

Dušan Prodanović

# **MEHANIKA FLUIDA**

## **za studente Građevinskog fakulteta**

**drugo izmenjeno i dopunjeno izdanje**

**Univerzitet u Beogradu - Građevinski fakultet  
Oktobar, 2013.**

Dušan Prodanović  
**MEHANIKA FLUIDA**  
za studente Građevinskog fakulteta  
drugo izmenjeno i dopunjeno izdanje

*Recenzenti*

Prof. dr Marko Ivetić

Prof. dr Miodrag Jovanović

Odobreno za štampu odlukom Nastavno – naučnog veća Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, 11.10.2013. godine

*Izdavač*

Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet  
Beograd, Bulevar kralja Aleksandra 73

*Glavni i odgovorni urednik*

Prof. dr Dušan Najdanović, dekan

*Štampa i povez.* DEDRAPLAST, Generala Aračića 13, Beograd

CIP – Каталогизација у публикацији  
Народна библиотека Србије, Београд

532(075.8)

ПРОДАНОВИЋ, Душан, 1960-

Mehanika fluida : za studente

Građevinskog fakulteta / Dušan Prodanović. –

2. izmenjeno i dopunjeno izd. – Beograd :

Građevinski fakultet, 2013 (Beograd :

Dedraplast). – X, 413 str. : graf. prikazi,  
tabele ; 24 cm

Tiraž 500. – Napomene uz tekst, –

Bibliografija: str. 391-392. – Registar.

ISBN 978-86-7518-162-0

а) Механика флуида

COBISS.SR-ID 201513740

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Način i predmet izučavanja . . . . .	2
1.2	Istorijski pregled razvoja Mehanike fluida . . . . .	3
1.3	Organizacija knjige . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Fizička svojstva fluida</b>	<b>9</b>
2.1	Veličine, dimenzionalni sistem i jedinice mere . . . . .	10
2.2	Viskoznost . . . . .	12
2.3	Gustina (specifična masa) fluida . . . . .	20
2.4	Težina i specifična težina . . . . .	21
2.5	Elastične deformacije, stišljivost fluida . . . . .	22
2.6	Pritisak . . . . .	24
2.7	Površinski napon i kapilarnost . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Hidrostatika</b>	<b>33</b>
3.1	Promena pritiska u zavisnosti od položaja . . . . .	34
3.1.1	Pretpostavke za izvođenje jednačine . . . . .	34
3.1.2	Osnovna jednačina hidrostatike . . . . .	35
3.1.3	Rešenje osnovne jednačine hidrostatike za homogeni fluid . . . . .	36
3.1.4	Pijezometarska kota kod homogenog fluida . . . . .	38
3.1.5	Rešenje osnovne jednačine hidrostatike za nehomogeni fluid . . . . .	40
3.2	Merenje pritiska . . . . .	43
3.2.1	Merenje apsolutnog pritiska barometrom . . . . .	44
3.2.2	Merenje pritiska manometrom . . . . .	45
3.3	Hidrostatičke sile na čvrste granične površine . . . . .	50
3.3.1	Hidrostatičke sile na ravne površine . . . . .	50
3.3.2	Hidrostatičke sile na krive površine . . . . .	57

3.3.3	Hidrostatička sila potiska . . . . .	66
3.3.4	Ravanski zadaci . . . . .	70
3.3.5	Sila pritiska gasa na zidove zatvorenog rezervoara . . .	77
3.4	Relativno mirovanje fluida . . . . .	79
3.4.1	Pravolinijsko kretanje suda . . . . .	79
3.4.2	Rotacija suda oko vertikalne ose . . . . .	82
4	<b>Osnove dinamike fluida</b>	<b>85</b>
4.1	Pojmovi i osnovne karakteristike toka . . . . .	86
4.1.1	Materijalni delić, strujanje realnog i idealnog fluida . .	86
4.1.2	Stišljiv i nestišljiv, homogen i nehomogen fluid . . . .	87
4.1.3	Laminarno i turbulentno strujanje . . . . .	87
4.1.4	Ustaljeno i neustaljeno strujanje . . . . .	90
4.1.5	Jednoliko i nejednoliko strujanje . . . . .	91
4.1.6	Dimenzionalnost problema: 3D, 2D, 1D . . . . .	92
4.1.7	Trajektorija, strujnica i emisiona linija . . . . .	93
4.1.8	Protok fluida i srednja brzina . . . . .	97
4.2	Metode opisivanja kretanja fluida . . . . .	100
4.3	<b>Koncept kontrolne zapremine</b> . . . . .	<b>102</b>
4.3.1	<b>Prelazak sa konstantne mase na konstantnu zapreminu</b>	<b>103</b>
4.3.2	Praćenje kretanja materijalnog delića . . . . .	107
4.3.3	Brzina deformacije materijalnog delića . . . . .	109
4.3.4	<b>Veza materijalnog izvoda i kontrolne zapremine</b> . . . .	<b>114</b>
4.4	Princip održanja mase . . . . .	116
4.4.1	Jednačina održanja mase . . . . .	116
4.4.2	Ustaljeno strujanje nehomogenog i homogenog fluida .	118
4.4.3	Primer tečenja u cevi . . . . .	120
4.5	Održanje količine kretanja . . . . .	122
4.5.1	Integralna i diferencijalna jednačina održanja količine <b>kretanja</b> . . . . .	<b>123</b>
4.5.2	Rešenje diferencijalne jednačine održanja količine kre- <b>tanja za određena pojednostavljena</b> . . . . .	<b>128</b>
4.5.3	Primeri primene Bernulijeve jednačine . . . . .	133
4.5.4	Navie-Stoksove jednačine . . . . .	142
4.5.5	Rešenje integralne jednačine održanja količine kretanja za ustaljeno tečenje homogenog fluida u cevi . . . . .	147
4.5.6	Primeri primene jednačine sila . . . . .	152
4.6	Održanje energije sistema . . . . .	155
4.6.1	Integralna i diferencijalna jednačina održanja energije	155

4.6.2	Jednačine mehaničke i toplotne energije . . . . .	161
4.6.3	Rešenje integralne jednačine održanja energije za ustaljeno tečenje homogenog fluida u cevi . . . . .	163
4.6.4	Drugi oblik rešenja integralne jednačine održanja energije za ustaljeno tečenje homogenog fluida . . . . .	168
4.6.5	Poređenje energetske sa Bernulijevom jednačinom . . . . .	172
4.6.6	Primer primene energetske jednačine . . . . .	173
<b>5</b>	<b>Dimenzionalna analiza, sličnost i modeli</b>	<b>179</b>
5.1	Dimenzionalna analiza . . . . .	180
5.1.1	Uvod u dimenzionalnu analizu . . . . .	180
5.1.2	Bakingemova II teorema . . . . .	183
5.1.3	Primeri primene dimenzionalne analize . . . . .	185
5.1.4	Komentari u vezi dimenzionalne analize . . . . .	191
5.1.5	Standardni bezdimenzionalni brojevi . . . . .	196
5.2	Sličnost i fizički modeli . . . . .	201
5.2.1	Geometrijska sličnost . . . . .	202
5.2.2	Kinematska sličnost . . . . .	203
5.2.3	Dinamička sličnost . . . . .	205
5.2.4	Sloboda izbora razmera za fizičke modele . . . . .	207
5.2.5	Primeri fizičkih modela . . . . .	209
<b>6</b>	<b>Hidrodinamički otpori</b>	<b>215</b>
6.1	Trenje pri jednolikom tečenju kroz cev . . . . .	216
6.1.1	Koeficijent linijskog gubitka energije . . . . .	216
6.1.2	Trenje u cevi pri laminarnom tečenju . . . . .	223
6.1.3	Prelaz iz laminarnog u turbulentno tečenje . . . . .	227
6.1.4	<b>Granica između laminarnog i turbulentnog tečenja u cevi</b> . . . . .	<b>230</b>
6.1.5	Turbulentno tečenje u cevi . . . . .	232
6.1.6	Otpori trenja u cevima različitih poprečnih preseka . . . . .	242
6.2	Ukupni otpori tela . . . . .	246
6.3	Trenje uz ravnu (usamljenu) ploču . . . . .	247
6.3.1	Osnovne pretpostavke . . . . .	248
6.3.2	Raspored brzina i granični sloj oko tanke ploče . . . . .	250
6.3.3	Proračun debljine graničnog sloja . . . . .	253
6.3.4	Tangencijalni napon i sila trenja . . . . .	256
6.4	Otpori oblika . . . . .	260
6.4.1	Osnovne pretpostavke . . . . .	261
6.4.2	Raspored pritisaka oko tela za idealan fluid . . . . .	262

6.4.3	Tačka odvajanja graničnog sloja . . . . .	265
6.4.4	Vrtložni trag . . . . .	271
6.4.5	Proračun sile otpora oblika . . . . .	276
<b>6.4.6</b>	<b>Sila uzgona . . . . .</b>	<b>281</b>
<b>7</b>	<b>Tečenje fluida kroz cevi . . . . .</b>	<b>285</b>
7.1	Pretpostavke i uslovi za izvođenje jednačina . . . . .	286
7.2	Osnovne jednačine održanja . . . . .	289
7.2.1	Jednačina kontinuiteta . . . . .	290
7.2.2	Dinamička jednačina . . . . .	292
7.2.3	Energetska jednačina . . . . .	300
7.3	Primeri primene jednačina održanja . . . . .	315
7.3.1	Primeri primene energetske jednačine . . . . .	316
7.3.2	Primer sa dinamičkom jednačinom . . . . .	321
7.3.3	Dinamička ili energetska jednačina? . . . . .	325
7.4	Hidrauličke mašine . . . . .	326
7.4.1	Pumpe (crpke) . . . . .	327
7.4.2	Turbine . . . . .	330
7.4.3	Reverzibilne mašine . . . . .	332
<b>8</b>	<b>Tečenje u otvorenim tokovima . . . . .</b>	<b>335</b>
8.1	Pretpostavke i uslovi za izvođenje jednačina . . . . .	336
8.2	Jednoliko tečenje, normalna dubina . . . . .	338
<b>8.3</b>	<b>Raspored brzina u preseku . . . . .</b>	<b>345</b>
8.4	Specifična energija, kritična dubina . . . . .	346
8.4.1	Specifična energija . . . . .	347
8.4.2	Kritična dubina . . . . .	349
8.4.3	Kritičan nagib dna kanala . . . . .	352
8.4.4	Miran i buran režim tečenja . . . . .	353
8.5	Hidraulički skok . . . . .	358
8.6	Nejednoliko tečenje (blago promenljivo) . . . . .	366
8.6.1	Diferencijalna jednačina linije nivoa . . . . .	367
8.6.2	Rešavanje diferencijalne jednačine linije nivoa . . . . .	368
8.7	Oblici linije nivoa kod nejednolikog tečenja . . . . .	370
8.7.1	Nagib linije energije jednak nagibu dna . . . . .	371
8.7.2	Velika dubina u kanalu . . . . .	371
8.7.3	Dubina jednaka kritičnoj a različita od normalne . . . . .	371
8.7.4	Nagib dna kanala manji od kritičnog nagiba . . . . .	372
8.7.5	Nagib dna kanala veći od kritičnog nagiba . . . . .	377
8.7.6	Linija nivoa kod promene nagiba ili hrapavosti dna . . . . .	380

<b>SADRŽAJ</b>	<b>v</b>
8.8 Isticanje ispod ustave . . . . .	382
8.9 Prelivanje preko širokog praga . . . . .	385
<b>A Osnovne i izvedene fizičke veličine</b>	<b>393</b>
<b>B Tabele osobina nekih fluida</b>	<b>397</b>
<b>C Karakteristike ravnih površina i tela</b>	<b>401</b>





# Predgovor prvom izdanju

Kurs Mehanike fluida se na Građevinskom fakultetu u Beogradu sluša od 1967. godine kao obavezni predmet na svim smerovima. Osnivač kursa, profesor Georgije Hajdin je 1977. godine štampao i prvo izdanje knjige za ovaj predmet. Uz manje korekcije, knjiga je 2002. godine doživela i svoje peto izdanje, pod naslovom “Mehanika fluida, knjiga prva, OSNOVE”. Iste godine je profesor Georgije Hajdin izdao i drugu knjigu Mehanike fluida, pod nazivom “Uvođenje u hidrauliku”, u kojoj se neke oblasti praktične hidraulike posmatraju i dodatno tumače kroz jednačine hidrodinamike izvedene u prvoj knjizi.

Vremenom su sadržaj kursa i broj časova na redovnim studijama menjani: postepeno se smanjivao teorijski pristup predmetu a sve više je prilagođavan praktičnoj Građevinskoj praksi. Kada sam 2000. godine preuzeo predavanja na predmetu Mehanika fluida, na redovnim studijama, bio sam suočen sa činjenicom da studenti imaju na raspolaganju dve kvalitetne knjige, ali koje ne prate direktno sâm kurs. Zbog toga sam odlučio da napišem klasičan udžbenik koji “čvrsto” prati predavanja i koji sadrži više brojnih primera (zadataka), kako bi se pomoglo studentima da što bolje savladaju materiju. U knjizi se sigurno oseća značajan uticaj profesora Georgija Hajdina kao i uticaj profesora Čede Maksimovića i profesora Marka Ivetića koji su jedno vreme držali predavanja.

Knjiga je nastajala postepeno: prvo su 2002. godine skripta sa predavanja direktno prebačena u formu knjige, a elektronska verzija je stavljena studentima na raspolaganje preko Interneta. Zatim, postepeno je pisano jedno po jedno poglavlje i dodavani su kratki primeri koji bi trebalo da ilustruju izlaganje.

Sâm proces nastajanja knjige je bio prilično spor, jer sam dosta vremena

utrošio na pravljenje slika kojima sam pokušao da što bolje ilustrujem materiju. Veliku zahvalnost za pokazano razumevanje a i izvinjenje dugujem svojoj porodici, supruzi Vesni i sinovima Momčilu i Veljku, zbog toga što sam sate svog slobodnog vremena posvetio pisanju ove knjige. Takođe, zahvaljujem se i svom drugu i kolegi Slobodanu Đorđeviću koji je detaljno iščitao knjigu i pomogao da se otkloni većina grešaka.

Dušan Prodanović

Avgusta 2002. započeto pisanje

Novembra 2007. završeno pisanje

# Predgovor drugom izdanju

Pisanje neke stručne knjige, posebno udžbenika, po malo podseća na proces iterativnog rešavanja složenih hidrauličkih problema: napravi se prvo izdanje kao najbolje očekivano rešenje, a onda se, prateći reakcije čitalaca, u narednim izdanjima postepeno poboljšava, čime knjiga konvergira ka najboljem rešenju.

Slična je sudbina i ove knjige. Nakon prvog izdanja, sâm autor je pronašao niz sitnih grešaka i mesta gde je moguće dati bolja i ilustrativnija objašnjenja. Recenzenti knjige su dali predlog da se poboljša organizacija knjige promenom rasporeda pojedinih oblasti, tako da sada nakon izučavanja dinamike fluida, sledi oblast dimenzionalne analize i oblast hidrodinamičkih otpora, a na kraju knjige se nalaze dve oblasti u kojima se primenjuju izvedene i uprošćene jednačine, tečenje u cevima i tečenje u kanalima.

Brojni pažljivi čitaoci, starije i mlađe kolege, kao i studenti doktorskih studija su takođe ukazali na određene propuste u prvom izdanju knjige. Tu bih se pre svega zahvalio jednom od najmlađih kolega, studentu Đikić Draganu, koji je detaljno iščitao knjigu i, zahvaljujući njegovom krajnje konstruktivnom prilazu, učinio da ovo drugo izdanje bude još bolje. Koleginica Tijana Jovanović je vredno i pažljivo proverila sve proračune u knjizi, dok je moj sin Veljko Prodanović dao značajan doprinos na sređivanju pojedinih (prenatrpanih) slika.

Dušan Prodanović  
Septembra 2013.

Dušan Prodanović - Mehanika fluida za studente Gradjevinskog fakulteta, drugo izdanje - 2013. godina

x

SADRŽAJ

# Glava 1

## Uvod

Kroz dva kursa na predmetu Tehnička mehanika, koju slušaju studenti Građevinskog fakulteta, izučava se mirovanje i kretanje materijalnih (krutih) tela. U opštu mehaniku spada i predmet Mehanika fluida, koji izučava mirovanje i kretanje fluida. Kretanje fluida se obično naziva *strujanje* (termin češće koriste stručnjaci sa Mašinskog fakulteta i obuhvata kretanje gasova i tečnosti) ili *tečenje* (uobičajen termin u građevinskoj struci i odnosi se uglavnom na tečnosti. Termin nije dovoljno precizan, jer se koristi i kod materijala sa sporim plastičnim deformacijama, na primer betona, gde bi bilo bolje reći *puzanje*).

Definicija *fluida* ima mnogo. U najširem smislu, *fluid je sve ono što teče ili struji, odnosno čiji delići mogu kontinualno da menjaju svoj relativni položaj. Takođe*, definicija fluida može biti i da su to *materije koje se kontinualno deformišu pod dejstvom i najmanjeg tangencijalnog napona, odnosno materije kod kojih ne postoje tangencijalni naponi kada je u mirovanju*. Fluidi se mogu definisati i kao *materije koje se u potpunosti prilagođavaju obliku suda u kome se nalaze*.

**Razlika između** krutih tela i fluida je, najčešće, očigledna. Međutim, postoje neke materije, koje nije jednostavno klasifikovati. Katran je, na primer fluid, ali ne teče lako: potrebni su dani da bi pod uticajem gravitacije zauzeo oblik posude u koju se stavi. Sa druge strane, mnoga kruta tela će početi da “teku” kada se izlože velikim silama i kada dođe do plastičnih deformacija. Osnovna razlika, ipak postoji: svaki fluid, bez obzira koliko bio čvrst ili viskozan, počinje da teče ukoliko je izložen i najmanjem tangencijalnom naponu i nastavlja da teče sve dok postoji taj napon. S druge strane, kruto telo, bez obzira koliko bilo plastično, ne počinje da teče dok tangencijalni napon ne pređe određenu granicu.

Razlika u ponašanju čvrstih tela i fluida potiče od njihove različite molekularne strukture. Kod čvrstih tela, zbog velike gustine, molekuli su veoma blizu, pa su i sile između njih velike. Sami molekuli se ne kreću unutar čvrstog tela, već samo osciluju oko svojih ravnotežnih položaja. Kada se nanese spoljna sila na čvrsto telo, molekuli se malo pomere, što izaziva povećanje međumolekularnih sila i uspostavljanje nove, stabilne ravnoteže (elastične deformacije). Uklanjanjem spoljne sile, molekuli se vraćaju u prvobitni položaj. Kada spoljna sila postane veća od međumolekularnih sila, dolazi do trajne plastične deformacije.

Kod fluida, iako postoje međumolekularne sile, molekuli su pokretljiviji. Kada se nanese spoljna sila, molekuli se kontinualno pomeraju od jedne do druge veze, klizaju, pri čemu brzina klizanja zavisi od odnosa spoljne sile i unutrašnjih međumolekularnih sila. Uklanjanjem spoljne sile, molekuli ostaju u položaju u kome su zatečeni, ne vraćaju se u početni položaj.

## 1.1 Način i predmet izučavanja

Način izučavanja Mehanike fluida je da se *postavljaju određeni uslovi i pretpostavke i na osnovu njih izvode zaključci*. Ono na šta se odnose zaključci su *fluidi*, a dobijeni izrazi, jednačine, *važe samo u okviru postavljenih uslova*.

Izučavanje stvarne prostorne i neustaljene strujne slike je dosta komplikovano, često čak i neizvodljivo. Standardna praksa, u Mehanici fluida, je da se postavljanjem određenih pretpostavki, složena strujna slika znatno uprosti. Zaključci koji se dobiju na tako uprošćenoj strujnoj slici se, zatim, ekstrapoluju na stvarnu strujnu sliku, korišćenjem eksperimentalno određenih korekcionih faktora. Na primer, protok vode kroz otvoreni kanal sa suženjem koje formira kritičnu dubinu, se prvo analitički odredi, smatrajući da je fluid homogen i idealan (nema tangencijalnih napona, otpora), a zatim se dobijeni rezultat umanjuje za  $C_Q$  (koeficijent protoka), koji je određen merenjima u prirodi ili na laboratorijskom modelu.

Predmet izučavanja Mehanike fluida su *svi materijali koji teku ili struje, ili koji mogu da teku u nekom od agregatnih stanja*. Na primer, to su: voda, vazduh, asfalt, ... U okviru kursa Mehanika fluida, na drugoj godini Građevinskog fakulteta, težište je prebačeno na izučavanje nestišljivih (nekompresibilnih) fluida, tečnosti.

Opšta definicija fluida obuhvata tečnosti i gasove. U izučavanju fluida, zbog svojih različitih karakteristika, koje potiču od molekularne strukture, pravi se jasna razlika između ta dva fluida:

- Tečnosti - konačna masa tečnosti uvek zauzima istu zapreminu suda

(tačnije, približno istu, jer veoma malo zavisi od temperature i pritiska). Ukoliko je sud veće zapremine i u stanju mirovanja, pod dejstvom težine, formira se *horizontalna površina koja jasno razdvaja* tečnost od gasa, koji se nalazi iznad (atmosfera, sopstvena isparenja ili nešto treće).

Osnovne dve karakteristike tečnosti su da *na način njihovog tečenja (strujanja) bitno utiče težina, kao i da su slabo stišljivi* (u većini problema će se smatrati da su nestišljivi).

- **Gasovi** - *ista masa gasa se uvek širi tako da ispunji ceo raspoloživi prostor nekog suda* i tek tada može biti u ravnoteži. *Težina gasa ne utiče bitno na strujanje, dok je stišljivost jedna od osnovnih karakteristika.*

Najvažnija *razlika između tečnosti i gasova je u stišljivosti*. Pod normalnim okolnostima, tečnost je veoma teško sabiti, pa se često smatra da su *tečnosti nestišljive, dok se gasovi veoma lako mogu sabiti i po pravilu su gasovi stišljivi*. Međutim, u posebnim okolnostima, ako se zapremina nekog gasa beznačajno malo promeni u posmatranom periodu, može se za taj gas reći da je nestišljiv.

U istraživanju fluida polaziće se od pretpostavke da je on kontinuum, **kontinualno raspoređen**, bez "rupa". Jednačine se postavljaju za elementarni, *fluidni delić*, dovoljno mali da važe principi za postavljanje diferencijalnih jednačina za održanje mase ili energije, a istovremeno dovoljno veliki da obuhvati i uproseči dovoljan broj molekula, kako bi se eliminisale molekularne sile. Pri tome, **uslov kontinuuma garantuje da je izabrani elementarni delić uvek reprezentativni predstavnik fluida**.

## 1.2 Istorijski pregled razvoja Mehanike fluida

Mehanika fluida je, kao i većina drugih naučnih disciplina, **u svom razvoju** prolazila kroz različite periode. Prva dostignuća su bila rezultat posmatranja prirode i dugotrajnog procesa učenja na probama i greškama, u pokušajima da se reše određeni problemi (prema nekim autorima, ovo doba se može nazvati i doba razvoja hidraulike [22]). Tokom 18-og i 19-og veka je došlo do značajnog napretka u fundamentalnim naukama, kada su i postavljene teorijske osnove mehanike fluida (doba razvoja hidrodinamike). Kraj 19-og veka i **savremeno doba donose razvoj teorije modeliranja i spajanje fundamentalnih** istraživanja i eksperimentalnog rada. U drugoj polovini 20-og veka se razvija i oblast numeričkog rešavanja osnovnih jednačina za poznate konturne uslove

i uz određene pretpostavke vezane za način modeliranja turbulencije (doba razvoja CFD-a<sup>1</sup> i hidroiinformatike [4]).

Rani razvoj hidraulike se vezuje i za razvoj ljudske civilizacije na srednjem istoku i u Aziji, kada su nomadska plemena počela da se organizovano bave poljoprivredom. Da bi se borili protiv povremenih suša i poplava, ljudi su počeli sa izgradnjom kanala, akumulacija i bunara. U Egiptu i u Mesopotamiji su pronađeni ostaci irigacionih kanala napravljeni 4000 godina pre nove ere. U to doba je započeta i prva organizovana izgradnja brodova.

Najstariji tragovi korišćenja tekuće vode u kućama, za održavanje higijene i za odvođenje otpada, nađeni su na Kritu i potiču još iz bronzanog doba. U starom Jerusalimu postoje tragovi korišćenja rezervoara i otvorenih kanala, kojima se voda dovodila do pojedinih kuća. Tehnologija je dalje vremenom napredovala, tako da su stari Rimljani bili u stanju da prave akvadukte, fontane, javna kupatila i vodovode po kućama bogatijih ljudi i za naselja veličine i do milion stanovnika. Prema nekim procenama, potrošnja vode u to doba je bila oko 240 L/stanovniku/na dan, što ukazuje na visoke kulturne standarde. Prvi razvoj u oblasti teorije je napravio Arhimed, u trećem veku pre nove ere, sa svojim radovima iz oblasti hidrostatičke i sile uzgona.

Sve do renesansnog doba razvoj hidrauličkih sistema je bio baziran na iskustvu. Prvu definiciju zakona održanja mase (jednačina kontinuiteta) za jednodimenzionalno ustaljeno tečenje je dao Leonardo da Vinči (1452-1519). On je bio odličan eksperimentator i praktično je tvorac vizualizacije toka fluida. U svojim radovima je dao veoma detaljne opise površinskih talasa, hidrauličkog skoka, strujanja u mlazu vode, formiranje vrtloga i efekata otpora pri opstrujavanju tela [28].

Pravi razvoj Mehanike fluida započinje tek nakon objavljivanja knjige *Principia* Isaka Njutna, 1687. godine. Mada knjiga tretira uglavnom probleme iz astronomije, osnove održanja kretanja su bile primenljive i na fluid. Njutt je takođe definisao i zakone kretanja realnih, viskoznih fluida<sup>2</sup>. Uvodeći pretpostavku o "idealnom" fluidu bez trenja, niz matematičara iz 18. veka (Danijel Bernuli, Leonard Ojler, d'Alamber, Lagranž, Laplas, ...) dolaze do elegantnih teorijskih rešenja. Koristeći diferencijalni i integralni račun, postavljaju se i prve osnove hidrodinamike.

<sup>1</sup>CFD je skraćenica od Computational Fluid Dynamics (engl. Računska dinamika fluida).

<sup>2</sup>U čast prve definicije kretanja viskoznih fluida, uobičajeno je da se takvi fluidi nazivaju "njutnovski fluidi".



Rešenja složenih strujanja fluida, dobijena rešavanjem uprošćenih jednačina za idealan fluid, nisu bila primenljiva u svakodnevnoj praksi. Stoga, praktični inženjeri, hidrauličari, (kao što su **Šezi, Pito, Borda, Veber, Darsi, Maning ...**) odbacuju teorijska rešenja i okreću se eksperimentima. Na žalost, većina eksperimenata u to doba (kraj 18. i 19. vek) je rađena "haotično", bez poštovanja osnovnih zakona kretanja fluida.

**Tek krajem 19. veka, Viliem Frud i njegov sin Robert, razvijaju pravila modelskog ispitivanja. Time počinje era spajanja eksperimentalne hidraulike i teorijske hidrodinamike. Lord Rejli je postavio prve principe dimenzionalne analize, dok je Osborn Rejnolds 1883. objavio svoje rezultate ispitivanja režima tečenja u cevi, u kojima je utvrdio značaj bezdimenzionalnih veličina.**

Istovremeno je došlo i do značajnog prodora na polju teorijske hidrodinamike. Navie, a kasnije i Stoks, su uspešno dodali viskozni član u jednačini kretanja fluida. Dobijena Navie-Stoksova jednačina je, međutim, **bila prekomplikovana za rešavanje sve dok Prantl, početkom 20. veka, nije uveo teoriju graničnog sloja. Prema toj teoriji, strujanje realnog fluida se može razdvojiti na tanak viskozni sloj uz samu granicu i na turbulentno jezgro, u kome se mogu primeniti jednačine strujanja idealnih fluida.**

U 20. veku je nastavljeno sa paralelnim razvojem eksperimentalnih metoda i teorijskih osnova. Značajni radovi su u oblasti turbulentnog vrtložnog kretanja (Karman i Tejlor), a počinje se i sa razvojem u oblasti računskog modelovanja strujnog polja. **Otvaraju se i potpuno nova polja primene Mehanike Fluida (aerodinamika, motori sa unutrašnjim sagorevanjem, nuklearni reaktori, složeni hemijski procesi, analiza atmosferskih pojava, strujanja u okeanima, transport zagađenja, ...), koja se rešavaju primenom matematičkih modela i eksperimentalnim istraživanjem pojedinih lokalnih fenomena. Mada je Mehanika fluida veoma stara nauka, i za 21. vek ostaje dosta interesantnih i, do sada, nerešavanih problema.**

### 1.3 Organizacija knjige

Način izučavanja Mehanike fluida može biti krajnje teorijski, ili praktičan, inženjerski. Ova knjiga je namenjena studentima Građevinskog fakulteta, tako da je veći deo knjige posvećen praktičnim problemima hidrostatičkog opterećenja na objekte, kretanja nestišljivog fluida (vode) kroz cevi i otvorene kanale i problemima otpora nastalih opstrujavanjem objekata nestišljivim fluidom (vazduh se smatra nestišljivim ako su brzine strujanja relativno male). Samo u jednoj glavi se daju teorijsko analitičke osnove hidrodinamike, **gde se paralelno obrađuju i diferencijalni i integralni pristup jednačinama**

održanja.

Organizacija knjige je sledeća: nakon ove prve, uvodne glave, sledi glava 2 *Fizička svojstva fluida*, u kojoj se razmatraju svojstva vezana za konačnu količinu fluida (za masu i zapreminu) ili za jednu tačku unutar fluida (pa svojstva ne zavise od ukupne količine materije). U drugoj glavi se prvo, uopšteno, razmatraju veličine, dimenzionalni sistem i jedinice mere, a zatim se daju definicije i objašnjenja za nekoliko osnovnih, najvažnijih svojstava fluida. Te definicije će se intenzivno koristiti tokom kursa Mehanike fluida: viskoznost, gustina, težina i specifična težina, elastične deformacije i stišljivost fluida, pritisak, površinski napon i kapilarnost.

Treća glava knjige se bavi *Hidrostatikom*, mirovanjem fluida konstantne gustine pod uticajem težine. Izvedena je osnovna jednačina hidrostatike u diferencijalnom obliku i integrisana je za usvojene pretpostavke. Za slučaj homogenog nestišljivog fluida uvodi se pojam pijeometarske kote tečnosti. Na osnovu poznatog rasporeda pritiska, integracijom se dobija opterećenje od fluida na konstrukciju, koje se, zbog lakšeg proračuna, deli na horizontalne i vertikalne sile. Na kraju glave se daju i osnovne jednačine za analizu stabilnosti tela, koje pluta na površini tečnosti, kao i obrasci za proračun oblika slobodne površine tečnosti, u slučaju kada se sud kreće.

Četvrta glava knjige, *Osnove dinamike fluida*, bavi se teorijskim izučavanjem kretanja (strujanja ili tečenja) fluida<sup>3</sup>. Izvedene su opšte jednačine održanja mase, količine kretanja i energije, koje važe i za gasove i za tečnosti, za elementarnu zapreminu u diferencijalnom obliku i za konačnu zapreminu **u integralnom obliku**. Za određene primere iz prakse, uvedena su uprošćenja, koja te jednačine svode na nivo običnih, rešivih jednačina. Uprošćenja obično podrazumevaju izučavanje nestišljivih idealnih tečnosti, pa se tako oblast *dinamike fluida svodi na hidrodinamiku*.

Peta glava knjige je *Dimenzionalna analiza, sličnost i modeli*. Ovde se pravi iskorak iz korišćenog sistema održanja i pisanja složenih jednačina koje opisuju neki fenomen, korišćenog u prethodnoj glavi, već se problemu koji se izučava prilazi sa strane dimenzija veličina koje učestvuju u tom fenomenu. U ovoj glavi se daju osnove dimenzionalne analize, oblasti koja nije isključivo vezana uz Mehaniku fluida, već se može primeniti u bilo kojoj oblasti tehnike. **Takođe**, u ovoj glavi, govori se i o problemima pravljenja fizičkih modela, o zadovoljenju sličnosti strujanja između objekta i modela, kao i o odnosima

<sup>3</sup>Na redovnim studijima Mehanike fluida na Građevinskom fakultetu Univerziteta Beograd, zbog relativno malog fonda časova se ova oblast ne izučava detaljno. Studentima se prezentuju samo osnovni pojmovi iz glave 4.1, dok se kompletna materija izučava na doktorskom kursu.

dominantnih uticaja. Preslikavanje rezultata merenja sa modela na prirodu je moguće, na kraju, zahvaljujući upravo modelskoj analizi.

U šestoj glavi knjige, *Hidrodinamički otpori*, obrađuju se otpori, koji se javljaju na granici fluida i čvrste konture, i koji su rezultat kretanja fluida ili kretanja konture (tela ili objekta) u nepokretnom fluidu. Analiziraju se prvo otpori trenja u cevima, pri laminarnom i turbulentnom tečenju, a zatim i otpori kretanja tela kroz fluid, pri čemu se ukupni otpori razdvajaju na dve grupe: na otpore usled trenja i otpore nastale promenom rasporeda brzina, pa time, i promenom pritisaka oko tela.

Dve poslednje glave knjige donose konkretnu primenu izvedenih jednačina. U sedmoj glavi *Tečenje fluida kroz cevi*, detaljnije se obrađuje slučaj ustaljenog kretanja tečnosti u cevima, u razvijenom turbulentnom režimu. Integralnim posmatranjem strujanja samo u kontrolnim presecima, uz uslov o ustaljenosti, dobijaju se jednačina kontinuiteta, energetska i dinamička jednačina. Za razumevanje materije iz ove glave nije neophodno poznavanje kompletne materije izložene u četvrtoj glavi, mada je uputno pročitati barem uvodni deo 4.1, u kome se objašnjavaju osnovni pojmovi.

Poslednja, osma glava knjige, *Tečenje u otvorenim tokovima*, posvećena je ustaljenom tečenju nestišljivog fluida u kanalima. Pored osnovnih jednačina održanja (jednačina kontinuiteta, dinamička i energetska jednačina) napisanih za slučaj ustaljenog tečenja, i koje moraju biti uvek zadovoljene, uvode se novi pojmovi (kritična dubina, specifična energija, normalna dubina, hidraulički skok i spregnuta dubina), kao i režimi tečenja (mirno i burno tečenje). Za slučaj nejednolikog tečenja daje se analiza nizvodnih i uzvodnih graničnih uslova, uz objašnjenje kako ti uslovi utiču na dubinu i brzinu u određenom preseku, kao i način rešavanja linije nivoa.

Kurs Mehanike fluida na Građevinskom fakultetu se godinama slušao sa 45 sati predavanja i vežbanja. Promenama nastavnog plana (tokom 2006/2007 godine), fond sati je smanjen na 30+30 pa je iz predavanja izostavljena oblast dinamike fluida (glava 4) i znatno je smanjena materija koja se predaje u oblasti tečenja u otvorenim tokovima (samo se u okviru jednog dvočasa predaju osnovni pojmovi i jednoliko tečenje). Takođe, kurs Mehanike fluida ne obuhvata ni strujanja kroz poroznu sredinu (podzemne vode), kao ni ostala potencijalna strujanja, zatim, ne bavi se modelima turbulencije i problemima računске Mehanike fluida (CFD), problemima prostiranja zagađenja, višefaznim strujanjem i slično. Neke od ovih interesantnih oblasti će studenti upoznati na narednim godinama studija, na smeru za *Hidrotehniku i vodno ekološko inženjerstvo*, a neke tek na doktorskim studijima.



## Glava 2

# Fizička svojstva fluida

Sva fizička svojstva fluida se mogu vezati ili za *konačnu količinu* fluida, ili za *jednu tačku* unutar fluida. Najpoznatija svojstva konačne količine fluida su *masa* i *zapremina*. Vrednosti tih svojstava se mogu odrediti samo za određenu količinu materije. Na primer, može se izmeriti masa vode u čaši; dodavanjem vode u čašu, masa će se povećati.

Svojstva fluida koja su vezana za jednu tačku ne zavise od ukupne količine materije. *Temperatura vode* u čaši iz prethodnog primera, koja se meri u jednoj tački, se neće promeniti ako se odlije jedna količina fluida. Ako se dolije voda, temperatura će se, možda, i promeniti, ali ne kao rezultat povećanja mase fluida, već kao rezultat procesa difuzije i konvekcije.

Do svojstva fluida u tački se često dolazi *normalizacijom svojstava* konačne mase. Na primer, gustina fluida  $\rho$  se može definisati u jednoj tački kao odnos mase i zapremine:  $\rho = M/V$  (poglavlje 2.3).

U većini slučajeva, posebno u oblasti hidrodinamike, gde se proučava kretanje fluida, jednostavnije je raditi sa veličinama koje su vezane za jednu tačku, nego za određenu količinu fluida. *Poznavanje vrednosti svojstava fluida (pritiska, gustine, temperature, itd.), u svakoj tački i u svakom trenutku vremena, je jedan od osnovnih zadataka Mehanike fluida.* Pri tome, najčešće se pretpostavlja da je fluid homogen (ima ista svojstva u svim tačkama fluida) i izotropan (ima ista svojstva u svim pravcima u jednoj, posmatranoj tački).

U nastavku se daju definicije i objašnjenja za nekoliko osnovnih, najvažnijih, svojstava fluida, koja će se intenzivno koristiti tokom kursa Mehanike fluida.

## 2.1 Veličine, dimenzionalni sistem i jedinice mere

Pojam *veličine* je direktno povezan sa pojmom *merenja*: *veličina je sve ono što se može izmeriti*. Na primer, ako je širina stola 0,8 m, veličina koja se meri je *širina* (ili dužina), vrednost te veličine je 0,8, a jedinica mere koja je korišćena u merenju je *metar*. Veličine<sup>1</sup> su i vreme, sila, ubrzanje itd.

Određene veličine su međusobno zavisne. Ubrzanje je promena brzine u jedinici vremena, dok se dužina može izraziti kao brzina pomnožena sa vremenom. Na primer, širina stola iz prethodnog primera se može izmeriti i kao vreme potrebno mravu da pređe preko stola krećući se određenom (standardnom?) brzinom<sup>2</sup>.

Do vrednosti veličine se dolazi *merenjem, upoređivanjem nepoznate veličine sa nekom drugom, istorodnom veličinom, koja je uzeta kao osnovna jedinica mere*. Izbor osnovnih jedinica mere je slobodan. Na primer, širina stola je 0,8 ako se koristi metar kao jedinica mere, 31,5 širina palca (inči) ili 3,3 visine knjige B5 formata.

Jasno je da slobodan izbor jedinica mere dovodi do prilične konfuzije (“moj palac je malo širi od tvog”). Da bi se uveo red u merni sistem, 1960. godine, na 11-toj generalnoj konferenciji o merama i jedinicama, *dogovoren je jedinstveni međunarodni sistem jedinica SI* (La Systéme International d’Unités). SI sistem definiše sedam međusobno nezavisnih veličina kao *osnovne veličine*. Sve ostale veličine su *izvedene veličine* i mogu se dobiti kombinacijom osnovnih veličina. U tabeli 2.1 su date osnovne veličine sa njihovim dogovorenim imenima i simbolima.

Za svaku osnovnu veličinu, SI sistem propisuje jedinicu mere i simbol. Takođe, za osnovne jedinice se definiše i primarni etalon<sup>3</sup>. Definicije etalona

<sup>1</sup>Svaka veličina može da se izmeri i njena vrednost iskaže u dimenzionalnom sistemu. Ako nešto ne može da se izmeri, to nije veličina. Na primer, lukavost nije veličina jer ne postoji uređaj kojom bi se lukavost izmerila pa ni dimenzionalni sistem da se ona iskaže. Naravno, niko ne garantuje da se neće u skoroj budućnosti izmisliti aparat koji meri lukavost nekog čoveka i to iskazuje u nekoj skali vrednosti. Znači, da li je nešto veličina ili ne, zavisi od stepena razvoja ljudskog društva i njegovih potreba da se to formalizuje.

<sup>2</sup>Za veće dužine se može upotrebiti zec, a za manje puž. Mada, jasno je da ovakva definicija dužine nije baš najprikladnija za svakodnevnu upotrebu. Faraoni u starom Egiptu su bili nešto domišljatiji, pa su svoju beskrajnu vlast pokazivali i time što se standard za dužinu određivao rastojanjem od lakta do vrha njihovog kažiprsta. Naravno, sa promenom faraona, menjao se i etalon dužine!

<sup>3</sup>Definicije za osnovne tri veličine SI sistema koje se koriste u Mehanici (u zagradi je data godina donošenja pojedine definicije):

**Metar** (1889.) Metar je jednak dužini između glavnih crtica Međunarodnog prototipa metra napravljenog od platine i iridijuma, koji se nalazi na temperaturi topljenja leda. Čuva se u muzeju u mestu Sevr, pored Pariza.

2.1. VELIČINE, DIMENZIONALNI SISTEM I JEDINICE MERE 11

Veličina	Jedinica	Simbol jedinice
Dužina	metar	m
Masa	kilogram	kg
Vreme	sekund	s
Temperatura	kelvin	K
Jačina struje	amper	A
Svetlosna jačina	kandela	cd
Količina supstance	mol	mol

Tabela 2.1: Osnovne veličine SI sistema

jedinica mera se povremeno menjaju, u skladu sa razvojem nauke. Time se smanjuje merna neizvesnost i povećava praktična upotreba jedinice mere.

Prve tri osnovne veličine iz tabele 2.1 čine *dimenzionalni sistem* koji odgovara **Mehanici**. *Dužina* definiše prostor i geometriju tela, čije se kretanje proučava, *masa* opisuje inercijalnost materijalnog tela koje se protivi promenama u svom kretanju i *vreme* ili vremenski interval u kome nastaje promena u kretanju materijalnog tela. Ovakav dimenzionalni sistem se naziva još i *apsolutni sistem*. Ako se proučavaju i termodinamički procesi, potrebno je dimenzionalni sistem proširiti sa četvrtom veličinom, *temperaturom*.

U usvojenom dimenzionalnom sistemu, bilo koja izvedena veličina  $Y$  u oblasti Mehanike se može napisati kao:

$$[Y] = [L^a M^b T^c] \tag{2.1}$$

gde su  $L$ ,  $M$  i  $T$  oznake za dužinu, masu i vreme. U izrazu se koriste uglaste zagrade kao oznaka za *dimenzionalni izraz* jer su uspostavljene relacije samo između veličina, a ne i između vrednosti tih veličina.

---

(1960.) Metar je dužina jednaka 1 650 763,73 talasnih dužina, u vakuumu, zračenja koje odgovara prelazu između nivoa  $2p_{10}$  i  $5d_5$  atoma izotopa kriptona Kr 86.  
 (1983.) Metar je dužina putanje koju u vakuumu pređe svetlost za vreme od  $1/299\,792\,458$  sekunde.

**Kilogram** (1889.) Kilogram je masa međunarodnog etalona kilograma (interesantno je da ovaj standard važi već 120 godina bez promena).

**Sekunda** (1956.) Sekunda je  $1/31\,556\,925,9747$  deo tropske godine za 0. januar 1900. godine u 12 časova efemerida.  
 (1967.) Sekunda je trajanje od  $9\,192\,631\,770$  perioda zračenja koje odgovara prelazu između dva hiperfina nivoa osnovnog stanja atoma cezijuma 133.

Kada je definisan sistem jedinica kojima se meri određena veličina, iz **dimenzionalnog izraza (2.1)** se dobija *vrednost veličine  $Y$*  kao:

$$Y = N_Y m^a kg^b s^c \quad (2.2)$$

pri čemu je poštovan SI sistem mera. U izrazu (2.2),  $N_Y$  je **merni broj**, vrednost veličine  $Y$  u **usvojenom sistemu jedinica**.

Kroz veći deo ove knjige će se poštovati SI sistem mera. Međutim, budući da je taj sistem propisan uz uvažavanje svih naučnih oblasti, u oblasti Mehanike, posebno statike, unosi jednu veliku nelogičnost. Sila je prema SI sistemu izvedena veličina, dimenzionalno jednaka  $[L^1 M^1 T^{-2}]$ . Prema takvoj definiciji, sila zavisi od vremena iako se razmatraju problemi u oblasti statike, gde je vreme konstantno, isključeno iz razmatranja. Bilo bi prirodnije da sila bude osnovna veličina, a masa izvedena (nekada je bio u upotrebi **takav tehnički dimenzionalni sistem**). Tada bi se u oblasti statike koristile dve osnovne veličine - dužina i sila, a u oblasti kinematike tri - dužina, sila i vreme.

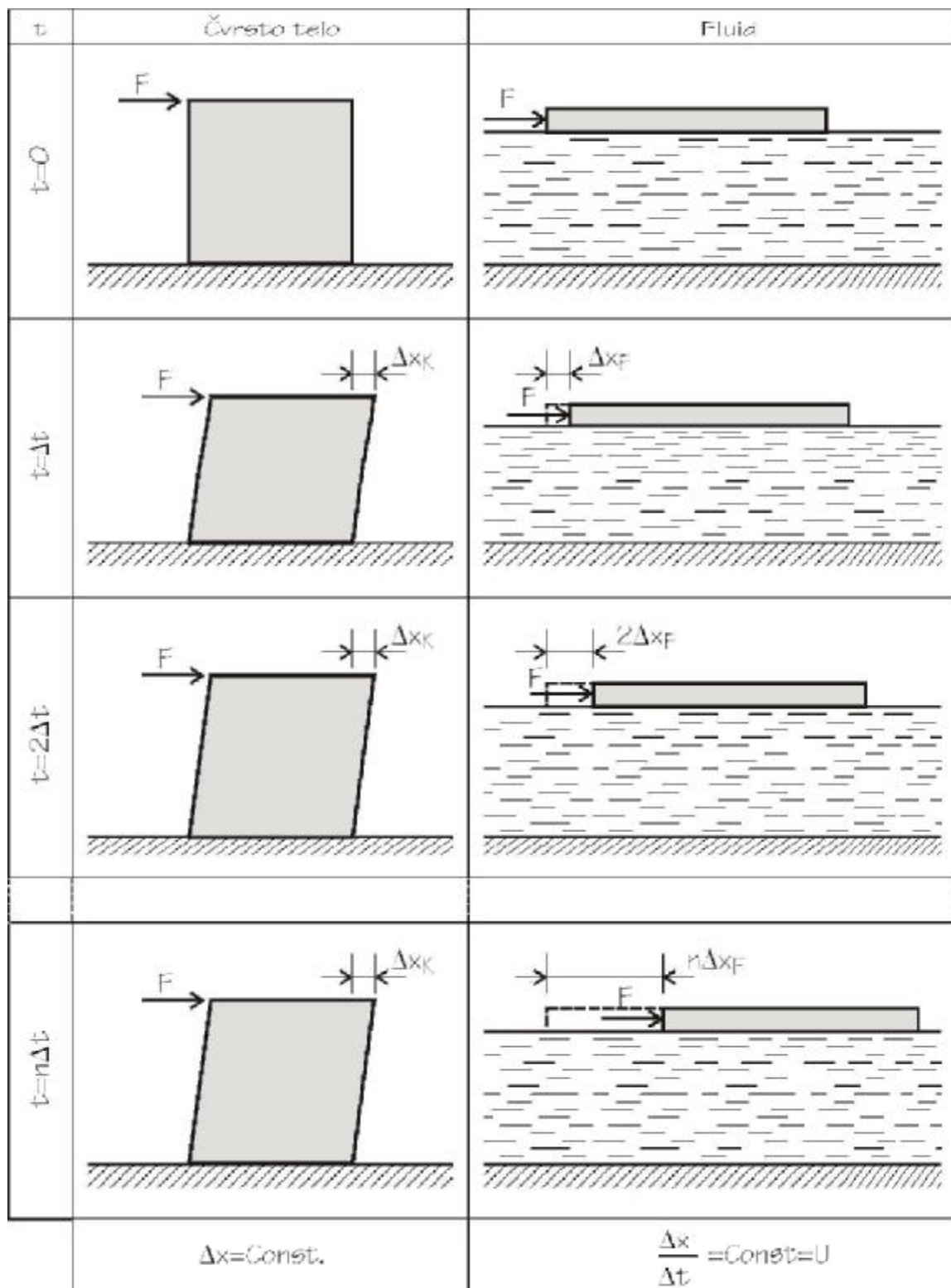
Iako je SI sistem propisan i mora se koristiti, uobičajena je praksa da se u fazi analize fizičke zavisnosti pojedinih veličina, koje opisuju neki fenomen, koristi slobodan izbor osnovnih veličina. Na primer, ako se izučava moment  $M$  na kraju grede u funkciji od dužine  $L$  i kontinualnog opterećenja  $q$ , logično je dužinu i kontinualno opterećenje uzeti kao osnovne veličine a konkretne  $L$  i  $q$  kao jedinice mere. Uz uslov o *dimenzionalnoj homogenosti* direktno se dobija da je  $[M] = [L^2 q^1]$ , odnosno, da je vrednost momenta  $M = N_M L^2 q$ . Oblast koja se bavi ovakvim analizama se zove *dimenzionalna analiza* i veoma često se koristi u Mehanici fluida (izučavaće se detaljnije u glavi 5 ove knjige).

