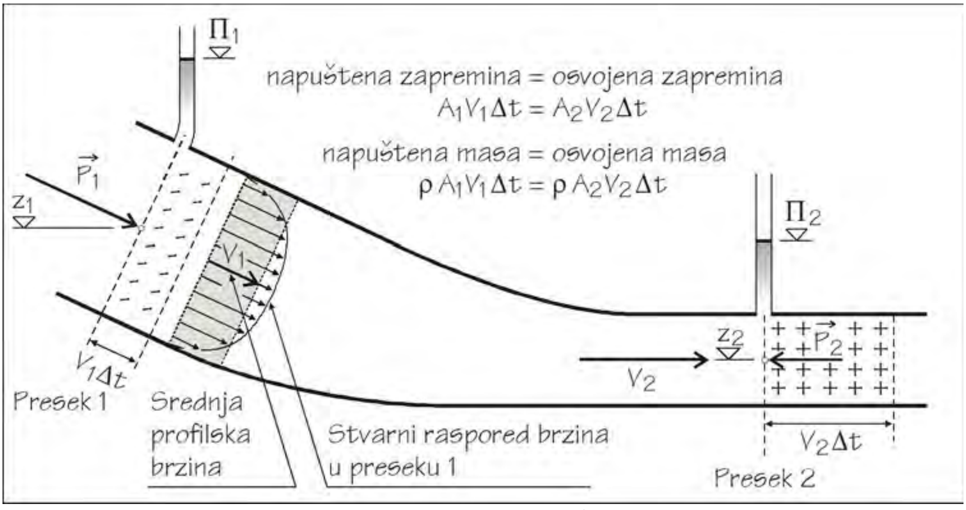
4.6.4 Drugi oblik rešenja integralne jednačine održanja energije za ustaljeno tečenje homogenog fluida

U uvodu prethodnog poglavlja 4.6.3 je najavljeno da se do istog rešenja energetske jednačine, u uslovima ustaljenog strujanja homogenog fluida kroz nepokretnu konturu, može doći i direktno iz jednačine (4.91) koja prati promenu unutrašnje energije (kinetičke $m \times u^2/2$ i interne $m \times e$). Kada nema razmene toplote između fluida i sredine, i kada nema spoljnog rada, za masu fluida koja u vremenskom trenutku t zauzima prostor u cevi između dva preseka, jednačina se svodi na stav da je *priraštaj unutrašnje energije jednak radu pravih sila na posmatranu masu*.

Na slici 4.34 je prikazan tok fluida kroz cev koja se niz fluidnu struju postepeno sužava. U uzvodnom preseku 1 se srednjom brzinom V_1 (srednja, profilska brzina je definisana uslovom (4.7), na strani 99) napušta zapremina $\forall = A_1 V_1 \,\Delta t = Q\,\Delta t$, mase $m = \rho \forall$, dok se u nizvodnom preseku 2 osvaja ista zapremina, odnosno masa. Ukupna energija te mase, po presecima, je zbir kinetičke $m \times V^2/2$ i interne energije $m \times e$:

$$-\mathbf{E}_1 = -\rho Q \,\Delta t \left(\frac{V_1^2}{2} + e_1 \right) \qquad + \mathbf{E}_2 = +\rho Q \,\Delta t \left(\frac{V_2^2}{2} + e_2 \right)$$

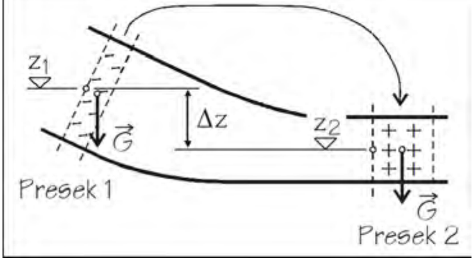
[52]Potrebno je obratiti pažnju na ustaljenu praksu korišćenja reči "energija" a da se pri tome misli na "energiju po jedinici težine", dimenzije [m]. U tekstu se prava energija piše debljim uspravnim slovom **E**, a energija po jedinici težine kurzivom E.



