5. TURBULENCIJA

5.1. LAMINARNO I TURBULENTNO STRUJANJE OPIS TURBULENTNOG STRUJANJA

"LAMINA" – TANKA PLOČICA ⇒ PREMAZ, SLOJ

"LAMINARNO STRUJANJE" ⇒ SLOJEVITO STRUJ.

| STRUJNICE I TRAJEKTORIJE SU PRAVE LINIJE

DELIĆI NE PRELAZE IZ JEDNOG SLOJA U DRUGI

"TURBULENTUS" – NEMIRAN, UZBURKAN

| TRAJEKTORIJE SU ZAKRIVLJENE LINIJE, NEPRAVILNOG OBLIKA, MEĐUSOBNO ISPREPLETANE

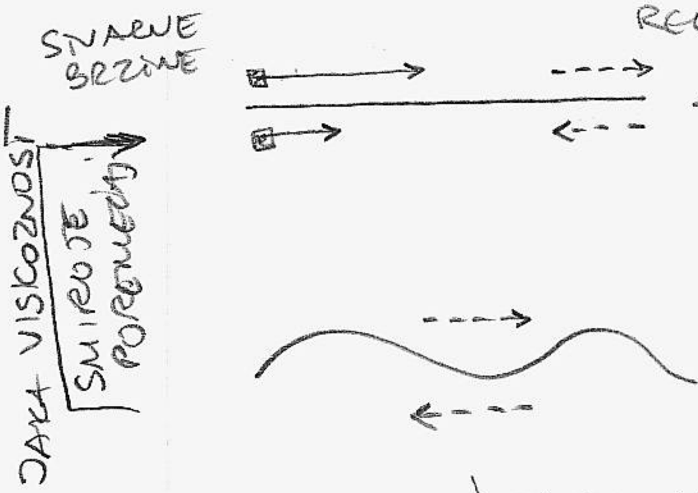
DELIĆI SE MEŠAJU, PRELAZE IZ SLOJA U SLOJ.

- STRUJANJA SU VEĆINOM TURBULENTNA
  - ZATO SU I INTERESANTNA.
- LAMINARAN SVET BI BIO DOSADAN

KAKO NASTAJE TURBULENCIJA?

1. USLED SLABE VISKOZNOSTI
2. LOKALNO USLED NEKE PREPREKE

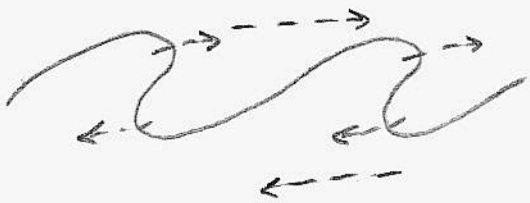
① OSLABLJENA VISKOZNOST



← VISKOZNOST DELIĆE DRŽI POD KONTROLOM

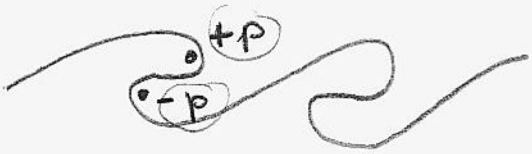
IZ NEKOG RAZLOGA SE ZATALASAJU RAVNI

↓ SLABA VISKOZNOST – VELIKI $\frac{\partial u}{\partial y}$

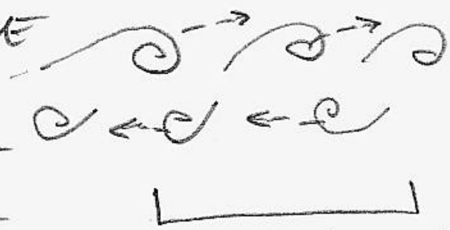


POVEĆAVAJU SE TALASI ...

PRITISCI RASTU – –OPADAJU USLED CENTRIFUGALNE SILE PA TO POSPEŠUJE STVARANJE VRTLOGA.



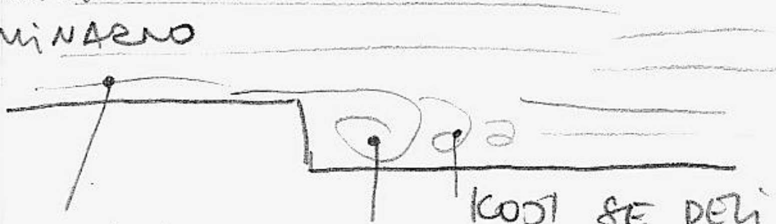
... ZAMOTAVAJU SE ...



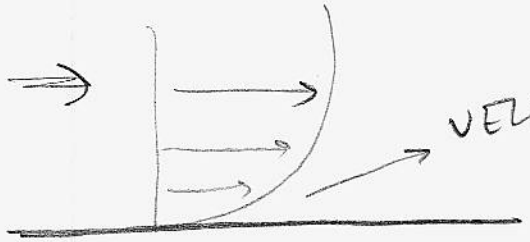
I NA KRAJU OTKIDAJU, PUTUJU VRTLOZI NIZ STRUJU.

HAOTIČNO KRETANJE !!!
KAKO GA OPISATI JEDNAČINAMA?

② LOKALNO GENERISANA TURBULENCIJA

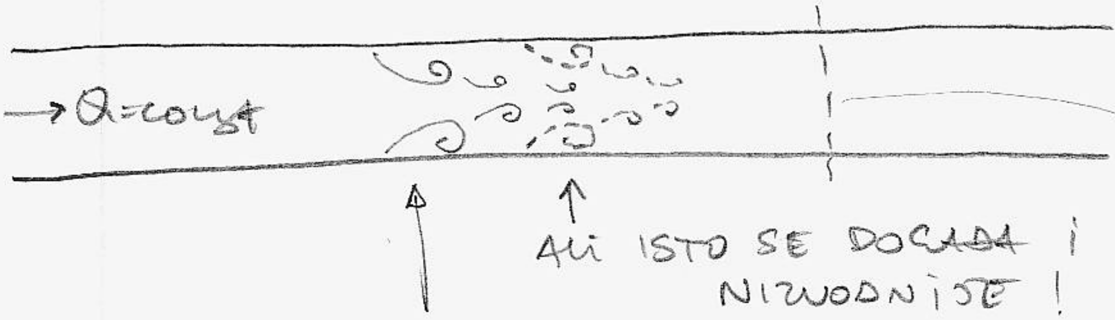


- TURBULENCIJU GENERIŠE I SAM ZID CEVI (NEPOKRETAN)



VELIKA PROMENA BRZINE!

- "USTALJENA" TURBULENCIJA - STATISTIČKI SREĐEN PROCES



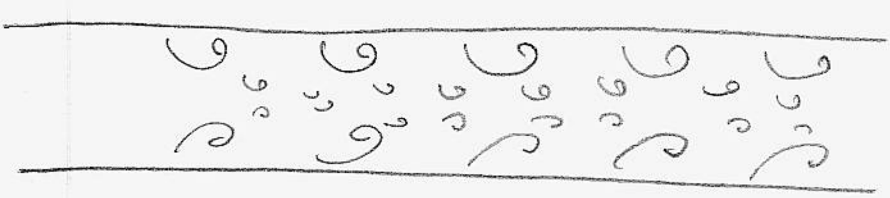
ALI ISTO SE DOGAĐA I NIZVODNIJE!

GENERISAN VELIKI VRTLOG KOJI VISKOZNOST SMANJUJE

KROZ VREME →

KROZ OVAJ PRESEK STALNO DOLAZI ISTI BROJ MALIH I VELIKIH VRTLOGA, HAOTIČNO ALI STATISTIČKI UREĐENO!