## 2.2 Viskoznost

Po definiciji fluid je supstanca koja se neprekidno deformiše **kada na nju deluje smičući napon**, ma koliko mali taj napon bio. Na slici 2.1 je, u **formi promene kroz vreme, prikazan rezultat veoma prostog eksperimenta**, delovanja konstantne bočne, tangencijalne sile  $F$ , na čvrsto telo i na fluid. Čvrsto, idealno elastično telo je prikazano u formi kocke, koja je svojim bazisom pričvršćena za nepokretnu podlogu, a fluid je u sloju debljine  $h$  između donje, nepokretne ploče i gornje, na koju deluje sila  $F$ .

U početnom trenutku  $t_0 = 0$ , čvrsto telo i fluid su u stanju mirovanja, **sila  $F$**  nije još počela da deluje. U trenutku  $t_1 = \Delta t$ , **sila  $F$**  počinje da "gura" gornju ivicu kocke i gornju ploču. Gornja ivica kocke se istog trenutka **pomeri, deformiše**, za  $\Delta x_K$  a gornja ploča, odnosno gornji sloj fluida za  $\Delta x_F$ .



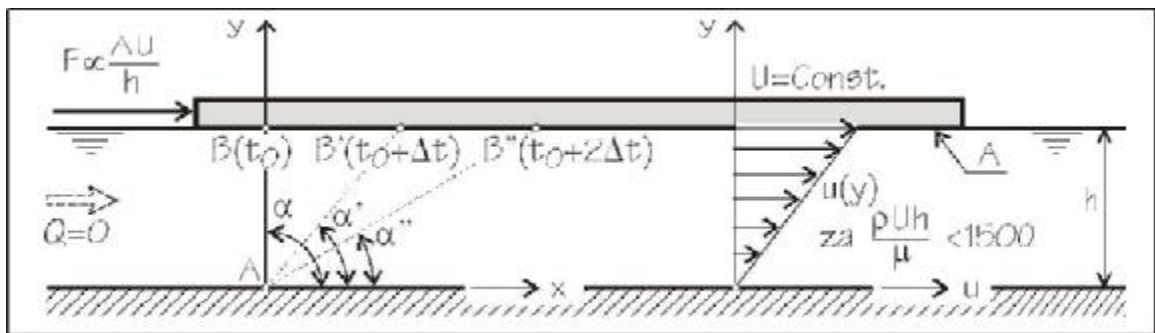


Slika 2.1: Razlika u vremenskom deformisanju čvrstog tela i fluida kada se na njih deluje bočnom - tangencijalnom silom

U sledećem trenutku  $t = 2\Delta t$ , ukupna deformacija kocke je još uvek  $\Delta x_K$  dok se gornja ploča kod fluida pomerila za dodatno  $\Delta x_F$  pa je sada ukupna deformacija  $2\Delta x_F$ .

Nakon  $n\Delta t$  vremena, ako je čvrsto telo bilo idealno elastično, deformacija kocke ostaje i dalje  $\Delta x_K$ , dok je ukupna deformacija kod fluida  $n\Delta x_F$ . Na osnovu rezultata eksperimenta, može se zaključiti da su sledeće dve veličine konstantne:

- *deformacija kocke*  $\Delta x_K$ , koja je, očigledno, karakteristična veličina kod čvrstih tela, i
- *brzina deformacije fluida* izražena kao odnos deformacije i vremenskog priraštaja  $\frac{\Delta x_F}{\Delta t} = \frac{2\Delta x_F}{2\Delta t} = \dots = \frac{n\Delta x_F}{n\Delta t} = \frac{\Delta x_F}{\Delta t} = U = \text{Const.}$  Veličina *brzina deformacije* je karakteristična veličina za fluide.



Slika 2.2: Raspored brzina u fluidu, gornja ploča je pokretna sa konstantnom brzinom  $U$  a donja nepokretna

Veličina brzine deformacije je jedno od fizičkih svojstava svih fluida. Na slici 2.2 je prikazan detaljnije mehanizam deformacije fluida koji se nalazi između dve ravne ploče, pri čemu je samo jedna ploča pokretna (na primer, kod osovina u ležaju gde je fluid sredstvo za podmazivanje). Između ploča fluid miruje, nema sopstvenog protoka fluida, pa su brzine u fluidu samo rezultat pomeranja gornje ploče.

Kada se gornja ploča gura nekom silom  $F$ , tačka  $B(t_0)$  će se pomeriti na mesto  $B'(t_0 + \Delta t)$ , pa na  $B''(t_0 + 2\Delta t)$  itd., a prav ugao  $\alpha$ , koji je zaklapala duž  $\overline{AB}$  sa osom  $x$ , deformiše se u ugao manji od  $90^\circ$  i postaje  $\alpha', \alpha'', \dots$ . Ako se brzina pomeranja gornje ploče označi sa  $U$ , eksperimenti su pokazali da je ta brzina direktno proporcionalna sili  $F$  i rastojanju između ploča  $h$ , a obrnuto proporcionalna površini ploča  $A$ , odnosno, ako se sila  $F$  stavi sa

## 2.2. VISKOZNOST

leve strane izraza, dobija se:

$$F \propto \frac{AU}{h} \tag{2.3}$$

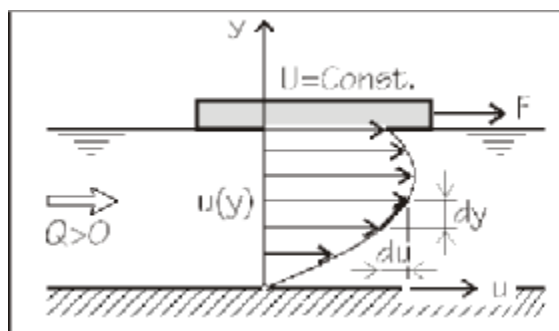
Za koeficijent proporcionalnosti standardno se koristi oznaka  $\mu$  i zove se *dinamički koeficijent viskoznosti*:

$$F = \mu \frac{AU}{h} \tag{2.4}$$

Prosečan smičući napon<sup>4</sup>  $\sigma_{yx} = \tau$  se definiše kao odnos sile i površine na koju ta sila deluje:

$$\sigma_{yx} = \tau = \frac{F}{A} = \frac{\mu \frac{AU}{h}}{A} = \mu \frac{U}{h} \tag{2.5}$$

Veličina  $U/h$  je ugaona brzina duži  $\overline{AB}$  (slika 2.2, levi deo), ili brzina ugaone deformacije. Ako se pretpostavi da su brzine deformacija male<sup>5</sup>, u slučaju kada je donja ploča nepokretna raspored brzina po visini  $h$  će biti linearan (desni deo slike 2.2), pa je brzina  $u(y) = y \times$  ugaona brzina duži  $\overline{AB}$ . Prosečni tangencijalni napon  $\tau$  je tada isti kao i napon na bilo kom odstojanju  $y$  od donje ploče, odnosno,  $\tau = \tau(y)$ .



Slika 2.3: Raspored brzina kada se i fluid i gornja ploča kreću u istom smeru

Za raspored brzina između dve ploče različit od pravolinijskog, kao na primer onaj prikazan na slici 2.3, gde se superponiraju brzine fluida usled

<sup>4</sup>Pozitivan smer smičućeg napona  $\sigma_{yx}$  je onaj koji smanjuje ugao elementarnog delića u prvom kvadrantu, odnosno ovde,  $\sigma_{21}$  je pozitivno ako ima smer  $x$  ose. To je pozitivna orijentacija koja se koristi u mehanici čvrstih tela, gde je pozitivan smer normalnih napona onaj koji zateže presek. Kako fluidi ne trpe zatezanje, kasnije u knjizi (poglavljje 4.5.1 *Integralna i diferencijalna jednačina održanja količine kretanja*, slika 4.19) će se okrenuti konvencija o pozitivnom smeru, pa će i definicija tangencijalnog napona da se promeni: umesto  $\tau = \mu du/dy$  napon će postati  $\tau = -\mu du/dy$ . Pogledati i poglavljje 4.5.4 *Navie-Stoksove jednačine*.

<sup>5</sup>Pod malim brzinama deformacije, podrazumevaju se takve brzine pri kojima je odnos  $\frac{\rho U h}{\mu} < 1500$ , odnosno, kada se u fluidu uspostavi laminaran (slojevit) tok. Takav dvodimenzionalni paralelan tok konstantnog gradijenta brzine, gde jedna ploča miruje, a druga se kreće, zove se još i Kuet-ov (Couette) tok.

protoka<sup>6</sup>  $Q$  i usled pomeranja gornje ploče<sup>7</sup>, tangencijalni napon na udaljenju  $y$  od donje ploče će i dalje biti proporcionalan ugaonoj brzini ali sada ne prosečnoj već onoj na mestu  $y$ , definisanoj kao izvod  $\frac{du}{dy}$ . Sada se može napisati izraz:

$$\tau(y) = \mu \frac{du}{dy} \quad (2.6)$$

Obrazac (2.6) je poznat kao *Njutnov<sup>8</sup> zakon viskoznosti*. Zakon kaže da postoji proporcionalnost između napona smicanja i ugaone brzine, odnosno brzine deformacije. Svi fluidi koji podležu tom zakonu se zovu *Njutnovski fluidi*. Na primer, Njutnovski fluidi su voda, alkohol, med, ulje, ...

Jedinica mera za dinamički koeficijent viskoznosti  $\mu$  nema određeno ime:

$$[\mu] = \frac{[\tau]}{\left[\frac{u}{h}\right]} = \left[\frac{M L^{-1} T^{-2}}{\frac{L T^{-1}}{L}}\right] = [M L^{-1} T^{-1}] \frac{\text{kg}}{\text{m s}} \quad (2.7)$$

već se često koristi jedinica [Pa s]. U starom CGS (centimetar-gram-sekund) sistemu koristila se jedinica Poaz (Poise):  $1\text{P} = 1 \frac{\text{gr}}{\text{cm s}}$  odnosno 100 puta manja jedinica *centipoaz*:  $1\text{cP} = \frac{1}{100} \text{P}$  pa se može uspostaviti veza CGS i SI sistema:  $1 \frac{\text{kg}}{\text{m s}} = 10 \text{P}$ .

U praksi se često koristi i *kinematički koeficijent viskoznosti* (ili kinematski koeficijent)  $\nu$  koji je jednak:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{gde je } [\nu] = [L^2 T^{-1}] \quad (2.8)$$

Na slici 2.4 je prikazan dijagram zavisnosti tangencijalnog napona od brzine deformacije (takav dijagram se često zove i *reološki dijagram*). Kao i prema definiciji, Njutnovski fluid je predstavljen pravom linijom koja polazi iz koordinatnog početka i čiji nagib je jednak koeficijentu viskoznosti<sup>9</sup>.

<sup>6</sup>Laminaran, dvo-dimenzionalan, paralelan tok između dve ploče koje miruju, sa parabolčnim rasporedom brzina u fluidu, se zove još i Poaz-ov (Poiseuille) tok.

<sup>7</sup>Ovde se radi o superpoziciji Poaz-ovog i Kuet-ovog toka.

<sup>8</sup>Isaac Newton (1642 - 1727) engleski matematičar, fizičar i astronom, studirao na Kembridžu. Jedan od najvećih naučnika koji je se smatra utemeljivačem modernih prirodnih nauka. Tri najpoznatija otkrića su: spektralna analiza svetlosti, univerzalni zakon gravitacije i diferencijalni i integralni račun.

<sup>9</sup>U nastavku teksta se pod koeficijentom viskoznosti podrazumeva koeficijent dinamičke viskoznosti.

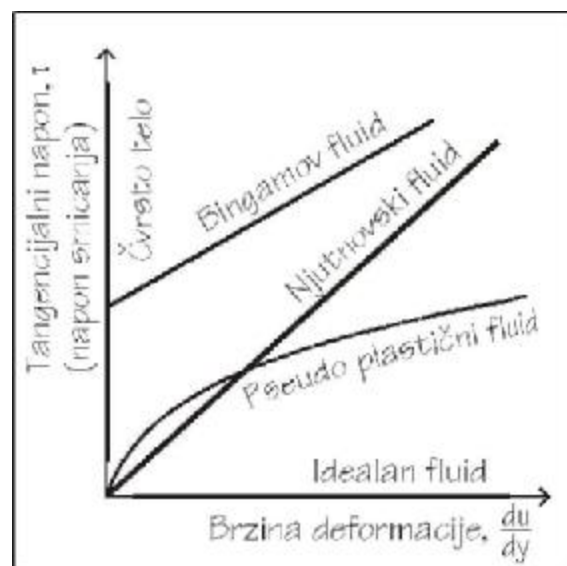
## 2.2. VISKOZNOST

Na dijagramu se vidi da postoje i fluidi koji ne slede Njutnov zakon viskoznosti. Na primer, gusta smeša vode i pepela, koja se koristi za hidraulički transport pepela od termoelektrane do mesta gde se odlaze pepeo, neće početi da teče sve dok sila koja gura smešu (komponenta sile gravitacije u pravcu toka) ne pređe određenu kritičnu vrednost, a nakon toga će se ponašati kao i svaki drugi Njutnovski fluid. Takvi fluidi se nazivaju *idealno plastični fluidi*, ili *Bingamovi fluidi*.

Postoje i *pseudo plastični fluidi* sa **nelinearnom vezom brzine deformacije i tangencijalnog napona**. Na reološkom dijagramu se pravom linijom, duž **ordinatne ose, mogu prikazati i čvrsta tela: brzina deformacija je nula za sve tangencijalne napone manje od napona loma tela.**

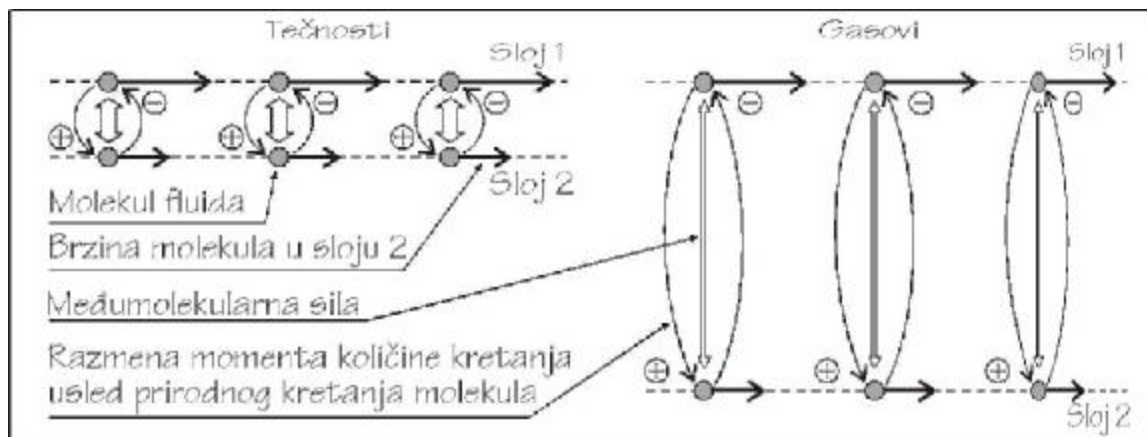
Poseban slučaj predstavljaju *idealni fluidi*, na reološkom dijagramu predstavljeni pravom linijom duž apscisne ose. Kod idealnog fluida koeficijent viskoznosti je nula. Za beskonačno mali tangencijalni napon, brzina deformacija je beskonačno velika, odnosno, *idealni fluid nema unutrašnjeg trenja*. Idealni fluid se često koristi u toku izvođenja i objašnjenja osnovnih jednačina Mehanike fluida. Činjenica da nema trenja olakšava pisanje jednačina, jer se zanemaruju svi članovi u kojima figuriše gubitak energije. Kada se izraz napiše za idealni fluid, uvođenjem raznih koeficijenata (koeficijenta protoka, koeficijenta brzine, ...), dobijeni rezultati se prebacuju na slučaj tečenja realnog fluida. Za razliku od idealnog fluida, kod realnog, Njutnovskog fluida, koeficijent viskoznosti je veći od nule pa postoji unutrašnje trenje. To trenje je odgovorno za *gubitak energije*<sup>10</sup> koji postoji kad god se fluid kreće.

Unutrašnje trenje, odnosno viskoznost, je *posledica postojanja dva mehanizma na nivou molekula*. Prvi je *posledica privlačnih međumolekularnih sila*. Te sile deluju "kočeci": što su molekuli međusobno bliži, veće su sile između njih pa je veća i viskoznost. Na slici 2.5 su prikazani molekuli u dva sloja, koji se pod dejstvom neke spoljne sile (na slici nije prikazana) kreću različitim brzinama. Molekuli iz sloja 1, koji se kreću brže od molekula iz sloja 2, bivaju usporeni usled delovanja međumolekularne sile (na



Slika 2.4: Reološki dijagrami za različite fluide

<sup>10</sup>Naravno da se energija ne može izgubiti. Pod gubitkom energije misli se na transformaciju korisne kinetičke energije u, za nas, beskorisnu mehaničku i toplotnu energiju.



Slika 2.5: Viskoznost je rezultat “kočenja” molekula usled međumolekularne sile kao i usled razmene količine kretanja između molekula koji se slobodno kreću

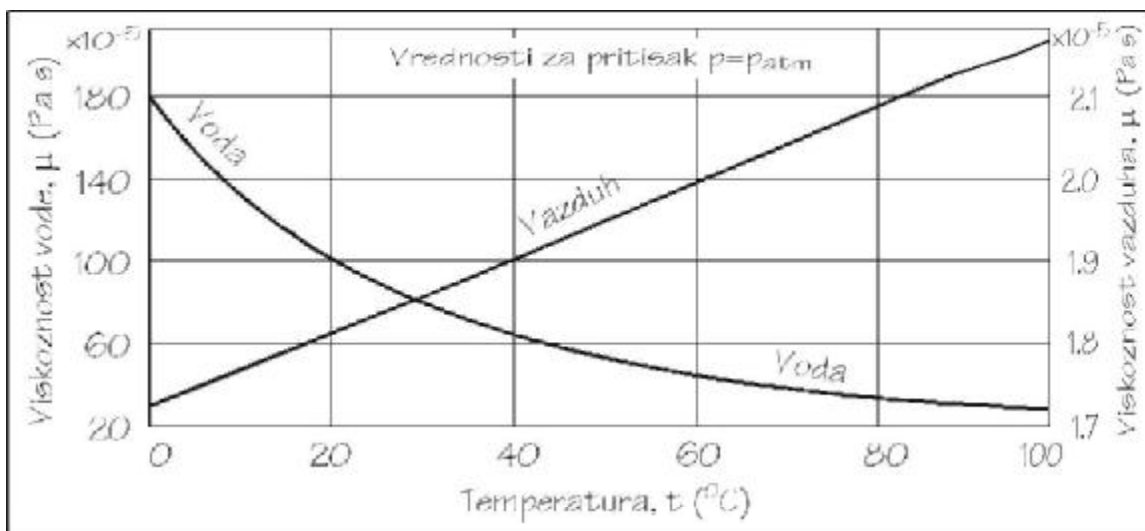
slici prikazana širokom belom strelicom) dok se molekuli iz sloja 2 ubrzavaju. Kod tečnosti (levi deo slike) su te sile jake, pa je i njihov efekat na viskoznost značajan. Kod gasova (desni deo slike) je razmak između molekula toliko veliki<sup>11</sup> da su međumolekularne sile zanemarljivo male, pa ovaj mehanizam skoro uopšte ne utiče na viskoznost.

Drugi mehanizam je rezultat stalnog slobodnog, haotičnog kretanja molekula unutar fluida (na slici 2.5 prikazanog u formi strelica između dva sloja). Oni molekuli koji u tom haotičnom kretanju dođu iz sloja 1 u sloj 2, sa sobom ponesu i svoju veću brzinu, odnosno veću količinu kretanja. U sudaru sa molekulima iz sloja 2 dolazi do razmene količina kretanja, odnosno do ubrzavanja sporijih molekula. Isti proces se događa i u suprotnom smeru: sporiji molekuli iz sloja 2 kada se u svom haotičnom kretanju zadese u sloju 1, usporavaju brže molekule. Proces razmene količine energije se događa i kod tečnosti i kod gasova, i njegov intenzitet *ne zavisi od pritiska već zavisi samo od pokretljivosti molekula, odnosno od temperature fluida: sa porastom temperature raste i pokretljivost pa i viskoznost.*

Uticaj temperature na viskoznost proističe iz sadejstva opisana dva mehanizma. Kod gasova pri normalnom pritisku delovanje međumolekularnih sila je zanemarljivo, pa viskoznost zavisi samo od stepena pokretljivosti molekula. Sa povećanjem temperature gasa, viskoznost skoro linearno raste, što se i vidi na slici 2.6, gde je dat primer za vazduh pri atmosferskom pritisku.

Kod tečnosti je uticaj međumolekularnih sila dominantan, pa sa povećanjem temperature i povećanjem pokretljivosti molekula, te sile opadaju.

<sup>11</sup>Pretpostavka o velikom razmaku između molekula gasa važi samo za gasove pod normalnim pritiskom. Ako se gas izloži visokim pritiscima, počinje da se ponaša kao tečnost.



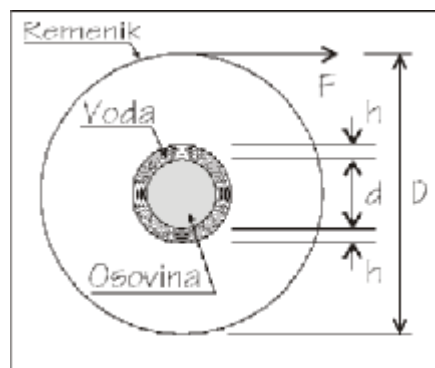
Slika 2.6: Promena viskoznosti vode i vazduha pri različitim temperaturama

Rezultujuća viskoznost sa porastom temperature tečnosti opada, ali stepen opadanja nije konstantan već se postepeno smanjuje (slika 2.6, zavisnost viskoznosti vode od temperature), jer na višim temperaturama mehanizam razmene količine kretanja između molekula ima sve veći uticaj na ukupnu viskoznost.

Viskoznost, kao što je već rečeno, ne zavisi od pritiska. Standardna vrednost viskoznosti za vodu je  $\mu_{\text{vode}} = 1,0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m s}}$ , a za vazduh pri temperaturi od 20<sup>0</sup> C je  $\mu_{\text{vazduha}} = 1,81 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m s}}$ . U prilogu knjige se daju tablice sa različitim vrednostima viskoznosti u funkciji temperature, za neke od najčešće korišćenih fluida.

**Primer 2.2.1**

Osovina vodene pumpe se podmazuje vodom koja prolazi kroz samu pumpu. Prečnik osovine je  $d = 12 \text{ mm}$ , debljina vodenog sloja je  $h = 0,5 \text{ mm}$  a dužina na kojoj se podmazuje osovina je  $L = 1 \text{ cm}$ . Broj obrtaja osovine pumpe je 1500 o/min. Ako se pumpa pogoni preko remenika prečnika  $D = 10 \text{ cm}$ , kolika je potrebna sila u remenici za savladavanje samo otpora trenja zimi, na temperaturi  $t_0 = 0^0 \text{ C}$  a kolika kada se voda zagreje usled rada motora na  $t_{80} = 80^0 \text{ C}$ ?



Obim osovine je  $O_{os} = d \times \pi = 0,012 \times 3,1415 = 0,0377 \text{ m}$  pa je tangencijalna brzina  $U = 0,0377 \times 1500/60 = 0,942 \text{ m/s}$ . Prosečni tangencijalni napon u fluidu

je  $\tau = \mu \frac{U}{h}$ , pri čemu je neophodno proveriti pretpostavku o laminarnom toku:

$$\frac{\rho U h}{\mu} = \frac{971,8 \times 0,942 \times 0,5 \cdot 10^{-3}}{0,351 \cdot 10^{-3}} = 1304 < 1500$$

gde su gustina  $\rho$  i koeficijent viskoznosti vode  $\mu$  uzeti iz tablice B.1 za  $T = 80^\circ \text{C}$  (jer je to nepovoljniji slučaj).

Tangencijalni napon za temperature  $T = 0^\circ \text{C}$  i  $T = 80^\circ \text{C}$  je:

$$\tau_0 = 1,753 \cdot 10^{-3} \frac{0,942}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 3,3027 \text{ Pa}$$

$$\tau_{80} = 0,351 \cdot 10^{-3} \frac{0,942}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 0,66128 \text{ Pa}$$

Sila kojom treba okretati osovinu je  $\tau \times A$  gde je površina  $A$  obim pomnožen sa dužinom,  $A = O_{os} \times L = 0,0377 \times 0,01 = 0,377 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  a sila na remenici je za odnos krakova sile  $D/d$  manja. Konačno, sila na remenici koja je samo posledica trenja usled viskoznosti vode je za  $0^\circ \text{C}$ :

$$F_0 = \tau_0 \times A \frac{d}{D} = 3,3027 \times 0,377 \cdot 10^{-3} \frac{1,2}{10} = 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ N} = 0,15 \text{ mN}$$

odnosno za  $80^\circ \text{C}$  sila je

$$F_{80} = \tau_{80} \times A \frac{d}{D} = 0,66128 \times 0,377 \cdot 10^{-3} \frac{1,2}{10} = 0,03 \cdot 10^{-3} \text{ N} = 0,03 \text{ mN}$$

## 2.3 Gustina (specifična masa) fluida

U uvodnom objašnjenju ove glave je već napomenuto da su masa i zapremina fizička svojstva koja se vezuju uz konačnu količinu jasno razgraničenog tela (slika 2.7). *Srednja gustina* tog tela je:

$$\bar{\rho} = \frac{M}{V} \tag{2.9}$$

i ako se pretpostavi da je *telo homogeno*, *srednja gustina je svojstvo materije u bilo kojoj tački tela*.

*Za nehomogena tela*, sa gustinom u prostoru koja nije konstantna, umesto srednje gustine, *treba poznavati raspodelu gustine po prostoru*  $\rho(x, y, z)$ . U izrazu za gustinu je potrebno smanjiti posmatranu zapreminu do nivoa elementarne zapremine  $dV$  koja će imati masu  $dM$ , pa je  $\rho(x, y, z) = dM/dV$ .



## 2.4. TEŽINA I SPECIFIČNA TEŽINA

Kao i kod čvrstih tela i kod fluida se može uočiti ogovarajuća elementarna zapremina  $dV$  mase  $dM$  i izračunati gustina  $\rho$ . Za  $\rho = \text{Const.}$ , konstantnu gustinu fluida, kaže se da je *fluid homogen*. U većini zadataka, u okviru ovog kursa Mehanike fluida, će se raditi sa homogenim fluidima.

Na slici 2.8 je prikazan slučaj kada se dva homogena fluida, tečnosti, nalaze u istom sudu. U svim zadacima koji će se raditi, pretpostavlja se da ne dolazi do mešanja tih fluida i da se formira jasna horizontalna granica<sup>12</sup>. Fluid manje gustine,  $\rho_1$ , će uvek zauzimati gornji deo suda, dok će fluid veće gustine,  $\rho_2$ , zauzimati donji deo suda.

Gustina fluida se menja sa promenom temperature, ali u znatno manjoj meri nego što se menja viskoznost. U prilogu knjige su date vrednosti gustina za vodu, za različite vrednosti temperature (tabela B.1). Međutim, u većini zadataka će vrednost gustine vode biti:

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3 = 1 \text{ kg/dm}^3.$$

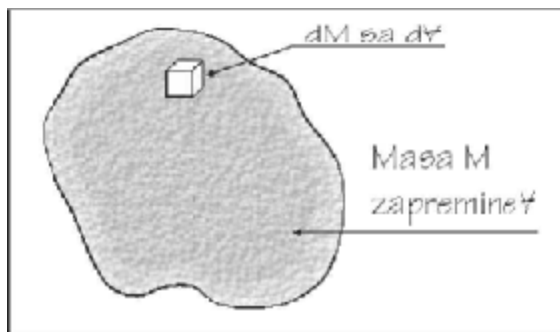
Gustina suvog vazduha temperature  $20^\circ\text{C}$  i pri pritisku 1013 mBar-a je  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ , što je 833 puta manje od gustine vode. U zadacima iz hidrostatičke, *gustina vazduha će se zanemarivati*, jer se radi sa malim visinskim razlikama. Sile, usled delovanja težine tečnosti, su dominantne, pa se *za gustinu vazduha uzima da je nula*.

### 2.4 Težina i specifična težina

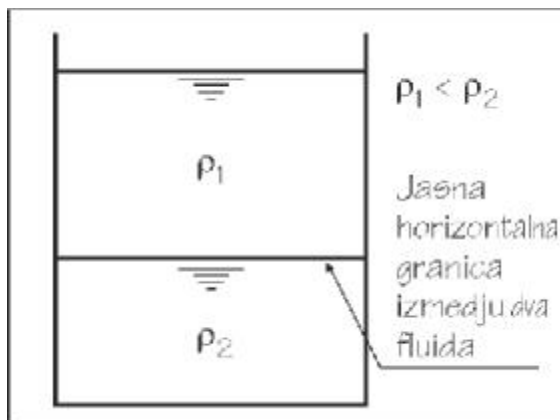
Težina je sila, jednaka proizvodu mase krutog tela i ubrzanja zemljine teže  $G = M \times g$ , odnosno, težina elementarnog delića koji ima zapreminu  $dV$  je  $dG = dM \times g$ . Kada se posmatra fluid, uobičajeno je da se umesto elementarne mase piše  $\rho dV$  pa je težina elementarnog delića fluida:

$$dG = \rho g dV$$

<sup>12</sup>Usled mešanja granica između dva fluida nikada nije oštra. Da li se u praktičnim zadacima posmatra kao oštra granica ili ne, više je stvar razmere u kojoj se analizira neki problem. Ako se izučavaju sile na rezervoar visine par metara, da li je granica između fluida oštra ili sa kontinualnim prelazom u zoni od par santimetara, zaista nije od suštinskog značaja. Za druge, mikro probleme, možda je upravo proces difuzije i mešanja dva fluida



Slika 2.7: Kruto telo konačne mase  $M$  i elementarni delić mase  $dM$



Slika 2.8: Dva homogena fluida različitih gustina u istom sudu

Ako se težina posmatra kao jedno od svojstava vezanih za konačnu količinu fluida, normalizacijom se dolazi do *specifične težine*:

$$\frac{dG}{dV} = \frac{dM \times g}{dV} = \frac{dM}{dV} \times g = \rho \times g = \gamma$$

U starijim knjigama se često koristila specifična težina, ali kako je SI sistem jedinica ne poznaje, u ovoj knjizi će se umesto specifične težine  $\gamma$  dosledno koristiti proizvod gustine (specifične mase) i gravitacionog ubrzanja  $\rho g$ . Kako vrednost gravitacionog ubrzanja zavisi od geografske lokacije, u svim zadacima će se koristiti prosečna vrednost  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

## 2.5 Elastične deformacije, stišljivost fluida

Sve materije su u izvesnoj meri stišljive, jer određena *promena pritiska uvek donosi promenu zapremine*. Stišljivost fluida se definiše preko modula stišljivosti  $K$ :

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{K} dp \tag{2.10}$$

gde znak minus u izrazu ukazuje na to da *povećanje pritiska uvek izaziva smanjenje zapremine*.

Pošto je masa fluida konstantna, ne zavisi od stepena deformacije, elementarna zapremina se može napisati kao:

$$dV = d\left(\frac{m}{\rho}\right) = m d(\rho^{-1}) = -\frac{m}{\rho^2} d\rho$$

pa se prethodni izraz (2.10) može napisati u funkciji od mase i gustine:

$$K = -\frac{dp}{\frac{-m d\rho}{\rho^2}} = \frac{dp}{\frac{d\rho}{\rho}} = \rho \frac{dp}{d\rho} \tag{2.11}$$

Iz izraza (2.11) se vidi da je modul stišljivosti jednak odnosu povećanja pritiska prema relativnom povećanju gustine usled povećanog pritiska. Znak običnog izvoda ukazuje na to da je *pritisak jedina nezavisna promenljiva*: promena gustine je isključivo rezultat promene pritiska.

### Primer 2.5.1

Modul stišljivosti vode na normalnoj temperaturi je  $K = 2,07 \text{ GPa}$  ( $1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa}$ ).

Ako je gustina vode na površini  $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ , kolika će biti gustina na 10 m dubine? Kolika je relativna promena zapremine?

Pritisak na 10 m dubine vode je:  $p_{10} = \rho gh = 1000 \times 9,81 \times 10 = 98,1 \text{ kPa}$ . Promena gustine vode se dobija iz izraza (2.11):

$$K = \rho \frac{dp}{d\rho} \Rightarrow \Delta\rho = \rho \frac{\Delta p}{K} = \rho \frac{p_{10} - p_0}{K} = 1000 \frac{98100 - 0}{2,07 \cdot 10^9} = 0,04739 \text{ kg/m}^3$$

pa je gustina vode na 10 m dubine  $\rho_{10} = 1000 + 0,04739 = 1000,04739 \text{ kg/m}^3$ .

Pri promeni pritiska  $\Delta p$  od 98,1 kPa, relativna promena zapremine će biti (prema izrazu (2.10)):

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{2,07 \cdot 10^9} \times 98100 = -0,00474\% = -47,4 \text{ ppm}$$

gde oznaka [ppm] znači "parts per million" (delova od milionitog dela).

U prethodnom primeru se vidi da su promene gustine tečnosti sa dubinom veoma male. Zbog toga, u većini zadataka u ovom kursu Mehanike fluida, smatraće se da su *tečnosti nestišljive*. **Samo kod veoma malog broja problema, nastalih usled velike promene pritiska, stišljivost fluida se ne može zanemariti. Jedan od takvih problema je analiza hidrauličkog udara, neustaljene pojave koja nastaje naglim zatvaranjem ili otvaranjem ventila na cevovodima pod pritiskom.** Zbog stišljivosti fluida, kao i materijala od koga je napravljen sam cevovod, talas povećanja (ili smanjenja) pritiska putuje **brzinom zvuka**<sup>13</sup> duž cevovoda, dovodeći u opasnost sve elemente mreže.

Modul stišljivosti vazduha na normalnoj temperaturi je  $K = 140 \text{ kPa}$ , što je oko 10 000 puta manje od modula stišljivosti vode. Iako se stišljivost gasova ne može zanemariti, u okviru Mehanike fluida za građevinske inženjere, neće se izučavati problemi vezani za stišljivost<sup>14</sup>. Gasovi će se uzimati u razmatranje samo u dva slučaja: kao dodatno opterećenje u zatvorenim rezervoarima u strogo ustaljenim uslovima, i kao sredina kroz koju se kreću tela na koja izučavamo otpore pri kretanju.

<sup>13</sup>I sama činjenica da se kroz tečnosti prostiru zvučni talasi ukazuje na to da je svaki fluid stišljiv!

<sup>14</sup>Stišljivost je izuzetno važna kod proučavanja termodinamičkih procesa koji se odigravaju u parnim kotlovima, kompresorima, izmenjivačima toplote i ostalim termodinamičkim mašinama.

## 2.6 Pritisak

Normalna sila koja deluje na ravnu površinu podeljena sa površinom na koju deluje predstavlja *srednji pritisak*:

$$(-\vec{n})p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{\Delta A} \tag{2.12}$$

Pritisak je skalar i predstavlja svojstvo fluida vezano za jednu tačku (kao i gustina, temperatura, ...). Označava se malim slovom  $p$  (veliko slovo  $P$  se koristi za označavanje sile) i ima dimenziju:

$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{N}{m^2} = Pa = [M L^{-1} T^{-2}]$$

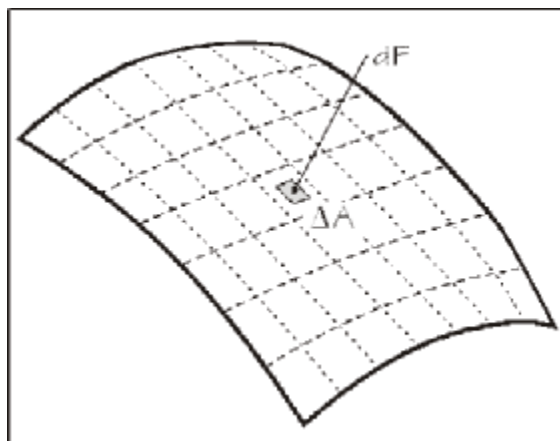
Prema SI sistemu jedinica za pritisak je paskal [Pa]<sup>15</sup>. Ranije je bila u upotrebi jedinica [Atm] (atmosfera), koja je jednaka srednjem vazдушnom pritisku na nivou mora. Veza pritiska izraženog u atmosferama i u paskalima je:

$$1 \text{ Atm} = 101\,325 \text{ Pa}$$

Zbog toga što je atmosferski pritisak veoma zgodan da se uzme kao referentni pritisak u većini primena, SI sistem je dozvolio da se paralelno sa paskalima koristi i jedinica bar [Bar], koja je 100 000 puta veća od paskala. Tako je:

$$1 \text{ Bar} = 100\,000 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ Bar} = 1,013 \text{ Atm} \approx 1 \text{ Atm}$$



Slika 2.9: Pritisak je normalna sila kroz površinu na koju deluje

U izrazu (2.12), za pritisak je uveden znak  $(-)$  da bi se dobili pozitivni pritisci za silu  $\vec{F}$ , koja deluje ka površini  $A$ . To je u suprotnosti sa konvencijom koju uvodi opšta teorija otpornosti krutih tela, gde se, za pozitivne sile i pozitivne napone, uzima smer koji zateže presek. Kako *tečnosti ne*

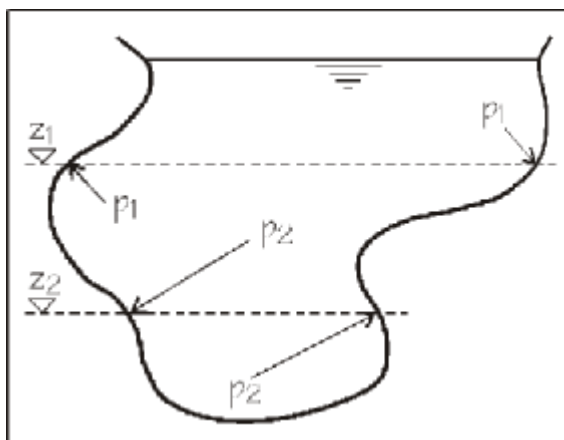
<sup>15</sup>Jedinica za pritisak je dobila naziv prema Blaise Pascal-u (1623 - 1662), svestranom francuskom matematičaru, filozofu i pronalazaču. Još kao mladić, otkrio je osnovne zakone Mehanike fluida. Koliko je bio svestran pokazuje i činjenica da je patentirao 1652. prvu mehaničku mašinu za računanje.

## 2.6. PRITISAK

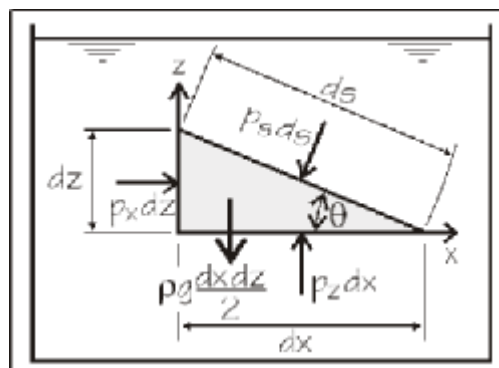
trpe zatezanje, već samo pritisak, da se ne bi stalno računalo sa negativnim brojevima, standardna praksa je da se, u predmetima koji se bave fluidima, konvencija o smeru promeni, pa se uzima za *pozitivan smer* (*i pozitivan pritisak*), smer sile ka fluidu.

Osobine pritiska su:

1. Pritisak uvek *deluje upravno na zid*. U stvari, pritisak je skalar pa on i nema definisan pravac delovanja. Kada se posmatra pritisak na zid suda, posmatra se sila na neku površinu. Sila je vektor sa orijentacijom orta površine na koju deluje, a to je normala na zid.
2. Vrednost pritiska u jednoj tački fluida koji miruje, odnosno *na istoj koti, je ista bez obzira na smer*. Ovo je definisao i Paskal, u formi zakona: *Kada nema tangencijalnih napona, pritisak je nezavisan od smeru*.



Slika 2.10: Pritisak uvek deluje upravno na zid



Slika 2.11: Sile na elementarni delić trougaonog oblika

Na slici 2.11, prikazan je elementarni deo fluida trougaonog oblika, jedinične širine. Ako su  $p_x$ ,  $p_z$  i  $p_s$  pritisci, odnosno, normalni naponi koji deluju na strane  $dA_x = dz dy$ ,  $dA_z = dx dy$  i  $dA_s = ds dy$  gde je širina  $dy = 1$ , tada je iz uslova o mirovanju fluida potrebno postići jednakost svih sila u  $x$  i  $z$  pravcu:

$$p_x dz = p_s ds \sin \theta$$

$$p_z dx = p_s ds \cos \theta + \rho g \frac{dx dz}{2}$$

Težina trougla  $\rho g \frac{dx dz}{2}$  je mala veličina drugog reda, pa se može izostaviti iz izraza. Iz geometrije trougla sledi da je  $ds \sin \theta = dz$  i

$ds \cos \theta = dx$ , pa se dobija:

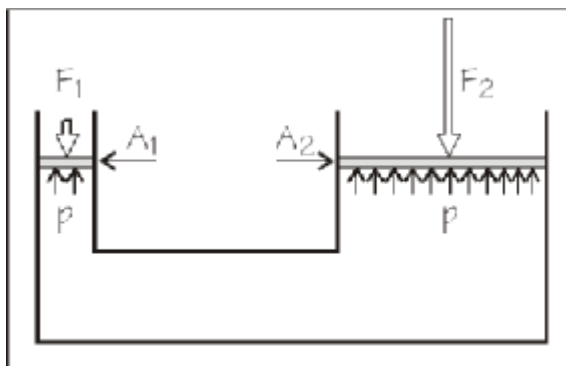
$$p = p_x = p_z = p_s \tag{2.13}$$

Činjenica da je pritisak isti u svim pravcima u jednoj tački, korišćiće se u narednoj glavi knjige *Hidrostatika*, gde će se utvrditi da *pritisak u homogenom fluidu zavisi samo od vertikalne z koordinate, a ne i od horizontalnih x i y koordinata*. Na slici 2.10 je na koti  $z_1$  to prikazano istom dužinom linija koje reprezentuju vrednost pritiska  $p_1$ .

Ako se fluid kreće, postoje tangencijalni naponi, pa normalni naponi u jednoj tački više nisu isti u svim pravcima. Pritisak se tada definiše kao *srednja vrednost bilo koja tri međusobno upravna normalna napona u tački*:

$$p = \frac{p_x + p_y + p_z}{3} \tag{2.14}$$

3. Pritisak na zatvoreni fluid se, na istoj koti, *podjednako prenosi na sve zidove suda*. Ovu osobinu je još davno definisao Blez Paskal<sup>16</sup>, pa se po njemu i zove Paskalov zakon.



Slika 2.12: Pritisak na zatvoreni fluid se podjednako prenosi na sve zidove suda

Prema Paskalovom zakonu, uz uslov da su klipovi površina  $A_1$  i  $A_2$  u sistemu datom na slici 2.12 na istoj visinskoj koti (prema prethodnoj osobini pritiska) i da se zanemare sile trenja između klipova i zidova suda, sledi da je sila:

$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

odnosno, mala sila  $F_1$  se može onoliko puta “pojačati” koliko puta se poveća odnos prečnika klipova.

### Primer 2.6.1

Pomoću hidrauličke dizalice treba podići auto mase 1500 kg. Ako su prečnici klipova hidrauličke prese  $A_1 = 12 \text{ cm}^2$  i  $A_2 = 0,1 \text{ m}^2$ , kojom silom treba pritisnuti klip 1? Koliki je pritisak u fluidu?

Sila  $F_2$  koju treba podići je:  $F_2 = 1500 \times 9,81 = 14,715 \text{ kN}$ . Sila  $F_1$  je:

$$F_1 = F_2 \frac{A_1}{A_2} = 14,715 \frac{12 \cdot 10^{-4}}{0,1} = 14,715 \times 0,012 = 0,17658 \text{ kN} = 176,58 \text{ N}$$

<sup>16</sup>Ovu zakonitost su poznavali sigurno i stari Grci i Rimljani, kao i graditelji piramida, koji su koristili pesak kao fluid kojim su pomerali velike blokove stena.

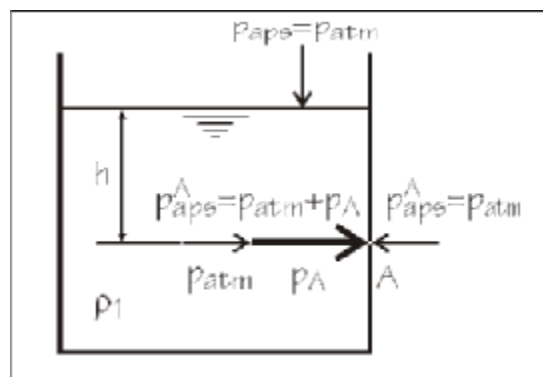
## 2.6. PRITISAK

Pritisak u fluidu, na koti klipa je:

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{176,58}{12 \cdot 10^{-4}} = 147,15 \text{ kPa}$$

Pritisak je *apsolutna, ne negativna* veličina  $p_{\text{aps}} \geq 0 \text{ Pa}$  (kao što je to i temperatura). Slučaj kada je pritisak jednak nuli se zove vakuum<sup>17</sup>. Pritisak, koji je posledica samo sopstvene težine suvog vazduha, naziva se *atmosferski pritisak* i na nultoj nadmorskoj visini ima vrednost  $p_{\text{atm}} = 101\,325 \text{ Pa}$ . Sa povećanjem visine atmosferski pritisak pada u proseku za 11,4 Pa po metru, tako da je na nadmorskoj visini od 1000 m nad morem, atmosferski pritisak  $p_{\text{atm}} = 89\,925 \text{ Pa}$ .