Slika 4.34: Do promene energije dolazi usled toga što fluid napusti jedan deo zapremine (uz prvi presek), a drugi deo zapremine osvoji (uz drugi presek)

pa je promena, odnosno priraštaj ukupne energije za vreme Δt:

$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \rho Q \,\Delta t \left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + e_2 - e_1 \right) \tag{4.115}$$



Slika 4.35: Rad sile težine se svodi na premeštanje "napuštene" u "osvojenu" zapreminu

Ukupna energija je napisana korišćenjem pretpostavke da je u preseku konstantna brzina. Stvarna brzina nije konstantna (na slici 4.34 je nacrtan tipičan turbulentni profil brzina u preseku 1), pa uz kinetičku energiju treba uvesti korekcioni član, Koriolisov koeficijent α (jednačina (4.109), na strani 165): $\alpha_2 V_2^2/2$ i $\alpha_1 V_1^2/2$. Vrednost Koriolisovog koeficijenta kod laminarnih tokova je $\alpha = 2$. Pri turbulentnom tečenju, Koriolisov koeficijent ima vrednost od $\alpha = 1{,}10$ za slabije izraženu turbulenciju do $\alpha = 1{,}01$ za razvijeni turbulentni tok. Kako je u većini zadataka u okviru građevinske hidrotehnike tečenje u cevima turbulentno, u proračunima se Koriolisov koeficijent najčešće zanemaruje.

Sile koje svojim radom povećavaju energiju fluida su sila težine, sila pritiska i konturna sila:

- *Rad sile težine* se obavlja na svim delićima celokupne zapremine između preseka 1 i 2. U ukupnoj sumi, taj rad je jednak radu koji bi se utrošio na "prebacivanje" napuštene zapremine iz preseka 1, u osvojenu zapreminu preseka 2 (slika 4.35). Težina fluida koji se tako "premešta" je $G = mg = \rho Q\,\Delta t\,g$. Pomeranje "premeštene" zapremine u pravcu sile G je visinsko rastojanje težišta dve zapremine $\Delta z = z_1 - z_2$, pa je rad sile težine:

$$W_g = G\,\Delta z = \rho g Q\,\Delta t\,(z_1 - z_2)$$

- *Rad sile pritiska* se ostvaruje samo na presecima 1 i 2. Sila pritiska u preseku 1 je $P_1 = p_1 A_1$. Pomeranje preseka je $V_1 \Delta t$, pa je rad sile u preseku 1 $W_{p1} = p_1 A_1 V_1\,\Delta t = Q\,\Delta t\,p_1$. U preseku 2 rad sile pritiska je negativan jer je pomeranje u suprotnom smeru od pozitivnog smera sile, tako da je ukupan rad sile pritiska:

$$W_p = Q\,\Delta t\;(p_1 - p_2)$$

- *Konturna sila* K je zbir sile trenja i normalne sile. Normalna sila N ne daje rad jer je, prema pretpostavci, kontura nepokretna. Sila trenja T je posledica viskoznosti fluida, ali je njen rad duž konture isto nula, jer delići fluida, koji se nalaze neposredno uz konturu imaju brzinu nula. Činjenica da viskoznost, odnosno sila trenja, ne učestvuje direktno u energetskoj jednačini, objašnjava se integralnim pristupom: prati se promena energije celokupne mase, bez ulaženja u unutrašnjost struje. Viskoznost je na diferencijalnom nivou, na nivou fluidnog delića, odgovorna za prelazak korisne mehaničke energije u toplotnu. Na integralnom nivou, to će se samo manifestovati povećanjem interne energije $m \times e$, između ulaznog i izlaznog preseka.