ISTO VAŽI I KROZ PROSTOR! U JEDNOM TRENUTKU PO PROSTORU JE BROJ VELIKIH I MALIH VRTLOGA UJEDNAČEN



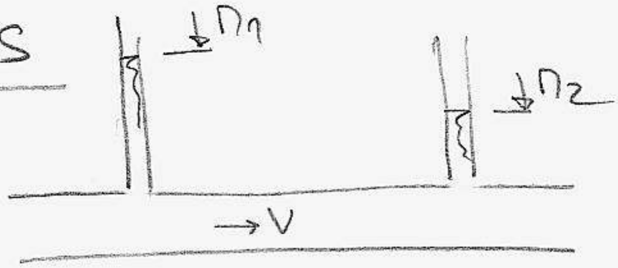
t=const

NAMEĆE SE ZAKLJUČAK DA POSTOJI VEZA IZMEĐU PROSTORNOG - VREMENSKOG IZUČAVANJA TURBULENCIJE

(REYNOLDS, 1920.)

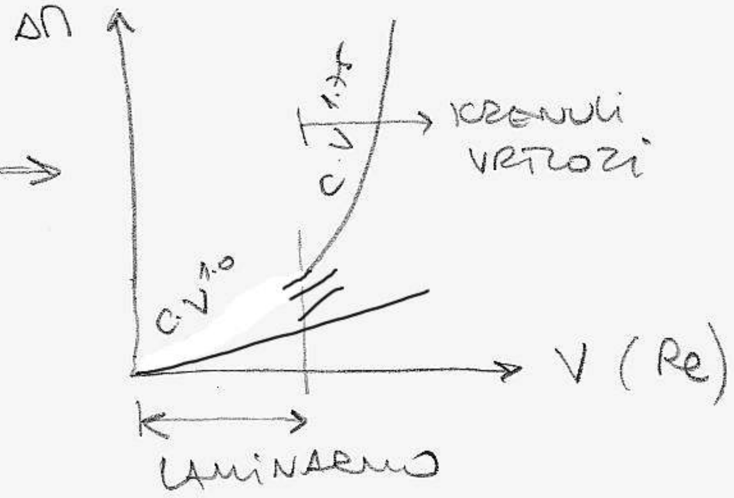
ENERGETSKI BILANS

EKSPERIMENT:



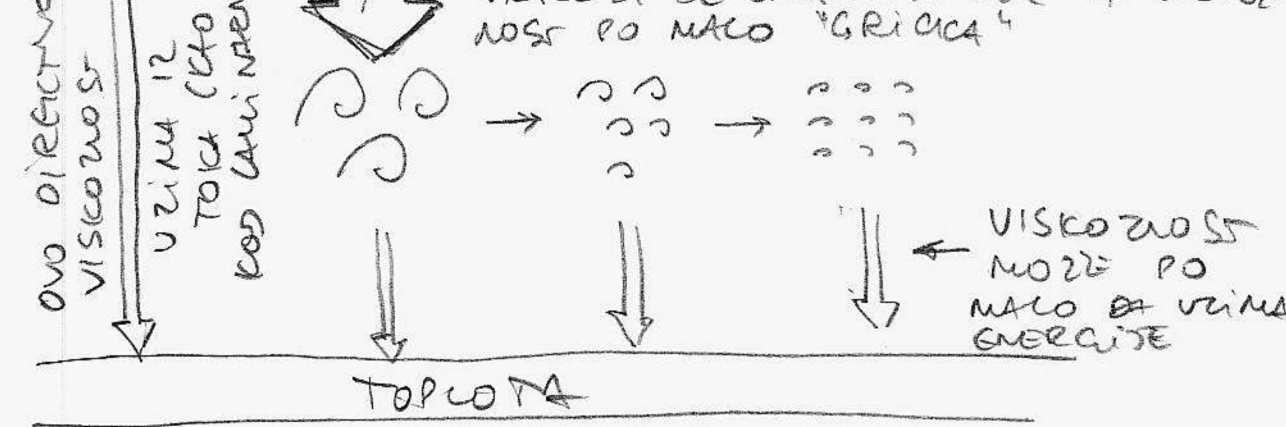
POVEĆAVA SE BRZINA POSTEPENO - GLEDA SE Δh

U TURBULENTNOM STRUJANJU → NAGLO RASTE GUBITAK ENERGIJE !!!



↓

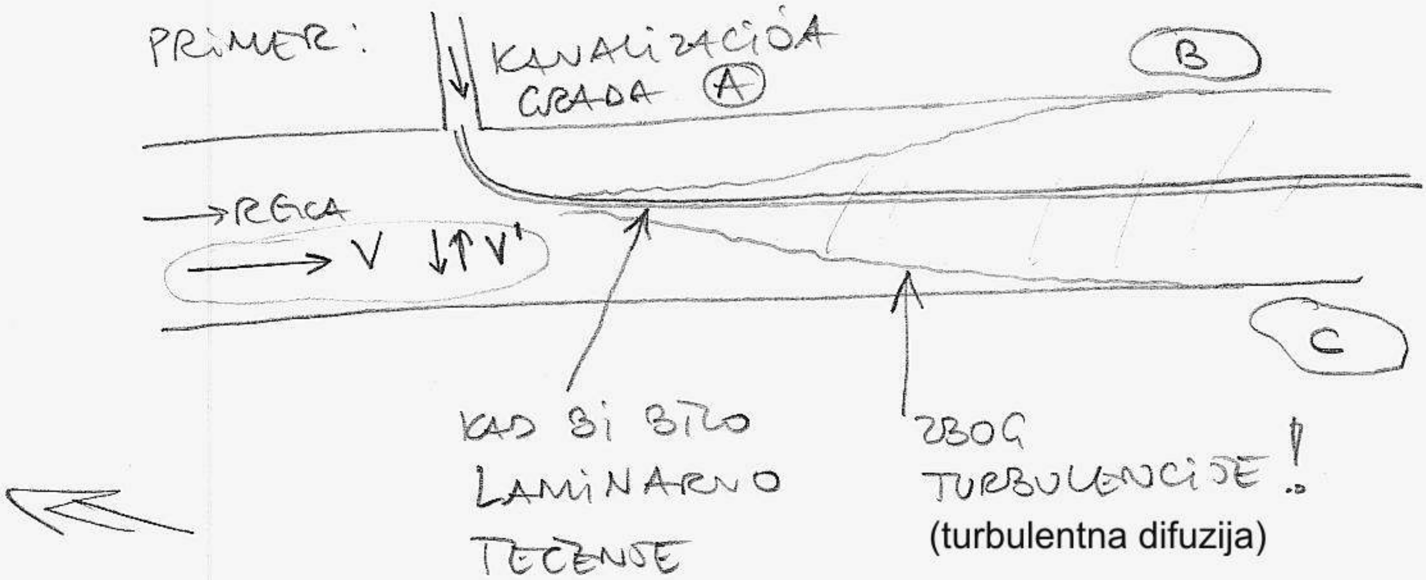
TREBA "HRANITI" VRTLOGE



• ZAŠTO JE PRIRODA IZMISLILA TURBULENCIJU?