U okviru predmeta Mehanika fluida najvećim delom se izučavaju opterećenja na objekte relativno malih dimenzija (do nekoliko desetina metara visine). Promena atmosferskog pritiska je relativno mala, pa se u većini zadataka smatra da je atmosferski pritisak konstantan i da iznosi  $p_{\text{atm}} = 100 \text{ kPa}$ . Ukupni, apsolutni pritisak u tački A (slika 2.13), sa strane fluida gustine  $\rho_1$ , jednak je zbiru atmosferskog pritiska  $p_{\text{atm}}$ , koji deluje iznad površine fluida i pritiska  $p_A$  koji je posledica dodatnog sloja fluida  $h$ . Sa druge strane zida suda, u vazduhu, na tačku A deluje apsolutni pritisak, koji je jednak atmosferskom, pri čemu se zanemaruje promena pritiska u vazduhu usled različitih kota površine fluida i tačke A. Rezultujući pritisak u tački A je jednak pritisku usled fluida  $\rho_1$ :



Slika 2.13: Apsolutni pritisak je zbir atmosferskog i hidrostatičkog pritiska

$$p_A = (p_{\text{atm}} + p_A) - p_{\text{atm}} \tag{2.15}$$

<sup>17</sup>Vakuum je zadavao dosta glavobolja starim naučnicima i filozofima. Stari Grci, naročito pripadnici elejske škole (Parmenid, Zenon), a kasnije i Aristotel, smatrali su da apsolutna “praznina”, odnosno vakuum, u kojoj nema ničega nije moguć. Koliko je bio jak uticaj takvog mišljenja pokazuju i kasniji zapisi iz Aleksandrije, koji opisuju pojedine hidrauličke i pneumatske uređaje, gde se kaže da “iako je prirodni vakuum nemoguć, moguće ga je stvoriti veštački, unošenjem dodatnih sila, kao što se dodatnim silama molekuli mogu i sabiti”. Tek je Toričeli 1644. godine (fusnota 9 na strani 45) pomoću barometra pokazao da “nije tačno da priroda ne voli vakuum”. Danas se, pomoću najsavremenije opreme, može ostvariti vakuum sa pritiskom od  $10^{-12} \text{ Pa}$ .

i zove se *hidrostatički pritisak*, ili *manometarski pritisak*, ili u ovoj knjizi, najčešće, samo *pritisak*<sup>18</sup>.

Veza između pritiska, apsolutnog pritiska i atmosferskog pritiska je data jednačinom:

$$p = p_{\text{aps}} - p_{\text{atm}} \quad (2.16)$$

Iz napisane jednačine, znajući da je apsolutni pritisak uvek veći ili jednak nuli i uz uslov da je atmosferski pritisak konstantan, sledi za pritisak da je  $p \geq -100$  kPa. Drugim rečima, *pritisak (hidrostatički) u fluidu ne može biti manji od -100 kPa.*

### Primer 2.6.2

Dva suda istih dimenzija, ispunjena su istim fluidom do iste kote, pri čemu je prvi sud otvoren (u spoju je sa atmosferom), a drugi zatvoren sa gornje strane. Posmatra se pritisak u tački na dnu oba suda. Ako je pritisak (hidrostatički) u posmatranoj tački u oba suda isti, da li su isti i apsolutni pritisci u toj tački?

Odgovor je: da, isti su i apsolutni pritisci. Prvi sud je otvoren i na površinu fluida sigurno deluje atmosferski pritisak. Drugi sud je zatvoren i pitanje je da li u njemu i dalje postoji atmosferski pritisak. Potvrđan odgovor leži u samoj definiciji pritiska, dat jednačinom (2.16): uvek je apsolutni pritisak jednak zbiru atmosferskog (koji je konstantan) i (hidrostatičkog) pritiska.

## 2.7 Površinski napon i kapilarnost

Slobodna površina tečnosti se ponaša kao razapeta i zategnuta gumena membrana. Sila po jedinici dužine, na zamišljenom preseku po površini tečnosti je *površinski napon*<sup>19</sup>. Simbol za površinski napon je<sup>20</sup>  $\sigma$ , dok je dimenzionalno površinski napon jednak masi po jedinici vremena na kvadrat,  $[\sigma] = [F]/[L] = [M T^{-2}]$ .

Razlog postojanja površinskog napona je znatna *razlika u intenzitetu međumolekularnih sila između* molekula unutar tečnosti (*sile kohezije*) i između molekula tečnosti u površinskom sloju i molekula spoljnog fluida (gasa ili neke druge tečnosti). Na slici 2.14 je prikazan jedan molekul<sup>21</sup>

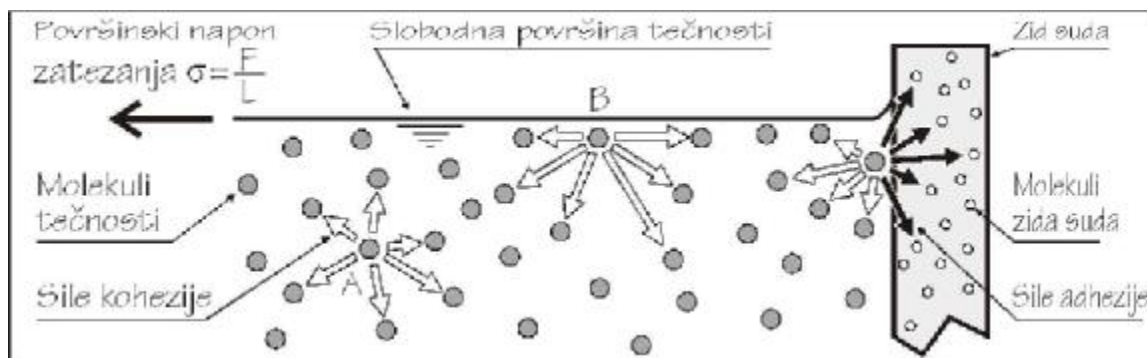
<sup>18</sup>Sa rečju *pritisak* označavaće se uvek *hidrostatički pritisak*. Ako se misli na apsolutni pritisak, to će se eksplicitno naglašavati.

<sup>19</sup>Voditi računa da iako se površinski napon naziva "napon", on nema dimenziju napona (napon je sila po jedinici površine).

<sup>20</sup>Kao simbol za površinski napon, često se koristi i  $\gamma$ .

<sup>21</sup>Molekul na slici 2.14 je, naravno, uveličan da bi mogao da se vidi!





Slika 2.14: Sile kohezije su odgovorne za površinski napon a sile adhezije za kapilarno penjanje tečnosti uz zid

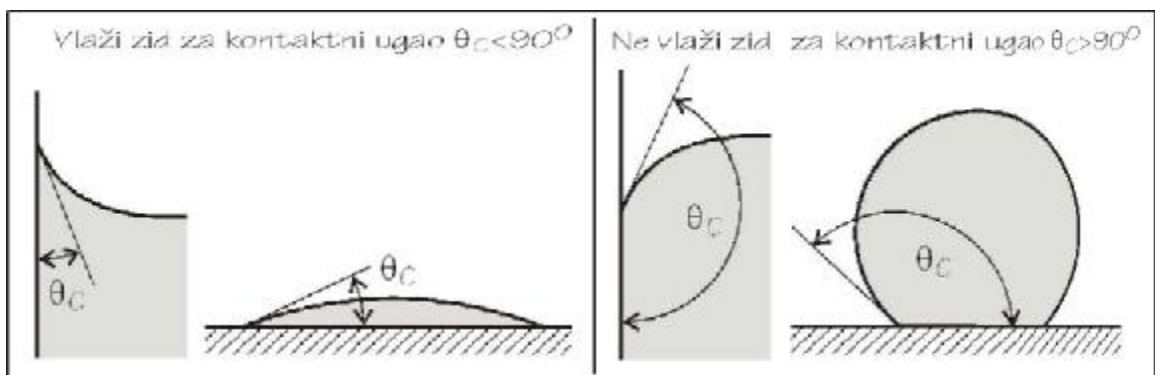
unutar tečnosti (A), koji sa svim okolnim molekulima formira ravnotežu međumolekularnih sila, i drugi molekul (B) pri površini tečnosti koji praktično nema međumolekularnih sila sa molekulima iz spoljnog fluida<sup>22</sup>. Zbog neravnoteže sila, površinski napon teži da minimizuje slobodnu površinu tečnosti. To je upravo i razlog zašto kapi vode i mehuri od sapunice imaju sferni oblik.

Kako površinski napon zavisi od međumolekularnih sila, njegov intenzitet zavisi od vrste tečnosti, temperature (odnovo kinetičke energije molekula) ali i od vrste spoljnog fluida. U tabeli B.1, u prilogu knjige, dati su podaci za površinski napon vode, u kontaktu sa vazduhom, u funkciji od temperature. Vidi se da površinski napon opada sa porastom temperature, jer sa povećanjem srednje kinetičke energije molekula sile kohezije opadaju. U tabeli B.2 su dati podaci za površinski napon nekih najčešće korišćenih tečnosti, u kontaktu sa vazduhom.

Na slici 2.14, sa desne strane, su prikazane i sile adhezije (međumolekularne sile između molekula tečnosti i molekula u zidu suda u kome se tečnost nalazi) i njihovo dejstvo na slobodnu površinu tečnosti. U zavisnosti od odnosa sila adhezije i kohezije, kao i vrste spoljnog fluida (fluida iznad tečnosti), tečnost će vlažiti zid (penjaće se uz zid) ili ga neće vlažiti. Na slici 2.15 su prikazana oba slučaja, i to sa leve strane, kada je tečnost u kontaktu sa vertikalnim zidom, a sa desne strane, kada kap tečnosti stoji na horizontalnoj površini.

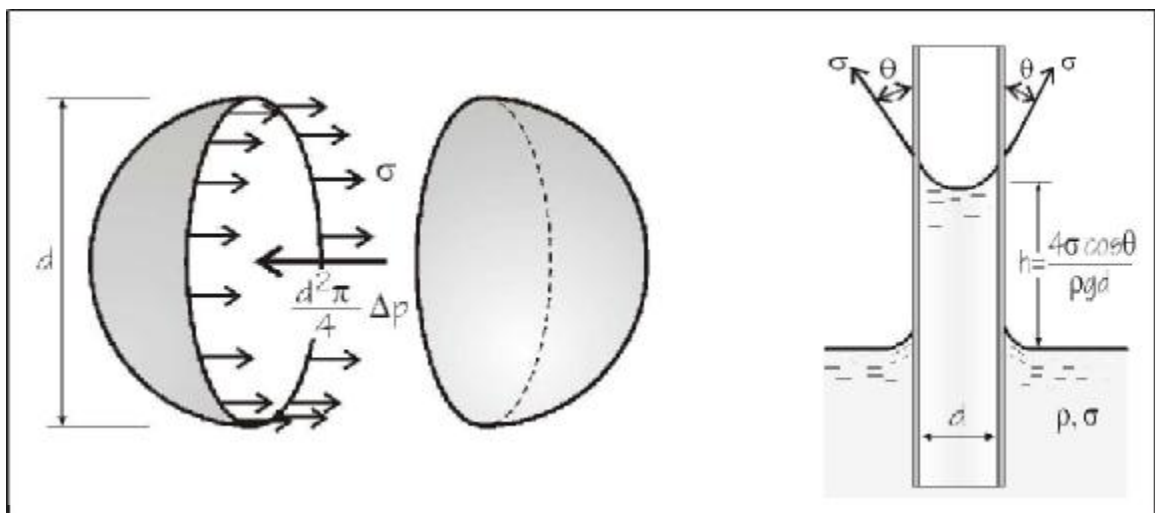
Kao karakteristična veličina može se definisati ugao vlaženja  $\theta$ . Ugao  $\theta$  zavisi od vrste tečnosti, materijala od koga je napravljen zid, kao i od osobina

<sup>22</sup>Površinski napon se može posmatrati i kao energija po jedinici površine potrebna da se molekuli iz unutrašnjosti tečnosti dovedu do površine tečnosti.



Slika 2.15: U zavisnosti od odnosa sila kohezije i adhezije, tečnost ili vlaži zid suda ili ga ne vlaži

okolnog fluida. Za uglove manje od  $90^\circ$  tečnost kvasi zid, kapilarna atrakcija (na primer, na kontaktu vode i stakla), dok za uglove veće od  $90^\circ$  **ne kvasi**, kapilarna depresija (kontakt žive i staklenog zida). U tabeli B.3 u prilogu knjige su dati uglovi kvašenja za neke standardne kombinacije tečnosti i materijala zidova suda.



Slika 2.16: Zbog površinskog napona pritisak u kapi tečnosti je veći nego okolni pritisak (levi deo slike) i tečnost se kapilarno "penje" duž tankih cevi (desni deo slike)

Površinski napon je odgovoran za povećanje pritiska unutar kapi tečnosti. Usled postojanja stalnih zatežućih sila u površinskom sloju tečnosti, kap zauzima sferni oblik, tako da ima minimalnu spoljnu površinu (slika 2.16). Sila u preseku kapi, na jednu poluloptu, usled površinskog napona je jednaka

## 2.7. POVRŠINSKI NAPON I KAPILARNOST

31

$\mathcal{O} \times \sigma$  gde je  $\mathcal{O} = \pi d$  obim presečnog kruga. Ta sila mora biti u ravnoteži sa silom usled povećanog pritiska  $A \times \Delta p$ :

$$\pi d \times \sigma = \frac{d^2 \pi}{4} \Delta p \quad \Rightarrow \quad \Delta p = \frac{4\sigma}{d} \quad (2.17)$$

**Primer 2.7.1**

Za koliko je veći pritisak unutar mehura od vode prečnika  $d = 1$  mm pri temperaturi od  $20^\circ$  C?

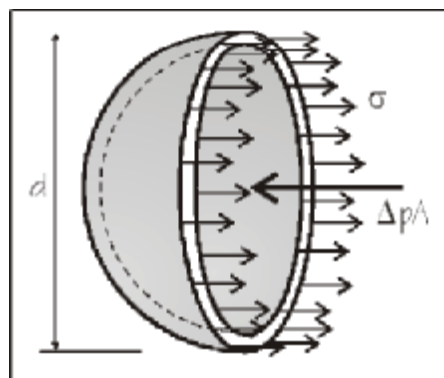
Za razliku od skice kapi vode, koja je prikazana na slici 2.16, i koja ima samo spoljnu stranu tečnosti u kontaktu sa vazduhom, mehur od vode ima i spoljnu i unutrašnju stranu. Sila usled površinskog napona je dvostruko veća od one date izrazom (2.17), tako da je:

$$2 \times \mathcal{O} \times \sigma = A \times \Delta p$$

$$2\pi d\sigma = \frac{d^2\pi}{4}\Delta p$$

Pritisak unutar mehura je:

$$\Delta p = 2\frac{4\sigma}{d} = 2\frac{4 \times 0,073}{0,001} = 584 \text{ Pa}$$

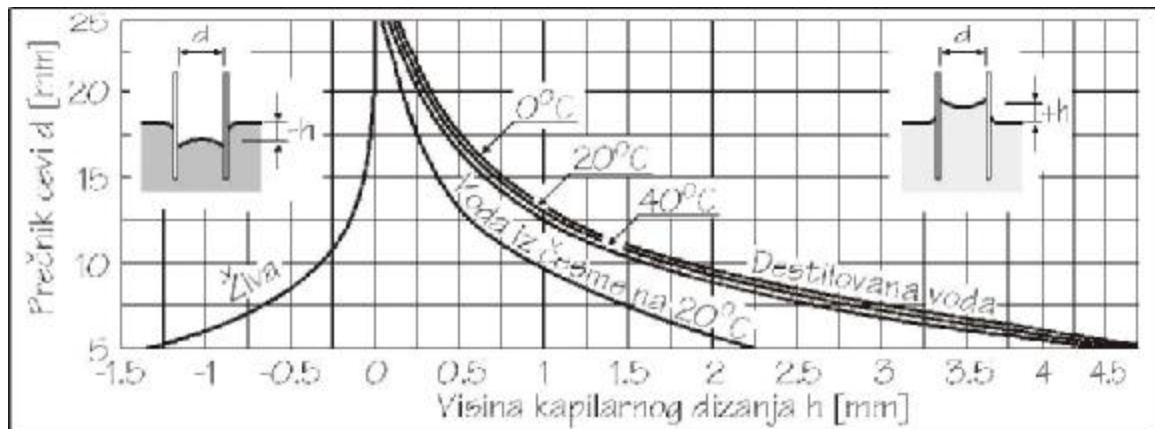


Na desnoj strani slike 2.16, prikazan je stub tečnosti visine  $h$  u tankoj kružnoj cevi unutrašnjeg prečnika  $d$ . Usled delovanja površinskog napona  $\sigma$ , sila po obodu stuba tečnosti zaklapa sa vertikalom ugao  $\theta$  (ugao vlaženja) i uravnotežuje se sa sopstvenom težinom stuba tečnosti, pa je visina kapilarnog dizanja:

$$\pi d \sigma \cos \theta = \frac{d^2 \pi}{4} \rho g h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{4 \sigma \cos \theta}{\rho g d} \quad (2.18)$$

Visina kapilarnog dizanja je funkcija prečnika cevi  $d$ , vrste tečnosti i materijala od koga je napravljen zid cevi. Rezultati jednačine (2.18) uglavnom precenjuju visinu kapilarnog dizanja, jer i najmanje nečistoće u vodi znatno smanjuju površinski napon.

Na dijagramu datom na slici 2.17, date su visine kapilarnog dizanja  $h$  za čistu destilovanu vodu, običnu vodu iz česme kao i za živu (gde se javlja kapilarno spuštanje), u funkciji od unutrašnjeg prečnika pijezometarskih staklenih cevi.



Slika 2.17: Dijagram kapilarnog dizanja vode i žive u staklenim cevima

Površinski napon se uglavnom zanemaruje u inženjerskoj praksi. *Fenomen kapilarnog izdizanja* (ili spuštanja) tečnosti, koji je također rezultat površinskog napona, međutim, često se sreće: zbog kapilarnosti, vlaga u zemlji se diže znatno iznad nivoa slobodne površine podzemne vode, a nivo vode u tankoj staklenoj cevi (pijezometru) je uvek iznad stvarnog nivoa vode.

## Glava 3

# Hidrostatika

Hidrostatika je oblast Mehanike fluida koja proučava *mirovanje fluida konstantne gustine pod uticajem težine*. Pošto fluid miruje, ne dolazi do međusobnog relativnog kretanja fluidnih delića, pa ne postoji uticaj viskoznih napona. Naravno, pretpostavka o mirovanju se odnosi na fluidni delić definisan u uvodnoj glavi 1.1 *Način i predmet izučavanja*, dok razmatranja na nivou molekula nisu predmet ove knjige.

Nakon definisanja pretpostavki, u nastavku će se izvesti osnovna jednačina hidrostatičke, koja omogućava proračun pritiska u bilo kojoj tački fluida za poznate granične uslove. Jednačina će se izvesti za slučaj homogenog fluida, koji se isključivo razmatra u daljem tekstu. Međutim, u knjizi se daje i rešenje jednačine za nehomogene fluide, sa primerom proračuna pritiska u Zemljinoj atmosferi.

U posebnom poglavlju se obrađuju problemi merenja apsolutnog, atmosferskog, hidrostatičkog kao i diferencijalnog hidrostatičkog pritiska. Uvodi se i novi pojam, piježometarska kota tečnosti, kao kota na kojoj su pritisci u nekom fluidu jednaki nuli, odnosno, apsolutni pritisci jednaki atmosferskom.

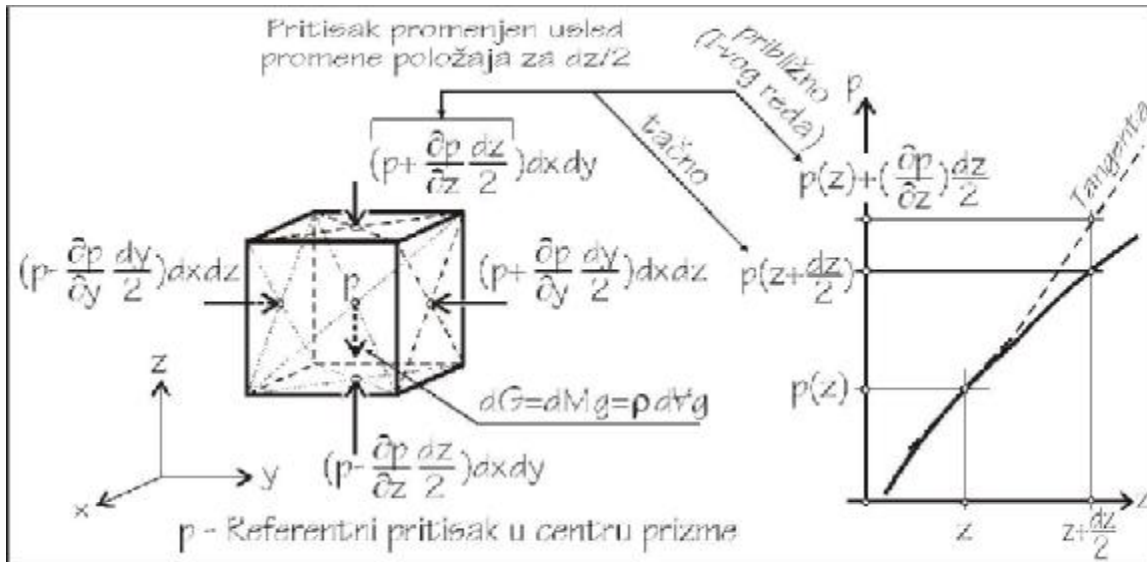
Najčešći zadatak građevinskog inženjera je da odredi sile na neku konstrukciju, kako bi je dimenzionisao. Na osnovu poznatog rasporeda pritiska, integracijom se dobija opterećenje od fluida, koje se deli na horizontalne i vertikalne sile. U knjizi se razmatraju različiti granični uslovi i daju obrasci i uputstva za proračun tih sila. Na kraju glave se daju i osnovne jednačine za analizu stabilnosti tela koje pluta na površini tečnosti, kao i obrasci za proračun oblika slobodne površine tečnosti u slučaju kada se sud kreće.

### 3.1 Promena pritiska u zavisnosti od položaja

#### 3.1.1 Pretpostavke za izvođenje jednačine

Posmatra se fluid koji ispunjava sledeće uslove i pretpostavke:

- Fluid miruje - nema relativnog kretanja između fluidnih delića.
- Fluid je izotropan - posmatrano iz jedne tačke, fluid ima iste osobine u svim pravcima (za sada se ne ograničava na homogeni fluid).
- Od zapreminskih sila, na fluid deluje samo težina, i to:
  - po jedinici mase, težina iznosi  $g$  - gravitaciono ubrzanje,
  - po jedinici zapremine, težina iznosi  $(\rho g)$ .
- Od površinskih sila na fluid deluju samo normalni naponi, pritisci, pomnoženi sa površinom na koju deluju. Tangencijalni naponi (jednačina (2.5)) ne deluju (osim kod kapilarnih pojava) jer nema kretanja.



Slika 3.1: Ravnoteža vertikalnih i horizontalnih sila na elementarni delić homogenog fluida

U fluidu koji ispunjava postavljene pretpostavke, posmatraju se pritisci na jedan izdvojeni delić, elementarnu prizmu dimenzija  $dx \times dy \times dz$  (slika 3.1). Pozitivan smer pritiska je u skladu sa usvojenim principom da fluidi ne trpe zatezanje (strana 25). Delić je tako postavljen da ima jednu

osu vertikalnu, orijentisanu na gore. Pritisak  $p$  u centru delića se uzima za referentni pritisak. Pošto fluid miruje, prema jednačini (2.13), isti pritisak važi za sva tri koordinatna pravca.

Pritisak sa gornje strane delića se promenio u odnosu na pritisak u centru, u skladu sa nekom funkcionalnom zavisnošću  $p_z = f(z)$ , prikazanoj na slici 3.1 desno. Za poznati  $p(z)$ , vrednost  $p(z + dz/2)$  se može približno odrediti iz nagiba tangente na dijagramu u tački  $p(z)$ . To se dobija razvojem u Tejlorov red promene pritiska u funkciji od koordinate  $z$ , uz zadržavanje samo prvog člana reda:

$$p\left(z + \frac{dz}{2}\right) = p(z) + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) \frac{dz}{2} + o$$

gde je  $o$  ostatak, razlika između tačne i približne vrednosti pritiska. Zane-marivanjem ostatka kao male veličine drugog reda i uz uslov (2.13) da je  $p = p_x = p_y = p_z$ , pritisak sa gornje strane elementarne prizme je:

$$p\left(z + \frac{dz}{2}\right) = p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \quad (3.1)$$

Na sličan način se može dobiti i pritisak na donjoj strani prizme:

$$p\left(z - \frac{dz}{2}\right) = p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \quad (3.2)$$

i pritisci u horizontalnim pravcima  $x$  i  $y$ :

$$\begin{aligned} p\left(x - \frac{dx}{2}\right) &= p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} & p\left(x + \frac{dx}{2}\right) &= p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \\ p\left(y - \frac{dy}{2}\right) &= p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} & p\left(y + \frac{dy}{2}\right) &= p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

### 3.1.2 Osnovna jednačina hidrostatičke

Kao rezultat različitih pritisaka na suprotnim stranama elementarne prizme (slika 3.1 levo), javljaju se sile. Da bi se zadovoljio polazni uslov da se posmatra fluid koji miruje, sve sile na elementarnu prizmu moraju biti u ravnoteži. Za vertikalni pravac, ravnoteža sila daje:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dA_z = \rho g dV + \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dA_z$$

gde je  $\rho g dV$  težina prizme. Sređivanjem izraza i zamenom  $dA_z \times dz = dV$ , dobija se promena pritiska po vertikali:

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0 \quad \text{odnosno} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (3.4)$$

Iz jednakosti sila za horizontalni pravac  $x$  ili  $y$ , dobija se:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.5)$$

odnosno, *pritisak se ne menja po horizontali*, pa  $p$  nije funkcija  $(x, y)$ . Iz ovog uslova, kao i na osnovu (3.4) sledi, takođe, zaključak da se kod svih fluida pored pritiska i *gustina ne menja po horizontali*. Upravo zbog toga je *površina na spoju dva fluida koji se ne mešaju uvek horizontalna* (osim uz zidove zbog površinskih napona).

Kako je *pritisak samo funkcija vertikalne koordinate*  $p = p(z)$ , parcijalni izvod  $\frac{\partial p}{\partial z}$  u jednačini (3.4) se može zameniti totalnim izvodom  $\frac{dp}{dz}$ , tako da se dobija:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (3.6)$$

Jednačina (3.6) predstavlja *osnovnu jednačinu hidrostatičke u diferencijalnom obliku* i daje vezu između promene pritiska i promene vertikalne kote u fluidu. Znak  $(-)$  u izrazu *pokazuje da sa porastom kote, u istom fluidu pada pritisak*. Da bi se odredio pritisak u bilo kojoj tački, treba integrisati jednačinu (3.6):

$$p = \int -\rho g \, dz \quad (3.7)$$

Zavisnost gravitacionog ubrzanja od vertikalne kote  $g(z)$  se u svim praktičnim zadacima zanemaruje, jer  $g$  opada za 0,03% sa povećanjem visine od 1000 m. Da bi se rešio integral (3.7), potrebno je poznavati zavisnost gustine od kote  $\rho(z)$ .

### 3.1.3 Rešenje osnovne jednačine hidrostatičke za homogeni fluid

Za homogeni (nestišljivi) fluid, važi uslov  $\rho = \text{Const.}$  pa se jednačina (3.7) može napisati kao:

$$p = \int -\rho g \, dz = -\rho g \int dz$$

čijom integracijom se dobija:

$$p + \rho g z = C_1 \quad (3.8)$$



Integraciona konstanta  $C_1$  se dobija iz graničnog uslova, poznatog pritiska u jednoj tački. Jednačinu (3.8) je zgodnije napisati u obliku:

$$\frac{p}{\rho g} + z = C_2 \quad (3.9)$$

jer sada ceo izraz ima dimenziju dužine:

$$\left[ \frac{p}{\rho g} \right] = [z] = [C_2] = [L]$$

Jednačina (3.9) se često zove i *osnovna jednačina hidrostatičke*. Član  $\frac{p}{\rho g}$  se zove još i *visina pritiska*, jer se pritisak izražava pomoću iste jedinice kao i visina<sup>1</sup>  $z$ .

Za određivanje konstante  $C_2$  iz osnovne jednačine hidrostatičke, potrebno je poznavati granični uslov, pritisak  $p = p_0$  u tački  $z = z_0$ :

$$C_2 = \frac{p_0}{\rho g} + z_0$$

pa je pritisak u bilo kojoj tački  $A$  istog fluida<sup>2</sup> dat sa:

$$\frac{p_A}{\rho g} + z_A = C_2 \quad \Rightarrow \quad p_A = \rho g(C_2 - z_A)$$

Prethodni izraz se može napisati i u obliku veze između razlike pritiska i visinskog položaja tačaka:

$$p_A - p_0 = -\rho g(z_A - z_0) \quad \Rightarrow \quad p_A = p_0 + \rho g(z_0 - z_A) \quad (3.10)$$

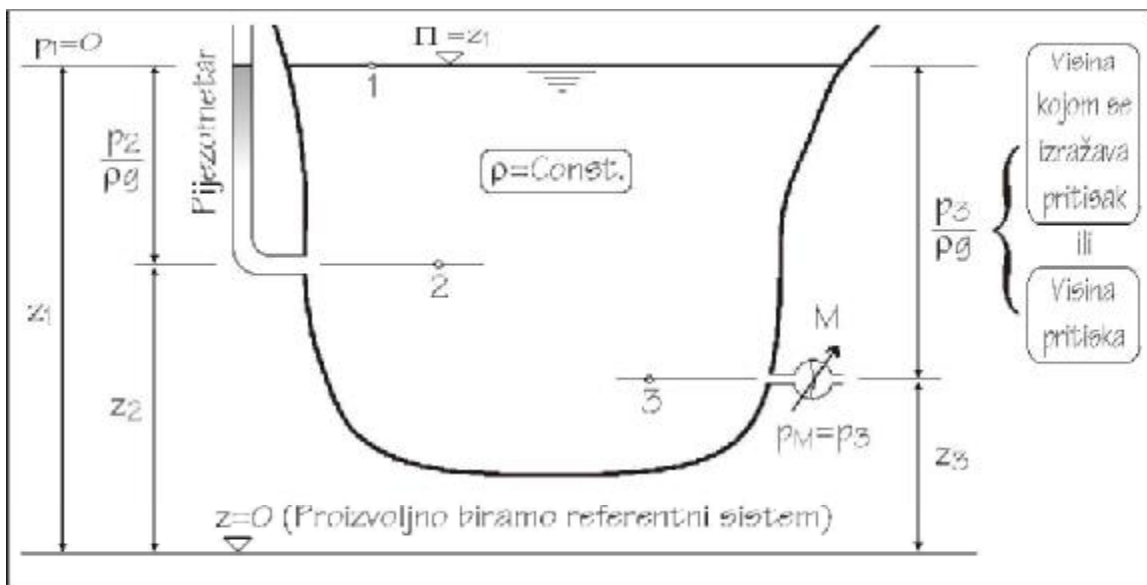
Odnosno, povećanje pritiska u jednoj neprekidnoj sredini konstantne gustine direktno je proporcionalno smanjenju kote (povećanju dubine).

Izbor nulte kote ( $z_0$ ), kao i nultog pritiska, potpuno je proizvoljan. Međutim, jednom usvojena referentna kota  $z = 0$ , od koje se odmerava kota tačke  $A$ ,  $z_A$ , u jednom zadatku se ne sme menjati. Nulti, ili referentni pritisak, može biti apsolutni ili hidrostatički (jednačina (2.16)), pa će i sračunati pritisak  $p_A$  biti u istom sistemu. U ovoj knjizi će se, uglavnom, pod imenom "pritisak" podrazumevati hidrostatički pritisak  $p = p_{abs} - p_{atm}$ , a za atmosferski pritisak će se uzimati konstantna vrednost  $p_{atm} = 100$  kPa.

<sup>1</sup>Često se pritisak u nekoj tački izražava u "metrima vodenog stuba" ili samo u "metrima".

<sup>2</sup>Uslov za integraciju jednačine (3.7) je bio  $\rho = \text{Const}$ . To znači da osnovna jednačina hidrostatičke važi samo u okviru jednog fluida nepromenljive gustine.

### 3.1.4 Pijezometarska kota kod homogenog fluida



Slika 3.2: Visine pritisaka u različitim tačkama otvorenog suda i pijezometarska kota

Posmatra se otvoreni sud, proizvoljnog oblika, sa tečnošću konstantne gustine  $\rho$ , slika 3.2. U tački 1 pritisak<sup>3</sup> je  $p_1 = 0$ , jer je  $p_{1,abs} = p_{atm}$ , pa osnovna jednačina hidrostatičke glasi:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 = C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = z_1 = \Pi \quad (3.11)$$

Oznaka  $\Pi$  predstavlja *pijezometarsku kotu*, zbir visine pritiska u tački i položajne kote te tačke. U sistemima sa fluidom koji ima slobodnu površinu, pijezometarska kota se poklapa sa kotom tačke na slobodnoj površini. Kod fluida zatvorenih u sud pod pritiskom, pijezometarska kota pokazuje *do koje kote bi se popeo fluid kad bi bio slobodan, odnosno, do koje kote bi se popeo fluid kad bi se postavio pijezometar*, cevčica beskonačno male zapremine, otvorena sa gornje strane (kao kod tačke 2. na slici 3.2)<sup>4</sup>.

Vrednost pijezometarske kote zavisi od izbora referentnog sistema. Za isti sud i iste podatke,  $\Pi$  kota može imati različite vrednosti jer polazna kota  $z = 0$  ne mora uvek biti na istom mestu. Stvarni položaj  $\Pi$  kote će, međutim, uvek biti na istom mestu.

<sup>3</sup>U daljem tekstu se pridev "hidrostatički" podrazumeva, pa se i ne piše.

<sup>4</sup>U poglavlju 4.6.3 *Rešenje integralne jednačine održanja energije za ustaljeno tečenje homogenog fluida u cevi*, će se u okviru rešavanja energetske jednačine, na strani 171, jednačinom (4.118) pokazati da pijezometarska kota predstavlja potencijalnu energiju u preseku, izraženu visinom fluida.

**Pijezometarska kota se vezuje za jedan fluid, konstantne gustine, a ne za tačku.** Pogrešno je pisati indeks neke tačke uz  $\Pi$  kotu. Na slici 3.2 bilo bi pogrešno napisati  $\Pi_1$ , jer indeks 1 označava tačku, a ne fluid. Ukoliko u sudu postoji više od jednog fluida, sa gustinama  $\rho_A$  i  $\rho_B$ , **na primer, svaki od fluida će imati odgovarajuću pijezometarsku kotu,  $\Pi_A$  i  $\Pi_B$ .**

Kada je poznata pijezometarska kota za neki fluid, pritisak u bilo kojoj tački tog fluida se dobija iz osnovne jednačine hidrostatičke. Na primer, za tačku 2 sa slike 3.2 pritisak se dobija iz:

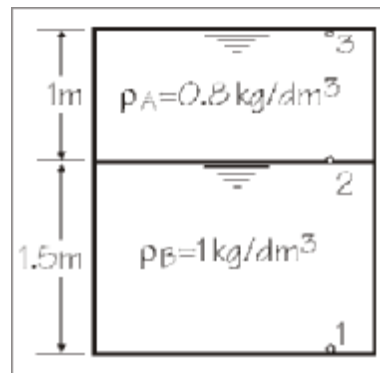
$$\frac{p_2}{\rho g} + z_2 = \Pi \quad \Rightarrow \quad p_2 = \rho g(\Pi - z_2)$$

Ukoliko je u sudu više fluida, *svaki od fluida ima svoju pijezometarsku kotu.* Pri proračunu tih kota, koristi se činjenica da je *pritisak u tački na spoju dva fluida isti*, bez obzira da li ta tačka “pripada” donjem ili gornjem fluidu.

### Primer 3.1.1

Za zatvoreni sud sa slike odrediti pijezometarske kote i pritisak na koti poklopca (tačka 3) ako je poznat pritisak na dnu suda  $p_1 = 28$  kPa. Ako se promeni položaj referentne kote, da li se menja vrednost pijezometarske kote za fluid A, položaj te kote i da li se menja pritisak u tački 2?

Prvo se usvaja referentni sistem, položaj kote  $z_0$ . Uobičajeno je da to bude na visini najniže tačke suda, tačke 1. Za izabranu referentnu kotu, može se izračunati pijezometarska kota fluida B:



$$\Pi_B = \frac{p_1}{\rho_B g} + z_1 = \frac{28 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^3 \times 9,81} + 0 = 2,854 \text{ m}$$

Pritisak u tački 2, koja je na spoju fluida A i B se dobija iz uslova da je ta tačka u fluidu B:

$$p_2 = \rho_B g(\Pi_B - z_2) = 1 \times 9,81 \times (2,854 - 1,5) = 13,28 \text{ kPa}$$

Tačka 2 pripada i fluidu A, pa već sračunati pritisak se može iskoristiti za određivanje pijezometarske kote  $\Pi_A$ :

$$\Pi_A = \frac{p_2}{\rho_A g} + z_2 = \frac{13,28}{0,8 \times 9,81} + 1,5$$

$$\Pi_A = 3,192 \text{ m}$$

Pritisak na poklopac, u tački 3 je:

$$p_3 = \rho_A g(\Pi_A - z_3)$$

$$p_3 = 0,8 \times 9,81 \times (3,192 - 2,5)$$

$$p_3 = 5,43 \text{ kPa}$$

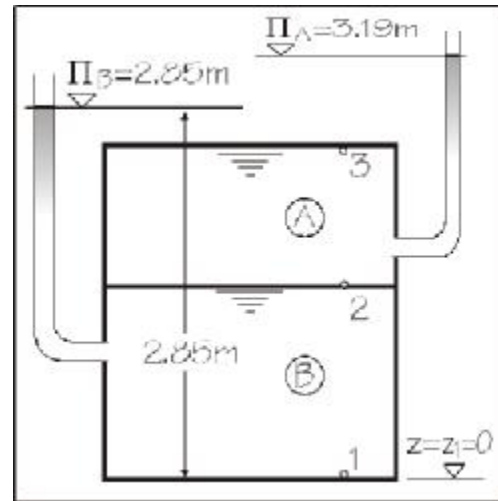
Kad bi se referentna kota postavila na visini spoja dva fluida, položajna kota tačke 1 bi bila  $z_1 = -1,5$  m. Pijezometarska kota fluida B je tada:

$$\Pi_B = \frac{p_1}{\rho_B g} + z_1 = \frac{28}{1 \times 9,81} + (-1,5) = 1,354 \text{ m}$$

Vrednost kote je promenjena, ali u novom referentnom sistemu ta kota ostaje na istom mestu, 2,854 m udaljena od tačke 1. Pritisak u tački 2 je sada:

$$p_2 = \rho_B g(\Pi_B - z_2) = 1 \times 9,81 \times (1,354 - 0,0) = 13,28 \text{ kPa}$$

**dakle, ostaje nepromenjen.**



U prethodnom primeru, u zatvorenom sudu su bila dva nestišljiva fluida, dve tečnosti. Ako je gornji fluid vazduh, čija je gustina zanemarljiva<sup>5</sup>, iz jednačine (3.11) sledi da je pijezometarska kota vazduha  $\Pi_A = \infty$ , odnosno da pritisci u vazduhu ne zavise od položajne kote tačke. U tom slučaju, u prethodnom primeru bi pritisak u tački 3 (kod poklopca) bio isti kao i pritisak u tački 2, na spoju tečnosti i vazduha.

### 3.1.5 Rešenje osnovne jednačine hidrostatičke za nehomogeni fluid

Promena pritiska po visini je definisana diferencijalnom jednačinom (3.6). Za stišljivi izotropni fluid, gustina nije konstantna već zavisi od pritiska

<sup>5</sup>U poglavlju 2.3 *Gustina (specifična masa) fluida* je najavljeno da će u većini inženjerskih problema gustina vazduha biti zanemarena, jer je znatno manja od gustine tečnosti koje se standardno koriste.

i temperature. Ako se pretpostavi da je fluid *idealna gas*<sup>6</sup>, prema Bojl<sup>7</sup>-Mariotovom<sup>8</sup> zakonu apsolutni pritisak je:

$$p = \rho R_g T \quad (3.12)$$

gde je  $T$  apsolutna temperatura a  $R_g$  gasna konstanta koja za vazduh ima vrednost  $R_g = 286,7 \text{ J}/(\text{kg K})$ . Diferencijalna jednačina (3.6) je tada:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{pg}{R_g T} \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R_g T} dz \quad (3.13)$$

Vrednost gravitacionog ubrzanja se može smatrati konstantnom. Ako se pretpostavi izotermni proces, apsolutna temperatura  $T$  je takođe konstantna, pa se integracijom jednačine (3.13) dobija:

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{g}{R_g T}(z - z_0) \quad (3.14)$$

Za referentni apsolutni pritisak  $p_0$  na koti  $z_0 = 0$  uz smenu  $R_g T = p_0/\rho_0$ , dobija se:

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{gz}{R_g T}} \Rightarrow p = p_0 e^{-\frac{gz\rho_0}{p_0}} \quad (3.15)$$

### Primer 3.1.2

U aeronautici se standardno koriste sledeće osobine atmosfere na koti mora ( $z_0 = 0$ ):  $p_0 = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,  $T_0 = 288,15 \text{ K}$  i  $\rho_0 = 1,225 \text{ kg}/\text{m}^3$ . Kolika je gustina vazduha, u izotermnim uslovima, na 1000 m nadmorske visine?

Iz jednačine (3.15) se dobija apsolutni pritisak na visini od 1000 m:

$$p = p_0 e^{-\frac{gz\rho_0}{p_0}} = 1,013 \cdot 10^5 e^{-\frac{9,81 \times 1000 \times 1,225}{1,013 \cdot 10^5}} = 89,97 \text{ kPa}$$

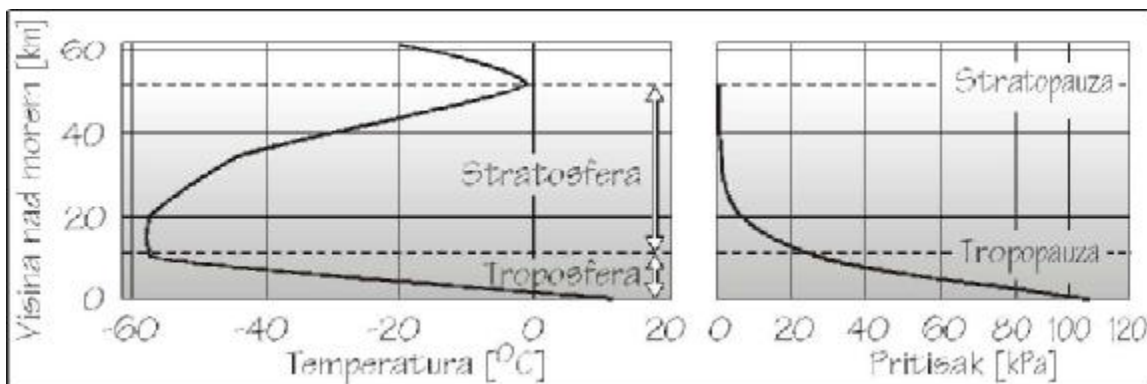
Gustina atmosfere se dobija iz Bojl-Mariotovog zakona, uz zadržavanje konstantne temperature  $T = T_0$  (izotermni proces):

$$\rho = \frac{p}{R_g T} = \frac{\rho_0 p T_0}{p_0 T} = \rho_0 \frac{p}{p_0} = 1,225 \times \frac{89,97 \cdot 10^3}{101,325 \cdot 10^3} = 1,088 \text{ kg}/\text{m}^3$$

<sup>6</sup>Idealan gas se sastoji od molekula, koji su idealno elastične kuglice, između kojih ne deluju sile, a zanemaruje se i sopstvena zapremina molekula.

<sup>7</sup>Robert Boyle (1627 - 1691) je engleski naučnik koji je istraživao elastična svojstva gasova. Nezavisno od Mariota je došao do zakona idealnog gasa.

<sup>8</sup>Edme Mariotte (1620 - 1684) se zbog svoje preciznosti, predanosti i raznovrsnosti, smatra ocem eksperimentalnih metoda u Francuskoj. Jedan je od prvih članova Francuske akademije nauka.



Slika 3.3: Raspored temperature i pritiska u Zemljinoj atmosferi

U rešavanju prethodnog primera, pogrešno je pretpostavljeno da je temperatura konstantna. Na slici 3.3 je prikazana promena pritiska i temperature u atmosferi, gde se vidi da u prvih 11 km, u troposferi, postoji linearan pad temperature do  $-56,5\text{ }^{\circ}\text{C}$  sa nagibom:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \lambda = 0,0065\text{ K/m}$$

Zavisnost temperature od visine  $T = T_0 - \lambda z$  se može staviti u diferencijalnu jednačinu (3.13). Nakon integracije, uz uslov da je  $z_0 = 0$ , dobija se jednačina koja daje vezu između pritiska i visine u atmosferi:

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{g}{R_g \lambda} \ln\left(\frac{T_0 - \lambda z}{T_0}\right)$$

odnosno, sređivanjem:

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\lambda z}{T_0}\right)^{g/R_g \lambda} \tag{3.16}$$

Ako se desna strana jednačine (3.16) razvije u red i uz uslov o malim visinama  $z$  se izostave svi ostali članovi osim prva dva, dobija se:

$$\frac{p}{p_0} = 1 - \frac{gz}{R_g T_0} \Rightarrow p = p_0 - \frac{p_0}{R_g T_0} gz = p_0 - \rho_0 gz$$

Izraz za pritisak ima isti oblik kao i osnovna jednačina hidrostatičke za nestišljive fluide (jednačina (3.8))  $p + \rho gz = \text{Const.}$  na osnovu čega se zaključuje da se za male promene visine (manje od 300 m u vazduhu) može sa dovoljnom tačnošću pretpostaviti da je gustina vazduha konstantna. Za veće promene visine, međutim, mora se koristiti jednačina (3.16).

**Primer 3.1.3**

Za iste podatke kao u prethodnom primeru, kolika je gustina vazduha na 1000 m visine ako se ne zanemari promena temperature?