Izjednačenjem promene ukupne energije (4.115) sa radom sila, dobija se energetska jednačina:

$$\rho Q\,\Delta t\left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + e_2 - e_1\right) = \rho g Q\,\Delta t\,(z_1 - z_2) + Q\,\Delta t\;(p_1 - p_2)$$

Deljenjem cele jednačine sa težinom G, dobija se:

$$\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} + \frac{e_2 - e_1}{g} = z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \quad [\mathrm{m}] \tag{4.116}$$

Sa leve strane jednačine se nalazi zbir priraštaja kinetičke i interne, toplotne energije, dok je, sa desne strane, rad sile težine i sile pritiska, sve po jedinici težine. Sređivanjem članova prethodne jednačine:

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{e_1}{g} = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{e_2}{g} \tag{4.117}$$

dobija se oblik istovetan jednačini (4.111), osim što je ovde korišćena pretpostavka da je brzina po preseku konstantna i jednaka srednjoj brzini, kao i da nema razmene toplotne energije kroz konturu cevi.

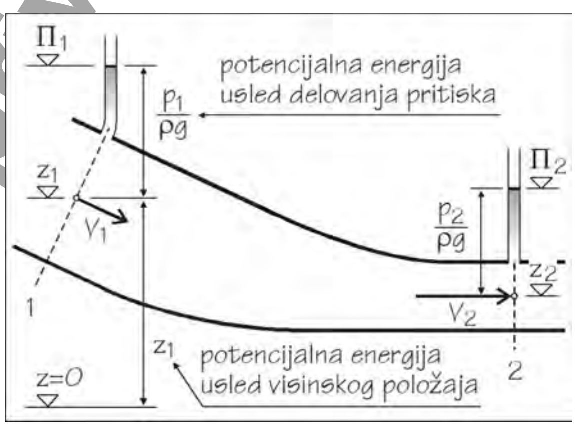
Član $(e_2 - e_1)/g$ predstavlja povećanje interne energije, odnosno, povećanje toplote fluida usled trenja. Interna energija se kod nestišljivih fluida ne može pretvoriti u neki drugi vid energije, pa je sa stanovišta obavljanja mehaničkog rada beskorisna. Kako je povećanje interne energije upravo jednako smanjenju korisne energije fluidne struje, to se taj član obično zove *gubitak energije* i izražava se u dimenziji visine[53]:

$$h_T = \Delta E_{1-2} = \frac{e_2 - e_1}{g} \quad [\mathrm{m}]$$

U jednačini (4.117), drugi i treći član, rad sile težine i rad sile pritiska, mogu se zameniti pijezometarskom kotom u preseku:

$$\Pi_1 = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \quad [\mathrm{m}] \tag{4.118}$$

Prilikom rešavanja osnovne jednačine hidrostatike (jednačina (3.11), na strani 38), pijezometarska kota je uvedena kao integraciona konstanta. Kroz energetsku jednačinu, pijezometarska kota dobija svoje pravo fizičko tumačenje, jer se vidi da *ona predstavlja potencijalnu energiju* (po jedinici težine) u preseku, izraženu visinom fluida. Potencijalna energija je sposobnost da se obavi rad, pa se prema (4.118), može razdvojiti na *potencijalnu energiju usled visinskog položaja* i *potencijalnu energiju usled delovanja pritiska* (slika 4.36).



Slika 4.36: Pijezometarska kota u presecima 1 i 2

[53] Isti član za gubitak energije je dobijen i u jednačini (4.112).

Sređivanjem jednačine (4.117), dobija se oblik jednačine, u kome se vidi da je ukupna energija u jednom preseku zbir kinetičke i potencijalne energije:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \Pi_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \Pi_2 + \Delta E_{1-2} \quad [\mathrm{m}] \tag{4.119}$$

odnosno, da je ukupna energija na ulazu u posmatranu zapreminu jednaka zbiru energije na izlazu i izgubljene energije:

$$E_1 = E_2 + \Delta E_{1-2} \quad [\mathrm{m}] \tag{4.120}$$

4.6.5 Poređenje energetske sa Bernulijevom jednačinom

Dobijena energetska jednačina (4.113), odnosno (4.119), veoma liči na Bernulijevu jednačinu (4.57), sa strane 130, pa se često, *pogrešno, i ona naziva Bernulijevom jednačinom*[54]. Energetska i Bernulijeva jednačina su suštinski različite:

- Nastale su kao posledica dva različita principa: energetska je rezultat prvog termodinamičkog zakona, dok je Bernulijeva rezultat principa održanja količine kretanja[55].
- Energetska jednačina se primenjuje na realan fluid konstantne zapremine između dva preseka, dok se Bernulijeva jednačina primenjuje na tačke duž jedne strujnice idealnog fluida. To znači da bi korišćenje koeficijenta kinetičke energije (Koriolisovog koeficijenta) u Bernulijevoj jednačini bilo nekorektno.
- Kod energetske jednačine nisu korišćene pretpostavke o viskoznosti ili bezvrtložnosti. Jednačina se primenjuje na realan fluid, u kome viskoznost pravi gubitak energije, pretvara mehaničku energiju u toplotnu.

Primer 4.6.3

Voda teče ustaljeno kroz dugačku cev konstantnog prečnika. U preseku A na koti $z_A = 9$ m, pritisak u centru cevi je $p_A = 28$ kPa, dok je u preseku B na koti $z_B = 12$ m pritisak u centru cevi $p_B = 11$ kPa. U kom smeru teče voda?

[54] Ponegde se, u literaturi, energetska jednačina zove i *proširena Bernulijeva jednačina.*

[55] Doduše ni zakoni fizike nisu nezavisni! Ako se energetska jednačina napiše za jednu strujnicu (V se menja sa u a $\alpha = 1$) idealnog fluida (nema h_T), dobija se Bernulijeva jednačina - to pokazuje da je prvi zakon termodinamike opštiji zakon, da je zakon održanja količine kretanja izveden iz termodinamičkog.

Koristeći energetsku jednačinu (4.114) treba odrediti razliku ukupnih energija $E_A - E_B$. Ako je razlika pozitivna, smer toka je od A ka B.

$$E_A - E_B = \alpha_A \frac{V_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\rho g} + z_A - \left(\alpha_B \frac{V_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\rho g} + z_B\right)$$

Kako je cev konstantnog preseka brzine u presecima su iste, kao i korekcioni faktori, pa se prethodna jednačina dovodi do oblika:

$$E_A - E_B = \frac{p_A - p_B}{\rho g} + z_A - z_B = \frac{28 - 11}{1 \times 9{,}81} + 9 - 12 = -1{,}27 \text{ m}$$

Smer tečenja vode je od B ka A. Treba uočiti da se postavljeni zadatak ne može rešiti primenom Bernulijeve jednačine, jer se razmatra tok realnog fluida, gde dolazi do gubitka energije u smeru tečenja vode.

Kod tokova gde se može primeniti Bernulijeva jednačina, ukupna energija je konstantna duž strujnice. U jednačini se pojavljuje brzina fluida u sa kvadratom, pa je smer toka neodređen, odnosno, *jednačina važi za bilo koji smer toka*. Kod energetske jednačine, trenje oduzima energiju fluidu u pravcu toka, tako da je smer toka uvek od preseka sa većom ukupnom energijom ka preseku sa manjom. Jedini izuzetak je, ako se između kontrolnih preseka nalazi pumpa, hidraulička mašina, koja dodaje energiju po jedinici težine:

$$H_P = E_M = -\frac{1}{\rho g Q} \frac{\mathrm{d}\hat{w}_M}{\mathrm{d}t} \quad [\text{m}] \tag{4.121}$$