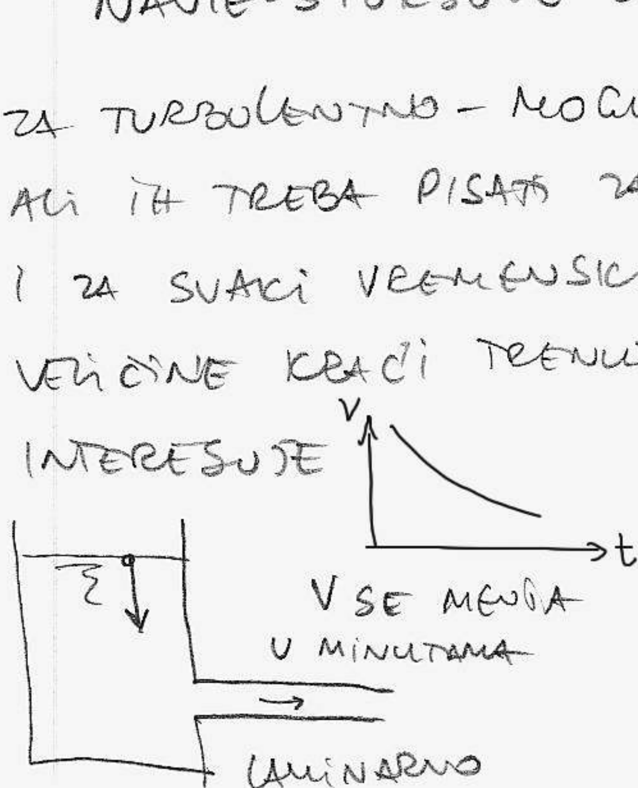
- DA BI UPROSEČILA VELIČINE! DELIĆI U VRTLOG NOSE BRZINU, PRITISAK, ... I MEŠANJEM SE UPROSEČUJU VELIČINE!!!

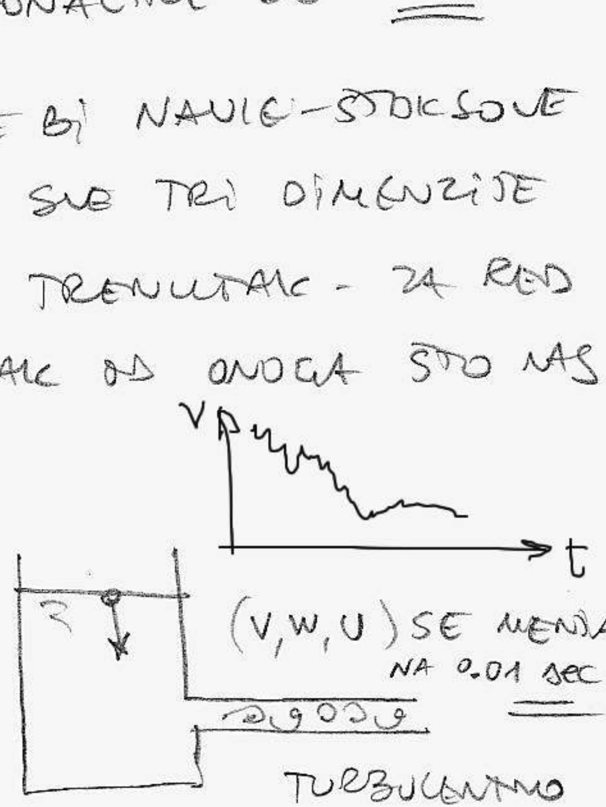
PRIMER:



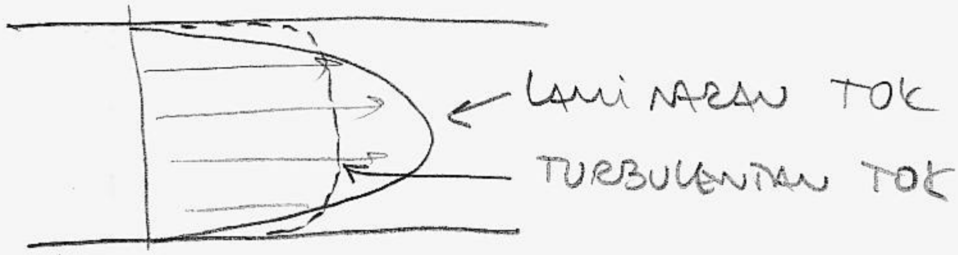
KAKO UVESTI RED U JEDNAČINE?

- ZA LAMINARNO TEČENJE NAVIE-STOKSOVE JEDNAČINE SU <u>OK</u>
- ZA TURBULENTNO - MOGLE BI NAVIE-STOKSOVE ALI IH TREBA PISATI ZA SVE TRI DIMENZIJE I ZA SVAKI VREMENSKI TRENUTAK - ZA RED VELIČINE KRAĆI TRENUTAK OD ONOGA ŠTO NAS INTERESUJE





Ri RASPORED BRZINA U CEVI :



u diferencijalnoj jednačini

JOŠ JEDAN PROBLEM - TREBA NAM IZVOD PO PROSTORU - TURBULENCIJA SE HAOTIČNA PA NE ZNAMO GDE IDE SVAKI DELIĆ !!!

jer treba da pratimo kretanje svakog delica

Ako merenjem pratimo polozaj delica, gubi se njegova osobina

REŠENJE - OSREDNJITI VELIČINE - RAZDVOJITI VELIČINU KOJA SE JAKO SPORO MENJA OD ODSTUPANJA - FLUKTUACIJE

$$Y = \overline{Y} + Y'$$

MOŽE PO VREMENU A I PO PROSTORU !

$$\overline{Y} = \overline{Y}(t) = \frac{1}{t_0} \int_{t-\frac{t_0}{2}}^{t+\frac{t_0}{2}} Y\,dt$$

$\frac{t_0}{2}$ → NE SME DA ZAVISI OD OVOG VREMENA

↓

ISPUNJENO AKO SE $\frac{\partial Y(t)}{\partial t} = \text{const}$ U INTERVALU $\pm t_0/2$ - ZNAČI DA t_0 NE SME BITI PREDUGAČKO - ALI NI PREKRATKO !!!

FLUKTUACIONI DEO JE ONDA:

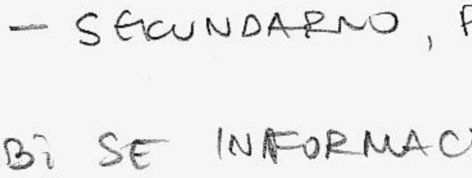
$$\boxed{\overline{Y'} = \frac{1}{t_0} \int_{t-t_0/2}^{t+t_0/2} Y'\,dt = 0}$$

5.2. OSREDNJAVANJE UTICAJA, RAZDVAJANJE STRUJANJA, DEJSTVO FLUKTUACIJA NA GLAVNO STRUJANJE

- TURBULENTNO STRUJNO POLJE JE VEOMA KOMPLEKSNO
- KAO ŠTO SE JEDNA VELIČINA RAZDVAJA NA OSREDNJENU I FLUKTUIRAJUĆU VREDNOST, I CELO STRUJNO POLJE MOŽE DA SE PODELI, OSREDNJAVANJEM, NA
  - GLAVNO, OSREDNJENO STRUJANJE
  - SEKUNDARNO, FLUKTUIRAJUĆE STRUJANJE

NE GUBI SE INFORMACIJA O TURBULENCIJI, JER FLUKTUACIJE UTIČU I NA GLAVNO STRUJANJE !

ZAVISI ŠTA IZUČAVAMO:
- TRENJE UZ ZID – DOVOLJNO JE GLAVNO STRUJANJE
- DIFUZIJA ZAGAĐENJA MORAJU FLUKTUACIJE !



— OSREDNJEN PROTOK KROZ $dA = 0$ ALI TRENUTNI NIJE !!!

PRAVILA OSREDNJAVANJA:

1) OSREDNJENA VREDNOST ZBIRA

$$\overline{Y_1 + Y_2} = \overline{Y_1} + \overline{Y_2}$$

2) OSREDNJEN INTEGRAL (MNOGO SABIRAKA)

$$\overline{\int_X Y\,dx} = \int_X \overline{Y}\,dx$$

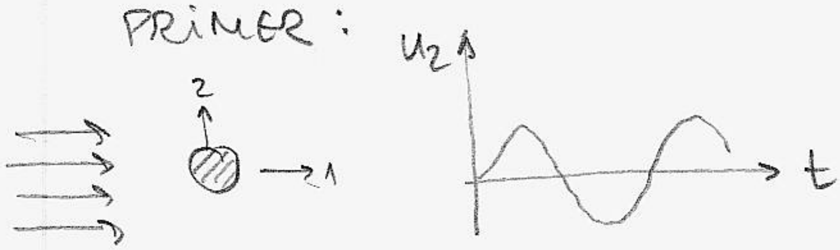
3) OSREDNJEN IZVOD

$$\overline{\frac{\partial Y}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{Y}}{\partial x}$$

4) OSREDNJEN PROIZVOD DVE TRENUTNE VREDNOS.