Prema jednačini (3.16), pritisak je:

$$p = p_0 \left( 1 - \frac{\lambda z}{T_0} \right)^{g/R_g \lambda}$$

Koeficijent opadanja temperature je  $\lambda = 0,0065 \text{ K/m}$ , a gasna konstanta se dobija iz jednačine (3.12):

$$R_g = \frac{p_0}{\rho_0 T_0} = \frac{101,325 \cdot 10^3}{1,225 \times 288,15} = 287,05 \text{ J/kg K}$$

tako da je pritisak:

$$p = 101,325 \cdot 10^3 \left( 1 - \frac{0,0065 \times 1000}{288,15} \right)^{9,81/(287,05 \times 0,0065)} = 89,87 \text{ kPa}$$

Temperatura na 1000 m visine je  $T = T_0 - \lambda z = 288,15 - 0,0065 \times 1000 = 281,65 \text{ K}$ , pa je gustina atmosfere:

$$\rho = \frac{p}{R_g T} = \rho_0 \frac{p T_0}{p_0 T} = 1,225 \times \frac{89,87 \cdot 10^3 \times 288,15}{101,325 \cdot 10^3 \times 281,65} = 0,907 \text{ kg/m}^3$$

**3.2 Merenje pritiska**

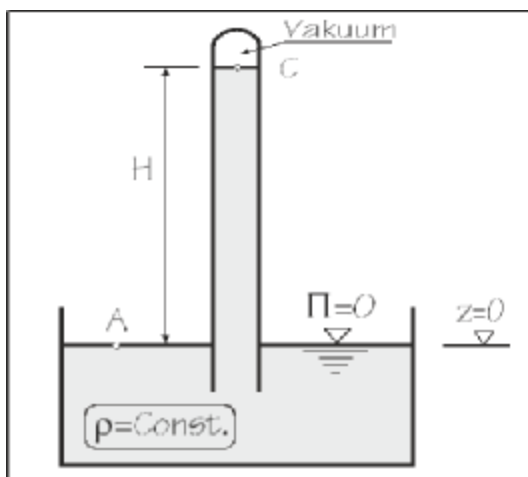
U poglavlju 2.6 *Pritisak*, na strani 28, jednačinom (2.16) su uvedene “dve vrste” pritisaka, apsolutni i hidrostatički. Razlika između tih pritisaka je u izboru referentnog sistema: apsolutni pritisak je pritisak u odnosu na apsolutnu nulu, dok se hidrostatički pritisak izražava u odnosu na atmosferski pritisak.

Apsolutni pritisak je uglavnom interesantan za proučavanje stišljivih fluida, gasova, čije osobine zavise od mere zbijenosti njihovih molekula. Kod tečnosti osobine uglavnom ne zavise od pritiska, pa je u izučavanju sila na konstrukciju jednostavnije koristiti hidrostatički pritisak (videti sliku 2.13).

Merenje pritiska se uvek svodi na *merenje razlike između referentnog pritiska i pritiska u fluidu*. Sâma pijezometarska cev prikazana na slici 3.2, je jedan od mernih uređaja: pritisak u tački 2 je jednak  $p_2 = \rho gh$ , u odnosu na atmosferski pritisak, jer je drugi kraj pijezometra u spoju sa atmosferom. Dakle, *pijezometrom se meri visina hidrostatičkog pritiska*. Naravno,

prikazana pijeometarska cev je jedan od najprostijih načina za merenje pritiska i to samo u tečnostima. U nastavku se daje kratak prikaz standardnih metoda za merenje pritiska, u gasovima i tečnostima.

### 3.2.1 Merenje apsolutnog pritiska barometrom



Slika 3.4: Princip rada barometra

Barometar je instrument za merenje apsolutog pritiska. Sastoji se od staklene cevi zatvorene sa gornje strane, koja se ispuni tečnošću, potopi u sud sa istom tečnošću i pažljivo podigne u vertikalni položaj. Ako je cev dovoljno dugačka, u zatvorenom prostoru iznad tečnosti će se pojaviti vakuum, deo u kome nema vazduha i u kome je apsolutni pritisak nula (idealni barometar), kao što je to prikazano na slici 3.4.

Ako u tački *A* vlada samo atmosferski pritisak, tada je hidrostatički pritisak jednak nuli pa se može za tečnost u barometru napisati:

$$p_A = 0 \Rightarrow \Pi = z_A = 0$$

gde je za referentnu kotu uzeta kota tačke *A*. Za tačku *C* koja se nalazi u istoj tečnosti važi:

$$\frac{p_C}{\rho g} + z_C = \Pi \Rightarrow \frac{p_C}{\rho g} + H = 0 \Rightarrow p_C = -\rho g H$$

Pritisak u prostoru iznad tačke *C* je isti kao i u tački *C*, pa se prema jednačini (2.16) može napisati:

$$p_{abs}^C = p^C + p_{atm} \Rightarrow p^C = p_{abs}^C - p_{atm}$$

Izjednačujući pritiske u tački *C* iz prethodne dve jednačine, uz uslov da je apsolutni pritisak iznad tečnosti nula  $p_{abs}^C = 0$ , odnosno da je iznad tečnosti idealan vakuum, dobija se:

$$p_{atm} = -p^C = \rho g H \tag{3.17}$$

Za merenje standardnog atmosferskog pritiska od  $p_{atm} = 101,325$  kPa, ako se kao tečnost koristi voda, visina stuba *H* bi bila:

$$H = \frac{p_{atm}}{\rho g} = \frac{101,325}{1 \times 9,81} = 10,33 \text{ m}$$



što nije baš zgodno za svakodnevnu upotrebu. Ako se za merenje upotrebi živa čija je specifična gustina  $\rho_Z = 13,52 \text{ kg/dm}^3$ , tada bi visina stuba bila  $H = 763,96 \text{ mm}$ .

Živin barometar za merenje atmosferskog pritiska je prvi otkrio Toričeli<sup>9</sup>. Pored smanjenja dužine barometra, upotrebom žive se smanjuju i greške nastale iz pretpostavke o idealnom vakuumu iznad tečnosti. Naime, u prostoru iznad tečnosti apsolutni pritisak nije nula, već je jednak apsolutnom pritisku pare za korišćenu tečnost. Za temperaturu od  $20^\circ\text{C}$ , pritisak živine pare je  $p_V = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ kPa}$  i ne zavisi mnogo od temperature, dok je za vodu skoro 10 000 puta veći i dosta se menja sa temperaturom.

### 3.2.2 Merenje pritiska manometrom

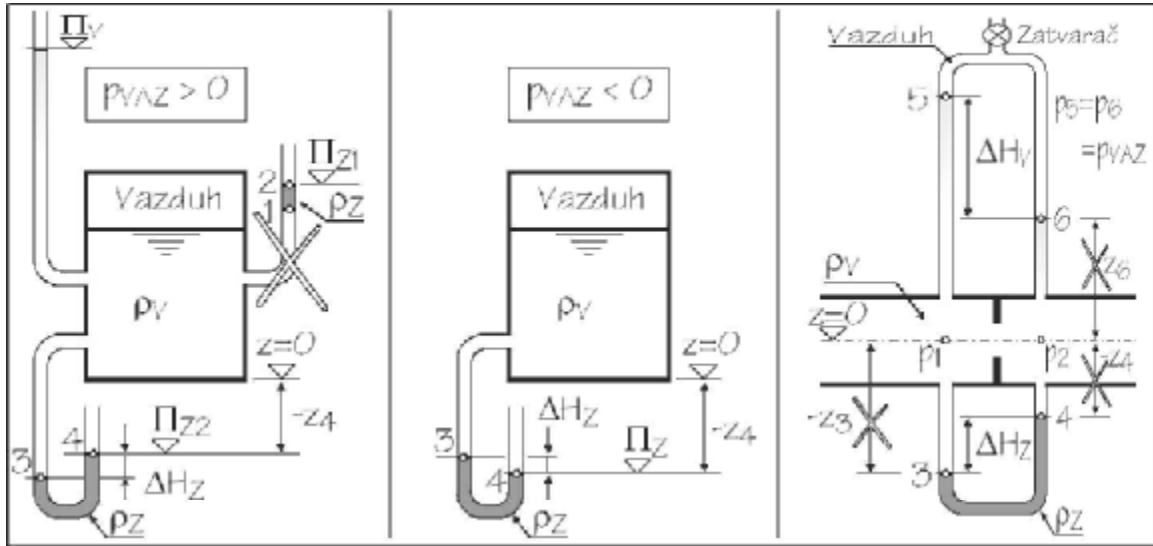
Manometri su uređaji kojima se *meri razlika pritiska između dve tačke*. Uopšteno gledajući, najčešće se sreću dva osnovna principa na kojima rade manometri. Prvi princip je korišćenje pijezometra, u kombinaciji sa nekim drugim fluidom, koji se ne meša (ne rastvara) sa radnim fluidom (na primer žive kada se meri pritisak u vodi) i koji omogućava efikasno merenje nivoa za potreban opseg pritiska. Drugi princip se zasniva na merenju sile ili deformacije elastične membrane, koja je u kontaktu sa mernim fluidom, pri čemu sâm način merenja može biti mehanički, električni ili čak i optički<sup>10</sup>.

Na slici 3.5 je prikazano nekoliko varijanti manometara sa pijezometrima. Na slici levo, za slučaj pozitivnog pritiska u vazduhu, visoka pijezometarska kota uslovljava dugačku pijezometarsku cev<sup>11</sup>. Ako se upotrebi živa, koja je 13,6 puta gušća od vode i sipa se u pijezometar, uz uslov da je pritisak u

<sup>9</sup>Evangelista Torricelli (1608 - 1647) potiče iz siromašne italijanske porodice. Obrazovao ga je ujak, monah, prvo privatno, a kasnije ilegalno u jezuitskoj školi. Toričeli je bio fasciniran astronomijom i matematikom. Bio je veliki poštovalac Galileja, koji ga je zvao da mu bude asistent. Prvi je dokazao da vakuum postoji i na osnovu tog dokaza je konstruisao barometar 1644. godine. Eksperimentalno je dokazao da je brzina kojom tečnost izlazi kroz oštroični otvor proporcionalna kvadratnom korenu visine do nivoa u rezervoaru. Niz matematičkih otkrića i dokaza, na žalost, ostaje samo u formi pisama, ne publikovanih u knjigama. Tek 1944. godine, skoro 300 godina nakon smrti, objavljuju se neki od sačuvanih rukopisa i pisama.

<sup>10</sup>U ovu grupu spada i bezkontaktno merenje vibracija stakla na prozorima pomoću laserskog zraka. Naravno, vibracije prozora su obično rezultat oscilacija pritiska u vazduhu koje su posledica ljudskog razgovora, a laser sa druge strane prozora koristi onaj ko želi neprimećeno da prisluškuje taj razgovor.

<sup>11</sup>U svim analizama se pretpostavlja da je pijezometarska cev uska i da zapremina fluida u njoj ne utiče na uslove zadatka.



Slika 3.5: Manometar sa U cevi za pozitivne pritiske (levo), negativne pritiske (sredina) i diferencijalni manometar (desno)

tački 1 isti za vodu i za živu, dobija se znatno niža piježometarska kota žive:

$$\Pi_{Z1} = \frac{p_1}{\rho_Z g} + z_1 = \frac{\rho_V g (\Pi_V - z_1)}{\rho_Z g} + z_1$$

Mada je piježometarska kota žive kod ovakvog manometra zgodnija za očitavanje od piježometarske kote vode, ovakav manometar se ne koristi (zato je na slici i precrtan), jer postoji opasnost od prodiranja žive u sud ukoliko se smanji pritisak. Bolji način merenja je pomoću piježometra U oblika, prikazanog u donjem levom uglu suda. Iz uslova da je pritisak u tački 3 isti za tačku koja se nalazi u vodi i u živi, i uz uslov da je piježometarska kota žive<sup>12</sup>  $\Pi_{Z2} = z_4$ , dobija se:

$$p_3 = \rho_V g (\Pi_V - z_3) = \rho_Z g (\Pi_{Z2} - z_3) = \rho_Z g \Delta H_Z$$

pa je razlika nivoa žive u U cevi  $\Delta H_Z$ :

$$\Delta H_Z = \frac{\rho_V}{\rho_Z} (\Pi_V - z_3)$$

Ako je poznata (izmerena) razlika nivoa žive u U cevi, uz smenu razlika  $z$  kota  $z_4 - z_3 = \Delta H_Z$ , može se odrediti piježometarska kota vode:

$$\Pi_V = \frac{\rho_Z g (\Pi_{Z2} - z_3)}{\rho_V g} + z_3 = \frac{\rho_Z}{\rho_V} \Delta H_Z + z_3 = \Delta H_Z \left( \frac{\rho_Z}{\rho_V} - 1 \right) + z_4$$

<sup>12</sup>Živa se koristi na dva mesta: u gornjem piježometru i u donjoj U cevi. Kako je u pitanju isti fluid ali ne povezan, na dva različita mesta, postoje i dve različite piježometarske kote  $\Pi_{Z1}$  i  $\Pi_{Z2}$ .

Manometar sa U cevi se može koristiti i za pozitivne i za negativne pritiske u fluidu. Na slici 3.5, u sredini, je prikazan isti sud samo sa negativnim pritiscima. Način proračuna ostaje isti: za izmerenu razliku nivoa žive u U cevi i za poznatu kotu tačke 4, kao i u prethodnom slučaju, računa se pijezometarska kota vode.

Ako drugi kraj pijezometra nije u spoju sa atmosferom, uslov da je pritisak na tom kraju nula i da je kota te tačke istovremeno pijezometarska kota se više ne može koristiti. Takvi manometri se zovu *diferencijalni manometri* jer direktno mere samo razliku pritisaka između dva preseka. Pomoću diferencijalnog manometra nije moguće odrediti pritisak u jednoj tački.

Na slici 3.5 desno, prikazane su dve varijante diferencijalnog manometra: donji sa živom, za merenje većih razlika pritisaka i gornji, sa obrnutom U cevi, za merenje manjih razlika pritisaka. Manometri su postavljeni ispred i iza suženja u cevi, kroz koju teče voda. U preseku 1, kao i u preseku 2, se može pretpostaviti da važi osnovna jednačina hidrostatičke i da u presjecima postoje pijezometarske kote takve da je  $\Pi_1 > \Pi_2$ .

Da bi se izračunala razlika pritisaka ili pijezometarskih kota pomoću diferencijalnog manometra sa živom, koristi se osnovna jednačina hidrostatičke (3.10) koja povezuje pritiske u dvema tačkama unutar jednog istog fluida. Ako je u tački 1 pritisak  $p_1$ , tada je u tački 3, koja je takođe unutar vode, pritisak:

$$p_3 = p_1 - \rho_V g(z_3 - z_1) = p_1 - \rho_V g z_3$$

gde je stavljeno  $z_1 = 0$  jer je tako postavljen i referentni sistem. Tačka 3 je istovremeno i u živi, pa se pritisak u tački 4 može dobiti kao:

$$p_4 = p_3 - \rho_Z g(z_4 - z_3) = p_3 - \rho_Z g \Delta H_Z = p_1 - \rho_V g z_3 - \rho_Z g \Delta H_Z$$

U prethodnoj jednačini je umesto  $(z_4 - z_3)$  stavljeno  $\Delta H_Z$ , veličina koja se očitava na diferencijalnom manometru. Na kraju, pritisak u tački 2 je:

$$p_2 = p_4 - \rho_V g(z_2 - z_4) = p_4 + \rho_V g z_4$$

odnosno zamenom  $p_4$  iz prethodnog izraza i prebacivanjem  $p_1 - p_2$  sa leve strane dobija se:

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \Delta H_Z(\rho_Z g - \rho_V g) \quad (3.18)$$

U dobijenoj jednačini za diferencijalni manometar sa U cevi, više ne figurišu kote  $z_3$  i  $z_4$ , već samo  $\Delta H_Z$ , pa su zbog toga te kote na slici 3.5

desno i precrtane. Ako se želi razlika pijezometarskih kota, dobijenu razliku pritisaka treba podeliti sa  $\rho_V g$ , pa će se dobiti:

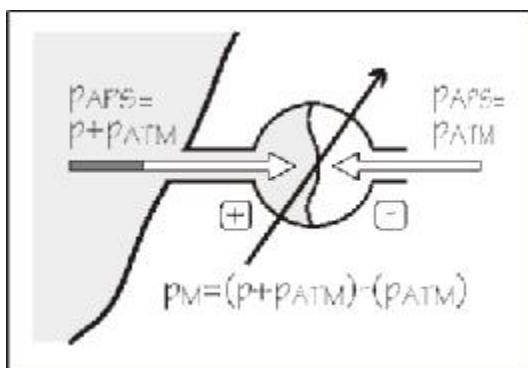
$$\Delta \Pi = \frac{\Delta p}{\rho_V g} = \Delta H_Z \left( \frac{\rho_Z}{\rho_V} - 1 \right)$$

Direktno merenje razlike pijezometarskih kota je moguće sa obrnutom U cevi, kao što je to prikazano na istoj slici (slika 3.5) sa gornje strane. Ako se kroz gornji ventil dovede vazduh takvog pritiska da se formira slobodna površina vode u obe cevi, iz uslova da je pritisak u vazduhu konstantan  $p_{VAZ} = p_5 = p_6$  sledi:

$$\rho_V g (\Pi_1 - z_5) = \rho_V g (\Pi_2 - z_6) \Rightarrow \Pi_1 - z_5 = \Pi_2 - z_6 \Rightarrow \Delta \Pi = \Delta H_V$$

Jednačina pokazuje da bez obzira na položaj slobodne površine u obrnutom U manometru, odnosno, bez obzira na pritisak u vazduhu iznad vode, izmereno  $\Delta H_V$  je istovremeno i traženo  $\Delta \Pi$  između preseka 1 i 2.

Drugi princip rada manometara, kao što je već rečeno, se zasniva na merenju sile na poznatu površinu. Sila se meri ili direktno ili posredno preko deformacije neke elastične membrane. Na slici 3.2 (strana 38) je na koti tačke 3 šematski prikazan manometar sa membranom.



Slika 3.6: Detalj otvorenog manometra

Uveličana skica manometra je prikazana i na slici 3.6. Sa leve strane, na elastičnu membranu manometra deluje apsolutni pritisak. Apsolutni pritisak je jednak zbiru atmosferskog i hidrostatičkog pritiska ( $p_{abs,levo} = p + p_{atm}$ ) dok sa desne strane deluje samo atmosferski pritisak ( $p_{abs,desno} = p_{atm}$ ). Ugib membrane manometra je proporcionalan razlici levog i desnog apsolutnog pritiska, odnosno, proporcionalan je hidrostatičkom pritisku. Preko odgovarajućeg mehanizma, ugib membrane se pretvara u okretanje pokazne igle, na kojoj se očitava pritisak.

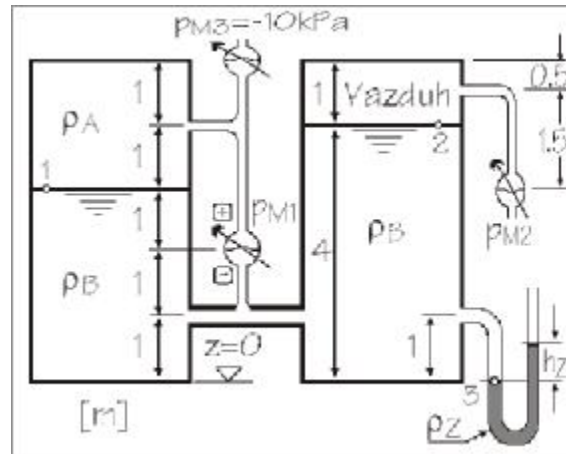
U upotrebi su i diferencijalni manometri, kod kojih desna strana manometra nije u kontaktu sa atmosferom, već sa nekim drugim pritiskom. Ugib membrane manometra je tada proporcionalan razlici ta dva pritiska.

Manometri koji rade na bazi merenja sile, spadaju u *posredne merne uređaje*, jer se ne meri direktno pritisak već neka druga veličina koja je posledica pritiska. Zbog toga svi takvi manometri moraju proći kroz proceduru kalibracije: upoređuje se pokazivanje manometra sa nekim poznatim

pritiskom i tako se formira skala na kojoj će se kasnije očitavati nepoznati pritisak. Manometar se može kalibrisati da pokazuje pritiske u paskalima, barima ili direktno visinu pritiska za određenu tečnost<sup>13</sup>.

**Primer 3.2.1**

Na slici su prikazana dva spojena suda. U prvom sudu su tečnosti gustina  $\rho_A = 0,7 \text{ kg/dm}^3$  i  $\rho_B = 1,0 \text{ kg/dm}^3$  a u drugom je iznad tečnosti  $\rho_B$  vazduh. Za date dimenzije i pritisak na manometru 3  $p_{M3} = -10 \text{ kPa}$ , odrediti pijezometarske kote za tečnosti A i B, kao i čitanje na manometrima. Kolika je visina  $h_Z$  u živinom manometru, ako je  $\rho_Z = 13,6 \text{ kg/dm}^3$ ?



Prvo se postavlja referentni sistem  $z = 0$  na najnižoj koti sudova. Manometar  $M3$  je u tečnosti A na koti  $z_{M3} = 5,0 \text{ m}$  i na osnovu njegovog pokazivanja se određuje pijezometarska kota  $\Pi_A$ :

$$\Pi_A = \frac{p_{M3}}{\rho_A g} + z_{M3} = \frac{-10}{0,7 \times 9,81} + 5,0 = 3,544 \text{ m}$$

Da bi se odredila pijezometarska kota fluida B, prvo treba odrediti pritisak u tački 1 na granici dva fluida:

$$p_1 = \rho_A g (\Pi_A - z_1) = 0,7 \times 9,81 (3,544 - 3,0) = 3,73 \text{ kPa}$$

$$\Pi_B = \frac{p_1}{\rho_B g} + z_1 = \frac{3,73}{1,0 \times 9,81} + 3,0 = 3,38 \text{ m}$$

Pritisak u vazduhu, u drugom sudu, je isti kao i pritisak u tački 2:

$$p_{VAZ} = p_2 = \rho_B g (\Pi_B - z_2) = 1,0 \times 9,81 (3,38 - 4,0) = -6,08 \text{ kPa}$$

Pokazivanje manometra  $p_{M2}$  je jednako pritisku u vazduhu, bez obzira na položajnu kotu manometra:

$$p_{M2} = p_{VAZ} = -6,08 \text{ kPa}$$

Diferencijalni manometar  $M1$  pokazuje razliku pritisaka između njegove pozitivne i negativne strane:

$$p_{M1} = p_{(+)} - p_{(-)} = \rho_A g (\Pi_A - z_{M1}) - \rho_B g (\Pi_B - z_{M1})$$

<sup>13</sup>Većina aparata za merenje krvnog pritiska koje lekari koriste ima manometar sa membranom, na kome je skala u milimetrima živinog stuba, imitirajući manometre sa U cevi i živom koji su nekada bili u upotrebi. Mada jedinica [mmHg] nije u skladu sa SI sistemom, takvi manometri se i dalje koriste jer je ta jedinica za krvni pritisak opšte prihvaćena.

$$p_{M1} = 0,7 \times 9,81(3,544 - 2,0) - 1,0 \times 9,81(3,38 - 2,0) = -2,94 \text{ kPa}$$

Da bi se odredilo čitanje na živinom manometru, potrebno je prvo izračunati pijezometarsku kotu žive, koristeći tačku 3:

$$p_3 = \rho_B g(\Pi_B - z_3) = 1,0 \times 9,81(3,38 - 0,0) = 33,16 \text{ kPa}$$

$$\Pi_Z = \frac{p_3}{\rho_Z g} + z_3 = \frac{33,16}{13,6 \times 9,81} + 0,0 = 0,249 \text{ m}$$

što je istovremeno i tražena visina  $h_Z$ :

$$h_Z = \Pi_Z - z_3 = 0,249 - 0,0 = 0,249 \text{ m}$$

### 3.3 Hidrostatičke sile na čvrste granične površine

Koristeći osnovnu jednačinu hidrostatičke, moguće je odrediti pritisak u bilo kojoj tački fluida. Ako se posmatra čvrsta kontura, koja je u kontaktu sa tim fluidom (zid suda, brod, ustava na brani ili kapija na brodskoj prevodnici) inženjere više interesuje sila usled delovanja fluida na koju treba dimenzionisati konturu, nego sâm pritisak. U nastavku će se prvo obraditi najjednostavniji slučaj ravne horizontalne površine, gde je pritisak uz celu površinu konstantan. Nešto komplikovaniji slučaj je ravna vertikalna površina, jer se vrednost pritiska menja sa dubinom. Nakon toga će se obraditi opšti slučaj, sila na krivu površinu, tako što će se ukupna sila podeliti na horizontalnu i vertikalnu komponentu i za svaku od komponenti dati uputstva za rešavanje. Na kraju poglavlja će se dati detaljnije par posebnih slučajeva koji se često sreću i obuhvaćeni su opštim rešenjem: sila na potoplenu konturu, ravanski zadaci i sile od gasova.

#### 3.3.1 Hidrostatičke sile na ravne površine

##### 3.3.1.1 Horizontalna ravna površina

Na horizontalnu površinu, čiji je ort<sup>14</sup> vertikalna (u  $z$  pravcu) deluje ukupna sila takođe vertikalnog pravca. Na osnovu jednačina (3.4) i (3.5) datih na strani 36, zaključuje se da je *cela površina isključivo u kontaktu sa jednim istim fluidom i da je pritisak duž površine konstantan*.

<sup>14</sup>Ort - jedinični vektor.

### 3.3. HIDROSTATIČKE SILE NA ČVRSTE GRANIČNE POVRŠINE 51

Sila je vektor, koji je definisan intenzitetom, pravcem i smerom, kao i napadnom tačkom. *Intenzitet sile na horizontalnu ravnu površinu je jednak proizvodu pritiska i površine:*

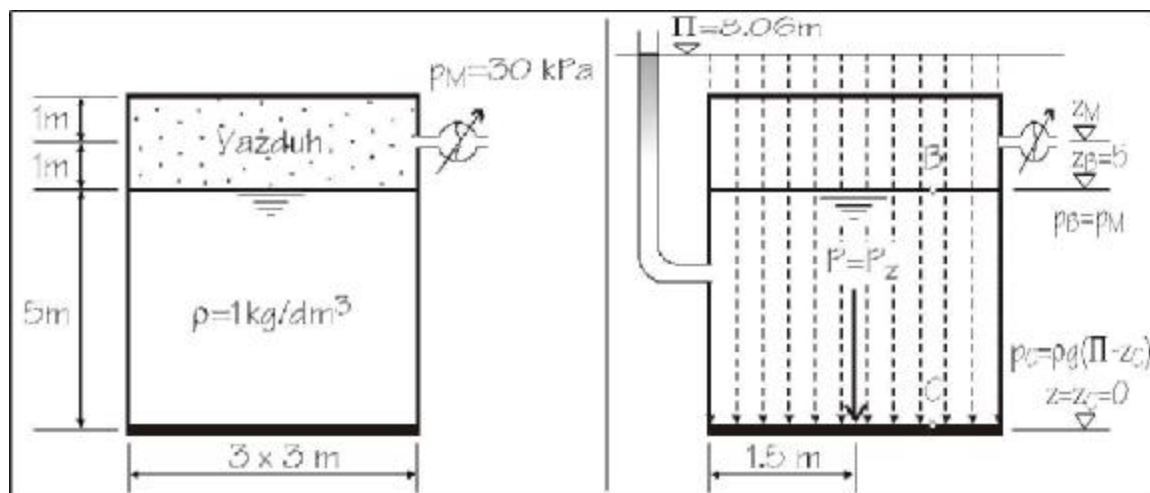
$$P = \int_A p \, dA = p \int_A dA = p \times A \quad (3.19)$$

gde je iskorišćen uslov da je pritisak konstantan.

*Pravac sile je vertikalan, u pravcu z ose. Ako je pritisak pozitivan, smer sile je od fluida ka površini, a ako je pritisak negativan, smer sile je od površine ka fluidu (fluid "usisava" površinu na koju deluje). Mesto delovanja sile je u težištu površine A.*

#### Primer 3.3.1

Za sud sa slike i dato čitanje na manometru, kolika je ukupna sila na dno?



Manometar na slici meri hidrostatički pritisak u vazduhu. Kako je  $p_{VAZ} = \text{Const.} \neq f(z)$ , isti pritisak je i na samoj površini tečnosti, u tački B. Na osnovu pritiska u tački B, određuje se pijezometarska kota tečnosti:

$$\Pi = \frac{p_B}{\rho g} + z_B = \frac{30}{1 \times 9,81} + 5,0 = 8,058 \text{ m}$$

Pritisak u tački C, koja se nalazi iznad površine na koju se traži sila, se dobija preko određene pijezometarske kote:

$$p_C = \rho g (\Pi - z_C) = 1,0 \times 9,81 \times (8,058 - 0,0) = 79,05 \text{ kPa}$$

pa je ukupna sila na dno suda:

$$P = p_C \times A = 79,05 \times 3 \times 3 = 711,45 \text{ kN}$$

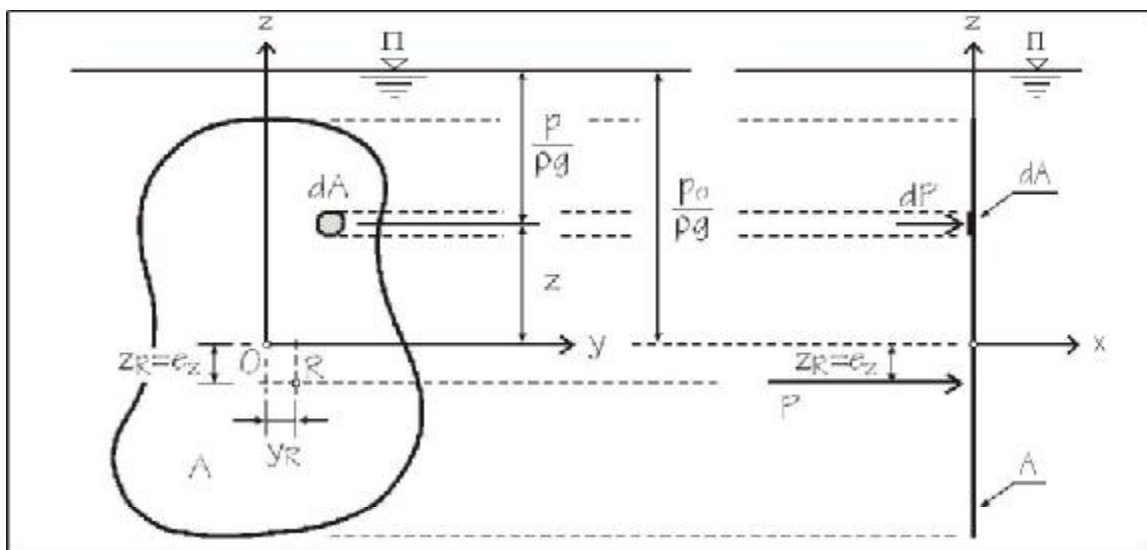
Mesto sile je na sredini dna suda, dok je smer od fluida prema konturi, kao što je i prikazano na slici.

3.3.1.2 Vertikalna ravna površina - jedan fluid

Na vertikalnu ravnu površinu, čiji je ort u horizontalnom pravcu u ravni  $(x, y)$ , deluje ukupna sila koja je horizontalna i koja je u pravcu orta. Pritisak se menja po vertikalnom pravcu u skladu sa osnovnom jednačinom hidrostatičke (3.9), tako da se u izrazu za silu:

$$P = \int_A p \, dA \tag{3.20}$$

pritisak  $p$  ne može izvući ispred integrala kao u jednačini (3.19).



Slika 3.7: Sila na vertikalnu ravnu površ - intenzitet i mesto sile

Na slici 3.7 je prikazana vertikalna ravna površina u ravni  $(y, z)$ , koja je u kontaktu sa homogenim nestišljivim fluidom gustine  $\rho$ . Za poznati pritisak  $p_O$  u težištu površine  $A$ , na koti  $Z_O = 0$ , iz osnovne jednačine hidrostatičke se može dobiti pijezometarska kota  $\Pi$ :

$$\frac{p_O}{\rho g} + z_O = \Pi \quad \Rightarrow \quad \Pi = \frac{p_O}{\rho g}$$

Na mestu elementarne površi  $dA$  vlada pritisak  $p$ , koji se može izraziti u odnosu na poznati pritisak u težištu površine  $p_O$ :

$$p = \rho g(\Pi - z) = \rho g \left( \frac{p_O}{\rho g} - z \right) = p_O - \rho g z$$

gde je položajna kota  $z$  pozitivna za tačke iznad težišta (prikazano na slici 3.7) i negativna za tačke ispod težišta.



### 3.3. HIDROSTATIČKE SILE NA ČVRSTE GRANIČNE POVRŠINE 53

Sila na elementarnu površ  $dA$  za koju je određen pritisak  $p$  je:

$$dP = (p_O - \rho g z) dA$$

a, na ukupnu površinu  $A$ , sila je integral svih sila na elementarne površi:

$$P = \int_A (p_O - \rho g z) dA = p_O A - \rho g \int_A z dA \quad (3.21)$$

Poslednji sabirak u izrazu (3.21) predstavlja prvi moment površine<sup>15</sup> u odnosu na težište i on je nula ( $\int_A z dA = 0$ ), pa je *intenzitet ukupne sile na vertikalnu ravnu površinu* jednak proizvodu pritiska u težištu ravne površi  $A$  i njene ukupne površine:

$$P = p_O A \quad (3.22)$$

*Pravac sile* je određen ortom površine, na slici 3.7 je to  $x$  pravac. *Smer sile* zavisi od znaka pritiska na koti težišta površine  $z_O$ : ako je pritisak pozitivan, ukupna sila deluje prema površini i obrnuto, ako je pritisak negativan, ukupna sila deluje od površine ka fluidu.

*Mesto delovanja sile*, odnosno kota napadne tačke sile  $P$  bi bila u težištu površine (tačka  $O$  na slici 3.7) ako bi pritisak bio konstantan po celoj površini. **Pritisak je, međutim, veći na donjim delovima površine**, pa se može očekivati i da je mesto delovanja rezultante ispod težišta. Postavljanjem uslova da je suma momenata svih elementarnih sila oko težišne ose  $Y$  ista kao i moment rezultujuće sile, dobija se:

$$M_Y = P \times z_R - \int_A z dP = 0 \quad \Rightarrow \quad P \times z_R = \int_A z(p_O - \rho g z) dA$$

$$P \times z_R = p_O \int_A z dA - \rho g \int_A z^2 dA = -\rho g I_{YY} \quad (3.23)$$

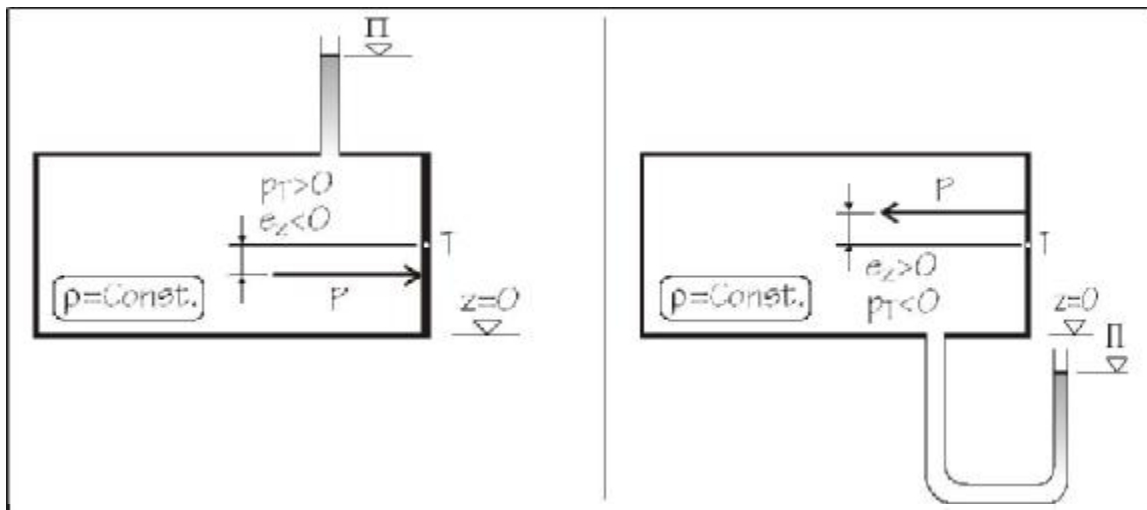
pa se kota mesta delovanja horizontalne komponente hidrostatičke sile može napisati kao:

$$e_z = -\frac{\rho g I_{YY}}{P} \quad (3.24)$$

uz uslov da je kota težišta  $z_O = 0$ , pa je i  $z_R = e_z$ .

U sređivanju jednačine (3.23) izostavljen je prvi integral  $\int_A z dA$ , jer on predstavlja statički moment površi u odnosu na težište i jednak je nuli.

<sup>15</sup>Prvi moment površine, ili statički moment površine oko ose  $z = k$  je  $\int_A (z - k) dA = \int_A z dA - kA$ . Ako je osa  $k$  na koti težišta površine  $A$ , tada je  $k = 1/A \int_A z dA$ , pa je i prvi moment površine za tu osu nula.



Slika 3.8: Mesto sile na vertikalnu ravnu površ - dva primera

Integral  $\int_A z^2 dA$ , u jednačini (3.23), je drugi moment površine<sup>16</sup>  $A$  u odnosu na težišnu osu  $Y$  i zamenjen je oznakom<sup>17</sup>  $I_{YY}$ .

Dobijeno rastojanje  $e_z$  u jednačini (3.24) se naziva *ekscentricitet* i predstavlja *orijentisano odstojanje između težišta i položaja horizontalne komponente sile*. Negativna vrednost znači da je za pozitivne pritiske, odnosno pozitivnu silu, mesto sile ispod težišta (kao na slici 3.7 ili slici 3.8 levo). Za negativne pritiske dobija se pozitivna vrednost ekscentriciteta, pa je napadna tačka sile iznad težišta površi (slika 3.8 desno).

Na sličan način kao što je dobijen ekscentricitet  $z_R$  može se dobiti i rastojanje  $y_R$  ukupne sile (slika 3.7):

$$e_y = -\frac{\rho g I_{YZ}}{P} \tag{3.25}$$

gde je  $I_{YZ} = \int_A yz dA$  centrifugalni moment površine u odnosu na težišne ose  $y$  i  $z$ . Za površine koje su simetrične oko  $y$  ili  $z$  ose, centrifugalni moment inercije je  $I_{YZ} = 0$  pa je i krak sile  $y_R = 0$ .

<sup>16</sup>Drugi moment površine se često pogrešno naziva i moment inercije. Inercija je osobina materije dok je drugi moment površine čisto geometrijska veličina. Naravno, ako se pretpostavi da je posmatrana površina jedinične debljine i jedinične gustine, tada su drugi moment površine i moment inercije istih vrednosti.

<sup>17</sup>Kada se pri proračunu drugog momenta površine, ili momenta inercije, koriste "gotovi" obrasci iz raznih matematičkih priručnika, treba voditi računa za koju osu je dat moment inercije. U proračunu ekscentriciteta je potreban težišni, sopstveni moment inercije, koji je istovremeno i minimalni moment inercije. Ako se u obrascima daje moment inercije za neku drugu osu  $Y'Y'$  potrebno je odrediti težišni moment inercije  $I_{YY} = I_{Y'Y'} - AL^2$ , gde je  $A$  površina površi a  $L$  rastojanje od ose  $Y'Y'$  do težišta, tj. ose  $YY$

### 3.3. HIDROSTATIČKE SILE NA ČVRSTE GRANIČNE POVRŠINE 55

U prilogu C knjige se mogu naći izrazi za površinu, položaj težišta i drugi moment površine, za neke najčešće korišćene oblike površina. Ukoliko se razmatrana površina može podeliti na nekoliko prostijih oblika, moguća je primena principa superpozicije: na svaki od delova se odredi zasebna sila i nađe mesto delovanja te sile, a zatim se vektorski saberu sve te paralelne sile u jednu rezultujuću.

#### 3.3.1.3 Vertikalna ravna površina - više fluida

Jednačine (3.22) za intenzitet i (3.24) za ekscentricitet sile na vertikalnu ravnu površinu su izvedene pod uslovom da je cela površina u kontaktu sa jednim fluidom konstantne gustine. Ako je površina u kontaktu sa dva ili više fluida, ukupna sila  $P$  se dobija kao vektorski zbir pojedinih sila  $P_i$  pri čemu za svaku od sila treba odvojeno odrediti intenzitet, smer i mesto delovanja.

Sve sile  $P_i$  su istog pravca, pa je intenzitet ukupne rezultujuće sile jednak zbiru intenziteta svih pojedinih sila:

$$P = \sum_i P_i$$

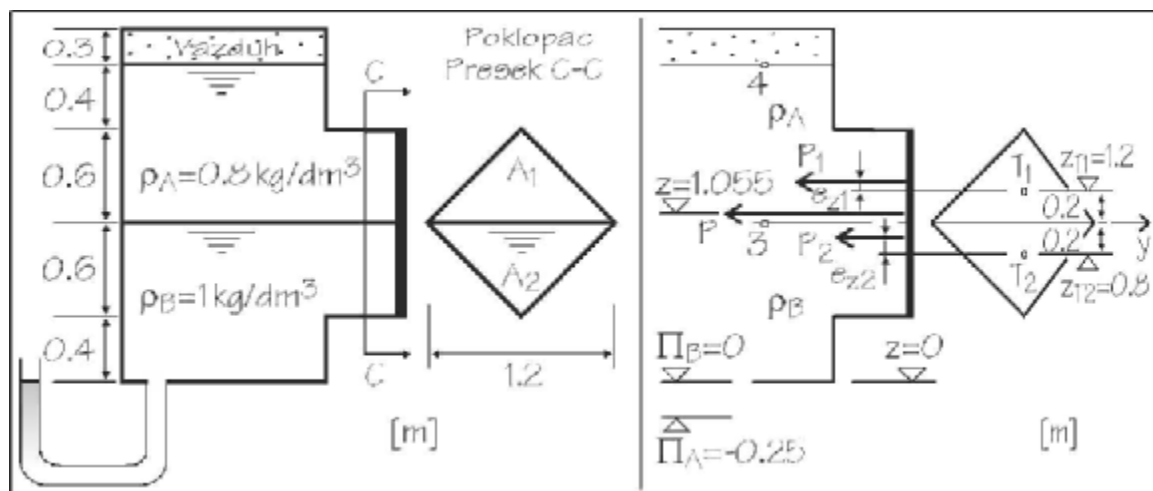
Položaj ukupne sile se dobija iz uslova da je suma momenata svih pojedinih sila oko jedne tačke isti kao moment ukupne sile:

$$z = \frac{P_i \times z_i}{P} = \frac{P_i \times (z_{O_i} + e_{z_i})}{P}$$

gde su položaji pojedinih sila svedeni na isti, nulti referentni sistem.

#### Primer 3.3.2

Na slici levo je prikazan zatvoreni rezervoar sa dva fluida. Za poznatu pijezometričku kotu donjeg fluida, odrediti ukupnu silu na poklopac.



Usvaja se referentni sistem  $z = 0$  na dnu suda. Pijezometarska kota za fluid gustine  $\rho_B$  je tada  $\Pi_B = 0$  m. Pritisak u tački 3 na kontaktu dva fluida je:

$$p_3 = \rho_B g (\Pi_B - z_3) = 1,0 \times 9,81 (0,0 - 1,0) = -9,81 \text{ kPa}$$

a pijezometarska kota za fluid gustine  $\rho_A$  je:

$$\Pi_A = \frac{p_3}{\rho_A g} + z_3 = \frac{-9,81}{0,8 \times 9,81} + 1,0 = -0,25 \text{ m}$$

Mada se u zadatku ne traži, pritisak u vazduhu iznad fluida gustine  $\rho_A$  je jednak pritisku u tački 4:

$$p_4 = \rho_A g (\Pi_A - z_4) = 0,8 \times 9,81 (-0,25 - 2,0) = -17,66 \text{ kPa}$$

Ukupna sila na poklopac  $P$  se računa kao zbir dve sile,  $P_1$  na gornji deo poklopca površine  $A_1$ , koji je u kontaktu sa fluidom gustine  $\rho_A$  i  $P_2$  na donji deo poklopca površine  $A_2$ , koji je u kontaktu sa fluidom gustine  $\rho_B$ . Sile se, prema jednačini (3.22), računaju na osnovu pritisaka u težištima i pripadajućih površina:

$$p_{T1} = \rho_A g (\Pi_A - z_{T1}) = 0,8 \times 9,81 (-0,25 - 1,2) = -11,38 \text{ kPa}$$

$$P_1 = p_{T1} A_1 = -11,38 \times \frac{1}{2} 1,2 \times 0,6 = 4,1 \text{ kN}$$

$$p_{T2} = \rho_B g (\Pi_B - z_{T2}) = 1,0 \times 9,81 (0,0 - 0,8) = -7,848 \text{ kPa}$$

$$P_2 = p_{T2} A_2 = -7,848 \times \frac{1}{2} 1,2 \times 0,6 = 2,83 \text{ kN}$$

Negativna vrednost pritiska znači da sila deluje od konture ka fluidu, što je i nacrtano na desnom delu slike (zato je i vrednost sile pozitivna, jer se smer poklapa sa nacrtanim smerom). Kote mesta delovanja sile se dobijaju na osnovu proračuna ekscentriciteta. Prvo se određuje drugi moment površine:

$$I_{YY} = \frac{bh^3}{36} = \frac{1,2 \times 0,6^3}{36} = 0,0072 \text{ m}^4$$

a zatim mesta sile:

$$z_1 = z_{T1} + e_{z1} = z_{T1} - \frac{\rho_A g I_{YY}}{P_1} = 1,2 - \frac{0,8 \times 9,81 \times 0,0072}{-4,1} = 1,214 \text{ m}$$

$$z_2 = z_{T2} + e_{z2} = z_{T2} - \frac{\rho_B g I_{YY}}{P_2} = 0,8 - \frac{1,0 \times 9,81 \times 0,0072}{-2,83} = 0,825 \text{ m}$$

Zbir sile  $P_1$  i  $P_2$  daju ukupnu silu na poklopac, intenziteta:

$$P = P_1 + P_2 = 4,1 + 2,83 = 6,93 \text{ kN}$$

sa kotom napadne tačke:

$$z = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2}{P} = \frac{4,1 \times 1,214 + 2,83 \times 0,825}{6,93} = 1,055 \text{ m}$$

### 3.3. HIDROSTATIČKE SILE NA ČVRSTE GRANIČNE POVRŠINE 57

U zadatku treba obratiti pažnju na sabiranje sila  $P_1$  i  $P_2$ . Sile su sračunate na osnovu negativnih pritisaka, pa su i njihove vrednosti negativne. Kao negativne vrednosti su uzete i pri proračunu ekscentriciteta. Ali, pošto su na slici nacrtane u svom pravom, negativnom smeru, od konture ka fluidu, u njihovom proračunu se koristi samo apsolutna vrednost sile (znak (+) ili (-) se određuje u odnosu na usvojeni referentni smer, gledajući sliku).