Znak $(-)$ pokazuje da je rad mašine suprotan od pozitivnog rada, koji konstantna zapremina troši na spoljni mehanički sistem. U opštem obliku, energetska jednačina (4.120) je tada:

$$E_1 = E_2 + \Delta E_{1-2} - H_P \quad [\text{m}] \tag{4.122}$$

4.6.6 Primer primene energetske jednačine

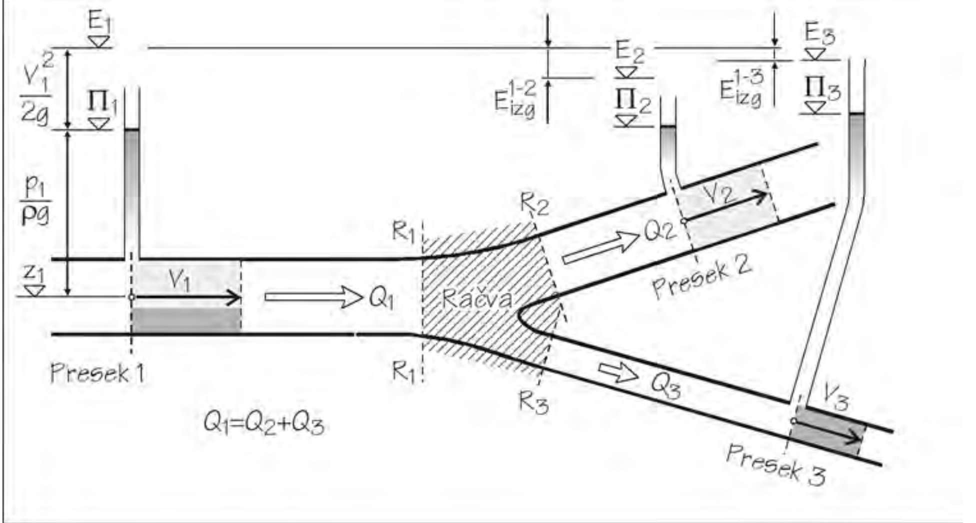
Jednačina održanja energije, ili energetska jednačina, često se koristi u oblasti građevinske hidrotehnike. Većina rešenja u oblasti tečenja u cevima, tečenja u otvorenim tokovima ili u podzemnim vodama, bazira se na primeni energetske jednačine. Pri tome se, po pravilu, zanemaruje promena interne energije i problem transfera toplote, već se samo prati mehanička energija kroz zbir pijezometarske kote i brzinske visine. Ukoliko u sistemu postoji neka hidraulička mašina, koja daje ili oduzima rad fluidu, njen uticaj se obračunava odvojeno.

U nastavku će se dati dva primera primene energetske jednačine. Prvi primer se odnosi na račvanje fluidne struje i pokazuje kako se piše jednačina, ako fluid prolazi kroz više od dva poprečna preseka. Drugi primer je isticanje kroz oštroivični otvor, isti kao i primer koji je korišćen kod Bernulijeve jednačine. Na tom primeru će se, još jednom, podvući razlike između dve slične jednačine, koje se često pogrešno izjednačuju.

U narednom poglavlju, prilikom izučavanja tečenja u cevi, daće se u okviru tačke 7.2.3.4, *Primeri pisanja energetske jednačine*, još nekoliko primera pisanja energetske jednačine, kao i crtanja energetske i pijezometarske linije.

4.6.6.1 Račvanje fluidne struje

Izvođenje energetske jednačine, u prethodnom poglavlju, sprovedeno je za ustaljeno tečenje u cevi, gde celokupna fluidna struja prolazi kroz jedan ulazni i jedan izlazni presek. Isti princip, koji je korišćen u drugom delu poglavlja, primeniće se u nastavku, na slučaj račvanja fluidne struje.



Slika 4.37: Pri račvanju cevi, postavlja se jedna energetska jednačina za masu fluida koja "ode" kroz jedan krak i druga jednačina za masu koja "ode" drugim krakom