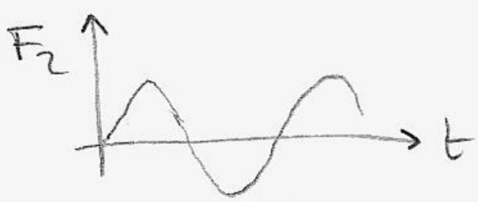
$$\overline{Y_1 \cdot Y_2} \neq \overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2} \quad !$$

PRIMER:

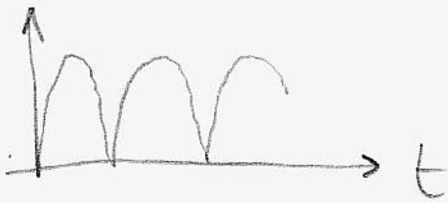


$\overline{u_2} = 0$

SILA F_2:



SNAGA = $F_2 \cdot u_2$



$$Y_1 \cdot Y_2 = (\overline{Y_1} + Y_1')(\overline{Y_2} + Y_2') =$$

$$= \overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2} + Y_1' \cdot Y_2' + \overline{Y_1} \cdot Y_2' + Y_1' \cdot \overline{Y_2}$$

$$\overline{Y_1 \cdot Y_2} = \underbrace{\overline{\overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2}}}_{\overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2}} + \overline{Y_1' \cdot Y_2'} + \phi + \phi$$

$$\overline{\overline{Y_1} \cdot Y_2'} = \frac{1}{t_0} \int_{t - t_0/2}^{t + t_0/2} \overline{Y_1} \cdot Y_2' \, dt \rightarrow \phi$$

$= const$

$$\overline{Y_1 \cdot Y_2} = \overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2} + \overline{Y_1' \cdot Y_2'}$$

5) OSREDNJEN PROIZVOD TRI VELIČINE

$$\overline{Y_1 \cdot Y_2 \cdot Y_3} = \overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2} \cdot \overline{Y_3} + \overline{Y_1' \cdot Y_2' \cdot Y_3'} +$$

$$+ \overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2' \cdot Y_3'} + \overline{Y_2} \cdot \overline{Y_3' \cdot Y_1'} +$$

$$+ \overline{Y_3} \cdot \overline{Y_1' \cdot Y_2'}$$

6) KOMBINACIJE PRAVILA

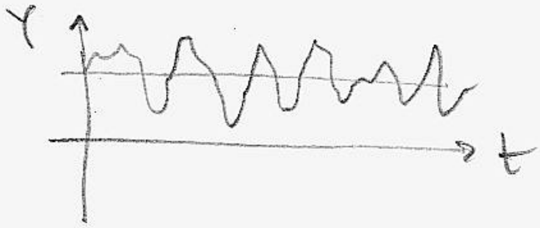
a) $$\overline{\frac{\partial (Y_1 \cdot Y_2)}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x} \overline{(Y_1 Y_2)} = \frac{\partial}{\partial x} (\overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2}) + \frac{\partial}{\partial x} \overline{(Y_1' \cdot Y_2')}$$

b) $$\overline{Y_1 \cdot \frac{\partial Y_2}{\partial x}} = \overline{Y_1} \cdot \frac{\partial \overline{Y_2}}{\partial x} + \overline{Y_1' \cdot \frac{\partial Y_2'}{\partial x}}$$

c) $$\overline{\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}} = \frac{\partial^2 \overline{Y}}{\partial x^2}$$

- USLOV USTALJENOSTI TURBULENTNOG STRUJANJA:

$$\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} = \phi \Rightarrow$$



- PROTOK KROZ POVRŠINU A (ZAPREMINSKI):

$$Q = \int_A u_i n_i \, dA = \int_A (\bar{u}_i + u_i') n_i \, dA$$

$$\bar{Q} = \int_A \overline{(\bar{u}_i + u_i')} n_i \, dA = \int_A \bar{u}_i n_i \, dA$$

PROTOK ZAVISI ISKLJUČIVO OD SREDNJE BRZINE

- PROTOK NEKE FLUKTUIRAJUĆE VELIČINE - NA PRIMER INTERNE ENERGIJE e (ω)

$$e = \bar{e} + e'$$

$$Q_e = \int_A \rho e u_i n_i \, dA = \rho \int_A e u_i n_i \, dA$$

za $\rho = const$

$$\bar{Q}_e = \underbrace{\rho \int_A \bar{e} \bar{u}_i n_i \, dA}_{\text{PROTOK SREDNJOM BRZINOM (KONVEKCIJOM)}} + \underbrace{\rho \int_A \overline{e' \cdot u_i'} n_i \, dA}_{\text{PROTOK FLUKTUACIJAMA (TURBULENTNA DIFUZIJA)}}$$

SLUČAJ 1D STRUJ. $\bar{u}_1 \neq 0$ $\bar{u}_2 = \bar{u}_3 = \phi$

$= \phi$

$u_1' \neq 0$ $u_2' \neq 0$ $u_3' \neq 0$

// POSTOJI PROTOK

- OSREDNJEN MATERIJALNI IZVOD

$$\overline{\frac{D\varphi}{Dt}} \neq \frac{D\overline{\varphi}}{Dt} \quad !!!$$

$$\overline{\frac{D\varphi}{Dt}} = \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} + \overline{u}_i \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_i} + \overline{u_i' \frac{\partial \varphi'}{\partial x_i}}$$

5.3. JEDNAČINE PRILAGOĐENE TURBULENTNOM STRUJANJU

(A) JEDNAČINA ODRŽANJA MASE

NAPISANA ZA OSREDNJENU BRZINU i FLUKTUACIJE

(A) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho} + \rho') + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\overline{\rho} + \rho')(\overline{u}_i + u_i')\right] = 0$$

Jednacina samo za osrednjeni tok se dobija

OSREDNJAVANJEM CELE JEDNAČINE:

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)} = 0$$

(B) $$\Rightarrow \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho}\, \overline{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho' \cdot u_i'}) = 0$$

ILI U INTEGRALNOM OBLIKU:

$$\int_{CV} \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} dV + \int_{CA} \overline{\rho}\, \overline{u}_i\, n_i dA + \int_{CA} \overline{\rho' u_i'}\, n_i dA = 0$$

PROTOK MASE TURBULENTNOM DIFUZIJOM

Ako se napravi (A) i (B) = Jednacina za fluktuacije

ZA NESTIŠLJIV FLUID $\rho = const$, $\rho' = \phi$

PA JE: $\dfrac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = \phi$

$$\int_{CA} \overline{u_i} \cdot n_i dA = \phi$$

ISTE JEDNAČINE KAO i ZA TRENUTNE VREDNOSTI - FLUKTUACIJE NEMAJU UTICAJA

ZA $\rho = const$ VAŽI ZA TRENUTNE BRZINE

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \phi \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{u_i} + u_i') = \phi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = \phi \quad !!!$$

(B) JEDNAČINA ODRŽANJA KOLIČINE KRETANJA

OSREDNJAVA SE NAVIE-STOKSOVA JEDNAČINA ZA NESTIŠLJIV FLUID ($\rho = const.$)

$$\rho \frac{D u_i}{Dt} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

OSREDNJAVANJEM:

$$\rho \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \rho \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \underbrace{\overline{\rho u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \mu \cdot \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$= \boxed{\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i' \cdot u_j'})} - \overline{u_i' \cdot \frac{\partial u_j'}{\partial x_j}}$$

$= \phi$

- IDE NA DRUGU STRANU JEDNAČINE!