#### 3.3.2 Hidrostatičke sile na krive površine

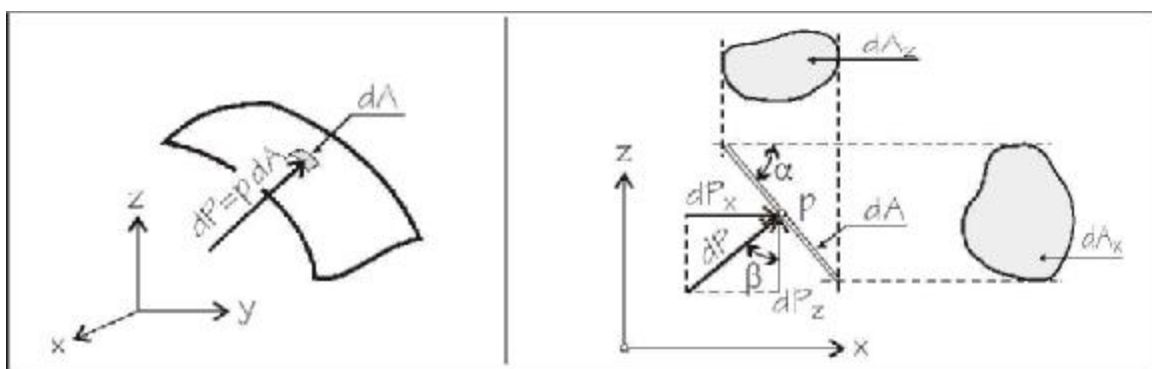
Krive površine su površine nepravilnog oblika, koje ne leže u jednoj ravni. Izučavanje hidrostatičke sile na krive površine predstavlja opšti slučaj, iz koga se mogu izvesti i sile na ravne površine, prikazane u prethodnom poglavlju.

Ukupna hidrostatička sila na krivu površinu ima, po pravilu, tri međusobno ortogonalne komponente:

$$\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y + \vec{P}_z$$

Izučavanje ukupne sile se svodi na razlaganje sile na  $x$ ,  $y$  i  $z$  pravac, na proračun svake od tri komponenti posebno (intenzitet, smer, mesto delovanja) i zatim vektorsko sabiranje u prostornu rezultantu.

##### 3.3.2.1 Razdvajanje ukupne sile na horizontalnu i vertikalnu komponentu



Slika 3.9: Razdvajanje ukupne hidrostatičke sile na komponente

Posmatra se elementarna površ  $dA$ , koja je sa leve strane u kontaktu sa fluidom gustine  $\rho$ , a sa desne strane sa vazduhom, slika 3.9. Površ  $dA$  je proizvoljnog oblika i položaja u prostoru. Elementarna sila na površ  $dA$  je  $dP = p dA$  gde je  $p$  pritisak koji je funkcija vertikalne koordinate  $p = f(z)$ .

Za ugao  $\alpha$  između elementarne površi  $dA$  i njene projekcije na horizontalnu ravan  $z$  (ravan čija je normala  $z$  osa) (slika 3.9, desno), može se napisati:

$$\sin \alpha = \frac{dA_x}{dA} \quad \cos \alpha = \frac{dA_z}{dA}$$

dok je između elementarne sile  $dP$  na površ  $dA$  i njene projekcije na pravce  $x$  i  $z$  ugao  $\beta$ :

$$\sin \beta = \frac{dP_x}{dP} \quad \cos \beta = \frac{dP_z}{dP}$$

Na osnovu sličnosti trouglova, sledi da su uglovi  $\alpha$  i  $\beta$  jednaki, pa se može napisati:

$$\frac{dP_x}{dP} = \frac{dA_x}{dA} \Rightarrow dP_x = \frac{dP}{dA} dA_x = p dA_x \tag{3.26}$$

$$\frac{dP_z}{dP} = \frac{dA_z}{dA} \Rightarrow dP_z = \frac{dP}{dA} dA_z = p dA_z \tag{3.27}$$

gde je odnos  $\frac{dP}{dA}$  zamenjen pritiskom  $p$  na mestu  $dA$ . Iz jednačine (3.26) (ili (3.27)) sledi da je horizontalna (ili vertikalna) komponenta ukupne hidrostatičke sile  $dP_x$  (ili  $dP_z$ ) na elementarnu površ  $dA$  jednaka proizvodu pritiska  $p$  i projekcije elementarne površi na vertikalnu (ili horizontalnu) ravan  $dA_x$  (ili  $dA_z$ ). Pritisak  $p$  iz jednačine (3.26) (ili (3.27)) je pritisak na mestu elementarne površi  $dA$  a ne njene projekcije<sup>18</sup>  $dA_x$  (ili  $dA_z$ ).

U jednačini (3.26) (i (3.27)) proizvod pritiska  $p$  i projekcije elementarne površi  $dA_x$  (i  $dA_z$ ) predstavlja, u stvari, ukupnu silu na tu projekciju, pa se može napisati:

$$dP_x \text{ na površ } dA = p dA_x = dP \text{ na površ } dA_x \tag{3.28}$$

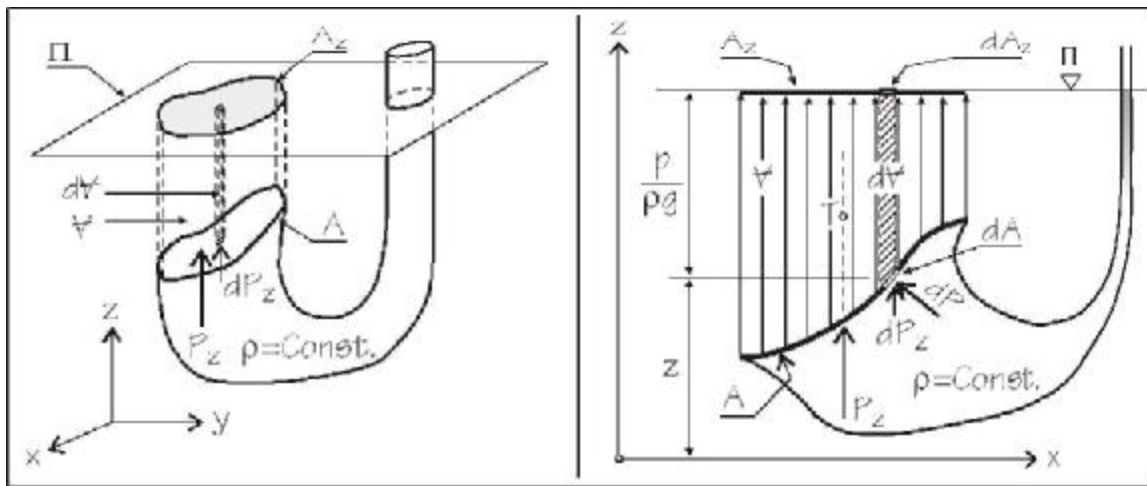
$$dP_z \text{ na površ } dA = p dA_z = dP \text{ na površ } dA_z \tag{3.29}$$

Proračun komponenti ukupne sile na elementarnu površ se, prema prethodnoj jednačini, praktično svodi na proračun ukupne hidrostatičke sile  $dP$  na ravne vertikalne ( $dA_x$ ) i horizontalne ( $dA_z$ ) projekcije te krive elementarne površi. Naravno, sve što je napisano za horizontalnu komponentu u  $x$  pravcu, važi i za drugu horizontalnu projekciju u  $y$  pravcu, koja je upravna na ravan slike 3.9.

<sup>18</sup>Kod horizontalne projekcije ovaj uslov je uvek ispunjen ukoliko se ravan projektovanja nalazi u istom fluidu, jer su iste kote elementarne površi i njene projekcije. Za vertikalnu projekciju ovo nije slučaj, pa treba voditi računa da se gleda pritisak kod površi a ne kod projekcije površi.

### 3.3. HIDROSTATIČKE SILE NA ČVRSTE GRANIČNE POVRŠINE 59

#### 3.3.2.2 Vertikalna komponenta hidrostatičke sile



Slika 3.10: Vertikalna komponenta hidrostatičke sile

Na osnovu jednačine (3.27) i slike 3.10 vertikalna komponenta ukupne hidrostatičke sile na elementarnu površ  $dA$  je:

$$dP_z = p dA_z = \rho g \frac{p}{\rho g} dA_z = \rho g dV$$

gde je  $\frac{p}{\rho g} dA_z$  elementarna zapremina koja se može smestiti između  $dA$  i njene projekcije na piježometarsku ravan  $dA_z$ .

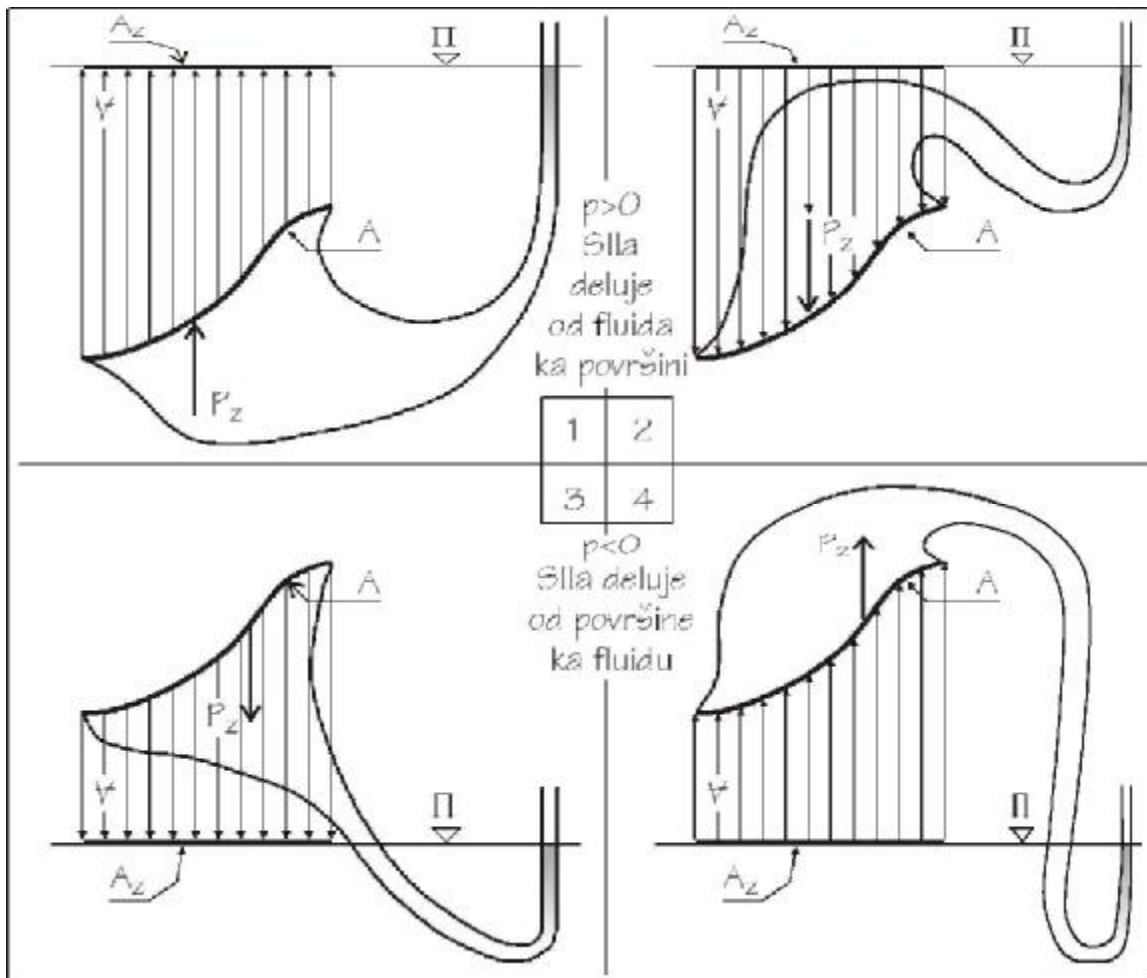
Integracijom, odnosno sumiranjem svih sila  $dP_z$  po celoj površini  $A$ , dobija se ukupna vertikalna komponenta hidrostatičke sile:

$$P_z = \rho g V \tag{3.30}$$

U jednačini (3.30) proizvod  $\rho g V$  predstavlja težinu fluida zapremine  $V$ . Dakle, intenzitet vertikalne komponente hidrostatičke sile, kojom fluid deluje na površi  $A$ , jednak je težini fluida koji se može<sup>19</sup> smestiti u zapreminu između površi  $A$  i njene projekcije na ravan piježometarske kote  $A_z$ .

Pravac sile je vertikalnan a smer sile zavisi od znaka pritiska u fluidu uz granicu  $A$ : ako je  $p > 0$  sila deluje od fluida ka površi (kao i na slici 3.10) i obrnuto, ako je  $p < 0$  sila deluje ka fluidu. Mesto sile je određeno koordinatama  $(x, y)$  težišta zapremine  $V$ , pomoću koje se računa sila: sila deluje vertikalno na površinu  $A$  u pravcu težišta zapremine  $V$ .

<sup>19</sup>Kao što je prikazano na slici 3.10, u prostoru između površi na koju tražimo vertikalnu komponentu sile i projekcije te površi na  $\Pi$ -ravan nije obavezno da se nalazi fluid  $\rho$ , tu može biti vazduh, drugi fluid ili više drugih fluida. Intenzitet sile se, po definiciji, računa kao da je ceo prostor ispunjen fluidom gustine  $\rho$ .



Slika 3.11: Primeri određivanja vertikalne komponente hidrostatičke sile

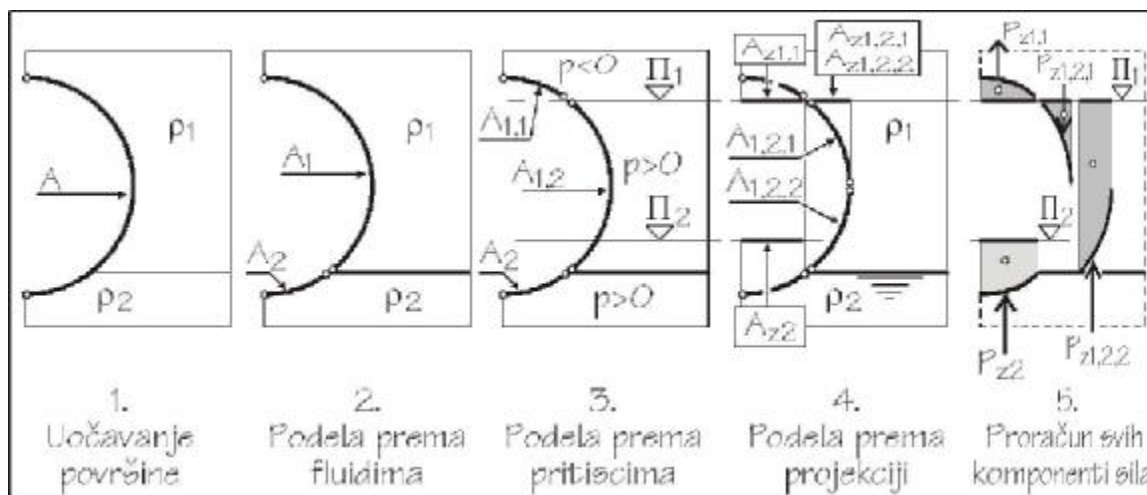
Na slici 3.11 su data četiri moguća slučaja odnosa površine  $A$  i pije-zometarske ravni  $\Pi$  kao i strane sa koje se nalazi fluid. U prva dva slučaja (1 i 2), pritisci u fluidu su pozitivni i sila deluje od fluida ka površini. U druga dva slučaja (3 i 4), površina  $A$  se nalazi iznad pije-zometarske ravni pa su i pritisci u fluidu uz površinu negativni, a sila deluje od površine ka fluidu. Na osnovu datog primera se može zaključiti da smer “na gore” ili “na dole” nije povezan sa znakom pritiska (u primerima 1 i 2 sila deluje jednom na gore a drugi put na dole, a isto je i u primerima 3 i 4), te ga ne treba ni koristiti u određivanju smeru sile.

Svojevrsan “recept” za određivanje vertikalne komponente hidrostatičke sile je prikazan na slici 3.12:

1. *Uočavanje površine:* Prvi korak je jasno definisanje površine  $A$ , kon-ture na koju se traži sila. Na slici 3.12 je to polovina cilindra, nacrtana



### 3.3. HIDROSTATIČKE SILE NA ČVRSTE GRANIČNE POVRŠINE 61



Slika 3.12: Postupak za određivanje vertikalne sile

debljom linijom.

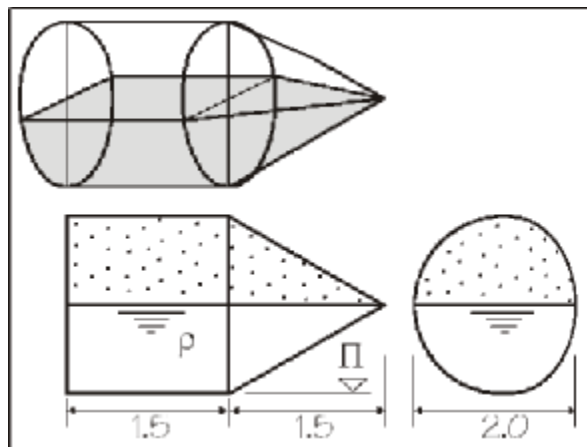
2. **Podela prema fluidima:** Potrebno je zadovoljiti uslov da je gustina fluida uz konturu  $\rho = \text{Const}$ . Ako je više od jednog fluida u kontaktu sa površinom  $A$ , treba površinu podeliti na delove,  $A_1, A_2, \dots$
3. **Podela prema pritiscima:** Izračunati pijeziometarske kote (odnosno pijeziometarske ravni) za svaki od fluida. Ukoliko  $i$ -ta pijeziometarska ravan preseca  $i$ -tu površinu (na slici 3.12 je to slučaj sa  $A_1$ ), podeliti tu površinu na delove sa pritiscima  $p > 0$  i sa pritiscima  $p < 0$ .
4. **Podela prema projekciji:** Proveriti jednoznačnost projekcije svake od površina na odgovarajuću pijeziometarsku ravan. Površina  $A_{1,2}$  (na slici 3.12), kada se projektuje na ravan  $\Pi_1$ , daje istu projekciju za donji i gornji deo površine. Neophodno je površinu  $A_{1,2}$  podeliti na dve manje površine,  $A_{1,2,1}$  i  $A_{1,2,2}$ , kako bi projekcija bila jednoznačna.
5. **Proračun svih komponenti sile:** Za svaku od površina sračunati vertikalnu silu:
  - (a) Odrediti zapreminu  $V_j$  između površine i njene projekcije na odgovarajuću  $\Pi_i$  ravan. Intenzitet sile je  $P_{z,i,j} = \rho_i g V_j$
  - (b) Odrediti smer sile prema znaku pritiska, ka površini za  $p > 0$  ili od površine za  $p < 0$ .
  - (c) Odrediti težište zapremine  $V_j$ , njegovo udaljenje od  $x$  i  $y$  referentnih osa ( $z$  koordinata nam ne treba!). Položaj sile je u pravcu težišta, dok sila deluje na sâmu površinu.

6. *Sabiranje svih kolinearnih komponenti sila:* Komponente sile se sabiraju kao paralelne sile. Rezultanta je jednaka zbiru intenziteta sila istog smera i razlici sila suprotnog smera, a mesto se dobija na osnovu zbira momenata oko neke tačke. Moment svih komponenti sile mora biti isti kao i moment rezultante.

Za proračun vertikalne komponente hidrostatičke sile potrebno je odrediti zapreminu tela koje se dobija projekcijom krive površine na piježometarsku ravan. U prilogu C su date zapremine i položaj težišta nekih jednostavnijih tela. Zapremine složenih tela se dobijaju kombinacijom (sabiranjem i oduzimanjem) zapremina datih, osnovnih tela.

**Primer 3.3.3**

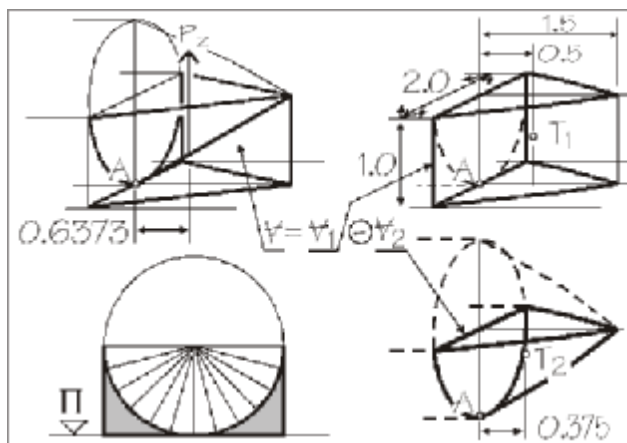
U rezervoaru oblika horizontalnog cilindra sa kupom na kraju, do polovine dubine se nalazi fluid gustine  $\rho = 1 \text{ kg/dm}^3$ . Iznad fluida se nalazi vazduh. Ako je piježometarska kota fluida na koti donje izvodnice cilindra, kao na slici, kolika je vertikalna komponenta sile od fluida na donju polovinu kupe? Donji deo kupe je u kontaktu sa samo jednim fluidom, a pritisak je svuda manji od nule. Projekcija donjeg dela kupe na piježometarsku ravan daje trougao, osnovice 2,0 m i visine 1,5 m.



Na slici je prikazan pojačano donji deo kupe i njegova projekcija, trougao u  $\Pi$  ravni. Intenzitet vertikalne sile je jednak zapremini između kupe i njene projekcije, pomnožen sa  $\rho g$ :

$$P_z = \rho g V$$

Složena zapremina se može odrediti kao razlika zapremina trostrane prizme  $V_1$  i polovine kupe  $V_2$ :



$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 1,5 \times 1,0 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2,0^2 \pi}{4} \times 1,5 = 0,7146 \text{ m}^3$$

### 3.3. HIDROSTATIČKE SILE NA ČVRSTE GRANIČNE POVRŠINE 63

pa je intenzitet vertikalne sile:

$$P_z = 1,0 \times 9,81 \times 0,7146 = 7,01 \text{ kN}$$

Pritisak u fluidu uz površinu je negativan, tako da je smer sile od konture prema fluidu, odnosno, na gore. Položaj sile je u pravcu težišta složene zapremine i računa se iz sume momenata oko tačke A. Težište prizme u  $x$  pravcu u odnosu na tačku A je  $x_1 = 1/3 \times 1,5 = 0,5$  m a težište kupe je  $x_2 = 1/4 \times 1,5 = 0,375$  m pa je položaj ukupne vertikalne sile:

$$x = \frac{x_1 V_1 - x_2 V_2}{V} = \frac{0,5 \times 1,5 - 0,375 \times 0,7854}{0,7146} = 0,637 \text{ m}$$

#### 3.3.2.3 Horizontalne komponente hidrostatičke sile

Postoje dve horizontalne komponente ukupne hidrostatičke sile, u pravcu  $x$  i  $y$  koordinatnih osa. U poglavlju 3.3.2.1, *Razdvajanje ukupne sile na horizontalnu i vertikalnu komponentu*, na slici 3.9, prikazana je samo  $x$  komponenta, ali sve što je napisano o razdvajanju ukupne sile na komponente, kao i izvedena jednačina (3.28), može se primeniti i na drugi pravac. Takođe, i tekst u nastavku će se uglavnom baviti  $x$  komponentom, a sve isto će važiti i za  $y$  komponentu sile.

Komponenta ukupne sile u  $x$  pravcu je  $dP_x = p dA_x$ . Prema jednačinama (3.26) i (3.28), ona je jednaka ukupnoj sili  $dP$  na površ  $dA_x$ . Sumiranjem svih sila  $dP_x$  po površi  $dA_x$  dobija se:

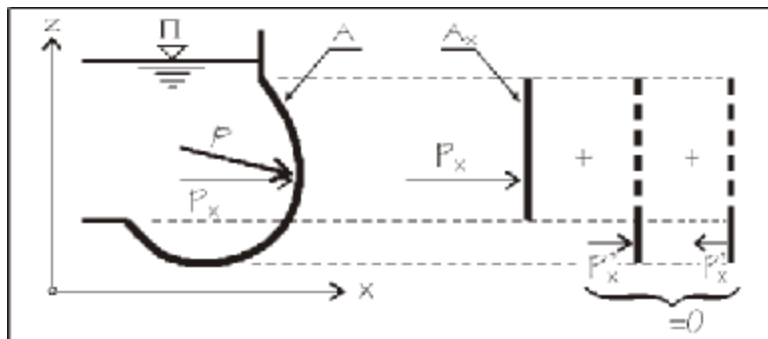
$$P_x = \int_{A_x} p dA_x$$

Integral je već viđen u poglavlju 3.3.1.2, *Vertikalna ravna površina - jedan fluid*, gde je određivana ukupna sila na vertikalnu ravnu površinu. Shodno jednačinama od (3.20) do (3.22), može se odmah napisati da je sila  $P_x$  jednaka:

$$P_x = p_O A_x = P \text{ na površinu } A_x \quad (3.31)$$

odnosno, da je *intenzitet horizontalne komponente ukupne hidrostatičke sile* na bilo koju ravan  $A$  jednak ukupnoj sili na vertikalnu projekciju te ravni  $A_x$ . Pritisak  $p_O$  je pritisak na koti težišta projekcije  $A_x$  i, ako je pozitivan, onda je *pravac sile* ka konturi. *Mesto sile* je izvan težišta za ekscentricitet  $e_z$  dat jednačinom (3.24).

Način proračuna sile je sličan kao i kod vertikalne komponente. Potrebno je prvo razdeliti krivu površinu  $A$  prema fluidima, a zatim svaku od tih



**Slika 3.13:** Horizontalna komponenta sile  $P_x$ : deo površine ima istu projekciju ali je smer sile suprotan, pa se te dve sile poništavaju

površina projektovati na vertikalnu ravan, vodeći računa o jednoznačnosti projekcije. Čest je slučaj da su projekcije iste, a smer sile suprotan, pa se sile na taj deo poništavaju (slika 3.13, sile  $P'_x$ ). Za svaku od površina treba odrediti intenzitet sile (prema (3.31)), smer i mesto (prema (3.24), a zatim vektorski sabrati kolinearne sile i naći mesto delovanja rezultantne  $P_x$ .

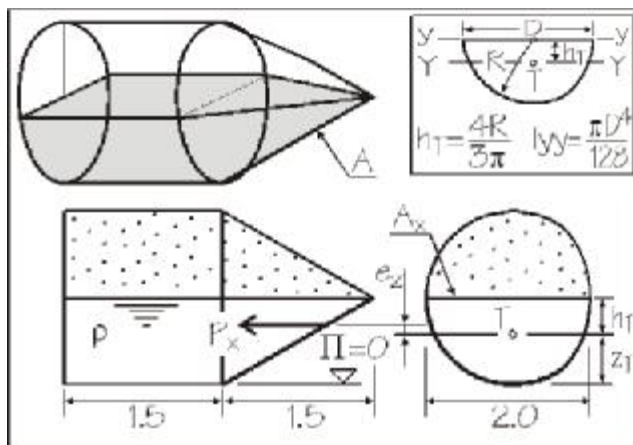
**Primer 3.3.4**

U cilindričnom rezervoaru iz prethodnog primera, kolika je horizontalna komponenta sile na donju polovinu kupe?

Donji deo kupe je u kontaktu sa samo jednim fluidom. Projekcija dela kupe na vertikalnu  $x$  ravan je polukrug, prečnika  $D = 2,0$  m, površine:

$$A_x = \frac{\pi D^2}{8} = 1,571 \text{ m}^2$$

Za proračun sile potreban je pritisak na koti težišta polukruga. U tablicama se obično nalazi podatak  $h_T$  kao što je prikazano i u izdvojenom delu slike:



$$h_T = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \times 1,0}{3 \times \pi} = 0,424 \text{ m}$$

pa je kota težišta:

$$z_T = \frac{D}{2} - h_T = 1,0 - 0,424 = 0,576 \text{ m}$$

### 3.3. HIDROSTATIČKE SILE NA ČVRSTE GRANIČNE POVRŠINE 65

Pritisak na mestu težišta je:

$$p_T = \rho g(\Pi - z_T) = 1,0 \times 9,81(0,0 - 0,576) = -5,65 \text{ kPa}$$

a intenzitet sile na polukrug, odnosno horizontalna komponenta sile na polukupu:

$$P_x = p_T A_x = -5,65 \times 1,571 = -8,88 \text{ kN}$$

Sila je negativna, pa deluje od konture ka fluidu. Sila je za ekscentricitet pomena u odnosu na težište:

$$e_z = -\frac{\rho g I_{YY}}{P_x}$$

gde je  $I_{YY}$  drugi moment površine u odnosu na težišnu osu. Kod polukruga se u tablicama standardno daje podatak za drugi moment površine u odnosu na osu  $(y, y)$  koja prolazi kroz prečnik (kao na izdvojenom delu slike):

$$I_{yy} = \frac{\pi D^4}{128} = \frac{\pi \times 2^4}{128} = 0,393$$

tako da je drugi moment površine svesti na težišnu osu  $(Y, Y)$ :

$$I_{YY} = I_{yy} - h_T^2 A_x = 0,393 - 0,424^2 \times 1,571 = 0,1106 \text{ m}^4$$

Ekscentricitet sile  $e_z$  je:

$$e_z = -\frac{1,0 \times 9,81 \times 0,1106}{-8,88} = +0,122 \text{ m}$$

pa je mesto sile  $P_x$  na koti:

$$z_x = z_T + e_z = 0,576 + 0,122 = 0,698 \text{ m}$$

#### 3.3.2.4 Sabiranje vertikalne i horizontalnih komponenti hidrostatičke sile

U najvećem broju slučajeva, hidrostatičke sile na konturu se koriste za statičko dimenzionisanje preseka ili konstrukcije. Izračunate komponente ukupne sile,  $P_x$ ,  $P_y$  i  $P_z$ , se mogu direktno redukovati na određeni presek i dobiti moment, normalna sila i transverzalna sila.

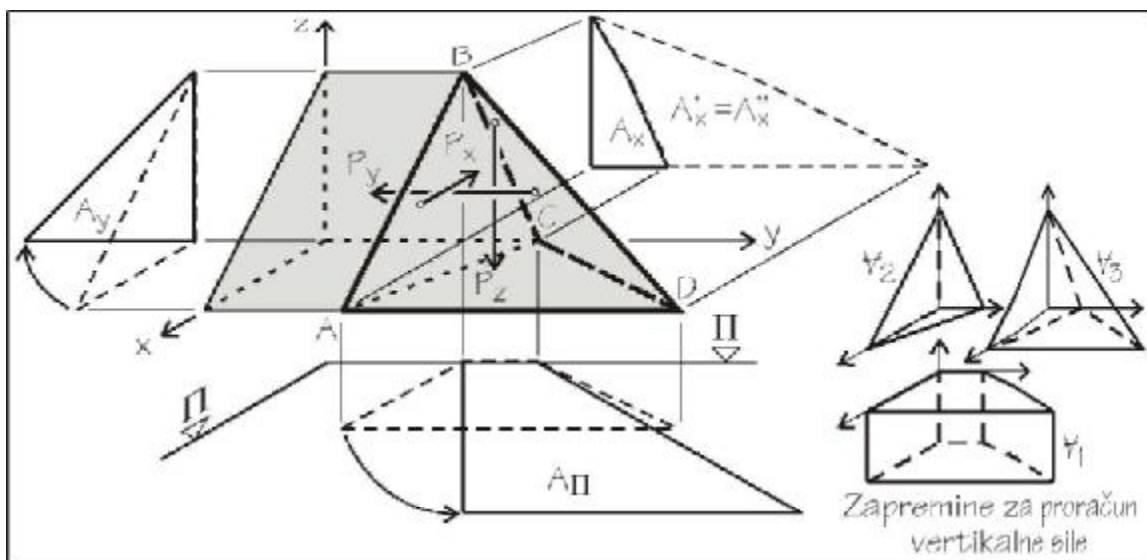
Kod simetričnih tela, dve komponente ukupne sile leže u ravni simetrije (treća komponenta sile ne mora biti nula) i one se mogu vektorski sabrati u jednu rezultantu. U prethodna dva primera sa cilindričnim rezervoarom

i polukupom, ravan  $y$  je ravan simetrije, pa se komponente  $P_x$  i  $P_z$  mogu sabrati u rezultantu intenziteta:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} = \sqrt{8,88^2 + 7,01^2} = 11,3 \text{ kN}$$

koja je pod uglom  $\alpha$  u odnosu na  $x$  osu:

$$\alpha = \arctan \frac{P_z}{P_x} = \arctan \frac{7,01}{8,88} = 38,3^\circ$$



Slika 3.14: Kod složene nesimetrične površine nijedan par komponenti sila ( $(P_x, P_y)$  ili  $(P_x, P_z)$  ili  $(P_y, P_z)$ ) ne leži u istoj ravni

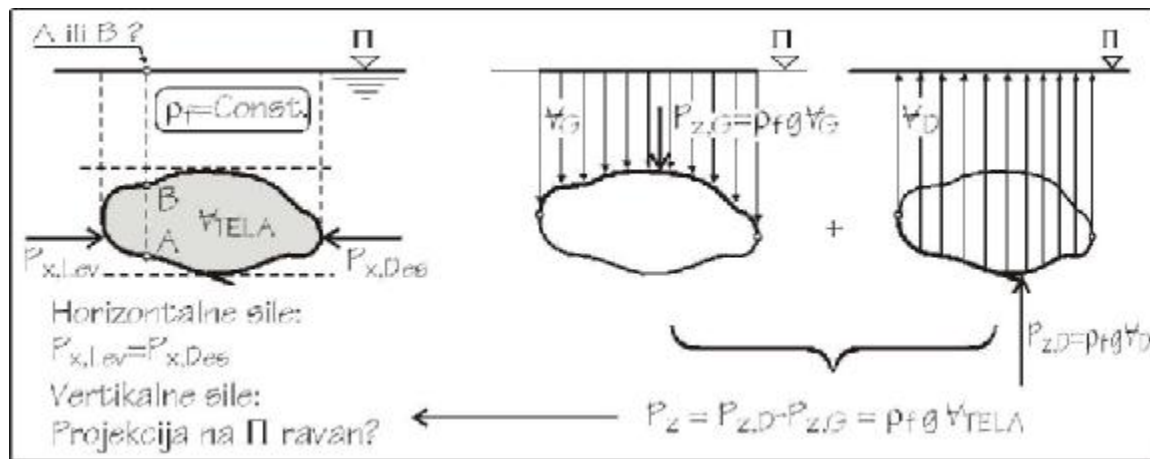
U opštem slučaju, međutim, komponente ukupne hidrostatičke sile ne leže u istoj ravni, odnosno, ne susstiču se u jednoj zajedničkoj tački, tako da i ne postoji jedna rezultujuća ukupna sila. Kao primer, na slici 3.14, data je nesimetrična površina, sastavljena od trouglova ABD i BDC. Na slici su nacrtane projekcije površine na  $x$  i  $y$  ravan (pravougli trouglovi  $A_x$  i  $A_y$ ), pomoću kojih se računaju horizontalne komponente  $P_x$  i  $P_y$  ukupne sile. Nacrtana je i projekcija na piježometarsku ravan (trapez  $A_{II}$ ) dok su u uglu slike date (umanjeno i razdvojeno) zapremine tela između površine i projekcije  $A_{II}$ , potrebne za proračun vertikalne komponente  $P_z$  ukupne sile. Sa slike se vidi da tri komponente ukupne sile nemaju ni jednu zajedničku presečnu tačku, tako da nije moguće njihovo vektorsko sabiranje.

### 3.3.3 Hidrostatička sila potiska

Na sva tela koja su delimično ili potpuno potopljena u fluid deluje vertikalna sila, koja se često naziva i sila potiska. Intenzitet, smer i mesto de-

### 3.3. HIDROSTATIČKE SILE NA ČVRSTE GRANIČNE POVRŠINE 67

lovanja sile potiska se računaju prema načelima iznetim u poglavlju 3.3.2.2, *Vertikalna komponenta hidrostatičke sile*. Na telo, međutim, ne deluje horizontalna sila, pa je vertikalna komponenta istovremeno i ukupna hidrostatička sila.



Slika 3.15: Sila na zatvorenu konturu

Na slici 3.15 je prikazano čvrsto telo nepravilnog oblika potpuno potopljeno u fluid gustine  $\rho_f$ . Horizontalna komponenta ukupne hidrostatičke sile je nula: leva i desna strana projekcije tela su istovetne, pa su leva i desna komponenta horizontalne sile istog intenziteta, ali suprotnih smerova, pa se poništavaju.

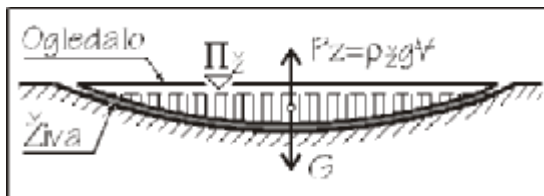
Vertikalna komponenta sile ima dva dela: zbog uslova o jednoznačnoj projekciji zatvorene konture tela na  $\Pi$  ravan, sila na gornji deo površine je  $P_{z,G} = \rho_f g V_G$  i deluje na dole, dok je sila na donji deo  $P_{z,D} = \rho_f g V_D = \rho_f g (V_{TELA} + V_G)$  i deluje na gore. Sumiranjem te dve sile, dobija se ukupna sila potiska sa smerom na gore:

$$P_z = P_{z,D} - P_{z,G} = \rho_f g (V_{TELA} + V_G) - \rho_f g V_G = \rho_f g V_{TELA} \quad (3.32)$$

Dobijena sila potiska je jednaka težini fluida iste zapremine kao što je i zapremina potopljenog dela tela, odnosno, sila potiska je jednaka težini istisnutog fluida. Jednačina (3.32) je poznata i kao Arhimedov<sup>20</sup> zakon. Mesto delovanja sile potiska je u težištu istisnute zapremine  $V_{TELA}$ .

<sup>20</sup>Archimedes (287 - 212 pre nove ere) rođen u Sirakuzi (Sicilija), najveći antički matematičar, fizičar, astronom i inženjer. Studirao je u Aleksandriji a učitelj mu je bio Euklid. Od oca je nasledio ljubav prema astronomiji. Konstruisao je planetarijum na vodeni pogon kao i zavojnu pumpu (mada se veruje da je u primitivnijem obliku pumpa postojala još u Egiptu). Izučavao je silu, polugu (*Dajte mi oslonac, pomeriću Zemlju!*), silu potiska i stabilnost tela. Uspostavio je čuveni Arhimedov zakon, po kome se težina potopljenog tela umanjuje za težinu tečnosti koje to telo potapanjem istisne.

Na potopljeno telo deluju ukupno dve sile, sopstvena težina i sila potiska  $P_z$ . Iz uslova o mirovanju potopljenih tela, sledi da *sile težine i potiska moraju biti iste po intenzitetu*. U suprotnom, telo bi ili tonulo (veća sila težine) ili bi isplivalo na površinu (veća sila potiska).



Slika 3.16: Sila potiska je nekada znatno veća od težine prisutnog fluida

i ogledala stavi veoma tanak sloj žive, formiraće se sila potiska koja je jednaka šrafiranoj zapremini pomnoženoj sa specifičnom težinom žive. Ta sila potiska će se uravnotežiti sa sopstvenom težinom ogledala, tako da će ogledalo “plivati” u živi. Međutim stvarna težina žive, koja se nalazi u podlozi, je znatno manja od ostvarene sile potiska.

Kao i kod vertikalne komponente hidrostatičke sile, i kod sile potiska se računa zapremina fluida do pije-zometarske kote, bez obzira da li se u tom prostoru zaista nalazi taj fluid. Na slici 3.16 je prikazan “trik”, kako teška teleskopska ogledala postaju “laka kao perce”.

**Primer 3.3.5**

Na slici je prikazan areometar za merenje gustine tečnosti. Ukupna masa areometra je  $M = 150$  gr i baždaren je pomoću tečnosti gustine  $\rho_B = 1,0$  kg/dm<sup>3</sup>. U tečnosti nepoznate gustine  $\rho$  areometar je potonuo za  $\Delta h = 2$  cm više nego u tečnosti  $\rho_B$ . Kolika je gustina nepoznate tečnosti?

Na areometar u ravnoteži deluju dve sile: sopstvena težina  $G = Mg$  i sila potiska  $P_z = \rho g V$ , gde je  $V$  zapremina onog dela areometra koji je unutar tečnosti gustine  $\rho$ . Prilikom baždarenja, važila je jednačina:

$$\rho_B g V_B = Mg$$

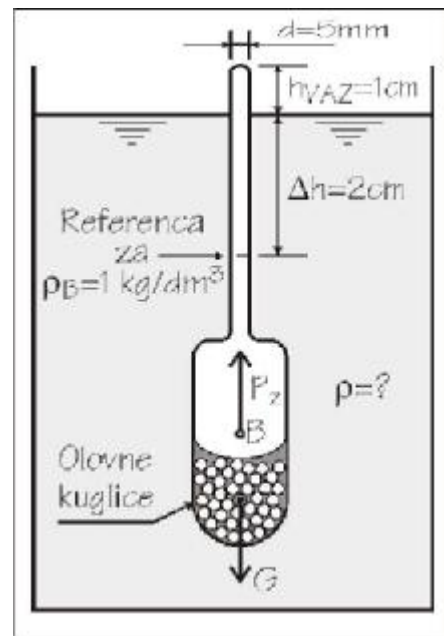
a u nepoznatoj tečnosti važi:

$$\rho g (V_B + \Delta V_B) = Mg$$

gde je  $\Delta V_B = \Delta h \times d^2 \pi / 4$  dodatna zapremina usled veće potopljenosti areometra.

Ako se izjednače dve prethodne jednačine, dobija se:

$$\rho g (V_B + \Delta h \frac{d^2 \pi}{4}) = \rho_B g V_B$$





### 3.3. HIDROSTATIČKE SILE NA ČVRSTE GRANIČNE POVRŠINE 69

odakle se dobija nepoznata gustina:

$$\rho = \rho_B \frac{V_B}{V_B + \Delta V_B}$$

Zapreminu areometra u trenutku baždarenja,  $V_B$  možemo dobiti iz prve jednačine, znajući ukupnu masu areometra  $M$ :

$$V_B = \frac{Mg}{\rho_B g} = \frac{M}{\rho_B} = \frac{0,15}{1,0} = 0,15 \text{ dm}^3$$

pa je tražena gustina:

$$\rho = 1,0 \frac{0,15}{0,15 + 0,2 \times 0,05^2 \pi / 4} = 0,997 \text{ kg/dm}^3$$

Sila potiska, definisana jednačinom (3.32), važi za bilo koji fluid, kako za tečnosti, tako i za gasove. Kod tela koja su delimično potopljena u tečnost, na gornji deo, koji je u vazduhu i koji ima zapreminu  $V_G$ , deluje i sila potiska od vazduha  $P_z = \rho_{\text{vaz}} g V_G$ . Dakle, u prethodnom primeru je trebalo uzeti u obzir i silu potiska na deo areometra iznad tečnosti:

$$P_{z,\text{vaz}} = \rho_{\text{vaz}} g \frac{d^2 \pi}{4} h_{\text{vaz}}$$

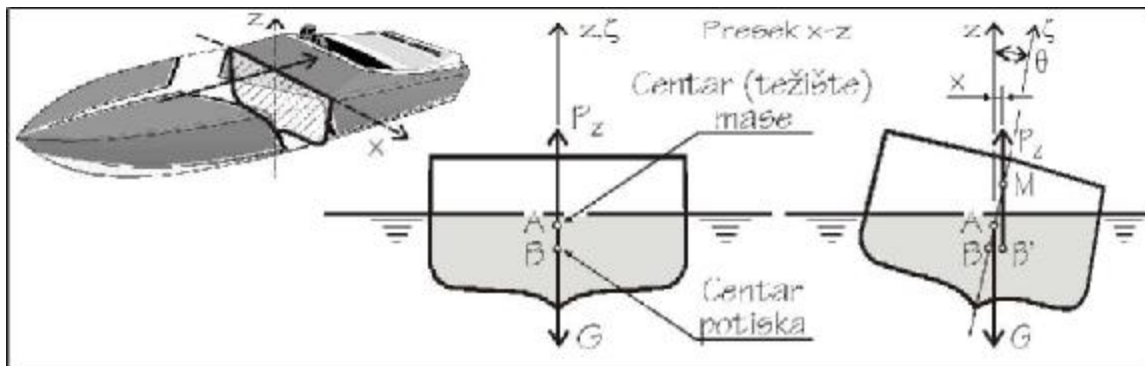
pa bi jednačina ravnoteže sila glasila:

$$\rho g (V_B + \Delta h \frac{d^2 \pi}{4}) + \rho_{\text{vaz}} g \frac{d^2 \pi}{4} h_{\text{vaz}} = Mg$$

Naravno, sila potiska od vazduha je veoma mala i uzima se u obzir samo kod preciznih proračuna<sup>21</sup>. Kod većine inženjerskih primena, sila potiska usled vazduha, se zanemaruje.

Mesto delovanja sile potiska je u težištu potopljene zapremine (tačka  $B$  u prethodnom primeru), dok sila težine deluje u težištu mase tela (tačka  $A$ ). Kod homogenih tela, te dve tačke se poklapaju, dok kod nehomogenih tela težište mase može biti iznad ili ispod težišta zapremine. Kao rezultat različitih mesta delovanja sila, kod potopljenih tela treba analizirati i stabilnost: ako se telo zarotira za neki ugao  $\theta$ , da li nastali spreg sila potiska i težine deluje tako da telo vraća u prethodni položaj (stabilna ravnoteža) ili teži da poveća ugao  $\theta$  (nestabilna ili labilna ravnoteža). Moguć je i slučaj da je rezultujući moment sprega sila nula, pa telo ostaje u novom položaju (neutralna ravnoteža). Kod potpuno potopljenih tela važi pravilo da je ravnoteža stabilna ako je tačka potiska iznad težišta mase tela.

<sup>21</sup>U metrologiji, pri određivanju gustina fluida sa tačnošću na 4-toj decimali, neophodno je uvesti i silu potiska od vazduha u račun. Takođe, uticaj vazduha se uzima u obzir i kod merenja mase čvrstih tela na vagi, jer se u stvari meri težina tela umanjena za silu potiska od vazduha! A gustina vazduha nije konstantna, već zavisi od temperature i vlažnosti.



Slika 3.17: Stabilnost broda

Kod tela koja su delimično potopljena u fluid (tela koja plove), uslov za stabilnu ravnotežu nije uvek tako oštar kao kod potopljenih tela. Na slici 3.17, prikazan je poprečni presek kroz trup čamca. Prema uslovu za potopljena tela, čamac se nalazi u stanju labilne ravnoteže, jer je tačka potiska  $B$  ispod težišta mase  $A$ . Kada se, međutim, čamac nagne za ugao  $\theta$ , menja se i zapremina koja daje silu potiska (osena površina na slici), pa se i centar te zapremine, odnosno tačka potiska ( $B'$ ), pomera<sup>22</sup>. Ako vertikalna linija, povučena kroz novi centar zapremine, preseca osu  $\zeta$  definisanu tačkama  $\overline{BA}$  u tački  $M$  iznad težišta  $A$ , spreg sila sa krakom  $x$  će težiti da vrati čamac u prethodni položaj. Tačka  $M$  se zove *metacentar*, a rastojanje  $\overline{AM}$  visina metacentra<sup>23</sup>. Za ploveća tela može se definisati pravilo da su u stabilnoj ravnoteži ako je metacentar iznad težišta mase tela.