Na slici 4.37, prikazana je cev poprečnog preseka A_1, koja se niz fluidnu struju deli na dve druge cevi, preseka A_2 i A_3. Tečenja u presecima 1, 2 i 3 moraju zadovoljiti uslove paralelnosti i upravnosti fluidne struje. Fluid koji struji je homogen i konstantne gustine. Pretpostavlja se da fluid struji od preseka 1 ka presecima 2 i 3. Za masu fluida između tri preseka, može se napisati da je promena ukupne energije jednaka radu svih sila:

$$-\rho Q_1 \Delta t \left(\frac{V_1^2}{2} + e_1 \right) + \rho Q_2 \Delta t \left(\frac{V_2^2}{2} + e_2 \right) + \rho Q_3 \Delta t \left(\frac{V_3^2}{2} + e_3 \right) =$$
$$= \rho g Q_2 \Delta t \, (z_1 - z_2) + \rho g Q_3 \Delta t \, (z_1 - z_3) +$$
$$+ Q_1 \Delta t \, p_1 - Q_2 \Delta t \, p_2 - Q_3 \Delta t \, p_3 \tag{4.123}$$

Iz jednačine kontinuiteta koja se može napisati za samu račvu, sledi da su protoci $Q_1 = Q_2 + Q_3$, pa se prvi član jednačine (4.123) može razdvojiti na dva sabirka:

$$-\rho Q_2 \Delta t \left(\frac{V_1^2}{2} + e_1 \right) - \rho Q_3 \Delta t \left(\frac{V_1^2}{2} + e_1 \right)$$

Prvi član u trećem redu jednačine (4.123), rad sile pritiska uz presek 1, takođe se može razdvojiti na dva dela: $Q_2 \Delta t \, p_1 + Q_3 \Delta t \, p_1$. Grupisanjem sa ostala dva člana iz trećeg reda, dobija se ukupan rad sile pritiska:

$$Q_2 \Delta t (p_1 - p_2) + Q_3 \Delta t (p_1 - p_3)$$

Sređivanjem jednačine (4.123) dobija se:

$$\rho Q_2 \Delta t \left(\frac{V_1^2}{2} + e_1 - \frac{V_2^2}{2} - e_2 \right) + \rho g Q_2 \Delta t \, (z_1 - z_2) + Q_2 \Delta t \, (p_1 - p_2) =$$
$$= -\rho Q_3 \Delta t \left(\frac{V_1^2}{2} + e_1 - \frac{V_3^2}{2} - e_3 \right) - \rho g Q_3 \Delta t \, (z_1 - z_3) - Q_3 \Delta t \, (p_1 - p_3)$$

Izvlačenjem člana koji nosi težinu fluida ispred zagrade, dobija se:

$$\rho g Q_2 \Delta t \left[\left(\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(\frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \Delta E_{1-2} \right) \right] =$$
$$= -\rho g Q_3 \Delta t \left[\left(\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(\frac{V_3^2}{2g} + z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \Delta E_{1-3} \right) \right]$$

Jednačina se može napisati i u opštem obliku proizvoda težine i energije izražene visinom:

$$\underbrace{m_2 g}_{>0} \underbrace{(E_1 - E_2 - \Delta E_{1-2})}_{\geq 0} = - \underbrace{m_3 g}_{>0} \underbrace{(E_1 - E_3 - \Delta E_{1-3})}_{\geq 0} \tag{4.124}$$

Članovi sa masom su uvek pozitivni i veći od nule. Vrednost člana u zagradi ne može biti negativna, jer je pretpostavljeni smer strujanja fluida od preseka 1 ka preseku 2 i od preseka 1 ka preseku 3, pa se energija, koju poseduje fluid, ne može povećati niz fluidnu struju. Jedino moguće rešenje jednačine (4.124). je da su članovi u zagradama nula, čime se dobija sistem od dve jednačine (4.125) i(4.126):

$$E_1 = E_2 + \Delta E_{1-2} \tag{4.125}$$
$$E_1 = E_3 + \Delta E_{1-3} \tag{4.126}$$
$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \tag{4.127}$$

Uz dve energetske jednačine, dopisana je i treća jednačina, jednačina kontinuiteta (4.127), koja je korišćena prilikom izvođenja. Za primenu ovih jednačina *neophodno je unapred poznavati smer tečenja fluida*, jer se jednačine moraju pisati samo u nizvodnom smeru.