DOBIJA SE IZRAZ:

$$\rho\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho\bar{u}_j\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\rho g\frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \rho\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i' u_j'}\right)$$

DINAMIČKA JEDNAČINA ZA GLAVNO STRUJANJE NESTIŠLJIVOG FLUIDA – REJNOLDSOVA JEDNAČINA

ČLAN KOJI JEDINI UNOSI TURBULENCIJU U GLAVNI TOK !!!

- JEDINI NOVI ČLAN

[NAVIE-STOKS JEDNAČ. SA TRENUTNIM BRZINAMA] = [N.S. JEDNAČ. SA SREDNJIM BRZINAMA I PRITISKOM] – [DODATAK OD TURBULEN.]

- DODATNI ČLAN SE TUMAČI KAO DODATNI NAPON KOJI UMANJUJE ENERGIJU STRUJI TOKA. TURBULENTNI NAPON – TJ. REJNOLDSOV NAPON

$$\tau_{ij}^t = \rho \cdot \overline{u_i' u_j'}$$

(KOD G. HAJDINA $\tau_{ij}^t = -\rho\overline{u_i' u_j'}$ (53-13))

PA JE $\dfrac{\partial \tau_{ij}^t}{\partial x_j}$ = SILA OD TURBULENTNOG NAPONA.

- OVO NIJE PRAVI NAPON – OVO JE USNAČI DODATAK NA OSREDNJENU INERCIJALNU SILU USLED TURBULENCIJE.

OSREDNJAVANJEM INTEGRALNE JEDNAČINE U KOJOJ JE ČLAN - - -

$$\int_{CA} \rho u_i (u_j n_j) dA$$ – PROTOK KOLIČINE KRETANJA KROZ POVRŠINU

$$\Rightarrow \underbrace{\int \rho \bar{u}_i \bar{u}_j n_j dA}_{\text{INERCIJALNA SILA } (-J) \text{ OD SREDNJIH BRZINA}} + \underbrace{\int \rho \overline{u_i' u_j'} n_j dA}_{\text{DODATAK USLED FLUKTUACIJA}}$$

- U REJNOLDSOVOJ JEDNAČINI SE NEKADA SPAJAJU ZAJEDNO OVA ČLANA:

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\underbrace{\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{VISKOZNI NAPONI}} - \underbrace{\rho \overline{u_i' u_j'}}_{\text{TURBULE[NTNI] NAPONI}}\Big)$$

KOD RAZVIJENE TURBULENCIJE SU ZANEMARLJIVI

ALI IPAK VISKOZNOST POSTOJI I SMIRUJE ALI MALE VRTLOGE!

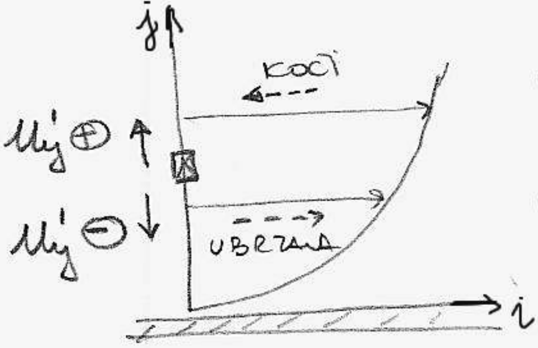
ČLAN $\overline{u_i' u_j'}$ SE ČESTO ZOVE I KOEF. KORELACIJE BRZINE U i-PRAVCU SA BRZINOM U j-PRAVCU

$$C_{ij} = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{\sqrt{\overline{u_i'^2} \cdot \overline{u_j'^2}}}$$ / NORMALIZOVANO!

$C_{ij} = 1$ ZA $u_i = u_j$.

ZA VISKOZNI TOK $C_{ij} < \phi$ $i \neq j$

(strana 171 u knjizi GH II)



Povecanje $u_i'>0$ znači da je delić došao "odozgo", da gde su brzine veće, pa je brzina $u_j'<0$

I obrnuto: smanjenje $u_i'<0$ znači da je delić došao "odozdo", iz zone majih brzina pa je brzina $u_j'>0$. Ispada da je uvek $u_i'u_j'<0$.

BROJ NEPOZNATIH U JEDNAČINI REYNOLDS-OVOJ
(4) — PORASTAO JE ZA C_{ij} - 6 NOVIH !!!
(u_i, p) 9 - $\underline{\underline{3}}$ ZBOG SIMETRIJE

→ PROBLEM ZATVARANJA JEDNAČINA JER SMO RAZDVOJILI OSREDNJENE I FLUKTUIRAJUĆE VELIČINE

→ REŠENJA SE ZASNIVAJU NA TOME KAKO SE PRETPOSTAVLJA DA SE REYNOLDSOVI NAPONI MENJAJU PO PROSTORU.

- POKUŠAJ KORELACIJE REYNOLDSOVIH NAPONA I SREDNJE BRZINE
- POKUŠAJ PROSTORNOG OPISIVANJA VRTLOGA

→ KOD NESTIŠLJIVOG FLUIDA JE SVE JOŠ GORE, JER JE $\underline{\underline{\rho = \bar{\rho} + \rho'}}$

C) ENERGETSKA JEDNAČINA

INTERESUJE NAS SAMO GLAVNO STRUJANJE

— ODRŽANJE MEHANIČKE ENERGIJE I NJEGOVA VEZA SA VRTLOZIMA

DVA PRISTUPA:

1) UZETI REYNOLDSOVU JEDNAČINU I POMNOŽITI JE SA SREDNJOM BRZINOM $\bar{u}_i$ UMESTO JEDNAČINE SA KOLIČINOM KRETANJA I SILAMA, DOBIJA SE JEDNAČINA SA KINETIČKOM ENERGIJOM I RADOM SILA.
TURBULENCIJA SE POJAVLJUJE SAMO KAO DODATNI RAD KOJI UMANJUJE KORISNU ENERGIJU TOKA

2) OSREDNJITI JEDNAČINU MEHANIČKE ENERGIJE - DOBIJA SE PROIZVOD FLUKTUIRAJUĆIH VELIČINA I ČLANOVI KOJI POKAZUJU PRELAZ ENERGIJE U FLUKTUACIJE.

ODUZIMANJEM (1) OD (2) DOBIJA SE JEDNAČINA KOJA PRATI PREOSTALU ENERGIJU KOJA NIJE UŠLA U GLAVNO STRUJANJE

C-1

$\overline{u_i} \times$ (REYNOLDSOVA JED.) ($\rho = const$!)

$$\underbrace{\overline{u_i}\cdot\rho\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t}}_{\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{u_i}\cdot\overline{u_i}}{2}\right)} + \overline{u_i}\cdot\rho\cdot\overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -\rho g\frac{\partial h}{\partial x_i}\cdot\overline{u_i} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}\overline{u_i} + \mu\cdot\overline{u_i}\cdot\frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j\partial x_j} - \rho\cdot\overline{u_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i'\cdot u_j'}\right)$$

$$\boxed{\overline{u_i}\cdot\overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i}\cdot\overline{u_j}\cdot\overline{u_i}\right) - \overline{u_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i}\cdot\overline{u_j}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i}\,\overline{u_j}\,\overline{u_i}\right) - \overline{u_i}\cdot\overline{u_i}\cancel{\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j}}^{=0 \text{ ZA } \rho = const} - \boxed{\overline{u_i}\cdot\overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}}$$

$$\overset{\oplus}{\Rightarrow} 2\cdot\overline{u_i}\,\overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i}\,\overline{u_j}\,\overline{u_i}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{u_i}\rho\overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = \rho\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\overline{u_i}\,\overline{u_i}\,\overline{u_j}}{2}\right)$$