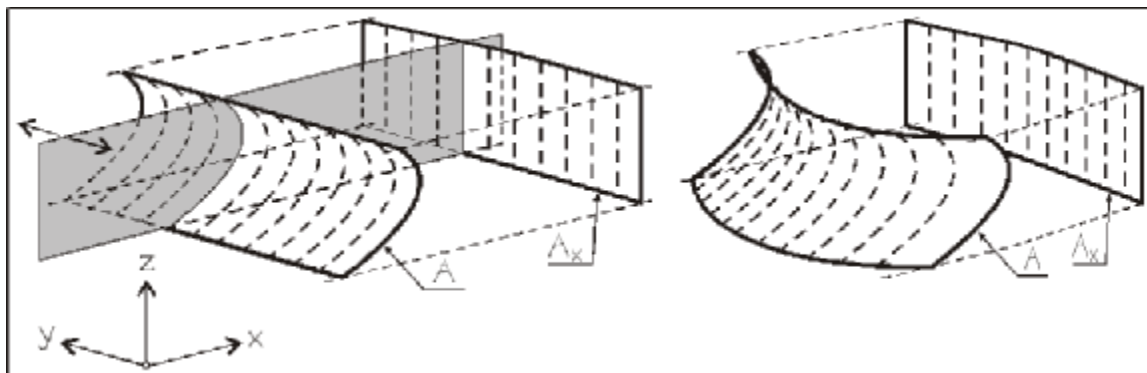
### 3.3.4 Ravanski zadaci

U praksi se često računa hidrostatička sila na površinu, čija je vertikalna ili horizontalna projekcija pravougaonik. To je slučaj sa raznim ustavama, velikim segmentnim zatvaračima na prelivima, sa zidom obaloutvrde i slično. Proračun sile se tada obično radi samo za *jediničnu širinu*, za širinu konture od 1 m. Kako je raspored pritisaka po širini pravougaonika isti, u statičkoj analizi se kasnije izračunata sila po jedinici širine množi sa stvarnom širinom konture.

<sup>22</sup>Pretpostavlja se da se nagnjanjem broda ne pomera težište mase. U realnim uslovima se, međutim, događa da se nagnjanjem broda nepričvršćen teret pomeri, što izaziva pomeranje težišta i ugrožavanje stabilnosti. Poznati su, na žalost, i slučajevi prevrtanja broda, kada su se usled manjeg nagnjanja svi putnici mahinalno premestili na spuštenu stranu broda, čime su doveli brod u opasno stanje labilne ravnoteže.

<sup>23</sup>Od visine metacentra zavisi stabilnost broda. Uobičajena vrednost visine metacentra za jedrilice je 1,0 do 1,4 m, za ratne brodove 0,8 do 1,2 m a za putničke svega 0,3 do 0,7 m.

### 3.3. HIDROSTATIČKE SILE NA ČVRSTE GRANIČNE POVRŠINE 71



Slika 3.18: Konture kod kojih se i vertikalna i horizontalna komponenta sile mogu raditi po načelima za ravanske zadatke (levi deo slike) i kontura kod koje se samo horizontalna komponenta može raditi po načelu za ravanske zadatke (desni deo slike)

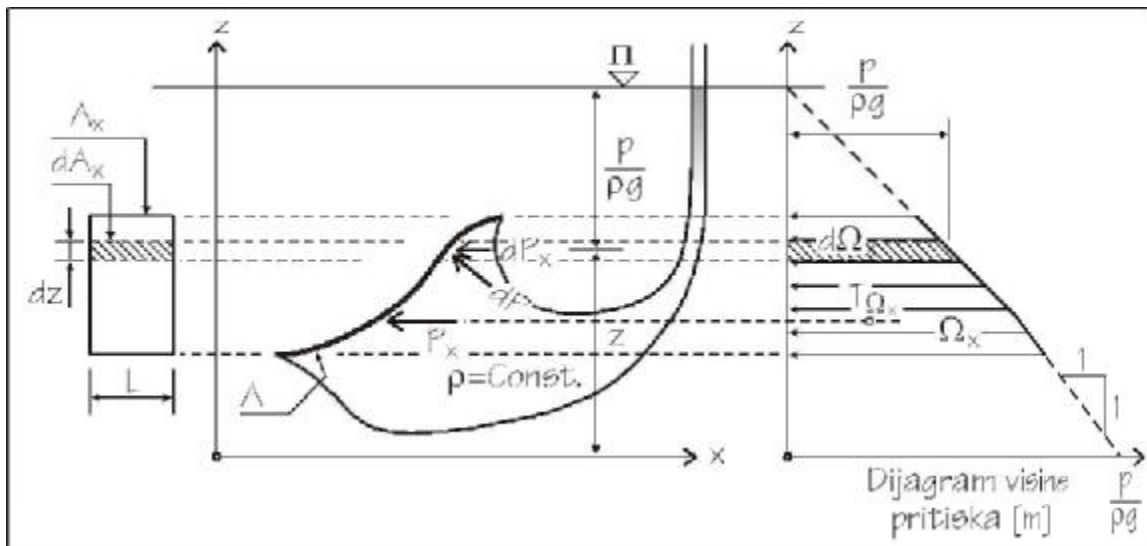
Na slici 3.18 sa leve strane je prikazana kriva kontura  $A$ , sa odgovarajućom vertikalnom projekcijom  $A_x$  i vertikalnim presecima sa  $y$  ravni. U slučaju kad su *svi preseki međusobno isti*, kao što je to prikazano na slici, vertikalna i horizontalna projekcija konture su pravougaonici. *Horizontalna i vertikalna komponenta ukupne hidrostatičke sile se tada mogu odrediti po načelima za ravanske zadatke*, pri čemu se sila računa za jediničnu širinu konture.

Pored slučaja gde su svi vertikalni preseki međusobno isti, često se sreću konture kod kojih su *u jednom pravcu vertikalni preseki različiti, ali je u drugom ortogonalnom pravcu vertikalna projekcija pravougaonik* (slika 3.18, kontura sa desne strane). Načelo za ravanske zadatke tada *važi samo za horizontalnu komponentu sile*.

Treći slučaj, da se samo vertikalna komponenta sile radi po načelu za ravanske zadatke, nije moguć. Za vertikalnu komponentu nije dovoljan uslov da horizontalna projekcija bude pravougaonik, već se traži da svi vertikalni preseki u jednom pravcu budu međusobno isti. Taj uslov automatski znači i da je vertikalna projekcija u drugom ortogonalnom pravcu pravougaonik, odnosno, i da se horizontalna komponenta može računati po načelu za ravanske zadatke.

#### 3.3.4.1 Horizontalna komponenta sile

Iz uslova da je vertikalna projekcija površine pravougaonik, sledi da je u svakom vertikalnom preseku raspored pritisaka isti. Dijagram opterećenja  $p = f(z)$  nacrtan u nekoj, usvojenoj razmeri za pritiske, važi za bilo koji presek. Moguće je, takođe, nacrtati i *dijagram visine pritiska*  $\frac{p}{\rho g} = f(z)$



Slika 3.19: Proračun horizontalne komponente hidrostatičke sile kod ravnaskog zadatka

(slika 3.19), koji i na apscisi i na ordinati ima dimenziju dužine. Dijagram je prava linija, na mestu  $\Pi$  kote ima vrednost nula, jer je  $\frac{p}{\rho g} = 0$  za  $z = \Pi$  (iz uslova za osnovnu jednačinu hidrostatičke (3.11)) i nagib pod  $-45^\circ$  (ili 1:1, koji sledi iz  $\frac{p}{\rho g} = \Pi - z$ ).

Za pravougaonik  $dA_x$ , elementarne visine  $dz$  i širine  $L$ , horizontalna komponenta sile usled pritiska  $p$  je:

$$dP_x = p dA_x = p L dz = \frac{p}{\rho g} \rho g L dz = \rho g L d\Omega_x$$

gde je  $d\Omega_x = \frac{p}{\rho g} dz$  elementarna površina na dijagramu visine pritiska (šrafirano na dijagramu, na slici 3.19), pa je *intenzitet horizontalne komponente sile*:

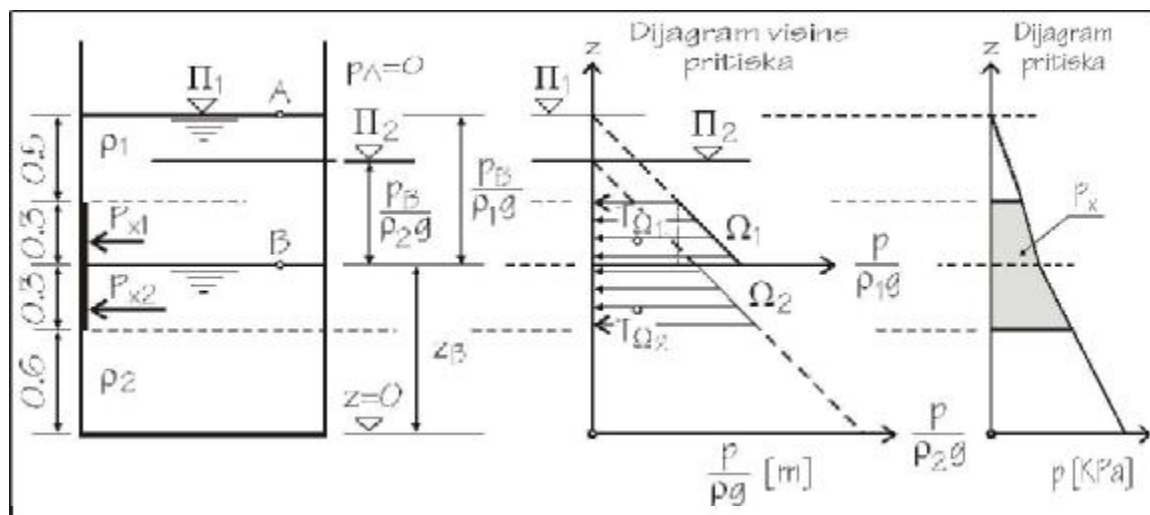
$$P_x = \rho g L \int_{\Omega_x} d\Omega_x = \rho g L \Omega_x \quad (3.33)$$

Sa  $\Omega_x$  je označena površina dela dijagrama visine pritiska u pravcu konture na koju se traži sila, samo u delu gde se nalazi fluid  $\rho$ . Površina  $\Omega_x$  je ili trougao ili trapez, kao što je to prikazano na slici 3.19. *Mesto sile* je na visini težišta površine  $\Omega_x$ , a *smer sile* zavisi od znaka pritiska na mestu težišta površine  $\Omega_x$ .

Kao što je već napomenuto u uvodu poglavlja 3.3.4, *Ravanski zadaci*, jednačina (3.33) se često piše uz izostavljanje širine pravougaonika  $L$ . Sila

### 3.3. HIDROSTATIČKE SILE NA ČVRSTE GRANIČNE POVRŠINE 73

koja se dobije ima dimenziju  $[N/m]$  i zove se *sila po jedinici širine*. U konačnom dimenzionisanju, tu silu je potrebno pomnožiti sa stvarnom širinom konture.



Slika 3.20: Primer ravanskog zadatka - horizontalna sila na bočni poklopac kvadratnog preseka, sa dva fluida

U slučaju kada je kontura u kontaktu sa više fluida (slika 3.20), potrebno je konturu podeliti na više delova (na slici  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ ). **Dijagram visine pritiska** se crta prvo za gornji fluid,  $\rho_1$ , od pjezometarske kote  $\Pi_1$  (kota površine tečnosti 1), do kote tačke **B**, pod nagibom 1:1. Ispod tačke **B** se nalazi drugi fluid, sa svojim dijagramom visine pritiska i svojom apscisnom osom. Deo od pjezometarske kote  $\Pi_2$ , do kote tačke **B**, **nacrtnan je isprekidano**, jer je samo pomoć u crtanju dijagrama, a zaista se koristi samo deo dijagrama ispod kote tačke **B**, u delu gde je fluid  $\rho_2$  u kontaktu sa konturom. Površine  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  su trapezi sa stranicama dužine  $(\Pi_i - z_j)$ , a sile po jedinici širine se dobijaju množenjem tih površina sa odgovarajućim  $\rho_i g$ . Ukupna horizontalna komponenta je vektorski zbir dve sračunate sile.

Nagli skok dijagrama visine pritiska na koti tačke **B**, **nije diskontinuitet pritiska**, već je rezultat promene gustine sa kojom se deli pritisak, pri čemu **razmera na apscisnoj osi ostaje i dalje ista, u metrima**. Na gornjem delu dijagrama pritisak u tački **B** se deli sa manjom gustinom  $\rho_1$ , a na donjem delu dijagrama, isti pritisak u tački **B** se deli sa većom gustinom,  $\rho_2 > \rho_1$  (gušći fluid je uvek ispod ređeg).

Na istoj slici 3.20, sa desne strane, nacrtan je i dijagram pritisaka, u prikladnoj razmeri za pritiske, gde se jasno vidi da nema nagle promene pritiska u tački **B**. Mada se za proračun horizontalne sile može koristiti i dijagram pritisaka, prednost korišćenja dijagrama visine pritiska je u fiksnoj

razmeri dijagrama: koliko je tačka ispod  $\Pi$  kote, tolika je i vrednost visine pritiska u toj tački.

Kod rešavanja složenijih ravanskih zadataka, sa više fluida, treba poštovati sledeću proceduru:

1. *Proveriti da li je zadatak ravanski:* Vertikalna projekcija konture treba da bude pravougaonik. Ako jeste, zadatak se može rešavati kao ravanski.
2. *Odrediti pijezometarske kote:* Za sve fluide  $\rho_i$  koji su u kontaktu sa površi treba odrediti pijezometarske kote  $\Pi_i$ .
3. *Nacrtati dijagram visine pritiska:* Za svaki od fluida  $\rho_i$ , od odgovarajuće pijezometarske kote nacrtati dijagram visine pritiska pod nagibom 1:1. Dijagram važi samo u onom delu gde je odgovarajući fluid u kontaktu sa površinom na koju tražimo silu.
4. *Označiti pripadajuće površine:* Na dijagramu visine pritiska označiti  $\Omega_{x,i}$  i ucrtati smerove sila: pozitivna ka površi a negativna od površi.
5. *Odrediti intenzitete i mesta svih komponenti sila:* Intenzitet svake od sila je  $P_{x,i} = \rho_i g \Omega_{x,i} L$ . Treba odmah izračunati i mesto sile, na koti težišta odgovarajuće površie  $\Omega_{x,i}$ .
6. *Sabrati sve komponente sila:* Sve  $P_{x,i}$  sabrati kao paralelne sile u jednu rezultantu  $P_x$ . Naći i mesto (kotu) rezultante.

---

### Primer 3.3.6

Na bočnoj stranici rezervoara sa slike 3.20, nalazi se ustava kvadratnog oblika. Gustine fluida su  $\rho_1 = 0,75 \text{ kg/dm}^3$  i  $\rho_2 = 0,9 \text{ kg/dm}^3$ . Kolika je horizontalna sila na ustavu?

Pijezometarska kota fluida 1 je na površini fluida jer je u toj tački pritisak  $p_A = 0$ . Pritisak u tački  $B$  je:

$$p_B = \rho_1 g (\Pi_1 - z_B) = 0,75 \times 9,81 (1,7 - 0,9) = 5,89 \text{ kPa}$$

pa je pijezometarska kota drugog fluida:

$$\Pi_2 = \frac{p_B}{\rho_2 g} + z_B = \frac{5,89}{0,9 \times 9,81} + 0,9 = 1,567 \text{ m}$$

Dijagram visine pritiska je već nacrtan na slici 3.20. Ustava je u kontaktu sa oba fluida, pa je potrebno ukupnu horizontalnu silu podeliti na dva dela, na silu

### 3.3. HIDROSTATIČKE SILE NA ČVRSTE GRANIČNE POVRŠINE 75

od prvog fluida  $P_{x,1}$  i od drugog fluida  $P_{x,2}$ . Pripravljajuće površine na dijagramu visine pritiska su:

$$\Omega_1 = 0,5 \times 0,3 + \frac{1}{2} 0,3^2 = 0,195 \text{ m}^2$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2} (0,967 + 0,667) \times 0,3 = 0,2451 \text{ m}^2$$

gde je  $\Omega_1$  sračunato kao zbir površina pravougaonika i trougla, a  $\Omega_2$  direktno kao površina trapeza stranica  $a = 1,567 - 0,6 = 0,967 \text{ m}$  i  $b = 1,567 - 0,9 = 0,667 \text{ m}$ .

Horizontalne komponente sila na ustavu širine  $L = 0,6 \text{ m}$  su:

$$P_{x,1} = \rho_1 g \Omega_1 L = 0,75 \times 9,81 \times 0,195 \times 0,6 = 0,861 \text{ kN}$$

$$P_{x,2} = \rho_2 g \Omega_2 L = 0,9 \times 9,81 \times 0,2451 \times 0,6 = 1,298 \text{ kN}$$

Mesto komponenti je u težištu pripadajućih površina  $\Omega$ . Za prvu površinu, određenu kao složenu površinu sastavljenu od pravougaonika i trougla, težište je udaljeno od donje ivice:

$$T_{\Omega_1} = \frac{0,5 \times 0,3 \times \frac{1}{2} 0,3 + \frac{1}{2} 0,3^2 \times \frac{1}{3} 0,3}{0,195} = 0,138 \text{ m}$$

odnosno, kota težišta je  $z_1 = 0,9 + 0,138 = 1,038 \text{ m}$ .

Druga površina je određena kao površina trapeza (prilog C) pa i težište može da se odmah odredi koristeći gotove obrasce (voditi računa da se ne zamene duža i kraća strana trapeza):

$$T_{\Omega_2} = \frac{h}{3} \frac{a + 2b}{a + b} = \frac{0,3}{3} \frac{0,967 + 2 \times 0,667}{0,967 + 0,667} = 0,141 \text{ m}$$

pa je kota težišta  $z_2 = 0,6 + 0,141 = 0,741 \text{ m}$ .

Intenzitet ukupne rezultujuće horizontalne sile je jednak zbiru dve komponente:  $P_x = 0,861 + 1,298 = 2,159 \text{ kN}$ , a sila se nalazi na koti:

$$z = \frac{0,861 \times 1,038 + 1,298 \times 0,741}{2,159} = 0,86 \text{ m}$$

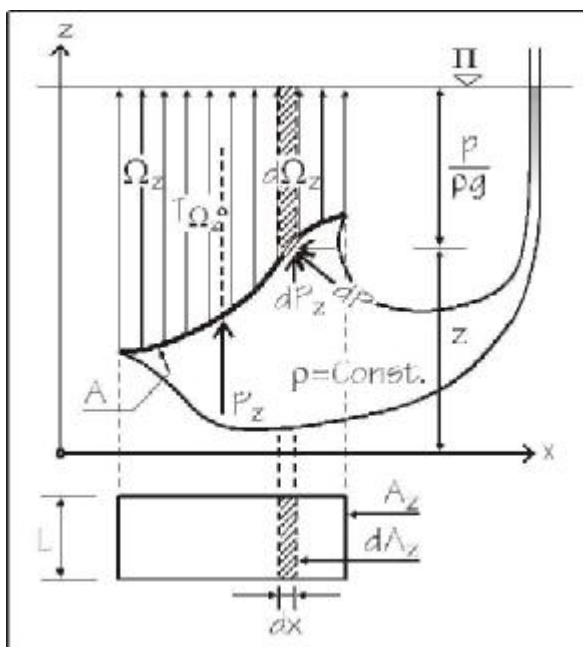
#### 3.3.4.2 Vertikalna komponenta sile

Kod ravanskih zadataka, horizontalna projekcija elementarne površine  $dA$  je pravougaonik, širine  $dx$  i visine  $L$  (slika 3.21). Sila na elementarnu površinu se može izračunati kao:

$$dP_z = p dA_z = p L dx = \frac{p}{\rho g} \rho g L dx = \rho g L d\Omega_z$$

gde je  $d\Omega_z = \frac{p}{\rho g} dx$  površina između vertikalnog preseka sa  $y$  ravni elementarne površi i njene projekcije na piježometarsku ravan. *Intenzitet vertikalne sile* je suma svih elementarnih sila:

$$P_z = \rho g L \int d\Omega_z = \rho g L \Omega_z \tag{3.34}$$



Slika 3.21: Proračun vertikalne komponente hidrostatičke sile kod ravnanskog zadatka

U prethodnoj jednačini  $\Omega_z$  je površina između vertikalnog preseka sa  $y$  ravni konture  $A$  i njene projekcije na piježometarsku ravan. *Mesto delovanja sile* je u pravcu težišta površine  $\Omega_z$ , a *smjer sile* je ka konturi ako su pritisci pozitivni i od konture ako su pritisci negativni.

Proračun vertikalne komponente hidrostatičke sile, kod ravnanskih zadataka, ne razlikuje se mnogo od zadataka koji nisu ravnanski (obrađeni u poglavlju 3.3.2.2 *Vertikalna komponenta hidrostatičke sile*). Ravnanski zadaci su utoliko jednostavniji, što se sila računa na osnovu površine  $\Omega_z$ , koju je lako grafički prikazati, a ne na osnovu neke složene prostorne zapremine  $V$ . Naravno, lakši

je i proračun težišta površine u odnosu na težište složene zapremine.

U proračunu vertikalne sile treba poštovati istu proceduru kao i za horizontalnu silu. Ako je više fluida u kontaktu sa konturom na koju se traži sila, kao i ako projekcija na piježometarsku ravan nije jednoznačna, treba računati vertikalnu silu iz više jednoznačnih komponenti.

**Primer 3.3.7**

Na dnu rezervoara sa slike 3.20 se nalazi poklopac kvadratnog preseka, dimenzija  $0,6 \times 0,6$  m. Gustine fluida su  $\rho_1 = 0,75 \text{ kg/dm}^3$  i  $\rho_2 = 0,9 \text{ kg/dm}^3$ . Kolika je sila na poklopac?

Na poklopac deluje samo vertikalna sila, a kako su svi vertikalni preseki isti, zadatak se može raditi kao ravnanski.



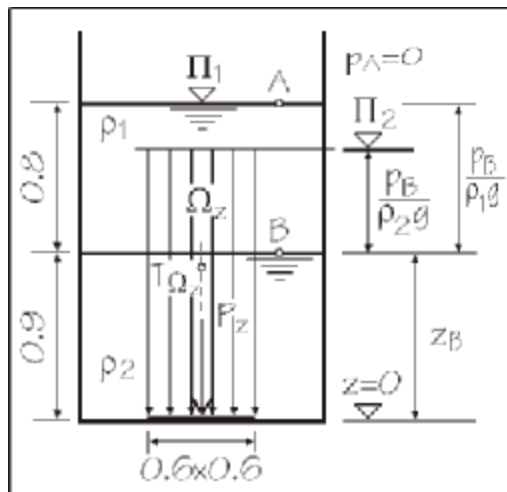
### 3.3. HIDROSTATIČKE SILE NA ČVRSTE GRANIČNE POVRŠINE 77

U prethodnom primeru su određene pije-  
zometarske kote za fluide 1 i 2:

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= 1,7 \text{ m} \\ \Pi_2 &= 1,567 \text{ m}\end{aligned}$$

Poklopac na dnu je u kontaktu samo sa  
fluidom 2, pa se crta površina  $\Omega_z$  između  
poklopca i pijeometarske kote 2:

$$\Omega_z = 0,6 \times 1,567 = 0,9402 \text{ m}^2$$



Sila na poklopac je  $P_z = \rho_2 g L \Omega_z = 0,9 \times 9,81 \times 0,6 \times 0,9402 = 4,98 \text{ kN}$ , ima  
smer ka poklopcu jer je pritisak pozitivan, a nalazi se na 0,3 m od ivice poklopca.

#### 3.3.5 Sila pritiska gasa na zidove zatvorenog rezervoara

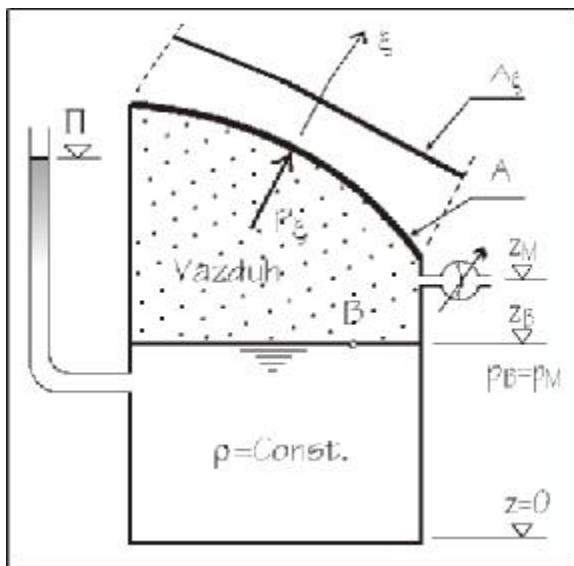
U većini zadataka iz oblasti građevinske struke, razmatraju se opterećenja  
na delove rezervoara, u kojima se nalazi tečnost, a iznad nje gas, vazduh  
ili neka druga smeša, koji može biti pod nekim pritiskom. Odnos gustina  
tečnosti i gasa je reda veličine 1000:1, a visine rezervoara su maksimalno  
do desetak metara. U takvim uslovima, promena pritiska po visini u gasu  
je zanemarljiva u odnosu na promene pritiska u tečnosti, pa se potpuno  
opravdano može pretpostaviti da je gustina gasa unutar zatvorenog rezer-  
voara nula. Rezultat te pretpostavke je da u gasu nema promene pritiska po  
visini, odnosno, da je u gasu pritisak u svim tačkama konstantan.

Na slici 3.22, prikazan je rezervoar sa tečnošću guistine  $\rho$  i sa vazduhom  
iznad. Pritisak na kontaktu dva fluida, u tački  $B$  je isti i za tečnost i za vaz-  
duh,  $p_B = p_{\text{vaz}}$ . U svakoj tački vazduha je pritisak isti, pa je i u manometru  
pritisak  $p_M = p_B = p_{\text{vaz}}$ . Takođe, u svakoj tački ispod poklopca, na koji  
treba da se odredi sila vlada konstantan pritisak  $p_{\text{vaz}}$ .

Zbog toga što je pritisak u svakoj tački gasa isti, *intenzitet sile pritiska  
gasa za određeni pravac je pritisak pomnožen sa projekcijom površine na  
ravan sa normalom u traženom pravcu. Za poklopac sa slike 3.22, sila od  
gasa za pravac  $\xi$  je:*

$$P_\xi = p_{\text{vaz}} A_\xi \tag{3.35}$$

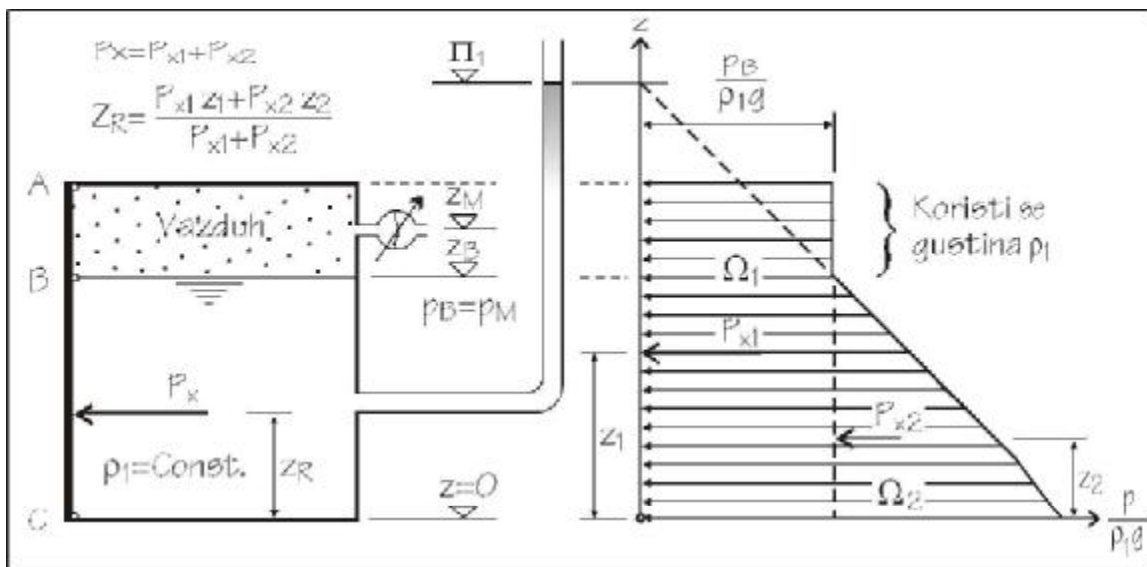
Smer sile je ka konturi ako je pritisak pozitivan, a mesto delovanja sile je u  
pravcu težišta projekcije  $A_\xi$ .



Slika 3.22: Sila pritiska gasa na zidove zatvorenog rezervoara

nalazi vazduh (površine  $\frac{p_B}{\rho_1 g} \times \overline{AB}$ ). Sila usled fluida  $\rho_1$  se računa odvojeno, pri čemu je pripadajuća površina dijagrama visine pritiska trapez.

Kod ravanskih zadataka, prilikom određivanja horizontalne komponente sile od vazduha, moguće je iskoristiti postojeći dijagram visine pritiska od fluida koji se nalazi neposredno ispod vazduha. Ako je tačka *B* na slici 3.23 zajednička tačka i ako je gustina fluida ispod vazduha  $\rho_1$ , tada se vrednost visine pritiska  $\frac{p_B}{\rho_1 g}$  na dijagramu može zadržati konstantnim u delu gde se nalazi vazduh. Horizontalna sila od vazduha na konturu se može izračunati prema jednačini (3.33),  $P_{x,vaz} = \rho_1 g L \Omega_{vaz}$  gde je  $\Omega_{vaz}$ , površina pravougaonika na dijagramu visine pritiska u delu gde se



Slika 3.23: Horizontalna komponenta sile pritiska gasa kod ravanskih zadataka

U većini slučajeva je efikasnije ako se horizontalna sila izračuna odmah zbirno, za fluid i za vazduh iznad fluida. Intenzitet horizontalne komponente

### 3.4. RELATIVNO MIROVANJE FLUIDA

79

hidrostatičke sile je:

$$P_x = \rho_1 g L \Omega$$

a površina  $\Omega$  se računa kao zbir pravougaonika  $\Omega_1$  površine  $\frac{pB}{\rho_1 g} \times \overline{AC}$  i trougla  $\Omega_2$  površine  $\frac{\overline{BC}^2}{2}$ . Mesto sile je u težištu složene površine  $\Omega$  i može se odrediti ili preko komponenti ukupne sile (kao na slici 3.23) ili preko odnosa površina:

$$z_R = \frac{\Omega_1 z_1 + \Omega_2 z_2}{\Omega}$$

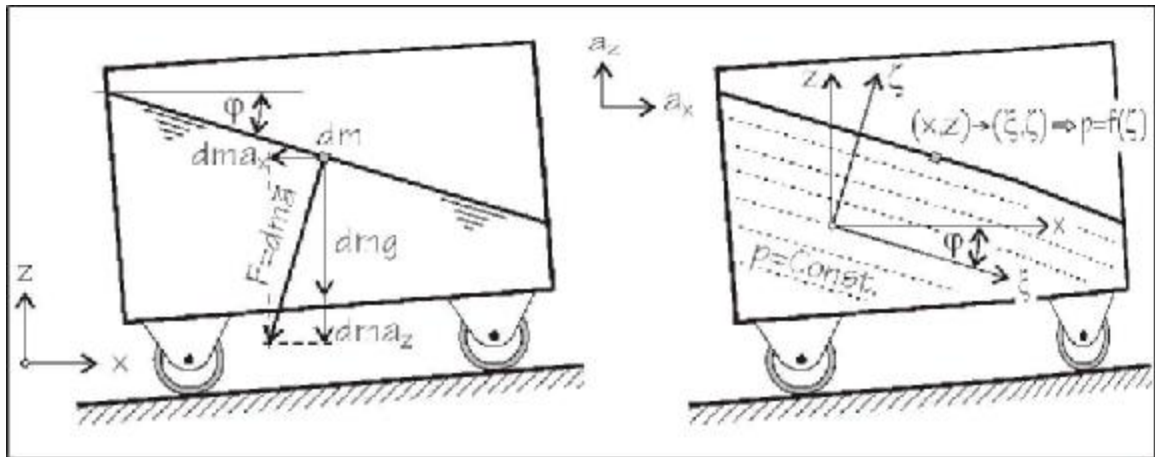
## 3.4 Relativno mirovanje fluida

Polazna pretpostavka u hidrostatici je da se fluidni delići ne kreću, da se nalaze u stanju ravnoteže i da, kao rezultat toga, ne postoje tangencijalni naponi. Osnovna jednačina hidrostatičke u tim uslovima omogućava jednostavno određivanje pritiska u bilo kojoj tački fluida. Ako se fluidni delići kreću, ali tako da ne postoji relativno pomeranje jednog sloja u odnosu na drugi sloj, tangencijalni naponi su i dalje nula, pa je moguće primeniti osnovne principe iz poglavlja 3.1, *Promena pritiska u zavisnosti od položaja*. Dva slučaja su od interesa: ako se sud sa fluidom kreće pravolinijski (cisterna sa gorivom, na primer) i ako se sud rotira oko vertikalne ose.

### 3.4.1 Pravolinijsko kretanje suda

Posmatra se sud koji se kreće i u kome se nalazi fluid. Ako se sud kreće uniformnom, konstantnom brzinom, fluid će se nalaziti u stanju relativnog mirovanja, jer se delići neće kretati jedan u odnosu na drugi. Na elementarni fluidni delić od zapreminskih sila će, u tom slučaju, delovati samo težina, a od površinskih sila samo normalni napon, pritisak, pomnožen sa površinom delića. Uslovi za izvođenje jednačine, koja će dati raspodelu pritiska u fluidu, su istovetni uslovima koji važe za slučaj hidrostatičke (poglavlje 3.1.1 *Pretpostavke za izvođenje jednačine*), pa se zaključuje da *slučaj uniformnog kretanja suda daje ista rešenja kao i hidrostatika*: pritisak je samo funkcija vertikalne koordinate, odnosno, slobodna površina fluida je horizontalna.

Ako se sud sa fluidom kreće tako da je *ubrzanje konstantno* (slika 3.24 prikazuje sud koji konstantno ubrzava u  $x$  i  $z$  pravcu), relativno kretanje fluidnih delića i dalje neće postojati, ali će na elementarni fluidni delić sada delovati još jedna zapreminska sila, kao posledica postojanja ubrzanja:



Slika 3.24: Fluid koji miruje (hidrostatika) u sudu koji konstantno ubrzava: ukupno ubrzanje koje deluje na elementarni delić je vektorski zbir  $\vec{g}$  i  $\vec{a}$  (sa leve strane), jednačina za raspored pritiska u fluidu se može pisati za koordinatni sistem gde je osa  $z$  vertikalna ili za lokalni sistem gde je osa  $\zeta$  upravna na površinu fluida (sa desne strane)

$\vec{F}_a = m\vec{a} = \rho V\vec{a}$ . Ravnoteža sila na elementarni delić, napisana u skladu sa oznakama datim na slici 3.1 (strana 34), je za  $x$  pravac:

$$\left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dA_x = \rho a_x dV + \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dA_x$$

odnosno, kada se sredi jednačina, dobija se:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x$$

Za vertikalni  $z$  pravac, iz uslova ravnoteže sila dobija se jednačina:

$$\left( p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dA_z = \rho g dV + \rho a_z dV + \left( p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dA_z$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(g + a_z)$$

Pošto je pritisak nezavisno promenljiva veličina u pravcima<sup>24</sup>  $x$  i  $z$ , promena pritiska  $dp$  je:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz = -\rho a_x dx - \rho(g + a_z) dz$$

<sup>24</sup>U datom primeru, ubrzanje u trećem koordinatnom pravcu  $y$  je nula. Uopšteno, i za treći koordinatni pravac bi mogao da se napiše izraz:  $\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho a_y$ .

## 3.4. RELATIVNO MIROVANJE FLUIDA

81

Integracijom jednačine, uz uslov da je gustina konstantna, dobija se raspored pritiska u fluidu:

$$p + \rho a_x x + \rho(g + a_z)z = C \quad (3.36)$$

gde je  $C$  integraciona konstantna koja se dobija iz poznatog pritiska  $p = p_0$  u tački sa koordinatama  $x = x_0, z = z_0$ .

*Nagib slobodne površine* se dobija iz uslova da je pritisak duž te linije konstantan, odnosno da je promena pritiska nula:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial z}} = -\frac{a_x}{g + a_z} = -\tan \varphi$$

Ako je sud bez slobodne površine, pod pritiskom, linije istih pritisaka, ili ekvipotencijalne linije, će biti takođe pod uglom  $\varphi$ .

Da bi se uspostavila veza između osnovne jednačine hidrostatičke (3.8) (strana 36) za fluid koji miruje i dobijene jednačine (3.36), može se  $(x, z)$  koordinatni sistem rotirati za ugao  $(-\varphi)$  u sistem  $(\xi, \zeta)$  (slika 3.24, desni deo):

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \varphi + \zeta \sin \varphi \\ z &= -\xi \sin \varphi + \zeta \cos \varphi \end{aligned}$$

Sa  $\bar{a}$  će se označi ubrzanje koje je vektorski zbir ubrzanja  $a_x, a_z$  i  $g$ :

$$\bar{a} = \sqrt{a_x^2 + (g + a_z)^2}$$

pa su  $\sin \varphi$  i  $\cos \varphi$ :

$$\sin \varphi = \frac{a_x}{\bar{a}} \quad \cos \varphi = \frac{g + a_z}{\bar{a}}$$

Raspored pritisaka iz jednačine (3.36) u rotiranom  $(\xi, \zeta)$  koordinatnom sistemu je tada:

$$p + \rho \xi a_x \frac{g + a_z}{\bar{a}} + \rho \zeta \frac{a_x^2}{\bar{a}} - \rho \xi a_x \frac{g + a_z}{\bar{a}} + \rho \zeta \frac{(g + a_z)^2}{\bar{a}} = C$$

Sređivanjem izraza dobija se prepoznatljiv oblik jednačine:

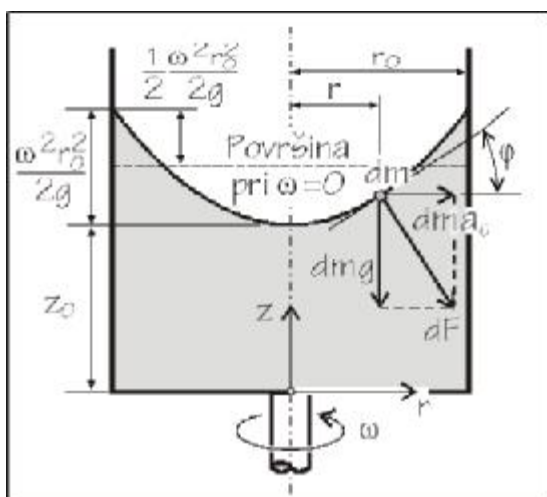
$$p + \rho \bar{a} \zeta = C \quad (3.37)$$

odnosno u formi visine pritiska:

$$\frac{p}{\rho \bar{a}} + \zeta = \Pi_\xi$$

koja pokazuje da se *pritisak menja samo duž  $\zeta$  ose, koja je upravna na slobodnu površinu*. Umesto gravitacionog ubrzanja  $g$ , uzima se zbirno ubrzanje  $\bar{a}$ , a sa  $\Pi_\xi$  je označena pijeziometarska kota, koja je u pravcu  $\xi$  ose. Vrednost  $\Pi_\xi$  se određuje iz uslova o poznatom pritisku u nekoj tački fluida, a pritisci u svim tačkama, koje leže na pravama paralelnim sa  $\xi$  osom, su konstantni.

### 3.4.2 Rotacija suda oko vertikalne ose



Slika 3.25: Pri rotaciji suda oko vertikalne  $z$  ose na elementarni delić deluju gravitaciono i centripetalno ubrzanje

Kada sud cilindričnog oblika rotira oko svoje vertikalne ose konstantnom ugaonom brzinom  $\omega$ , svi delići fluida koji se nalazi u sudu imaju tu istu ugaonu brzinu. Relativno pomeranje delića ne postoji pa su tangencijalni naponi nula. Na elementarni delić, usled rotacije, od zapreminskih sila pored težine deluje još i centripetalna sila, radialno usmerena od ose rotacije.

Posmatraju se sile na elementarni delić, u koordinatnom sistemu  $(z, r)$  koji rotira zajedno sa sudom oko  $z$  ose, ugaonom brzinom  $\omega$  (slika 3.25). Centripetalno ubrzanje ka centru rotacije je  $a_c = \omega^2 r$ . Na elementarni delić  $dm$  deluje rezultujuća centrifugalna sila  $dF_{ic} = -dm a_c$  horizontalno od centra rotacije, pa se iz sume horizontalnih sila dobija:

U sumu vertikalnih sila ulazi samo težina delića:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r$$

pa se za posmatrani delić može napisati da je promena pritiska:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Rešavanjem jednačine uz uslov o homogenom fluidu, dobija se zavisnost pritiska od  $(z, r)$  koordinate:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho \omega^2 r dr - \rho g dz$$

Rešavanjem jednačine uz uslov o homogenom fluidu, dobija se zavisnost pritiska od  $(z, r)$  koordinate:

$$p + \rho g z - \rho g \frac{\omega^2 r^2}{2g} = C \tag{3.38}$$

### 3.4. RELATIVNO MIROVANJE FLUIDA

83

Konstanta  $C$  se može odrediti iz uslova da je pritisak u dnu parabole, na mestu ( $r = 0, z = z_0$ ) jednak  $p = 0$ :

$$C = \rho g z_0$$

Ako se jednačina (3.38) podeli sa  $\rho g$  i malo preuredi, dobija se izraz koji jako podseća na osnovnu jednačinu hidrostatičke (3.11) (strana 38):

$$\frac{p}{\rho g} + z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \Pi_c$$

Član sa desne strane izraza je “*pijezometarska kota*” oblika parabole, čija jednačina se dobija iz uslova da je duž te linije pritisak nula:

$$z - z_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \quad (3.39)$$

Na slici 3.25 je isprekidanom horizontalnom linijom ucrtan i nivo fluida kada sud ne rotira. Pošto je fluid nestišljiv, u toku rotacije se ista zapremina fluida rasporedi u sudu, tako da slobodna površina sledi parabolu (3.39). Kako “*istisnuti*” deo zapremine mora biti jednak novom zauzetom delu uz zidove suda, sledi da su minimalna i maksimalna kota fluida udaljene za:

$$\frac{1}{2} \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

od položaja fluida u stanju mirovanja.

#### Primer 3.4.1

Sud cilindričnog oblika prečnika  $D = 0,4$  m rotira konstantnom ugaonom brzinom oko vertikalne centralne ose. U sudu je fluid gustine  $\rho = 800$  kg/m<sup>3</sup>. Broj obrtaja cilindra je  $n = 500$  o/min. Ako je na zidu suda u tački  $A$  izmeren pritisak  $p_A = 50$  kPa, koliki je pritisak u tački  $B$ , koja je na istoj koti kao i tačka  $A$ , ali u centru rotacije? Koliko je rastojanje od tačke  $B$  do najniže tačke na površini fluida, tačke  $C$ ?

Ugaona brzina  $\omega$  za dati broj obrtaja u minuti iznosi:

$$\omega = \frac{n}{60} 2\pi = \frac{500}{60} 2\pi = 52,36 \text{ rad/s}$$

U tački  $A$  sa kotom  $z_A$  pritisak  $p_A$  je poznat, pa se za tačku  $B$  može napisati (prema jednačini (3.38)):

$$p_A + \rho g z_A - \rho g \frac{\omega^2 r_A^2}{2g} = p_B + \rho g z_B - \rho g \frac{\omega^2 r_B^2}{2g}$$

Tačka  $B$  se nalazi na osi rotacije pa je  $r_B = 0$ . Uz uslov u zadatku da je  $z_A = z_B$ , dobija se traženi pritisak u tački  $B$ :

$$p_B = p_A - \rho g \frac{\omega^2 r_A^2}{2g} = 50 - 0,8 \times 9,81 \frac{52,36^2 \times 0,2^2}{2 \times 9,81} = 6,13 \text{ kPa}$$

Tačka  $C$  se nalazi u osi rotacije ( $r_C = 0$ ) na površini fluida, pa je pritisak u toj tački  $p_C = 0$ . Iz tog uslova, prethodna jednačina se može napisati u obliku:

$$p_A + \rho g z_A - \rho g \frac{\omega^2 r_A^2}{2g} = 0 + \rho g z_C - 0$$

odnosno, deljenjem sa ( $\rho g$ ) dobija se razlika položajnih kota tački  $C$  i  $A$ :

$$z_C - z_A = \frac{p_A}{\rho g} - \frac{\omega^2 r_A^2}{2g} = \frac{50}{0,8 \times 9,81} - \frac{52,36^2 \times 0,2^2}{2 \times 9,81} = 0,782 \text{ m}$$

Rastojanje tačke  $C$  u odnosu na tačku  $B$  mora biti isto kao i u odnosu na tačku  $A$ :

$$z_C - z_B = \frac{p_B}{\rho g} - \frac{\omega^2 r_B^2}{2g} = \frac{6,14}{0,8 \times 9,81} - 0 = 0,782 \text{ m}$$

gde je udaljenje  $r_B$  jednako nuli.

---



## Glava 4

# Osnove dinamike fluida

U prethodnoj glavi je izučavana *hidrostatika*, oblast mirovanja fluida konstantne gustine. Prefiks “hidro” je korišćen da se naglasi nestišljivost fluida, odnosno, da se radi sa fluidima koji su slični vodi. Od ove glave knjige, pa nadalje, izučavaće se *kretanje (strujanje ili tečenje) fluida*, pri čemu će se izvesti opšte jednačine, koje važe i za gasove i za tečnosti. Korišćenje naslova poput *hidrodinamika*, stoga ne bi bilo korektno, tako da se koristi opštiji pojam: *dinamika fluida*.

Izučavanje kretanja realnog fluida je veoma složeno. U ispisivanju jednačina korišćiće se analogija sa Mehanikom krutog tela, uz **uvođenje potrebnih dodatnih veza**. Tri osnovne grupe jednačina koje će se izvesti su: jednačina održanja mase, količine kretanja i energije. Dobijene jednačine su u opštem slučaju nerešive, pa su potrebna određena uprošćenja, kao i obiman eksperimentalni rad, kojim će se analizirati rezultat tih uprošćenja.

U nastavku ove glave će se prvo dati neki osnovni pojmovi vezani za kretanje fluida. Nakon toga će se objasniti različiti pristupi u izučavanju kretanja fluida, kao i koncept kontrolne zapremine. Osnovne jednačine održanja će se izvesti za elementarnu zapreminu u diferencijalnom obliku i za konačnu **zapreminu u integralnom obliku**. Za određene primere postaviće se uslovi u okviru kojih se te jednačine svode na nivo algebarskih, rešivih jednačina.

U sledećoj glavi 7, *Ustaljeno tečenje fluida kroz cevi*, detaljnije će se obraditi slučaj kretanja tečnosti (tečenja) u cevima, u razvijenom turbulentnom režimu. Analiza režima tečenja u cevima, zajedno sa otporima trenja, će biti **data u posebnoj glavi 6, Hidrodinamički otpori**. U istoj glavi će se obraditi i otpori trenja ravnih ploča u fluidu, kao i otpori oblika. Na kraju, oblast kretanja fluida se završava glavom 8, *Otvoreni tokovi*, gde će se analizirati ustaljeno tečenje u prizmatičnim otvorenim kanalima.