Moguć je i drugi način rešavanja problema račvanja fluidne struje. Ako se račva podeli na tri dela uvođenjem preseka na samom mestu račvanja (odnosno, dovoljno blizu gde su strujnice međusobno paralelne), mogu se napisati tri energetske jednačine (4.120):

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{R1} + \Delta E_{1-R1} \\ E_{R2} &= E_2 + \Delta E_{R2-2} \\ E_{R3} &= E_3 + \Delta E_{R3-3} \end{aligned}$$

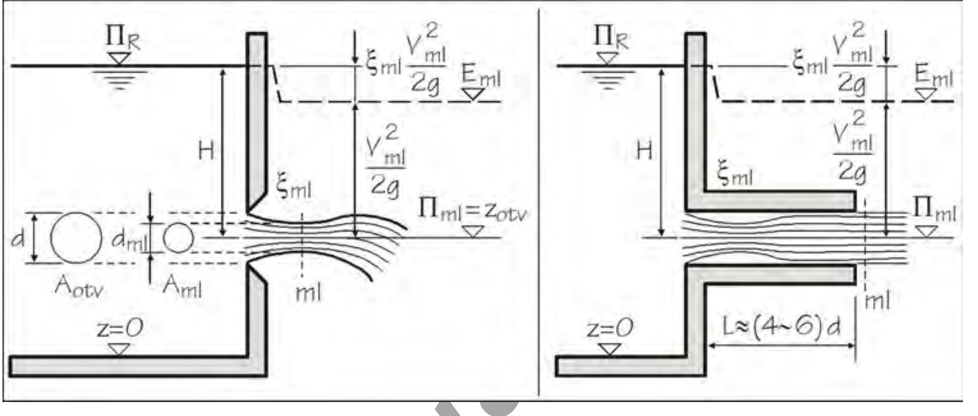
i jedna jednačina kontinuiteta koja će povezati tri protoka. Ako se pretpostavi da unutar račve, male zapremine označene šrafurom na slici 4.37, neće doći do promene ukupne energije[56], tada će biti $E_{R1} = E_{R2} = E_{R3}$, pa će se postavljeni sistem od tri jednačine svesti na već dobijene dve jednačine (4.125) i (4.126).

Kao zaključak primera, može se ustanoviti pravilo po kome se za sistem račvanja ili spajanja n fluidnih struja, piše $n-1$ energetskih jednačina za svaki od pretpostavljenih smerova fluidne struje. Zajedno sa jednačinom kontinuiteta, dobija se sistem od n jednačina sa n nepoznatih protoka (ili brzina). Ako se odabere pogrešan smer fluidne struje u jednoj od račvi, dobiće se nelogična (negativna) rešenja, pa je potrebno ponoviti proračun sa okrenutim smerom.

[56] U glavi knjige 7 *Tečenje fluida kroz cevi*, detaljnije će se obraditi tečenje u cevi. Tu će se gubici energije podeliti na linijske i lokalne, pa će se videti da ovu pretpostavku treba korigovati.

4.6.6.2 Isticanje iz suda

U primerima Bernulijeve jednačine u poglavlju 4.5.3.1, dato je rešenje za slobodno isticanje kroz oštroivični otvor. Brzina u izlaznom mlazu je, u tom primeru, određena prateći jednu strujnicu, uz pretpostavku da je fluid idealan (jednačina (4.63) na strani 135). Prava brzina isticanja je nešto manja, pa je uveden korekcioni faktor C_V, koeficijent brzine, tako da je na kraju dobijena jednačina isticanja iz suda (4.65). U nastavku će se pokazati da se do istog rešenja može doći i primenom energetske jednačine (4.120).