DOBIJA SE ENERGETSKA (MEHANIČKA) JEDNAČINA:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\overline{u}^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\cdot\overline{u_j}\cdot\frac{\overline{u}^2}{2}\right)}_{\text{SVE U JEDINICI VREMENA}} = \underbrace{-\rho g\frac{\partial h}{\partial x_i}\overline{u_i} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}\overline{u_i}}_{\text{RAD SILE TEŽINE I SILE PRITISKA}} + \underbrace{\mu\cdot\overline{u_i}\frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j\partial x_j}}_{\text{RAD VISKOZNIH SILA}} - \underbrace{\overline{u_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\cdot\overline{u_i'u_j'}\right)}_{\text{RAD TURBULENTNIH SILA}}$$

PROMENA + PROTOK KINETIČKE ENERGIJE

SVE MOTORNI RADOVI

DOBIJENA JEDNAČINA JE SLIČNA DINAMIČKOJ JEDNAČINI – OD NJE SE POŠLO MNOŽENJEM SA $\overline{u_i}$.

(C-2) DRUGI PRISTUP

JEDNAČINA ODRŽANJA MEHANIČKE ENERGIJE SE OSREDNJAVA :

$$\overline{u_i \rho \frac{D u_i}{Dt}} = \overline{-\rho g u_i \frac{\partial h}{\partial x_i}} - \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} - \overline{u_i \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}}$$

2 ČLANA $\frac{\partial}{\partial t}$
5 ČLANOVA $\frac{\partial}{\partial x_j}$

1 ČLAN — 2 ČLANA — 2 ČLANA

Postupnije izvodjenje je dato na sledece dve strane (bez gustine rho)

DOBIJA SE: ($\rho = const$)

$$\underbrace{\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{\bar{u}^2}{2}\right)}}_{A} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{\overline{u_i' \cdot u_i'}}{2}\right) +$$

$$+ \underbrace{\boxed{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \cdot \bar{u}_j \frac{\bar{u}^2}{2}\right)}}_{B} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \cdot \bar{u}_j \frac{\overline{u_i' \cdot u_i'}}{2}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_i \cdot \rho \overline{u_i' \cdot u_j'}\right) + \quad \text{DELI SE NA:} \quad \underbrace{\boxed{\bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \overline{u_i' \cdot u_j'}\right)}}_{C} + \rho \cdot \overline{u_i' \cdot u_j'} \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \cdot \overline{u_j' \frac{u_i' \cdot u_i'}{2}}\right) =$$

$$= \underbrace{\boxed{-\rho g \bar{u}_i \frac{\partial h}{\partial x}}}_{D} - \underbrace{\boxed{\bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}}}_{E} - \overline{u_i' \frac{\partial p'}{\partial x_i}} -$$

$$- \underbrace{\boxed{\bar{u}_i \frac{\partial \bar{\tau}_{ji}}{\partial x_j}}}_{F} - \overline{u_i' \frac{\partial \tau_{ji}'}{\partial x_j}}$$

6 ZAOKRUŽENIH ČLANOVA SE POJAVLJUJE U PRETHODNOJ JEDNAČINI C-1

Nastavlja se na strani 149

SREĐIVANJE ČLANA $\overline{\rho\, u_i \frac{Du_i}{Dt}}$

- MAT. IZVOD: $\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

- MAT. IZVOD KADA SE RAZDVOJI BRZINA NA $\bar{u} + u'$

$$\frac{D(\bar{u}_i + u_i')}{Dt} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i'}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

- POMNOŽENO SA $(\bar{u}_i + u_i')$

$$(\bar{u}_i + u_i')\frac{D(\bar{u}_i + u_i')}{Dt} = \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}_{①} + \bar{u}_i \frac{\partial u_i'}{\partial t}_{②} + u_i' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}_{③} + u_i' \frac{\partial u_i'}{\partial t}_{④}$$
$$+ \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}_{⑤} + u_i' \cdot \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}_{⑥} + \bar{u}_i \cdot u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}_{⑦} +$$
$$+ u_i' \cdot u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}_{⑧} + \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}_{⑨} + u_i' \cdot \bar{u}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}_{⑩} +$$
$$+ \bar{u}_i \cdot u_j' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}_{⑪} + u_i' \cdot u_j' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}_{⑫}$$

- SADA SE SVE OSREDNJAVA. TREBA NAM OSREDNJENA JEDNAČINA MEHANIČKE ENERGIJE (ρ JE SKLONJENO JER JE KONSTANTNO):

$$\overline{(\bar{u}_i + u_i')\frac{D(\bar{u}_i + u_i')}{Dt}} = \overline{(\ )} + \overline{(\ )} + \dots + \overline{(\ )}$$

②

① $= \frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{u}_i \cdot \bar{u}_i \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{u}^2}{2}\right) \longrightarrow$ POJAVLJUJE SE U $\bar{u}_i \cdot \overline{(\text{REY. JED.})}$

② $= \phi$ ③ $= \phi$

④ $= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{u_i' \cdot u_i'}}{2}\right)$

⑤ $= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_j \cdot \frac{\bar{u}^2}{2}\right) \longrightarrow$ POJAVLJUJE SE U $\bar{u}_i \cdot \overline{(\text{REY. JED.})}$

⑥ $= \phi$

⑦ $= \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i' \cdot u_j'}\right) \longrightarrow$ — 〃 —

⑧ $= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j' \cdot \frac{u_i' \cdot u_i'}{2}}\right) \longrightarrow$ PROTOK FLUKTUACIJE ENERGIJE TURBULENTNA DIFUZIJOM (POMNOŽITI SA ρ!)

⑨ $= \phi$

⑩ $= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_j \cdot \frac{\overline{u_i' \cdot u_i'}}{2}\right)$

⑪ $= \phi$

⑫ $= \overline{u_i' \cdot u_j'} \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$

ΣI ⑦ + ⑫ $= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_i \cdot \overline{u_i' \cdot u_j'}\right)$

JEDNAČINI (C-1). ODUZIMANJEM

OSTAJE JEDNAČINA NAMENJENA

ENERGIJI KOJA ULAZI U FLUKTUACIJE:

$$① \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \cdot \frac{\overline{u_i' \cdot u_i'}}{2}\right) +$$

$$+ \underset{②}{\frac{\partial}{\partial x_j}}\left(\overline{u_j}\, \rho\, \frac{\overline{u_i' \cdot u_i'}}{2}\right) + \underset{③}{\frac{\partial}{\partial x_j}}\left(\overline{\rho \cdot u_j' \frac{u_i' \cdot u_i'}{2}}\right) =$$

$$= \underset{④}{-\overline{u_i' \frac{\partial p'}{\partial x_i}}} \underset{⑤}{- \overline{u_i' \frac{\partial \tau'_{ji}}{\partial x_j}}} \underset{⑥}{- \rho\, \overline{u_i' \cdot u_j'}\, \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}}$$

ČLANOVI: (SVE U JEDINICI VREMENA)

① - PRIRAŠTAJ KINETIČKE ENERGIJE U FLUKTUACIJAMA

② } PROTOK FLUKTUACIONE KINETIČKE ENERGIJE
③ } KROZ KONTURU (KADA PREĐE IZ V u A)

② - KONVEKCIJOM $\overline{u_j}$

③ - DIFUZIJOM TURBULENTNOM u_j' (NE PRENOSI SE MASA!!!)