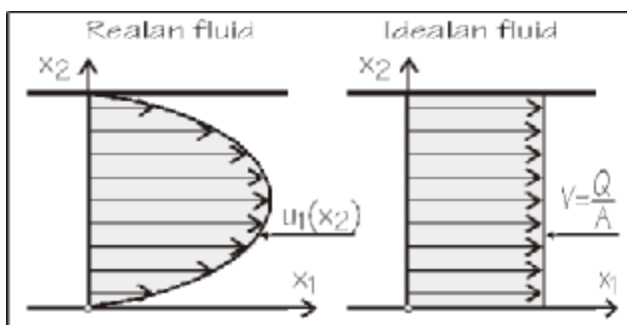
## 4.1 Pojmovi i osnovne karakteristike toka

U oblasti kretanja fluida se uvodi dosta novih pojmova, kao što su **turbulencija**, **dimenzionalnost strujanja**, **strujnica** i slično. U nastavku ovog poglavlja će se dati kratka objašnjenja i definicije za neke od tih pojmova. Takođe, izvršiće se podela strujanja prema osnovnim karakteristikama toka (**linijsko ili prostorno strujanje**, **promenljivo kroz vreme** ili **nepromenljivo**, režimi strujanja) i prema karakteristikama fluida (**realan** ili **idealni fluid**, **stišljiv** ili **nestišljiv**). Deo o režimima strujanja je, međutim, ovde dat veoma kratko, jer će znatno detaljnije biti obrađen u poglavlju 6.1, *Trenje pri jednolikom tečenju kroz cev kružnog poprečnog preskeka*.

### 4.1.1 Materijalni delić, strujanje realnog i idealnog fluida

U Mehanici krutih tela, masa (ili telo), za koju se pišu jednačine, jasno je definisana. U Mehanici fluida se jednačine najčešće postavljaju za deo fluidnog prostora, za **materijalni** ili **fluidni delić**, koji je beskonačno mali deo. On poseduje dovoljnu masu da može, kao elementarni deo, da reprezentuje ceo fluid, a istovremeno je dovoljno veliki da poseduje sve osobine cele fluidne mase. Fluidni delić može da menja oblik i zapreminu, ali ne i masu. Veze između fluidnih delića su iste kao i veze između konačnih masa fluida.

Korišćenje fluidnog delića pretpostavlja da je **fluid neprekidan** (**potpuno** zauzima prostor, nema prekida, rupa), tako da se u strujanju neće pojaviti delovi prostora koji nisu ispunjeni fluidom i **izotropan** (**sve osobine se podjednako** ispoljavaju u različitim pravcima, odnosno, u svim pravcima ima ista fizička svojstva, istovetno se ponaša).



Slika 4.1: Raspored brzina u cevi pri strujanju realnog i idealnog fluida

Jedna od osnovnih, fizičkih karakteristika svih fluida je viskoznost (poglavljje 2.2 *Viskoznost*). Zahvaljujući viskoznosti, između fluidnih delića se prenose uticaji, **trenje**, odnosno, **tangencijalni naponi**. Veličina, odnosno, stepen trenja, zavisi od **relativne brzine između delića** (jednačina (2.6)).

Prilikom rešavanja zadataka iz Mehanike fluida, kada se trenje uzima u obzir, odnosno, viskoznost, fluidi se nazivaju **realni fluidi**. Međutim, u analizi strujanja fluida često je neophodno da se pretpostavi da ne postoji **trenje između fluidnih delića** kako bi se rešile jednačine. Takav fluid se tada

naziva *idealni fluid* (strana 17), a viskoznost  $\mu$  se zanemaruje.

Posledica zanemarenja trenja, odnosno, nepostojanja tangencijalnih napona, je bezvrtložnost fluida: fluidni delići se tako deformišu da ne dolazi do njihove rotacije (strana 111), pa se kod idealnog fluida ne javljaju ni lokalni gubici energije (strana 162), odnosno, ne postoji gubitak energije na trenje (slika 7.15 na strani 306). Posledica nepostojanja trenja je prikazana na slici 4.1: kod realnog fluida, zid preko trenja koči deliće, dok kod idealnog fluida nema trenja pa svi delići u preseku imaju istu brzinu.

#### 4.1.2 Stišljiv i nestišljiv, homogen i nehomogen fluid

U poglavlju 2.5, *Elastične deformacije, stišljivost fluida*, razmatrana je stišljivost fluida kao jedna od bitnih fizičkih karakteristika. Tada je rečeno da su svi fluidi u izvesnoj meri stišljivi. Kod gasova je ta stišljivost u većini zadataka tolika da se ne može zanemariti, dok je kod tečnosti stišljivost mala, pa se najčešće zanemaruje, a za tečnosti se kaže da su *nestišljive* (jednačina (4.21) na strani 110).

Postoje mnogi zadaci Mehanike fluida u kojima načinjena podela na stišljive gasove i nestišljive tečnosti nije korektna. Na primer, prilikom izučavanja otpora oblika, ukoliko se telo nalazi u vazduhu i ukoliko su brzine vazduha relativno male, može se pretpostaviti da je vazduh nestišljiv, čime se znatno uprošćava proračun (strana 249). Ili, kod tečenja vode u cevovodima, usled nagle promene brzine, može se javiti hidraulički udar, pojava u kojoj talas visokog pritiska brzo putuje kroz cevovod, pod uticajem upravo stišljivosti vode u sadejstvu sa elastičnošću zida cevi.

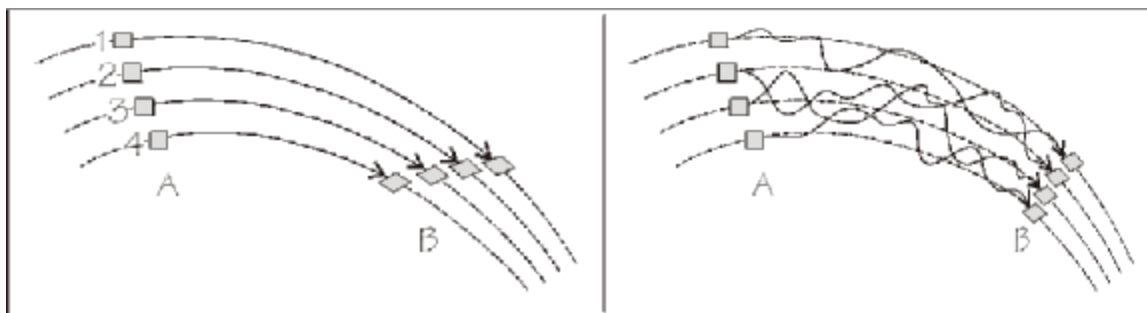
Prilikom rešavanja diferencijalnih jednačina kretanja fluidnog delića, često je potrebno definisati osobine fluida po prostoru. Fluid je *homogen* ako u svim tačkama ima iste osobine, pa se ne mora voditi računa o položaju fluidnog delića. U suprotnom, fluid je *nehomogen* i sve fizičke osobine su funkcija položaja.

U zadacima se često postavlja uslov  $\rho = \text{Const}$ . Ovaj uslov znači da je fluid homogen, ali ne znači automatski i da je fluid nestišljiv. I obrnuto, nestišljiv fluid ne mora biti istovremeno i homogen: na primer, voda u jezeru ima različitu temperaturu po dubini, a samim tim i gustinu iako je voda nestišljiva.

#### 4.1.3 Laminarno i turbulentno strujanje

U zavisnosti od uslova strujanja i brzine, fluidni delić se može kretati po "glatkoj" putanji, bez mešanja i presecanja svoje putanje sa putanjama

drugih delića, ili može haotično da prepliće svoju putanju sa drugim delićima, da formira vrtloge i talase, a da ipak na kraju stigne do istog odredišta kao i onaj delić koji je išao po “glatkoj” putanji.



Slika 4.2: Kretanje fluidnog delića pri laminarnom (levi deo slike) i turbulentnom strujanju (desni deo slike)

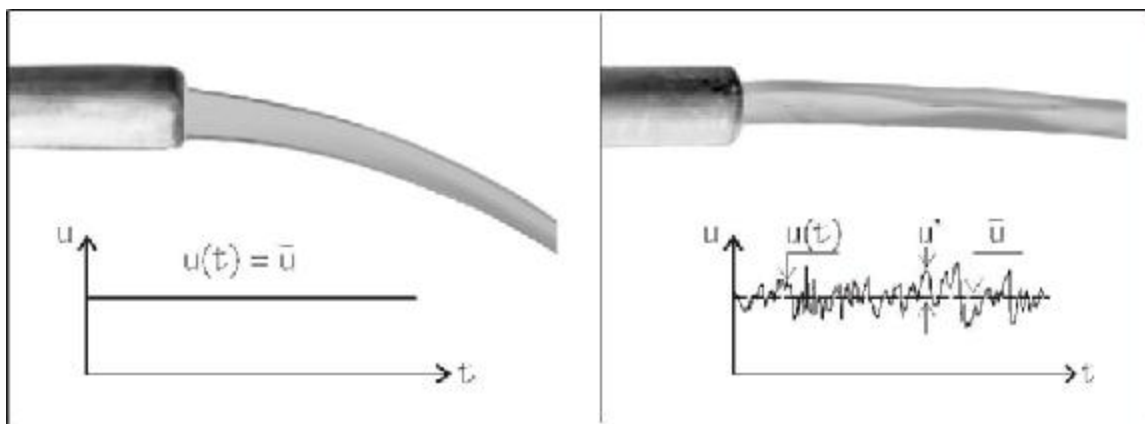
Uredno, glatko kretanje fluidnih delića se naziva *laminarno strujanje* (levi deo slike 4.2) dok se haotično, ili uzburkano kretanje, prikazano na desnom delu slike, naziva *turbulentno strujanje*. Laminarno strujanje je povezano sa malim brzinama, gde je viskoznost dovoljno jaka da zadrži deliće na svojoj putanji i da ne dozvoli bržem deliću 1 (sa slike 4.2) da, usled kočenja od strane sporijeg delića 2, bude povučen ka tom deliću, ili obrnuto, da sporiji delić usled ubrzavanja promeni svoju putanju. Ako je brzina dovoljno velika, viskoznost neće više moći da spreči mešanje delića i pojaviće se turbulencija.

Na slici 4.2 se vidi još jedan rezultat turbulencije. Zbog intenzivnog mešanja delića, sporiji delići koče brže, a brži ubrzavaju sporije, pa je rezultat tog procesa bolje uprosečavanje svih veličina po strujnom polju. Delići koji su bili sporiji, sada se u preseku B kreću brže, a oni brži su malo usporili. **Kada ne bi bilo turbulencije, na primer, zagađenje usled ispuštanja prljave vode iz kolektora u reku bi teklo kao jedna zagađena nit, ne bi se pomešalo i razblažilo sa ostatkom vode.**

Prve razlike u ponašanju fluida pri malim i velikim brzinama su detaljnije opisane tokom 1830-ih godina. Tada je postalo jasno da se radi o različitim *režimima strujanja*, da nisu isti uticaji dominantni pri malim brzinama strujanja i pri velikim, te da treba odvojeno istraživati te oblasti. Veliki doprinos u istraživanju je dao Osborn Rejnolds,<sup>1</sup> izvodeći 1883-će eksperimente

<sup>1</sup>Osborne Reynolds (1842 - 1912), britanski inženjer i naučnik. Potiče iz poznate i obrazovane svešteničke familije. Posle završenog Kembridža, zapošljava se u inženjerskoj firmi u Londonu, da bi 1868. prešao na Owens Colledge (današnji Univerzitet u Mančesteru) kao prvi profesor inženjerstva, gde je ostao sve do svoje penzije. Rejnolds je dao značajan doprinos u proučavanju fluida, uslova strujanja u cevima i prelaza iz laminarnog u turbulen-

tečenja vode u glatkim cevima, upravo u prelaznim režimima. Po njemu je nazvan i bezdimenzionalan broj koji definiše granicu dva strujanja.



Slika 4.3: Laminarno i turbulentno isticanje vode iz cevi: izgled mlaza vode i izmerene brzine kroz vreme

U prirodi se laminarno strujanje retko ostvaruje. To su uglavnom strujanja gde su brzine izuzetno male: u podzemnim vodama, u jezerima usled temperaturne neravnomernosti ili izlazak dima iz dimnjaka po mirnom danu, kada nema vetra. Turbulentno strujanje je češće u rekama, kanalima, vodovodnim mrežama ili kada duva vetar. Na slici 4.3 je prikazan primer isticanja vode iz cevi malog prečnika, kada je tečenje u mlazu pri manjim brzinama laminarno, a pri nešto većim brzinama (i protocima) postaje turbulentno (u mlazu se primećuje uzburkanost). Ako bi se dalje povećavao protok, mlaz bi postao isprekidan, sa potpuno razvijenom turbulencijom.

Na donjem delu slike 4.3, dati su dijagrami brzina. Dok je strujanje laminarno, brzina je kroz vreme konstantna  $u(t) = \bar{u} = \text{Const.}$  (gde je sa  $\bar{u}$  označena srednja brzina). Kada strujanje postane turbulentno, brzina više nije konstantna već je promenljiva kroz vreme  $u = u(t)$ . Radi lakšeg izučavanja turbulentnog strujanja, moguće je brzinu razdvojiti na dve komponente: jednu koja je jednaka srednjoj vrednosti brzine  $\bar{u}$  i koja je konstantna i drugu, slučajnu komponentu  $u'$ , koja se naziva *fluktuacije*:

$$u(t) = \bar{u} + u' \quad \Rightarrow \quad u' = u(t) - \bar{u}$$

Pošto su fluktuacije razlika između trenutnih i osrednjenih brzina, srednja vrednost fluktuacija je nula  $\overline{u'} = 0$ , ali srednja vrednost kvadrata fluktuacija nije nula  $\overline{u'^2} \neq 0$ .

**tan tok.** Među prvima se bavio i izučavanjem turbulencije, gde je predložio osrednjavanje toka po vremenu razdvajanjem turbulentnog toka na osrednjenu brzinu i na fluktuacije. Intenzivno se bavio i modeliranjem, teorijom podmazivanja kao i uslovima stabilnosti toka.

Ovde je kao primer turbulencije uzeta brzina delića. Naravno, kao i brzina, tako i sve ostale veličine koje se vezuju za delić su u turbulentnom strujanju promenljive kroz vreme, te se mogu razdvojiti na osrednjeni i fluktuacioni deo.

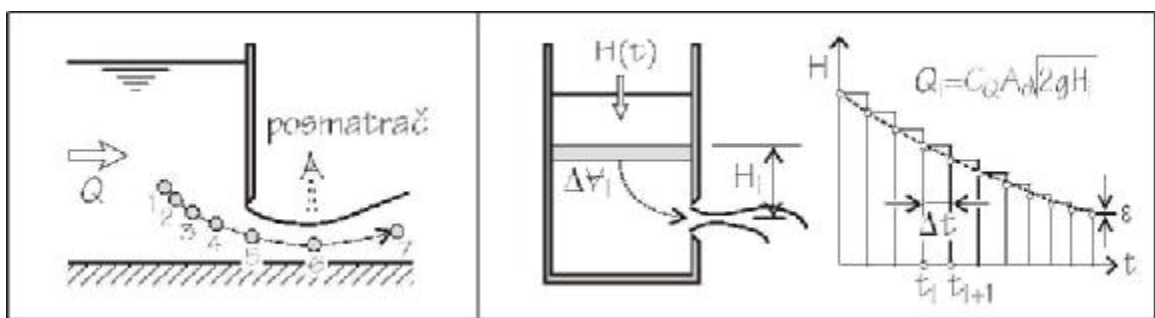
Princip osrednjavanja jednačina i uvođenje fluktuacione komponente nije predmet ove knjige, jer se ne izučava na redovnim studijama na Građevinskom fakultetu. Jednačine, koje će se u nastavku ove glave izvesti, važe samo za laminarno strujanje. Da bi se primenile na osrednjeni deo turbulentnog strujanja, neophodno je u jednačine uneti uticaj fluktuacija na osrednjeni tok, što se najčešće sprovodi kroz "turbulentnu viskoznost". Međutim, turbulencija će se spominjati i u narednim poglavljima. U poglavlju 6, *Hidrodinamički otpori*, jer upravo turbulencija bitno utiče na otpore, tako da će se u tom poglavlju dati malo detaljnije objašnjenje mehanizma nastajanja vrtloga. Takođe, u poglavljima 7, *Ustaljeno tečenje fluida kroz cevi*, i 8, *Ustaljeno tečenje u otvorenim tokovima*, razmatra se samo turbulentno tečenje, ali se u tim poglavljima uticaj turbulencije obračunava posredno, kroz različite koeficijente.

#### 4.1.4 Ustaljeno i neustaljeno strujanje

Ukoliko se posmatrane veličine ne menjaju u određenom, konačnom vremenskom intervalu, strujanje je *ustaljeno*. Uslov za ustaljenost je:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{u intervalu } (t_1, t_2)$$

odnosno, veličina  $\varphi$  je funkcija samo položaja a ne i vremena:  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ . Ukoliko se veličina  $\varphi$  menja sa vremenom, onda je strujanje *neustaljeno*.



Slika 4.4: Ustaljeno ili neustaljeno strujanje i kako ga računati

Da li je strujanje ustaljeno ili ne često zavisi i od načina kako se posmatra određena veličina. Na levom delu slike 4.4, dat je primer isticanja vode ispod ustave. Ako je protok koji dotiče, jednak onome koji ističe, nivo vode

ispred ustave će biti konstantan, nepromenljiv kroz vreme, znači ustaljen. Posmatranjem brzine u suženom preseku (na slici je nacrtano oko posmatrača), takođe će se “videti” ustaljene brzine. Međutim, ako se posmatra brzina jednog delića, od trenutka 1 do trenutka 7, on menja svoju brzinu, pa je njegova brzina neustaljena.

Neustaljenost donosi dosta problema u rešavanju jednačina Mehanike fluida. Ukoliko su promene kroz vreme relativno spore, pa su članovi, koji sadrže ubrzanje, u jednačinama zanemarljivi u odnosu na ostale koji unose uticaje težine, trenja i pritiska. Proračun se može značajno uprostiti primenjujući princip *kvaziustaljenosti*: strujanje se u nekom kratkom vremenskom intervalu posmatra kao da je ustaljeno, odrede se nepoznate veličine, a onda se sa tim veličinama koriguje početno stanje.

Na slici 4.4 desno, dat je primer isticanja vode iz rezervoara, gde nivo postepeno pada pa se i protok smanjuje. U vremenskom trenutku  $t_i$ , za poznati nivo, može se izračunati protok koristeći jednačinu za ustaljeno tečenje. Pretpostavljajući da je taj protok konstantan u intervalu  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  može se izračunati novi nivo u rezervoaru u trenutku  $t_{i+1}$ . Ako se uzme relativno mali korak  $\Delta t$  u proračunu, razlike između stvarne promene nivoa (isprekidana linija) i izračunate (na slici je ta razlika označena sa  $\epsilon$ ), biće prihvatljivo male.

#### 4.1.5 Jednoliko i nejednoliko strujanje

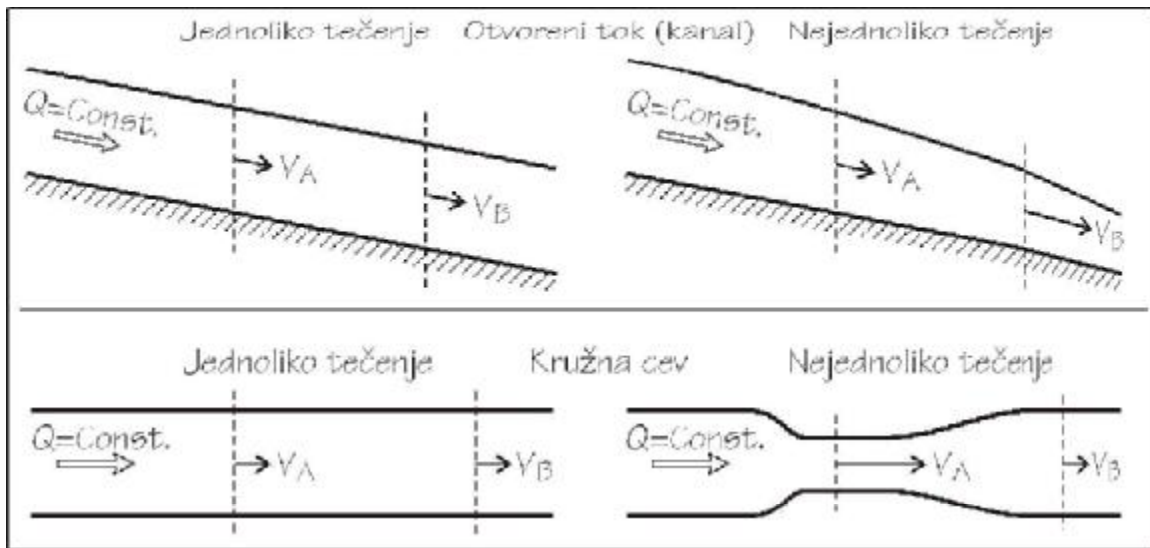
U prethodnom poglavlju je na levom delu slike 4.4, pokazano da je moguće imati neustaljenost brzine delića, iako su nivo vode i protok ustaljeni. Ta neustaljenost je rezultat promene geometrije proticajnog preseka.

Ukoliko su veličine koje su bitne za izučavani problem istovetne u svim posmatranim poprečnim presecima fluidne struje, u jednom vremenskom trenutku, kaže se da je strujanje *jednoliko* (leva strana slike 4.5). Uslov za jednoliko strujanje je:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{za trenutak: } t = t_j$$

Ako se niz fluidnu struju neka od veličina menja, iako su možda sve ostale veličine konstantne, strujanje je *nejednoliko*. Na slici 4.5 sa desne strane, prikazano je nejednoliko tečenje u otvorenom kanalu gde se menjaju dubina vode i brzina iako je protok konstantan, kao i nejednoliko tečenje u cevi, gde se menja prečnik cevi, pa i brzina vode.

Studenti pojmove jednoliko/nejednoliko i ustaljeno/neustaljeno često mešaju. Ustaljenost je vezana za promenu po vremenu u jednom preseku flu-



Slika 4.5: Jednoliko i nejednoliko tečenje u kanalu i u kružnoj cevi

idne struje (gleda<sup>2</sup> se kroz duži period samo jedan presek), a jednolikost za promenu duž fluidne struje u jednom vremenskom trenutku (pogleda<sup>3</sup> se na kratko duž cele fluidne struje).

#### 4.1.6 Dimenzionalnost problema: 3D, 2D, 1D

U opštem slučaju pri strujanju fluida delići imaju komponente brzina u sva tri koordinatna pravca  $u = u(x, y, z, t)$ . Takvo strujanje se naziva *prostorno strujanje* ili skraćeno *3D (tro-dimenzionalno strujanje)*. Svakodnevni primeri 3D strujanja su opstrujavanje automobila, tečenje vode u zoni vodozahvata ili opstrujavanje mostovskog stuba.

Ukoliko je jedna komponenta brzine zanemarljiva u odnosu na ostale dve, strujanje se naziva *ravansko* ili *2D strujanje*:  $u = u(x, y, t)$ . Primer ravanskog strujanja je opstrujavanje avionskog krila u srednjem delu, izvan uticaja tela aviona i kraja krila. Rezultat izučavanja polja brzina u jednoj presečnoj ravni se može primeniti na sve ostale presečne ravni.

Često je strujanje na "granici" između 3D i 2D. Na primer, strujanje vode u velikim jezerima ima sve tri komponente brzine, ali je dubina znatno manja veličina od dužine i širine. U računskim modelima takvih strujanja,

<sup>2</sup>Ustaljenost/neustaljenost tečenja reke bi mogla da se snimi kamerom. Potrebno je namestiti kameru na stativ, postaviti je vertikalno na dole i pustiti je da snima nivo vode u samo jednom preseku toka.

<sup>3</sup>Jednolikost/nejednolikost tečenja u kanalu se može snimiti fotoaparatom, sa kratkom ekspozicijom, slikajući iskosa nivo vode duž kanala.



često se treća komponenta brzine obračunava “skraćeno”, osrednjeno, čime se proračun svodi na nivo 2D modela, uz zadržavanje uticaja i treće komponente brzine. Takvi računski modeli se često nazivaju i *2,5D modeli*.

Ako postoji samo jedna, podužna komponenta brzine, takvo strujanje se naziva *linijsko* ili *1D strujanje*:  $u = u(x, t)$ . Sva tečenja u cevima, prizmatičnim otvorenim kanalima, kanalima za klimatizaciju i drugim linijskim elementima spadaju u 1D strujanja.

Jasno je da složenost rešavanja zadataka Mehanike fluida raste od linijskog ka prostornim strujanjima. Osnovni inženjerski problem je do koje mere neko složeno prostorno strujanje sme da se uprosti, a da se dobije prihvatljivo tačno rešenje. Na primer, iako je tečenje vode u prirodnim rekama sigurno prostorni problem, proračun nivoa reka Save i Dunava se može raditi kao linijski problem ako se posmatraju nivoi reka duž njihovog toka u našoj zemlji. Ako nas interesuje prostiranje zagađenja koje Beograd ispušta u Dunav i njegovo razblaženje nizvodno, tok u dužini od nekih 10-tak kilometara će se rešavati sa 2D jednačinama. Ako se analizira strujna slika u zoni ušća Save u Dunav, koristiće se 3D model, ali samo za lokalitet ušća.

#### 4.1.7 Trajektorija, strujnica i emisiona linija

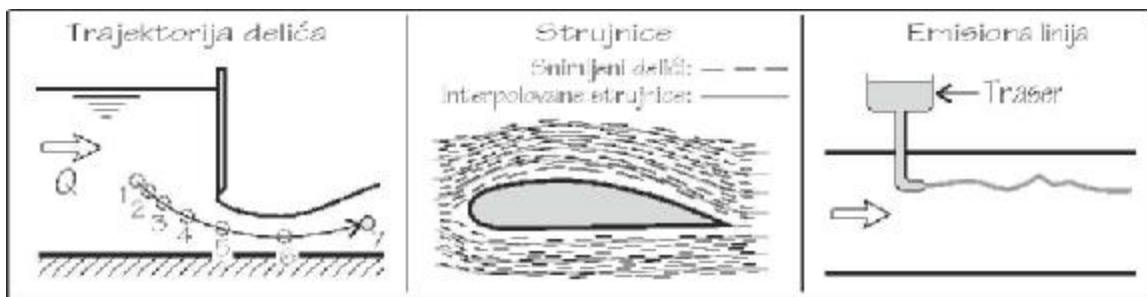
Postoje tri načina za praćenje kretanja fluidnih delića. Prvi je da se obeleži samo jedan fluidni delić i da se prati njegovo kretanje kroz vreme. Trag koji delić ostavlja zove se *trajektorija*<sup>4</sup>. Drugi način je istovremeno praćenje kretanja velikog broja fluidnih delića. Ako se u kratkom vremenskom intervalu zabeleže tragovi svih delića, dobiće se *strujnice*<sup>5</sup>, *intenziteti* i pravci brzina tih delića. Treća mogućnost vizuelizacije fluidnog toka je da se u tok kontinualno ubacuje (injektira) traser, odnosno, da se kontinualno obeležavaju fluidni delići koji prolaze kroz jednu tačku. Ako se u određenom trenutku snimi položaj svih obeleženih delića, dobija se *emisiona linija*<sup>6</sup> za taj vremenski trenutak.

Na slici 4.6, prikazane su sve tri linije: trajektorija delića prilikom isticanja ispod ustave, strujnice oko avionskog krila i emisiona linija u cevi, u laminarnom režimu tečenja koji postepeno prelazi u turbulentno. Trajektorije se najčešće dobijaju tako što se određeni deo fluidne struje slika fotoaparatom, koji miruje i na kome se drži dugačko vreme ekspozicije. Ako se jedan fluidni delić obeleži nekim fluorescentnim traserom i cela fluidna struja osvetli ultra-ljubičastim zracima (UV svetlo), posmatrani delić će se

<sup>4</sup>Engleski termin: Pathline

<sup>5</sup>Engleski termin: Streamline

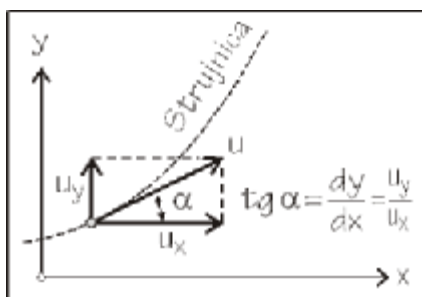
<sup>6</sup>Engleski termin: Streakline



Slika 4.6: Primeri trajektorije, strujnica i emisione linije

jasno razlikovati od ostalih delića i fotoaparata će zabeležiti njegovu putanju, trajektoriju. Kod snimanja trajektorija na rekama, često se koriste mali plovci na koje se stavi sveća.

Strujnice su linije koje imaju u svakoj svojoj tački tangentu, koja je u pravcu brzine u toj tački. Kod neustaljenog strujanja, *strujnica se vezuje i za vremenski trenutak*: ona pokazuje istovremene pravce brzina u svim tačkama. Strujnice se dobijaju fotografisanjem fluidne struje, koristeći kratko vreme ekspozicije. U celu fluidnu struju se obično ubacuje<sup>7</sup> fluorescentni prah koji se kreće isto kao i fluidni delići. Na snimku se dobijaju, u stvari, trajektorije traser ali za kratak vremenski interval, tako da te trajektorije pokazuju tangente na brzine.



Slika 4.7: Jednačina strujnice

U izučavanju strujanja oko tela, strujnice se često vizuelizuju korišćenjem tankih štapića koji su pričvršćeni upravno na konturu tela a na čijem drugom kraju se nalazi tanak končić. Iz položaja svih končića u jednom trenutku se dobijaju strujnice<sup>8</sup>.

Jednačina strujnice se dobija iz uslova da je tangenta u tački istog nagiba kao i vektor brzine (slika 4.7):

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{u_y}{u_x} \Rightarrow \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} \quad (4.1)$$

Pošto strujnica u svakoj svojoj tački ima isti smer kao i vektor brzine, sledi i važna posledica: upravno na strujnicu ne postoji komponenta brzine, odnosno, *nema protoka fluida upravno na strujnicu*. Ako se uoče bilo koje dve susedne strujnice na srednjoj slici 4.6, ovo znači da protok koji je bio između te dve strujnice na početku slike, ispred avionskog krila, mora ostati unutar te dve strujnice. Drugim rečima, dve strujnice se mogu posmatrati kao zidovi cevi, pa se u Mehanici fluida često koristi i pojam *strujna cev*.

<sup>7</sup>Termin koji se koristi je "zasejati", jer je potrebno uneti u celu fluidnu struju fluorescentni prah ili neki drugi traser čiji delići moraju biti dovoljno mali a opet lako vidljivi.

<sup>8</sup>I zastava koja se viori na vetru, u stvari, pokazuje trenutni pravac vetra u toj tački.

**Primer 4.1.1**

Ako je na snimku opstrujavanja avionskog krila (srednja slika 4.6) razmak između dve strujnice ispred krila 5 mm i na tom mestu su brzine 35 m/s, kolika je brzina na mestu iznad krila gde su strujnice na međusobnom rastojanju od 3 mm?

Pretpostaviće se da je treća dimenzija, upravna na snimak, jednaka 1 m. Tada je protok kroz strujnu cev ispred krila:

$$Q = AV = 0,005 \times 1,0 \times 35 = 0,175\text{m}^3/\text{s}$$

Brzina iznad krila je:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0,175}{0,003 \times 1,0} = 58,3\text{m/s}$$

Emisiona linija (desna slika 4.6) se često koristi za vizuelizaciju toka. Upravo je Osborn Rejnolds, pomoću vizuelizacije emisione linije, pokazao mehanizam prelaska iz laminarnog u turbulentno tečenje, kao i postojanje graničnog sloja (slika 6.11 na strani 231). Sam postupak injektiranja traser a je prilično komplikovan, jer se ne sme pokvariti prirodna strujna slika a ni traser svojim osobinama ne sme uticati na tok. Emisiona linije se češće koristi u laboratoriji za vizuelizaciju, nego u samoj analizi strujnog polja.

U opštem slučaju, trajektorija, strujnica i emisiona linija se ne poklapaju. Međutim, u *ustaljenom strujanju su sve tri linije iste*, poklapaju se. Linije se mogu poklapati i u posebnom slučaju neustaljenosti, ali samo ako se neustaljenost ogleda u promeni intenziteta brzine.

**Primer 4.1.2**

Voda izlazi iz prskača praveći polje brzina:  $u = U_0 \sin [\omega (t - y/V_0)]$ ,  $v = V_0$  i  $w = 0$  gde su  $U_0$ ,  $V_0$  i  $\omega$  konstante (prskač osciluje u  $(x, y)$  ravni) [20]. a) Odrediti jednačinu strujnice koja prolazi kroz koordinatni početak u vremenskim trenucima  $t_1 = 0$  i  $t_2 = \pi/2\omega$ . b) Odrediti jednačinu trajektorije za iste vremenske trenutke. c) Kako izgleda emisiona linija za koordinatni početak?

a) Za dati raspored brzina može se napisati jednačina strujnice (4.1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{V_0}{U_0 \sin [\omega (t - y/V_0)]}$$

Razdvajanjem varijabli, dobija se integralna jednačina za bilo koji trenutak  $t$ :

$$V_0 \int dx = U_0 \int \sin [\omega (t - y/V_0)] dy$$

Uvodeći smenu  $\omega(t - y/V_0) = \varphi$  dobija se rešenje integralne jednačine:

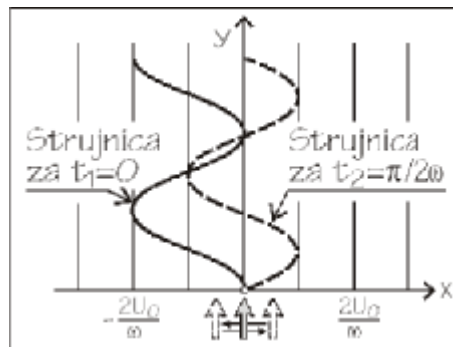
$$V_0x + C = U_0 \frac{V_0}{\omega} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{y}{V_0} \right) \right]$$

Za trenutak  $t_1 = 0$  u koordinatnom početku  $x = y = 0$  vrednost konstante je  $C = U_0 V_0 / \omega$  pa je jednačina strujnice:

$$x = \frac{U_0}{\omega} \left[ \cos \left( \frac{\omega y}{V_0} \right) - 1 \right] \quad \text{za } t = t_1 = 0$$

U trenutku  $t_2 = \pi/2\omega$  vrednost konstante je  $C = 0$  pa se sređivanjem jednačina strujnice svodi na:

$$x = \frac{U_0}{\omega} \sin \left( \frac{\omega y}{V_0} \right) \quad \text{za } t = t_2 = \pi/2\omega$$



Na slici su prikazane dve strujnice, za izabrane vremenske trenutke  $t_1$  i  $t_2$ . Linije su različite jer je strujanje neustaljeno. Na primer, brzina u koordinatnom trenutku je u trenutku  $t_1$  jednaka  $u = 0, v = V_0$ , dok je u trenutku  $t_2$  brzina  $u = U_0, v = V_0$ .

b) Iz uslova da su brzine  $u = dx/dt$  i  $v = dy/dt$ , za poznat raspored brzina se mogu odrediti trajektorije:

$$\frac{dx}{dt} = U_0 \sin \left[ \omega \left( t - \frac{y}{V_0} \right) \right] \quad \frac{dy}{dt} = V_0$$

Drugi izraz  $dy/dt$  se može integrisati jer je  $V_0$  konstanta, pa se dobija:  $y = V_0 t + C_1$ . Ako se  $y$  zameni u prvom izrazu dobija se:

$$\frac{dx}{dt} = U_0 \sin \left[ \omega \left( t - \frac{V_0 t + C_1}{V_0} \right) \right] = -U_0 \sin \left( \frac{\omega C_1}{V_0} \right) = \text{Const.}$$

Integracijom se dobija  $x$  komponenta trajektorije:

$$x = - \left[ U_0 \sin \left( \frac{\omega C_1}{V_0} \right) \right] t + C_2$$

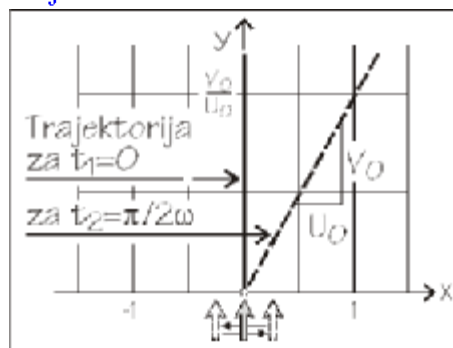
Konstante se određuju za date početne uslove. Za slučaj  $t_1 = 0$  i za koordinatni početak ( $x = y = 0$ ) njihova vrednost je  $C_1 = C_2 = 0$  pa je jednačina trajektorije prava linija  $y = V_0 t$ . Za drugi slučaj  $t_2 = \pi/2\omega$  vrednosti konstanti su  $C_1 = -\pi V_0 / 2\omega$  i  $C_2 = -\pi U_0 / 2\omega$  pa je jednačina trajektorije data sa:

$$x = U_0 \left( t - \frac{\pi}{2\omega} \right) \quad \text{i} \quad y = V_0 \left( t - \frac{\pi}{2\omega} \right)$$

Eliminišući  $t$  iz jednačina njihovim deljenjem, dobija se jednačina trajektorije:

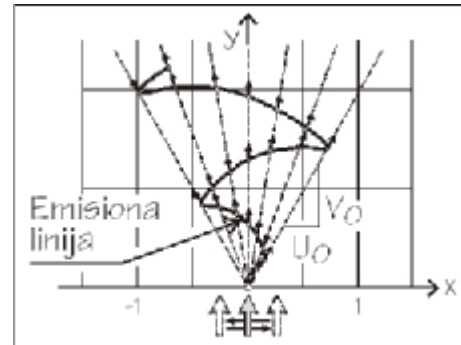
$$y = \frac{V_0}{U_0} x$$

Iz jednačine trajektorije sledi da su to prave



linije koje se zrakasto šire iz koordinatnog početka. Na slici su prikazane trajektorije za dva delića: jednog koji je bio u koordinatnom početku u trenutku  $t_1$  a drugog u trenutku  $t_2$ . Trajektorije i strujnice se ne poklapaju, jer je strujanje neustaljeno.

c) Emisiona linija u trenutku  $t = t_3$  se dobija spajanjem svih delića koji su prošli kroz koordinatni početak. Svi delići putuju duž trajektorija koje su prave linije pod nagibom  $\pm V_0/U_0$ . U zavisnosti od trenutka  $t < t_3$  kada su delići prošli kroz koordinatni početak, trajektorije i udaljenja su različiti. Kad bi se kontinualno ubrizgavao traser u fluidnu struju u koordinatnom početku, linija koja bi se videla bi izgledala kao prikazana emisiona linija. Slična emisiona linija se dobija kada se prskač creva za zalivanje trave oscilatorno pomera.



### 4.1.8 Protok fluida i srednja brzina

Posmatra se zapremina  $V$  ograničena površinom  $A$ . Iz te površine  $A$ , kroz elementarnu površinu  $dA$  izlazi fluid koji sa sobom nosi neku karakterističnu veličinu. Ta veličina može biti zapremina, masa, količina kretanja ili neka druga karakteristika.

Na slici 4.8 je prikazano kako kroz  $dA$  ističe zapremina  $dV$ . U jedinici vremena je isteklo  $dV = d\xi dA$ , gde je  $\xi$  normala na površ  $dA$ , pa je protok zapremine:

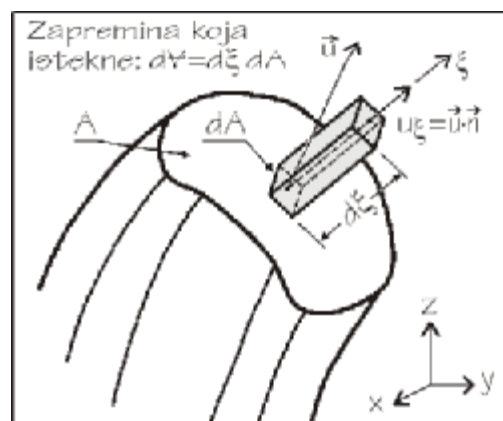
$$dQ = \frac{dV}{dt} = \frac{d\xi dA}{dt} = u_\xi dA \tag{4.2}$$

jer je  $d\xi/dt = u_\xi$ . Brzina  $u_\xi$  je komponenta vektora brzine  $\vec{u}$ , na mestu  $dA$ , u pravcu  $\xi$  i jednaka je skalarnom proizvodu vektora brzine i orta posmatrane elementarne površine  $dA$ :

$$u_\xi = \vec{u} \cdot \vec{n}$$

Rezultat skalarnog proizvoda dva vektora  $\vec{u} \cdot \vec{n}$  je skalar, jednak zbiru proizvoda odgovarajućih komponentata tih vektora:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = u_x n_x + u_y n_y + u_z n_z$$



Slika 4.8: Zapremina koja ističe

U radu sa vektorima, često je zgodnije pravac vektora obeležavati indeksom<sup>9</sup>  $i$ , gde je  $i = x, y, z$  ili opštije  $i = 1, 2, 3$ . Ako se usvoji pravilo da u jednom monomu mogu da se ponove isti indeksi i da tada oni označavaju trinom koji je zbir monoma za sva tri koordinatna pravca, tada se skalarni proizvod može napisati kao:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = u_i n_i = u_1 \times n_1 + u_2 \times n_2 + u_3 \times n_3$$

Elementarni protok zapremine kroz  $dA$  dat jednačinom (4.2) je:

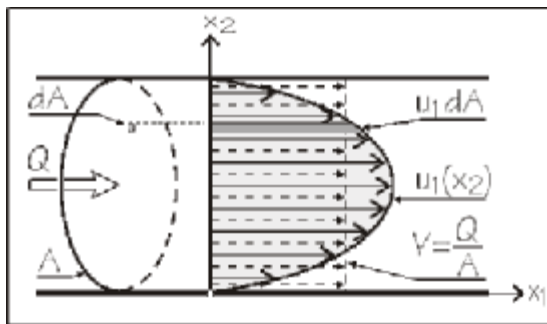
$$dQ = u_i n_i dA$$

dok je ukupni protok suma elementarnih protoka po celoj površini  $A$ :

$$Q = \int_A \vec{u} \cdot \vec{n} dA = \int_A u_i n_i dA \tag{4.3}$$

Iz jednačina (4.2) i (4.3) se vidi da je *protok pozitivan kada fluid ističe, napušta posmatranu zapreminu*. Ukoliko se zapremina  $dV$ , koja ističe kroz  $dA$ , u jednačini (4.2), pomnoži sa gustinom,  $\rho dV$ , dobija se isticanje elementarne mase. Ukupan protok mase kroz površinu  $A$  je tada:

$$Q_M = \int_A \rho u_i n_i dA \tag{4.4}$$



Slika 4.9: Stvarni raspored brzina u preseku  $u(x_2)$  i srednja brzina  $V$  koja se često koristi kao reprezentativna profilska brzina

Uopšteno, može se napisati protok bilo koje veličine  $B$  koja je po jedinici zapremine jednaka  $\varphi$  kao:

$$Q_B = \int_A \varphi u_i n_i dA \tag{4.5}$$

odnosno, veličine  $B$  koja je po jedinici mase jednaka  $b$  kao:

$$Q_B = \int_A \rho b u_i n_i dA \tag{4.6}$$

Ako se izučava kretanje fluida kroz konačni presek  $A$ , po pravilu brzine u preseku nisu konstantne (na primer,

na slici 4.9 je prikazano tečenje fluida kroz kružnu cev, gde se brzine menjaju od nule uz sam zid cevi do maksimalne vrednosti u centru cevi). U većini praktičnih zadataka promenljivost brzine po preseku  $u(x)$  nije interesantna,

<sup>9</sup>Detaljniji prikaz obeležavanja skalarnih, vektorskih i tenzorskih veličina se može naći u poglavlju 15 knjige *Mehanika fluida, osnove* G. Hajdin, 1977-2002 [9].

već nam je dovoljna jedna brzina  $V$ , koja bi bila konstantna po preseku<sup>10</sup>. Ta brzina se naziva *srednja profilska brzina* i dobija se iz uslova da je  $V \times A$  jednako zapreminskom protoku kroz cev (jednačina (4.3)):

$$V \times A = \int_A u_1(x_2) dA \Rightarrow V = \frac{Q}{A} \tag{4.7}$$

Samo u malom broju zadataka, kada se u izrazu pojave trenutne brzine  $u(x)$  na drugi ili treći stepen i kada se želi postići veća tačnost proračuna, uvode se korekcionni faktori: **Businessov faktor**  $\beta$  (poglavljje 4.5.5 *Rešenje integralne jednačine održanja količine kretanja za ustaljeno tečenje homogenog fluida u cevi*, strana 150) i **Koriolisov faktor**  $\alpha$  (poglavljje 4.6.3 *Rešenje integralne jednačine održanja energije za ustaljeno tečenje homogenog fluida u cevi*, strana 165).

**Primer 4.1.3**

U ustaljenom ravanskom strujanju između dve paralelne nepokretne ploče, koje su na međusobnom rastojanju  $h$ , raspored brzina je dat sa:

$$u_1 = U_0 \left[ 1 - \left( \frac{x_3 - \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right] \quad u_2 = u_3 = 0 \quad \text{za} \quad 0 \leq x_3 \leq h$$

Za razmak između ploča od  $h = 1$  cm i protok za jedan metar širine fluidne struje  $B = 1$  m od  $Q = 6$  dm<sup>3</sup>/s ( $0 \leq x_2 \leq 1$ ), kolika je vrednost konstante  $U_0$ ?

Protok između dve ploče je dat integralom:

$$Q = \int_A u dA = \int_0^h u_1 B dx_3 \quad \text{gde je} \quad B = 1 \text{ m}$$

Ako se zameni raspored brzina  $u_1$  u integralu, gde su  $B$  i  $U_0$  konstante, dobija se:

$$Q = B \int_0^h U_0 \left[ 1 - \left( \frac{x_3 - \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right] dx_3 = BU_0 \int_0^h dx_3 - BU_0 \int_0^h \left( \frac{x_3 - h/2}{h/2} \right)^2 dx_3$$

$$Q = BhU_0 - BU_0 \frac{4}{h^2} \int_0^h \left( x_3^2 - hx_3 + \frac{h^2}{4} \right) dx_3 = BhU_0 - BU_0 \frac{4}{h^2} \frac{h^3}{12} = \frac{2}{3} BhU_0$$

Za date podatke, vrednost konstante  $U_0$  je:

$$U_0 = \frac{3Q}{2Bh} = \frac{3 \times 0,006}{2 \times 1 \times 0,01} = 0,9 \text{ m/s}$$

<sup>10</sup>U poglavljju 4.1.1 *Materijalni delić, strujanje realnog i idealnog fluida* je kao primer razlike strujanja realnog i idealnog fluida upravo uzeto strujanje kroz cev.