Slika 4.38: Isticanje iz suda sa oštroivičnim otvorom (levi deo slike) i sa naglavkom (desni deo)

Na izlazu iz oštroivičnog otvora dolazi do suženja mlaza, zbog zakrivljenog kretanja delića. Presek "ml" je najuži deo sa paralelnim strujnicama i na tom mestu su ispunjeni uslovi za postavljanje kontrolnog preseka. Energetska jednačina se postavlja od rezervoara do suženog preseka. Pri proračunu gubitaka energije zanemaruju se gubici na trenje, jer je rastojanje između izabranih preseka malo.

$$E_R = E_{ml} + \Delta E_{R-ml} \quad \Rightarrow \quad \Pi_R + \frac{V_R^2}{2g} = \Pi_{ml} + \frac{V_{ml}^2}{2g} + \xi \frac{V_{ml}^2}{2g}$$

Brzinska visina u rezervoaru se zanemaruje, tako da je $\dfrac{V_R^2}{2g} = 0$:

$$\Pi_R - \Pi_{ml} = H = (1+\xi)\frac{V_{ml}^2}{2g}$$

Sređivanjem prethodne jednačine po brzini u mlazu, dobija se:

$$V_{ml} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}\sqrt{2gH} = C_V\sqrt{2gH} = C_V \times V_{ID} \tag{4.128}$$

gde je $C_V = \dfrac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ *koeficijent brzine* a izraz $V_{ID} = \sqrt{2gH}$ *brzina idealnog fluida*[57].

Vrednosti koeficijenta lokalnog gubitka ξ zavisi od izrade oštroivičnog otvora. Za dobro napravljen oštroivični otvor njegova vrednost je $\xi \approx (0{,}05-0{,}10)$, pa se vrednost koeficijenta brzine kreće u opsegu $C_V \approx (0{,}95 - 0{,}98)$.

Protok je proizvod brzine i poprečnog preseka mlaza A_{ml}:

$$Q = V_{ml}A_{ml} = V_{ml}A_{otv}C_A$$

Međutim, jednostavnije je da se u računu koristi poprečni presek samog otvora A_{otv}, jer je to veličina koja se lako meri. Koeficijent $C_A = A_{ml}/A_{otv}$ je koeficijent kontrakcije mlaza. On je uvek manji od 1 i određuje se pažljivim merenjem. Vrednost C_A za kružni oštroivični otvor je $C_A \approx 0{,}65$.

Proizvod koeficijenta brzine C_V i koeficijenta kontrakcije mlaza C_A je koeficijent protoka C_Q:

$$C_Q = C_V C_A \qquad C_Q \approx 0{,}60 \text{ za kružni oštroivični otvor}$$

Odavde se, na kraju, dobija jednačina isticanja za realan fluid istog oblika kao i jednačina (4.65), na strani 136:

$$Q = C_V C_A A_{otv}\sqrt{2gH} = C_Q A_{otv}\sqrt{2gH}$$

Na desnoj strani slike 4.38, prikazan je slučaj isticanja iz suda kroz kratak naglavak. Na skici se vidi da se fluidna struja, na samom početku naglavka, skupila u suženi presek, slično kao i kod oštroivičnog otvora. Međutim, u naglavku dolazi i do vraćanja fluidne struje na prečnik jednak prečniku prvobitnog preseka, čime se deo kinetičke energije mlaza vraća u potencijalnu energiju. Ako je naglavak relativno kratak, pa ne postoji značajniji gubitak na trenje duž naglavka, ukupan gubitak energije je manji nego kod isticanja kroz oštroivični otvor, pa je i protok veći.

Energetska jednačina se postavlja na isti način kao i u prethodnom slučaju, samo što je sada $A_{ml} = A_{otv}$, pa je koeficijenat kontrakcije $C_A = 1$. Zbog zanemarenja gubitaka na trenje, uzima se nešto veći koeficijent lokalnog gubitka energije ξ, tako da je koeficijent brzine $C_V \approx 0{,}8 - 0{,}9$. Kao rezultat dobija se da je protok kroz otvor veći nego kod oštroivičnog otvora istog prečnika ($C_Q \approx 0{,}8 - 0{,}9$).

[57]Poznata je još i kao *Toričelijev princip.*