④ RAD SFERNOG DELA FLUKTUACIONIH SILA (POVRŠINSKIH SILA)

⑤ RAD DEVIJATORSKOG DELA POVRŠINSKIH SILA - RAD <u>PRAVIH</u> VISKOZNIH NAPONA

⑥ ENERGIJA PREBAČENA IZ OSREDNJENOG STRUJANJA - PRODUKCIJA TURBULENTNE ENERGIJE (UKRADENA ENERGIJA IZ OSREDNJENOG TOKA)

OSREDNJENO STRUJANJE
(GUBITAK ENERGIJE)

OBIČNO ZANEMARLJIVO

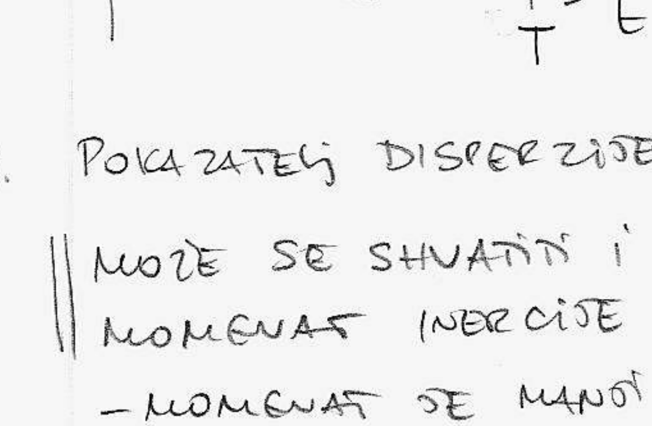
TOPLOTA
(VISKOZNOST)

FLUKTUACIJE

(NE INTERESUJE NAS!)

5.4. STATISTIČKI POKAZATELJI TURBULENCIJE

U JEDNOJ TAČKI SE MERI PRITISAK KROZ VREME:



$$\bar{p} = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt$$

$$\int_0^T p'\,dt = 0$$

a). POKAZATELJ DISPERZIJE $\overline{p' \cdot p'} = \overline{p'^2} = \frac{1}{T}\int_0^T p'^2\,dt$

MOŽE SE SHVATITI I KAO MOMENAT INERCIJE OKO $\bar{p}$

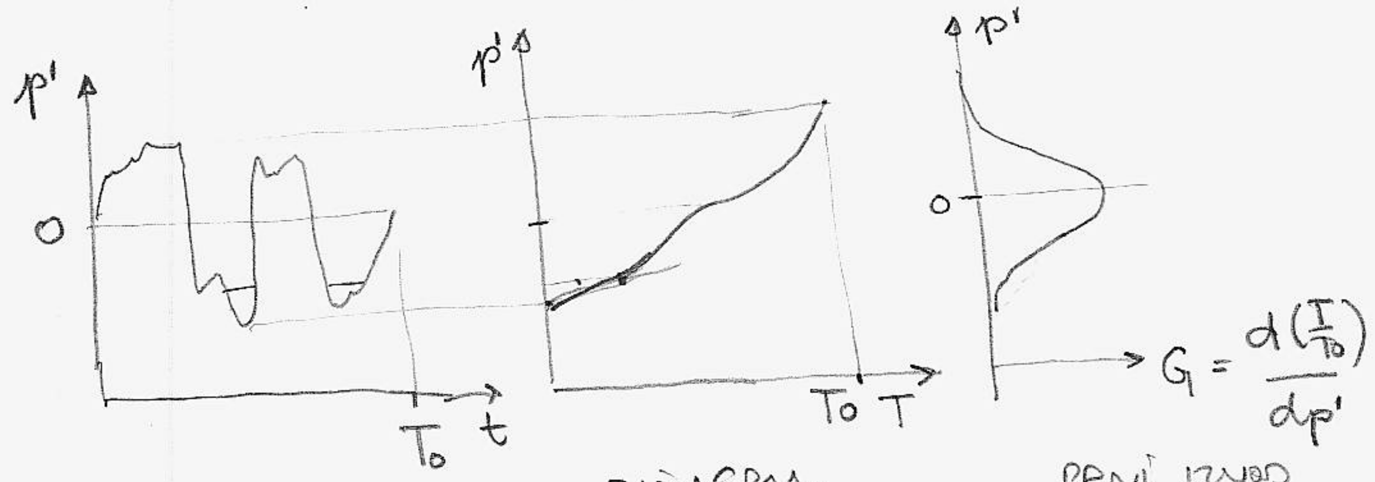
– MOMENAT SE MANJI UKOLIKO JE POVRŠINA "SPLJESKANIJA"

b) KOREN IZ DISPERZIJE JE SREDNJE KVADRATNO ODSTUPANJE ILI STANDARDNA DEVIJACIJA $\sqrt{\overline{p'^2}}$ (RMS) ROOT MEAN SQUARE

c) SREDNJE KVADRATNO ODSTUPANJE JE POKAZATELJ TURBULENCIJE - ZGODNO JE DA SE NORMALIZUJE SA SREDNJOM BRZINOM:

$$\frac{\sqrt{\overline{p'^2}}}{\overline{p}} \quad - \text{INTENZITET TURBULENCIJE}$$

d) RASPODELA FLUKTUACIJA - POKAZUJE UČEŠĆE POJEDINIH VREDNOSTI U UKUPNOM VREMENSKOM ZAPISU



VREMENSKI DIJAGRAM

DIJAGRAM TRAJANJA p' MANJEG OD ODREĐENE VREDNOSTI (RASPODELA p')

PRVI IZVOD DIJAGRAMA TRAJANJA - GUSTINA RASPODELE

SIMETRIČNA, NESIMETRIČNA

OBIČNO GAUSOVA NORMALNA.

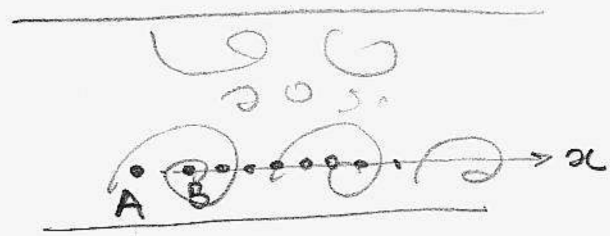
e) BEZDIMENZIONALNI POKAZAT.

- ASIMETRIJA $\dfrac{\overline{p'^3}}{\left(\overline{p'^2}\right)^{3/2}}$

- SPLJOŠTENOST $\dfrac{\overline{p'^4}}{\left(\overline{p'^2}\right)^{2}}$

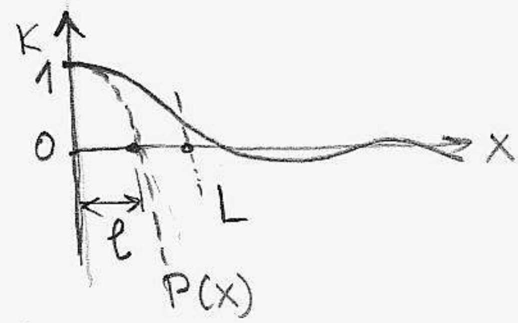
A) KORELACIJA FLUKTUACIJA

— PO PROSTORU



p'_A i p'_B SU U NEKOJ VEZI DOK SU UNUTAR ISTOG VRTLOGA!

$$K_p(x) = \frac{\overline{p'_A \cdot p'_B(x)}}{\sqrt{\overline{p'^2_A}} \cdot \sqrt{\overline{p'^2_B(x)}}}$$



— JAKO TEŠKO DA SE MERI !!! TREBA ISTOVREMENA VREDNOST DUŽ SVIH TAČAKA !!!

- $K(x=0)=1$
- FITOVANJEM PARABOLE DOBIJA SE MERA VELIČINE VRTLOGA ... l - MIKROSKALA TURBULENCIJE

$$P(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2$$

- DEFINIŠE SE DUŽINA L - MAKROSKALA

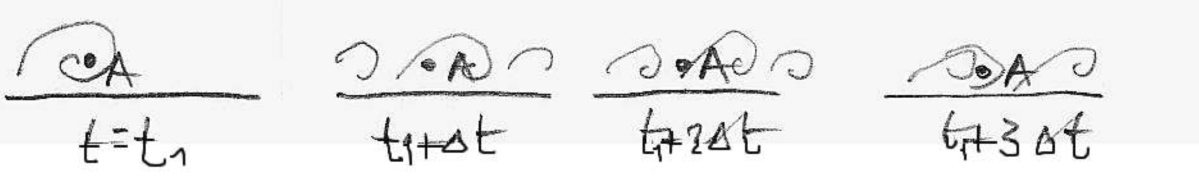
$$L = \int_0^\infty K(x)\,dx$$

DA SE VELIČINU VELIKIH VRTLOGA

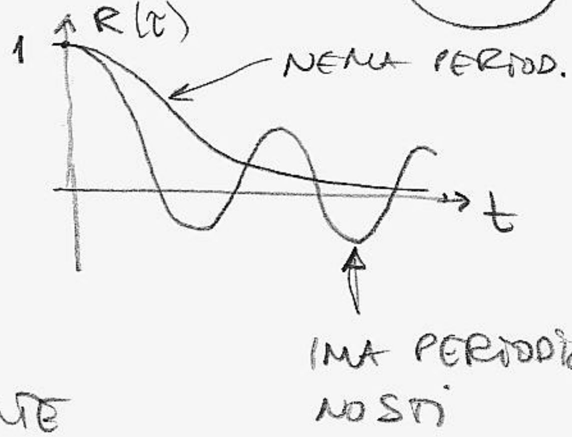
RADI SE I KORELACIJA RAZLIČITIH VELIČINA PO PROSTORU!

- PO VREMENU

VRTLOG PROLAZI PORED MERNE TAČKE, DOLAZI SLEDEĆI



AUTOKORELACIJA - ISTA VELIČINA U ISTOJ TAČCI



$$R_\tau = K_\tau = \frac{\overline{p'(t) \cdot p'(t+\tau)}}{\overline{p'^2}}$$

. DAJE PERIODE VRTLOGA.

KORELACIJA DVE KOMPONENTE BRZINE

$$K_{12}(t) = \frac{\overline{u_1' \cdot u_2'}}{\sqrt{\overline{u_1'^2}} \cdot \sqrt{\overline{u_2'^2}}}$$

- MNOŽE SE ISTOVREMENE BRZINE!!!

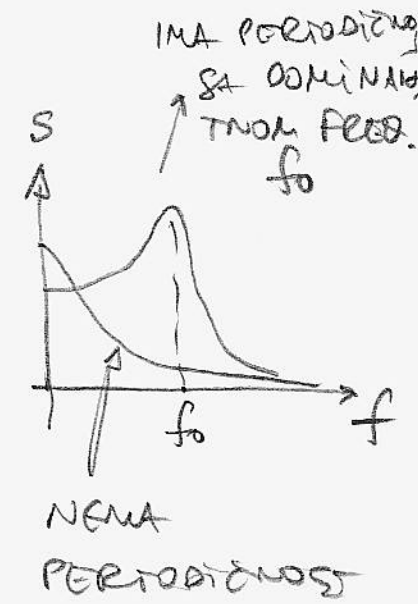
NE KLIZA τ VEĆ SE MENJA U VREMENU

POKAZUJE NORMALIZOVAN REYNOLDSOV NAPON TURBULENCIJE!!!

VREMENSKA KORELACIJA GOVORI O PERIODIČNOSTI I PERIODI VRTLOGA - LOGIČNA VEZA SA FURIJEOVOM TRANSFORMACIJOM KOJA TO PREVODI U FREKVENCIJE

$$R(\tau) = \int_0^\infty \underbrace{S(f)}_{\text{SPEKTRALNA GUSTINA}} \cos(2\pi f \tau)\, df$$

$$S(f) = 4 \int_0^\infty R(\tau) \cos(2\pi f \tau)\, d\tau$$

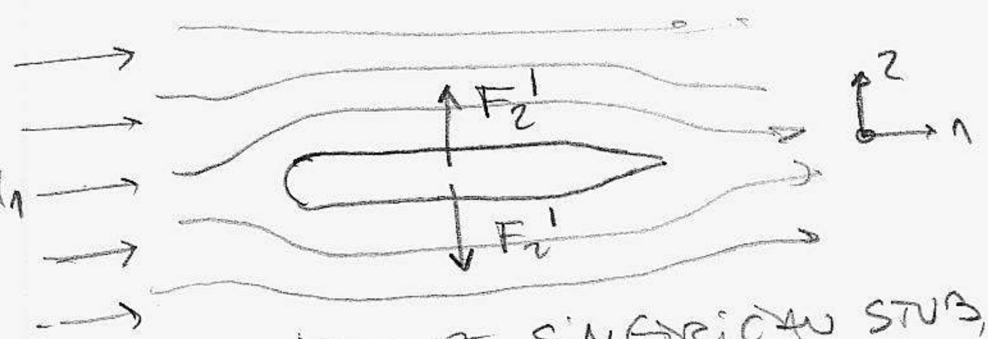


ČEMU SVA OVA IZUČAVANJA

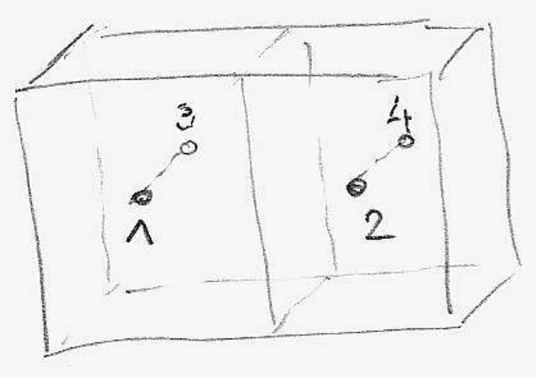
KORELACIJA

- DA BI SE REŠILI PRAKTIČNI PROBLEMI ZA KOJE NIJE NEOPHODNO REŠAVATI NEREŠIVE JEDNAČINE!

SILA NA MOSTOVSKI STUB:



IAKO JE SIMETRIČAN STUB, POSTOJI SILA ZBOG FLUKTUACIJA



MERE SE PRITISCI U TAČKAMA 1...4

SA JEDNE STRANE:

$$F_2' = (p_1' + p_2') \cdot A$$

$$\overline{F_2'^2} = (\overline{p_1'^2} + \overline{p_2'^2} + 2\underbrace{\overline{p_1' \cdot p_2'}}_{\leq 1}) \cdot A^2$$

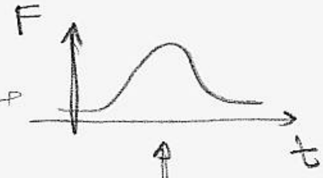
$$\max \overline{F_2'^2} = 4\overline{p'^2} \cdot A^2$$

TREBA I KORELACIJA SA SUPROTNOM STRANOM ZIDA – GLEDA SE KORELACIJA R_{13} i R_{24}

AKO JE $R_{13} = -1$ TADA JE $P_1^{UKUPNO} = 2 \cdot P_1$

ZA $R_{13} = +1$ TADA JE $P_1^{UKU} = \emptyset$

UZIMA SE $F_{max} = K \cdot \sqrt{\frac{F'^2}{2}}$



KOEFICIJENAT OBEZBEĐENJA (OBIČNO = 3 ZA POJAVLJIVANJE JEDNOM U 1000 DOGAĐAJA)

OBIČNO GAUSOVA RASPODELA