## 4.2 Metode opisivanja kretanja fluida

U opisivanju strujnog polja, moguća su dva različita pristupa:

**Sistemski pristup** Traži se rešenje bez sagledavanja šta se događa unutar sistema<sup>11</sup>. To je moguće uraditi na dva načina:

1. Posmatra se *inercijalni*<sup>12</sup> sistem sa konstantnom masom. Pristup je uobičajen u klasičnoj mehanici, gde se izučava kretanje krutih tela. Svi klasični zakoni kretanja (I i II Njutnov zakon, termodinamički zakon) važe za sistem sa konstantnom masom. Kod fluida, jednačinama se opisuje kretanje jednog delića konstantne mase  $dm = \rho dV$ .
2. Posmatra se *inercijalni sistem sa konstantnom zapreminom* (ili sa kontrolnom zapreminom). Zgodniji pristup za analizu kretanja fluida jer se ne prati kretanje jednog (određenog) delića već se posmatra jedna konstantna zapremina, koja se kroz vreme ne pomera, a kroz koju prolaze fluidni delići (slika 4.11 na strani 103). Jednačinama se prati samo ukupni bilans neke od veličina unutar zapremine (promena veličine u zapremini kroz vreme, protok kroz granicu zapremine i “proizvodnja” te veličine unutar zapremine moraju biti u ravnoteži) dok sama prostorna raspodela te veličine unutar zapremine nije bitna. Jednačine su dosta jednostavnije od onih koje prate kretanje delića, ali je *neophodno klasične zakone kretanja prevesti iz oblika za konstantnu masu u oblik za konstantnu zapreminu*.

Sistemi sa konstantnom zapreminom se nekada nazivaju i *otvoreni sistemi*. Po definiciji, sistemski pristup zahteva praćenje uvek istih atoma ili fluidnih delića. Kod kontrolne zapremine to nije slučaj, jer jedni fluidni delići napuštaju posmatranu zapreminu dok drugi ulaze u nju. Međutim, svi fluidni delići *kontinualno prolaze* kroz posmatranu zapreminu jer nema “rupa” u fluidnom polju, a fizička svojstva (osobine) im se *kontinualno menjaju*: nema skokovite, nagle promene neke od osobina (gustine, pritiska, temperature i slično).

<sup>11</sup>Prema jednoj od definicija, sistem je zbir čestica istih svojstava (uvek isti atomi ili fluidni delići) koje mogu da se kreću, teku i stupaju u interakciju sa okolinom.

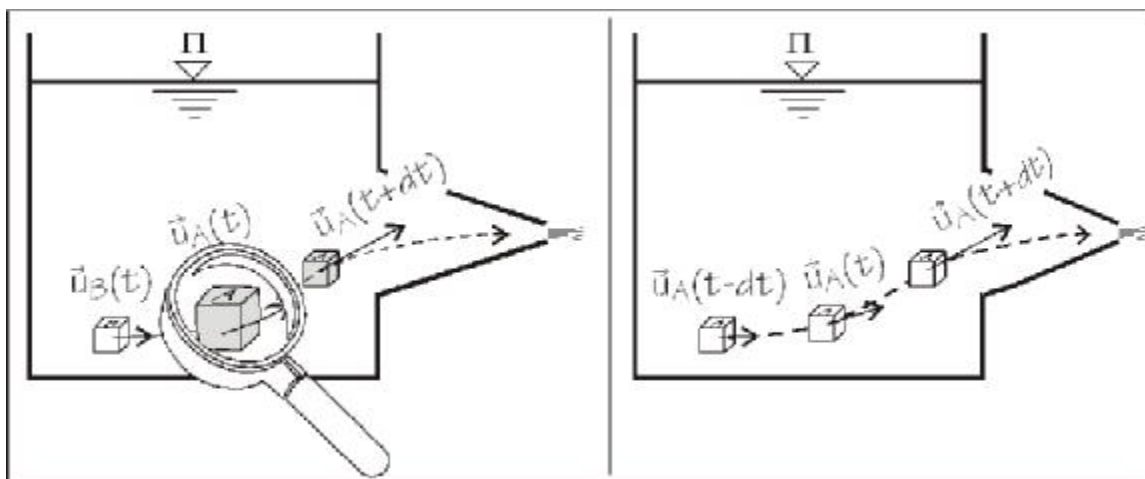
<sup>12</sup>Osnovna osobina inercijalnih sistema je da je u odnosu na njih prostor homogen i izotropan a vreme homogeno.



Zadatak inženjera građevine se uglavnom svodi na proračun ukupne sile na objekat (ventil na cevovodu, zgradu), usled opstrujavanja fluida, bez zalaženja u detalje (šta se događa sa fluidnim delićem dok se provlači kroz poluotvoreni ventil ili kroz nečiju sobu). Zbog toga će se u ovoj knjizi uglavnom koristiti sistem sa konstantnom zapreminom. U sledećem poglavlju, prvo će biti izvedene jednačine koje povezuju konstantnu masu i konstantnu zapreminu, a u nastavku, na osnovu tih jednačina, biće izvedeni osnovni zakoni održanja.

Jednačine koje se dobijaju sistemskim pristupom se najčešće rešavaju u integralnom obliku, jer se posmatra cela masa odnosno kontrolna zapremina. Za ovakve jednačine se često kaže da su *konzervativne*, jer bilans posmatrane veličine u celokupnoj posmatranoj zapremini mora biti uvek zadovoljen. Uz dopunske pretpostavke o ustaljenom strujanju homogenog i idealnog fluida, jednačine se svode na obične algebarske jednačine.

**Analiza strujnog polja** Proučava se kretanje delića u svakoj tački koordinatnog sistema. Moguća su dva pristupa u praćenju delića:



Slika 4.10: Ojlerov pristup: prate se promene u jednoj tački polja (levo); Lagranžev pristup: prate se promene koje se događaju jednom deliću (desno)

1. Ojlerov<sup>13</sup> pristup: manje detaljan pristup gde se *posmatraju parametri polja kroz vreme, ali u fiksnoj tački prostora*. Ne zna se

<sup>13</sup>Leonhard Euler (1707 - 1783) švajcarski matematičar koji je dao znatan doprinos Njutnovskoj mehanici formulišući jednačine kretanja idealnog fluida i čvrstih tela. Bio je đak Jakoba Bernulija a dobar prijatelj sa Danijelom Bernulijem. Zbog bolesti je izgubio vid prvo na jednom, pa zatim i na drugom oku, ali to ga nije sprečilo da nastavi svoj izuzetan rad.

tačno koji je delić unutar posmatrane tačke, jer jedan delić napusti tačku, a drugi dolazi na njegovo mesto (levi deo slike 4.10, posmatra se trenutno delić *A*, koji će otići, a na njegovo mesto će doći delić *B*).

2. Lagranžeov<sup>14</sup> pristup: najdetaljniji način izučavanja fluidne struje, **gde se prati svaki delić pojedinačno i karakteristike polja vezane uz taj delić** (na slici 4.10 desno, prati se delić *A*). **Ovaj pristup je najkomplikovaniji ali i daje potpuni uvid u strujno polje.**

U analizi strujnog polja se polazi od jednačina za fluidni delić i one se najčešće rešavaju u diferencijalnom obliku. Jednačine *nisu konzervativne*, jer se posmatra samo jedan delić, a bilans neke posmatrane veličine će biti zadovoljen na nivou celokupne zapremine. Kod neustaljenog strujanja homogenih ili nehomogenih fluida, do rešenja jednačina se uglavnom dolazi numeričkim putem, približnim metodama.

Bez obzira da li se radi na nivou sistema ili na nivou delića u strujnom polju, jednačine koje se dobijaju su, u opštem slučaju, analitički nerešive. Da bi se rešile, neophodno je uvesti određena uprošćenja, koja su opravdana u konkretnom zadatku. Može se reći, u stvari, da je *predmet mehanike fluida razvoj matematičkih metoda za rešavanje opštih jednačina mehanike kao i vrste uprošćavanja, koja se moraju primeniti da bi jednačine bile rešive.*

### 4.3 Koncept kontrolne zapremine

Osnovni zakoni održanja koji se primenjuju u klasičnoj mehanici, kao što su zakoni održanje mase, Njutnovi zakoni i zakoni termodinamike, odnose se na sisteme sa konstantnom masom. U izučavanju fluida, zgodnije je posmatrati fiksnu, konstantnu zapreminu, koja se ne pomera kroz vreme i kroz koju protiče fluid. Pri tome, potrebno je uspostaviti vezu između sistema sa konstantnom masom i sistema sa konstantnom zapreminom<sup>15</sup>, kako bi mogle

<sup>14</sup>Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) smatra se francuskim matematičarem i astronomom, mada je rođen u Torinu, Italija. I pored toga što je u matematičkom obrazovanju bio samouk, već sa 19 godina postaje profesor matematike na Kraljevskoj Artiljerijskoj školi u Torinu. Objavljuje, pod nadzorom Ojlera, račun verovatnoće, bavi se teorijom oscilacija žica, gde koristi diskretni model masa i rešava sisteme od  $(n + 1)$  diferencijalnih jednačina. Analizirao je rešavanje diferencijalnih jednačina u oblasti mehanike fluida, ali i u oblasti astronomije. Za svoje zasluge u oblasti matematike je dobio 1808. od Napoleona orden Legije časti.

<sup>15</sup>U literaturi se prelazak sa sistema koji posmatra masu na sistem koji posmatra zapreminu, ili region, često naziva Rejnoldsova transportna teorema.

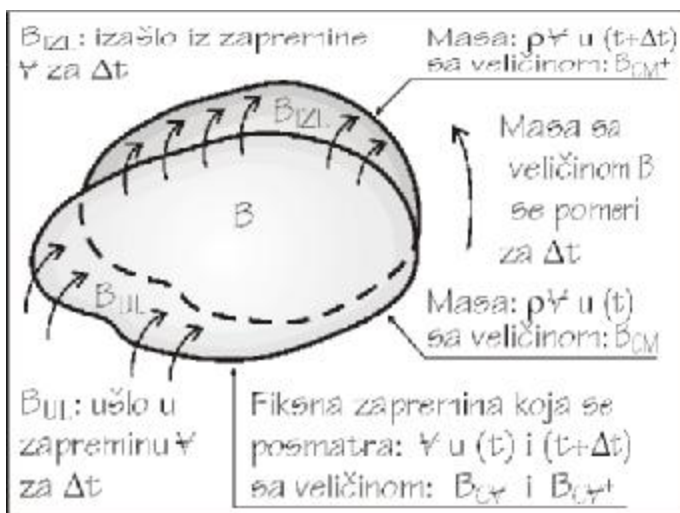
da se iskoriste osnovne jednačine održanja na fluid u posmatranoj zapremini.

U nastavku će se prvo uspostaviti veza između konstantne mase i zapremine, odakle će se dobiti opšti izraz za promenu neke karakteristične veličine vezane uz masu (koja se pomera), posmatranjem nepokretne zapremine. Uvešće se pojam materijalnog izvoda, koji se odnosi na kretanje određenog fluidnog delića, kao i pojam brzine deformacije fluidnog delića. Kako materijalni izvod prati promenu delića, odnosno određene mase fluida koja se kreće kroz prostor, da bi zadržali koncept korišćenja nepokretne konstantne zapremine, na kraju će se uspostaviti veza između materijalnog izvoda i konstantne zapremine.

### 4.3.1 Prelazak sa konstantne mase na konstantnu zapreminu

Posmatra se određeni *inercijalni sistem* mase  $m$ . Veličina  $B$  je neka karakteristična veličina tog sistema (masa, impuls mase ili energija). Kako je masa mera inercije sistema, uvodi se veličina  $b$  koja je jednaka veličini  $B$  po jedinici mase<sup>16</sup>, tako da je:

$$B = bm$$



Slika 4.11: Konstantna masa se nalazila u posmatranoj zapremini u trenutku  $(t)$  da bi deo te mase napustio zapreminu u  $(t + \Delta t)$

Ako se posmatra deo fluide struje, masa fluidnog delića je  $dm = \rho dV$ , a vrednost karakteristične veličine delića je  $dB = b dm$ . Sumiranjem vrednosti karakteristične veličine po celokupnoj posmatranoj masi fluida, dobija se:

$$B = \int_V \rho b dV \quad (4.8)$$

Na slici 4.11, prikazana je konačna masa fluida sa karakterističnom veličinom  $B$ . U trenutku  $t$ , vrednost karakteristične veličine je  $B_{CM}$ , a

<sup>16</sup>U nekim knjigama se kao karakteristika inercijalnog sistema uvodi veličina  $\Phi$  i veličina  $\phi$  jednaka  $\Phi$  po jedinici zapremine. Prema ovde usvojenim oznakama važe sledeće relacije:  $\Phi = B$ ,  $\phi = \rho b$  i  $\Phi = \int \phi dV$ .

kada se posle nekog malog vremena  $\Delta t$  konačna masa pomeri u novi položaj, uz poštovanje osnovnih zakona održanja klasične mehanike, vrednost karakteristične veličine će biti  $B_{CM+}$ .

Koncept konstantne zapremine zahteva praćenje promene karakteristične veličine  $B$  unutar zapremine koju je konačna masa zauzimala u trenutku  $t$ . Ako se sa  $C_V$  označi ta zapremina, tada je  $B_{C_V}$  vrednost karakteristične veličine u trenutku  $t$  a  $B_{C_V+}$  u trenutku  $t + \Delta t$ . Sa slike 4.11, vidi se da mora biti ispunjen uslov:

$$B \text{ u trenutku } t = B_{CM} = B_{C_V} \tag{4.9}$$

U trenutku  $t + \Delta t$ , kada se posmatrana masa pomeri, vrednost njene karakteristične veličine je:

$$B \text{ u trenutku } t + \Delta t = B_{CM+} = B_{C_V+} + B_{IZL} - B_{UL}$$

gde su  $B_{IZL}$  i  $B_{UL}$  količine karakteristične veličine koje za vreme  $\Delta t$  napuste ili uđu u konstantnu zapreminu. Promena karakteristične veličine u vremenu je, uz zamenu  $B_{CM}$  sa  $B_{C_V}$  na osnovu jednačine (4.9):

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{B_{CM+} - B_{CM}}{\Delta t} = \frac{B_{C_V+} - B_{C_V}}{\Delta t} + \frac{B_{IZL} - B_{UL}}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{\Delta B_{C_V}}{\Delta t} + \frac{B_{IZL} - B_{UL}}{\Delta t}$$

Smanjenjem vremenskog koraka sa  $\Delta t$  na  $dt$ , dobija se veza između sistema sa konstantnom masom i sistema sa konstantnom zapreminom (Rejnoldsova transportna teorema):

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dB_{C_V}}{dt} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{IZL} - B_{UL}}{\Delta t}$$

Izvod po vremenu  $dB/dt$  je promena bilo koje osobine sistema sa konstantnom masom,  $dB_{C_V}/dt$  je promena te osobine unutar kontrolne zapremine, a zadnji član je ukupno izašla karakteristična veličina kroz konturu konstantne zapremine. Koristeći (4.8) prethodna jednačina se može napisati u sledećem obliku:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho b \, dV = \frac{d}{dt} \int_{C_V} \rho b \, dV + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{IZL} - B_{UL}}{\Delta t}$$

pri čemu se granica prvog integrala pomera sa pomeranjem posmatrane mase, a granica drugog integrala je nepokretna (sa desne strane jednakosti). Kako

### 4.3. KONCEPT KONTROLNE ZAPREMINE

je granica nepokretna, nije funkcija vremena pa se izvod po vremenu može uvući unutar drugog integrala:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho b \, dV = \int_{CV} \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} \, dV + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{IZL} - B_{UL}}{\Delta t} \quad (4.10)$$

Zadnji član jednačine predstavlja protok karakteristične veličine  $B$  kroz granicu konstantne zapremine (izlaz - ulaz). U poglavlju 4.1.8 *Protok fluida i srednja brzina* je pokazano da je protok veličine  $B$  kroz površinu  $A$  (jednačina (4.6)) jednak:

$$Q_B = \int_{CA} \rho b u_i n_i \, dA$$

Da bi se naglasilo da je *granica integracije konstantna, da se ne pomera kroz vreme, umesto integracije po  $A$  u izrazu se piše integracija po  $CA$ .*

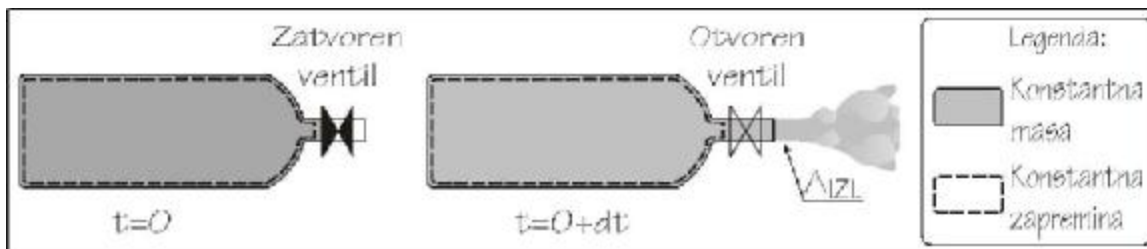
Sređivanjem jednačine (4.10), dobija se tražena veza između promene veličine  $B$  za sistem sa konstantnom masom i za sistem sa konstantnom zapreminom, koji će se koristiti u daljim izvođenjima:

$$\frac{dB}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} \, dV + \int_{CA} \rho b u_i n_i \, dA \quad (4.11)$$

Prvi, zapreminski integral, predstavlja lokalnu promenu veličine  $B$  kroz vreme, unutar fiksne kontrolne zapremine ( $CV$ ), a drugi, površinski integral, protok veličine  $B$  kroz površinu ( $CA$ ), omotač fiksne kontrolne zapremine.

#### Primer 4.3.1

U sudu konstantne zapremine se pod pritiskom nalazi fluid. U početnom trenutku  $t = 0$  sud je zatvoren. U trenutku  $t = 0 + dt$  naglo se otvori ventil i fluid počne da ističe. Napisati izraz za promenu mase fluida u sudu kada se otvori ventil?



Na slici je, sa leve strane, prikazan sud sa zatvorenim ventilom, se celokupnom masom fluida unutar suda, dok je sa desne strane prikazan trenutak kada se otvori

ventil i kada fluid počne da izlazi iz suda. Posmatra se masa fluida, pa je karakteristična veličina  $B = m$  a njena vrednost po jedinici mase  $b = 1$ . Jednačina (4.11) se svodi na:

$$\frac{dm}{dt} = \int_{C_V} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{CA} \rho u_i n_i dA$$

Prema osnovnom zakonu mehanike, masa sistema je nepromenljiva, pa je leva strana jednačine nula. Ako se pretpostavi da je fluid homogen, parcijalni izvod po vremenu sa desne strane jednačine može da izađe ispred integrala, jer je gustina samo funkcija vremena, a ne i prostora.

Poslednji član jednačine je protok mase kroz konturu, u trenutku kada se otvori ventil. Ako se sa  $A_1$  označi proticajna površina, a brzina kojom fluid napušta sud sa  $V_1$ , tada je protok mase  $(+\rho V_1 A_1)$ . Prethodna jednačina se svodi na:

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{C_V} \rho dV + \rho V_1 A_1$$

Integral  $\int_{C_V} \rho dV$  je jednak masi fluida koja je ostala u sudu  $m_{C_V}$ , pa se dobija finalna jednačina:

$$\frac{d}{dt} (m_{C_V}) = -\rho V_1 A_1$$

odnosno, smanjenje mase fluida u sudu je jednako masi fluida, koja izađe iz suda u jedinici vremena.

Površinski integral iz jednačine (4.11) se, na osnovu Gausove<sup>17</sup> teoreme, može pretvoriti u zapreminski integral<sup>18</sup>:

$$\int_{CA} \rho b u_i n_i dA = \int_{C_V} \left[ \frac{\partial(\rho b u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho b u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho b u_z)}{\partial z} \right] dV \quad (4.12)$$

Korišćenjem udvojenog indeksa  $i$  (notacija koja će se koristiti u ovoj knjizi) ili operatora gradijenta nabra  $\vec{\nabla}$ , sumiranje parcijalnih izvoda po koordinatnim pravcima (4.12) se može prikazati kompaktnije:

$$\int_{CA} \rho b u_i n_i dA = \int_{C_V} \frac{\partial(\rho b u_i)}{\partial x_i} dV = \int_{C_V} \vec{\nabla} \cdot (\rho b \vec{u}) dV \quad (4.13)$$

<sup>17</sup>Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) je poznati nemački matematičar koji je dao veliki doprinos fundamentalnoj algebri, teoriji brojeva, teoriji diferencijalnih jednačina, teorijskoj astronomiji, hipergeometrijskim funkcijama i neuklidskoj geometriji. Zajedno sa Veberom je radio na otkriću Kirhohovih pravila kao i na uspostavljanju svetske mreže za merenje Zemljinog magnetizma.

<sup>18</sup>Detaljno izvođenje se može naći u poglavlju 23 knjige *Mehanika fluida, osnove* G. Hajdin, 1977-2002.

Zamenom površinskog intergrala zapreminskim u jednačini (4.11), dobija se izraz za promenu u vremenu karakteristične veličine  $B$ , vezane za konstantnu masu, prilikom kretanja te mase, a posmatranjem konstantne, nepokretne, zapremine:

$$\frac{dB}{dt} = \int_{CV} \left[ \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho b u_i)}{\partial x_i} \right] dV \quad (4.14)$$

Prema principu održanja veličine  $B$ , promena u vremenu  $dB/dt$  mora biti jednaka nekoj drugoj veličini  $S$ , koja se odnosi na celokupnu masu:

$$\frac{dB}{dt} = S \quad (4.15)$$

Na primer, ako je  $B$  masa, tada je  $S = 0$ , jer masa ne može ni da se stvori ni da nestane. Za količinu kretanja  $B = mV$ , veličina  $S$  je prema drugom Njutnovom zakonu suma sila, koja izaziva promenu količine kretanja posmatrane mase. Takođe, prema prvom zakonu termodinamike, za unutrašnju energiju  $B = \mathbf{E}$ , veličina  $S$  je jednaka razlici dovedene količine toplote i rada koji sistem utroši na okolna tela. U narednim poglavljima 4.4, 4.5 i 4.6, detaljno će se izučiti principi održanja posmatranjem konstantne zapremine fluida.

#### 4.3.2 Praćenje kretanja materijalnog delića

U opštem slučaju brzina fluidnog delića, kao i ostale veličine koje su vezane uz delić (gustina, pritisak, koncentracija zagađivača i slično), su funkcija i vremena i prostora  $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ . U Mehanici fluida se često koristi izvod veličine  $\varphi$  po vremenu. Ako je u pitanju, na primer, koncentracija dima u vazduhu  $C$ , taj izvod je moguće odrediti na tri načina. Prvi bi bio da se postavi instrument za merenje koncentracije dima na određeno, fiksno mesto i da se kontinualno beleži koncentracija. Brzina promene koncentracije je tada jednaka  $\partial C/\partial t$ , parcijalnom izvodu koncentracije po vremenu.

Druga mogućnost je da se montira instrument na avion, koji će leteti nekom svojom trajektorijom a da instrument kontinualno meri koncentraciju  $C$ . Instrument će zabeležiti brzinu promene koncentracije u jednoj tački, ali i brzinu promene koncentracije po prostoru usled kretanja aviona:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial C}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial C}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Izvodi pomeranja aviona po vremenu su komponente njegove brzine  $u_x^A$ ,  $u_y^A$  i  $u_z^A$  pa se prethodni izraz može napisati u obliku:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} u_x^A + \frac{\partial C}{\partial y} u_y^A + \frac{\partial C}{\partial z} u_z^A \quad (4.16)$$

Treća mogućnost je da se instrument postavi u balon i da se pusti da vazдушna struja slobodno nosi balon. Promena koncentracije po vremenu je slična onome što je zabeleženo i kada je instrument bio u avionu, sa tom razlikom što je sada balon pratio kretanje vazduha, pa se umesto brzine aviona sada uzima brzina vazduha, odnosno brzina materijalnog delića:

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x}u_x + \frac{\partial C}{\partial y}u_y + \frac{\partial C}{\partial z}u_z = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x_i}u_i \quad (4.17)$$

U jednačini je za izvod po vremenu  $DC/Dt$  upotrebljeno veliko slovo da bi se naglasilo da se radi o izvodu koji prati kretanje fluidnog delića. Takav izvod po vremenu se zove *materijalni (supstancijalni) izvod*, jer je vezan za kretanje materijalne tačke.

Na slici 4.12, prikazan je jedan fluidni delić u trenutku  $t$ , sa svojom trajektorijom i strujnicom. Uz delić se prati neka veličina  $\varphi$ . U sledećem trenutku  $t + dt$ , kad bi delić mogao da se pomeri u bilo kom pravcu  $dx$ , promena veličine  $\varphi$  bi bila  $d\varphi/dt$  (4.16). Međutim, materijalni delić može samo da nastavi po svojoj trajektoriji i jedini mogući pravac njegovog kretanja je  $Dx$ . Izvod veličine  $\varphi$  po vremenu je:

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + u_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Izraz se može napisati u notaciji sa indeksima, gde udvajanje indeksa  $i$  označava tri sabirka, tako da se dobija uopšteni oblik materijalnog izvoda:

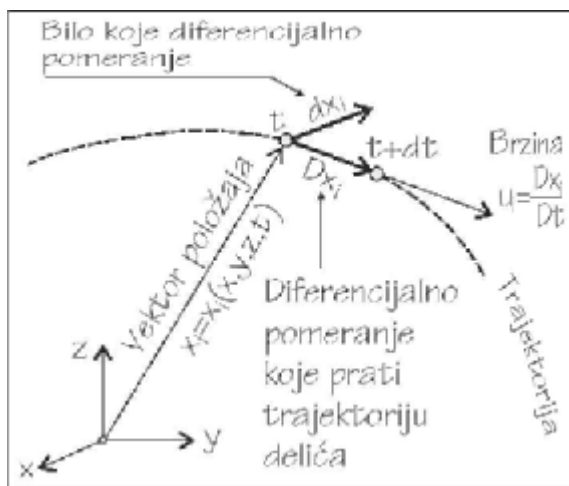
$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (4.18)$$

Ako je, na primer, veličina  $\varphi$  komponenta brzine u pravcu  $y$  tada je ubrzanje delića u tom pravcu jednako materijalnom izvodu:

$$\frac{Du_y}{Dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_y}{\partial x_i}$$

odnosno, za bilo koji pravac  $i$ :

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (4.19)$$



Slika 4.12: Iz položaja  $x_i$ , delić se u sledećem trenutku ne može pomeriti za bilo koje diferencijalno pomeranje  $dx_i$  već samo za  $Dx_i$ , duž svoje trajektorije



Indeks  $j$ , u prethodnoj jednačini, označava sumiranje tri člana, dok indeks  $i$  daje pravac vektora.

U jednačini (4.18) prvi sabirak predstavlja promenu veličine  $\varphi$  kroz vreme, dok se delić nalazi u fiksnoj tački pa se taj član često naziva *lokalna komponenta izvoda*. U lokalnom izvodu je fiksiran prostor, delić se ne pomera već se samo gleda promena veličine  $\varphi$  kroz vreme.

Drugi sabirak jednačine (4.18) daje promenu veličine  $\varphi$ , koja je nastala usled promene položaja materijalnog delića. Taj član se naziva *konvektivna komponenta izvoda*. Kod konvektivne komponente je fiksirano vreme, a gleda se kolika je promena veličine  $\varphi$  po prostoru.

### Primer 4.3.2

Iz rezervoara u kome se nivo vode postepeno smanjuje, izlazi horizontalna cev čiji se prečnik postepeno povećava. U preseku 1 je prečnik cevi  $D_1 = 0,15$  m a u preseku 2, koji se nalazi 2 m nizvodno, prečnik je  $D_2 = 0,17$  m. U trenutku  $t_a = 10$  s u preseku 1 je izmerena brzina  $V_1^a = 1,5$  m/s a u trenutku  $t_b = 15$  s brzina  $V_1^b = 1,4$  m/s. Koliki je materijalni izvod brzine  $V$  u preseku 1 u trenutku  $t_a$ ?

Brzina u preseku 2 se može odrediti iz uslova nestišljivosti vode  $Q_1 = Q_2$ , odnosno,  $V_1 A_1 = V_2 A_2$  gde su  $A_1$  i  $A_2$  površine poprečnih preseka cevi:

$$V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2} = V_1 \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 = V_1 \left( \frac{0,15}{0,17} \right)^2 = 0,7785 V_1$$

Za vremenski trenutak  $t_a$  brzina u preseku 2 je  $V_2^a = 1,1678$  m/s (za trenutak  $t_b$  brzina  $V_2^b = 1,0899$  m/s nije potrebna za proračun). Materijalni izvod brzine  $V$  u preseku 1 i u trenutku  $t_a$  je za date uslove:

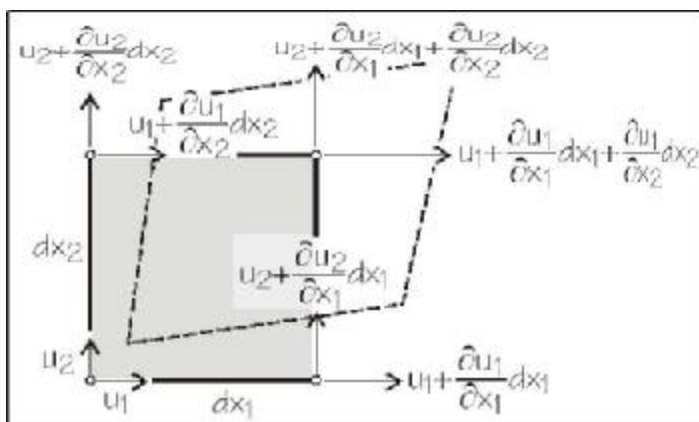
$$\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1,4 - 1,5}{15 - 10} + 1,5 \frac{1,1678 - 1,5}{2} = -0,269 \text{ m/s}^2$$

### 4.3.3 Brzina deformacije materijalnog delića

Fluidni, materijalni delić se kreće nekom svojom trajektorijom, brzinom koja je, u opštem slučaju, promenljiva duž trajektorije i kroz vreme. Takvo strujno polje je promenljivo po prostoru i vremenu. Ako se posmatra samo jedan delić, veličine  $d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3$ , brzine njegovih temena će biti različite, jer se nalaze u različitim delovima strujnog polja. Za razliku od krutog tela, fluidni delić će se deformisati tokom putovanja jer pored apsolutnog pomeranja svih tačaka u fluidu, dolazi i do relativnog pomeranja: rastojanja između pojedinih tačaka se vremenom menjaju.

Na slici 4.13 je prikazana samo jedna strana materijalnog delića, u ravni  $x_1, x_2$ . Brzina donjeg levog temena u vremenskom trenutku  $t$  je  $(u_1, u_2)$ . U istom tom trenutku, brzine ostalih temena su:

- donje desno teme:  $\left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1, u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1\right)$
- gornje levo teme:  $\left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2, u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2\right)$
- gornje desno teme:  $\left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2, u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2\right)$



Slika 4.13: Komponente brzine fluidnog delića u  $x_1, x_2$  ravni

deformacije u jedinici vremena i po jedinici dužine, ona se može razdvojiti na sledeće komponente (slika 4.14): translaciju gde sva temena imaju istu brzinu, linearnu deformaciju gde stranice ostaju i dalje međusobno paralelne, rotaciju gde delić ostaje istog oblika i zapremine i ugaonu deformaciju gde dolazi do promena uglova u deliću.

Linearna deformacija delića je brzina izdužavanja stranica, odnosno, brzina dilatacije. Na primer, za ravan  $(1,2)$  i stranicu  $dx_2 dx_3$ , to bi bila brzina  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ . Pošto se istovremeno sve tri stranice pomeraju, može se definisati *brzina zapreminske dilatacije* kao brzina kojom se menja zapremina delića:

$$\omega_{ii} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{4.20}$$

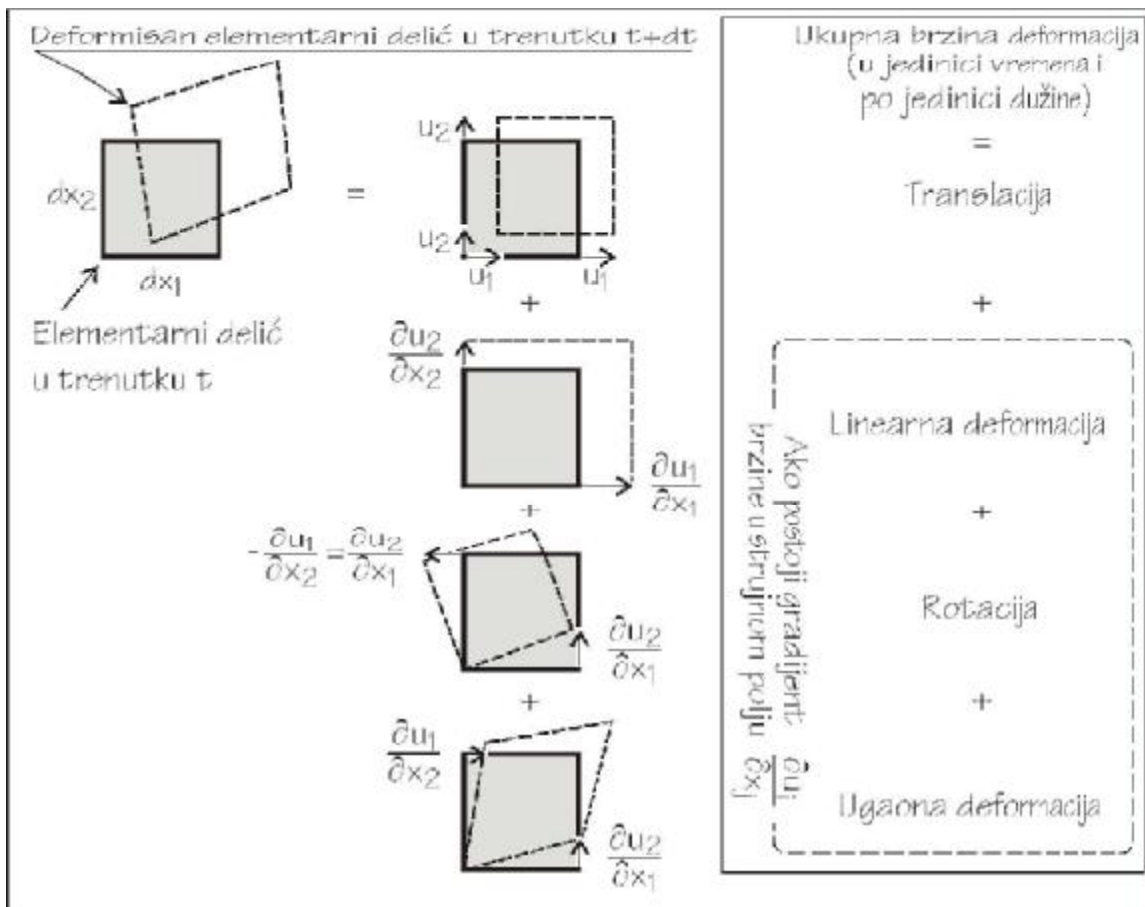
Ako je fluid nestišljiv, brzine dilatacija stranica delića moraju biti takve da ne dolazi do ukupne promene zapremine delića. Na osnovu toga, može se napisati da je uslov za nestišljivost brzina zapreminske dilatacije nula:

$$\omega_{ii} = 0 \quad \text{za nestišljiv fluid} \tag{4.21}$$

Zahvaljujući različitim brzinama, materijalni delić će u narednom vremenskom trenutku  $t+dt$  da se deformiše. Od kvadratnog oblika dobiće oblik sličan onom prikazanom isprekidanom linijom na slici 4.13.

Brzina kojom se materijalni delić deformiše zavisi od veličine delića  $dx_i$  i od vremenskog inkrementa  $dt$ . Ako se posmatra brzina de-

### 4.3. KONCEPT KONTROLNE ZAPREMINE



Slika 4.14: Brzina deformacije fluidnog delića, u jedinici vremena i po jedinici dužine, se može razdvojiti na jednostavnije komponente: translaciju, linearnu deformaciju, rotaciju i ugaonu deformaciju

Brzina obrtanja stranica u ravni (1,2), odnosno, ugaone brzine kojima se stranice obrću, su  $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$  i  $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ . U opštem slučaju se to može napisati kao:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \text{uz uslov} \quad i \neq j \quad (4.22)$$

Da bi se delić rotirao bez deformisanja, potrebno je ispuniti uslov da su rotacije u jednoj ravni iste, ali suprotnih znakova:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad \text{za} \quad i \neq j \quad (4.23)$$

U složenom strujnom polju delić se i rotira i deformiše, pa se **komponenta rotacije može odrediti preko brzine rotacije simetrane uglova. Za ravan (1,2)**

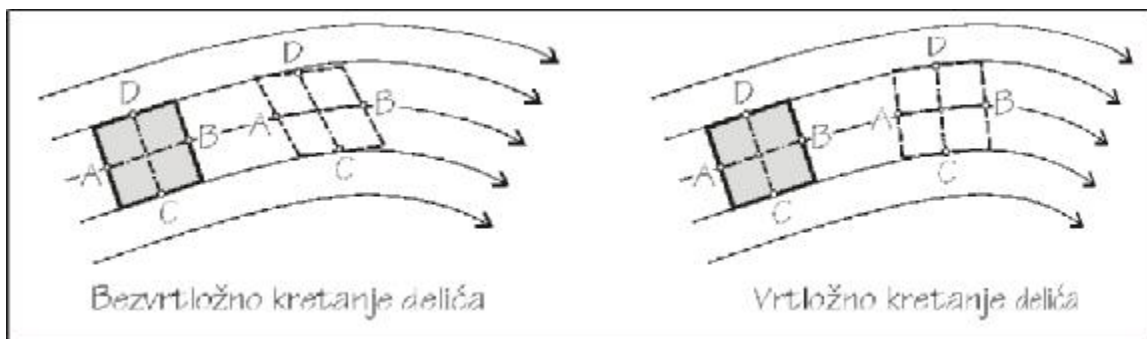
bi to bila brzina rotacije u smeru (3):

$$\Omega_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \tag{4.24}$$

dok je u opštem slučaju brzina rotacije:

$$\Omega_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \tag{4.25}$$

gde je simbol  $\epsilon_{ijk}$  permutacioni simbol. On ima vrednost +1 ako su indeksi  $i, j, k$  u rastućem smeru (1,2,3; 2,3,1; 3,1,2) odnosno za parnu permutaciju skupa (1,2,3), vrednost -1 ako su indeksi u opadajućem smeru (3,2,1; 2,1,3; 1,3,2) odnosno za neparnu permutaciju skupa (1,2,3) i za sve ostale slučajeve vrednost nula.



Slika 4.15: Bezvrtložno i vrtložno kretanje fluidnog delića

Ukoliko u toku kretanja delića ne dolazi do njegove rotacije, takvo kretanje se zove *bezvrtložno kretanje*. Odsustvo rotacije pokazuje da ne postoji moment tangencijalnih napona, što je uslov za *idealni fluid*. Na slici 4.15 sa leve strane je prikazan primer bezvrtložnog kretanja: mada dolazi do ugaone deformacije, rotacija prave AB i CD su iste, samo u suprotnim smerovima, pa je rotacija simetrale jednaka nuli. Sa desne strane je pokazano kako bi izgledalo tečenje realnog fluida, u kome postoji i rotacija.

Pošto su u opštem slučaju ugaone brzine za sve stranice različite, kao mera ugaone brzine deformacije (4.22), često se koristi srednja vrednost brzine promene pravog ugla (ili sklapanja koordinatnih osa), *brzina klizanja*. Za ravan (1,2) bi to bilo:

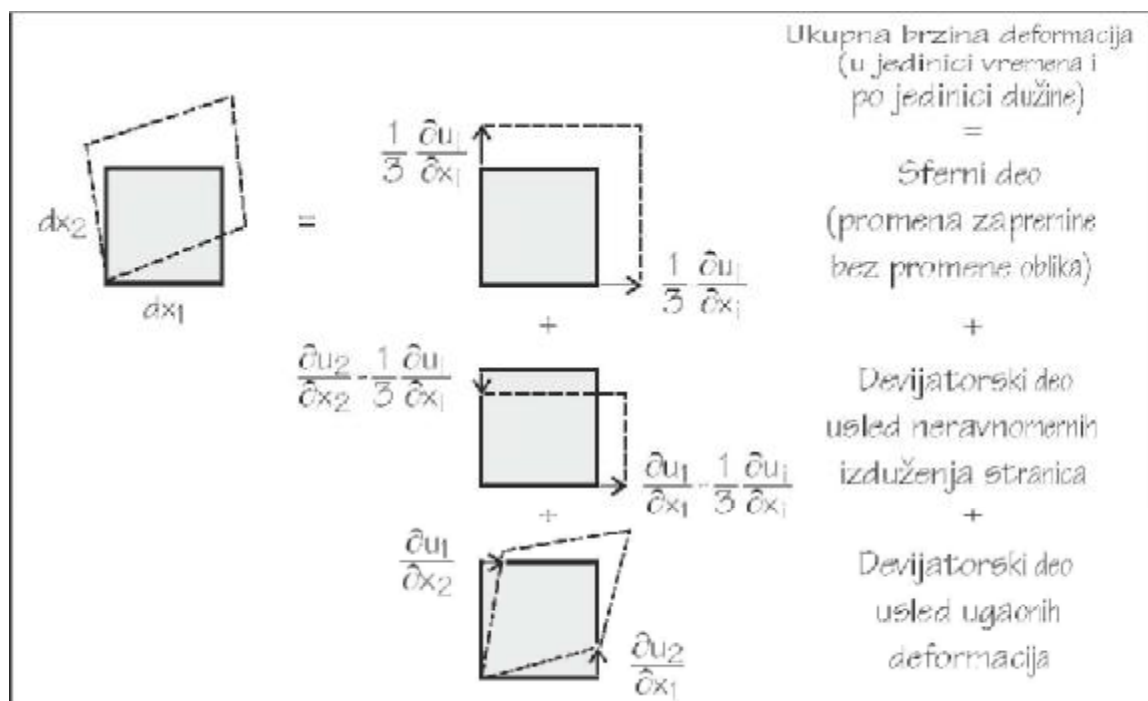
$$\omega_{12} = \omega_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

odnosno, u opštem slučaju, uz uslov  $i \neq j$ :

$$\omega_{ij} = \omega_{ji} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{4.26}$$

### 4.3. KONCEPT KONTROLNE ZAPREMINE

Prethodna jednačina se može koristiti i za slučaj  $i = j$ , kada se dobijaju brzine dilatacija.



Slika 4.16: Podela brzine deformacije fluidnog delića, u jedinici vremena i po jedinici dužine, na sferni i devijatorski deo

Pored podele brzine deformacija na osnovne komponente (slika 4.14), moguće je ukupnu deformaciju podeliti na deo koji menja zapreminu fluidnog delića, a čuva oblik, i na deo koji menja oblik delića (slika 4.16). Prvi deo se zove *sferni deo*, a drugi *devijatorski deo* tenzora brzine deformacija:

$$\omega_{ij} = \omega_{ij}^{sf} + \omega_{ij}^d \tag{4.27}$$

Sferni deo brzine deformacija je skalar. Jednak je srednjoj vrednosti svih brzina dilatacija, odnosno, jednoj trećini zapreminske dilatacije (4.20):

$$\bar{\omega} = \frac{1}{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Izraz se može opštije napisati u  $(i, j)$  notaciji koristeći Kronekerov simbol  $\delta_{ij}$  koji ima vrednost  $\delta_{ij} = 1$  za  $i = j$  a  $\delta_{ij} = 0$  za  $i \neq j$ :

$$\omega_{ij}^{sf} = \bar{\omega} = \delta_{ij} \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \tag{4.28}$$

Devijatorski deo brzine deformacije jednak je zbiru brzine klizanja i razlici između brzine dilatacije i sfernog dela brzine deformacija:

$$\omega_{ij}^d = (1 - \delta_{ij}) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$$

Prvi sabirak postoji samo za slučaj različitih indeksa ( $i \neq j$ ) dok drugi sabirak postoji za slučaj kada su indeksi isti ( $i = j$ ). Spajanjem izraza u jedinstven izraz, dobija se devijatorski deo brzine deformacije:

$$\omega_{ij}^d = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \omega_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \omega_{kk} \quad (4.29)$$

#### 4.3.4 Veza materijalnog izvoda i kontrolne zapremine

Promena karakteristične veličine  $B$ , vezane za celokupnu masu koja se pomera, a na osnovu posmatranja elementarnih delića  $\rho b$  u konstantnoj zapremini  $\mathcal{V}$ , koja se ne pomera, je data jednačinom (4.14). Pošto se prate elementarne mase delića koji se kreću, ukupna promena veličine  $B$  mora imati neku vezu i sa materijalnim izvodom (4.18) definisanim u poglavlju 4.3.2, *Praćenje kretanja materijalnog delića*.

Član sa leve strane jednačine (4.14)  $dB/dt$ , može se napisati koristeći zamenu (4.8):

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho b \, d\mathcal{V} = \int_{C\mathcal{V}} \frac{d}{dt} [(\rho b) \, d\mathcal{V}]$$

gde je zamenjen redosled diferenciranja i integraljenja, jer je oblast integracije ( $\mathcal{V}$ ) konstantna ( $C\mathcal{V}$ ). U dobijenom integralu sa desne strane se nalazi izvod proizvoda  $(\rho b) \times (d\mathcal{V})$ , nad kojim se može primeniti pravilo diferenciranja:

$$\frac{d}{dt} [(\rho b) \times (d\mathcal{V})] = d\mathcal{V} \frac{d(\rho b)}{dt} + \rho b \frac{d(d\mathcal{V})}{dt}$$

Poslednji član se može pomnožiti sa  $d\mathcal{V}/d\mathcal{V}$ , jer je zapremina  $d\mathcal{V}$  različita od nule, pa se dobija:

$$\frac{d}{dt} [(\rho b) \times (d\mathcal{V})] = d\mathcal{V} \frac{d(\rho b)}{dt} + \rho b \frac{\frac{d(d\mathcal{V})}{dt}}{d\mathcal{V}} d\mathcal{V}$$

Ovako napisan poslednji član izraza  $\frac{d}{dt} (d\mathcal{V})/d\mathcal{V}$  predstavlja brzinu promene zapremine fluidnog delića po jedinici zapremine delića. Brzina kojom se

menja zapremina delića je jednaka brzini zapreminske dilatacije (4.20) - (slika 4.14) pa se poslednji član može zameniti sa  $\omega_{ii} = \partial u_i / \partial x_i$ :

$$\frac{d}{dt}[(\rho b) \times (dV)] = \left[ \frac{d(\rho b)}{dt} + \rho b \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] dV$$

Polazna jednačina (4.14) zamenom  $dB/dt$  sa dobijenim izrazom, sada postaje:

$$\int_{CV} \left[ \frac{d(\rho b)}{dt} + \rho b \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] dV = \int_{CV} \left[ \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho b u_i) \right] dV \quad (4.30)$$

Integracija se obavlja po istoj, konstantnoj zapremini  $CV$  pa integrandi moraju biti isti da bi jednačina bila uvek ispunjena. Diferenciranjem proizvoda u zadnjem desnom članu, jednačina (4.30) postaje:

$$\frac{d(\rho b)}{dt} + \rho b \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} + \rho b \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial(\rho b)}{\partial x_i}$$

po jedinici zapremine, jer je jednačina (4.30) podeljena sa  $dV$ . Skraćivanjem, dobija se:

$$\frac{d(\rho b)}{dt} = \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} + u_i \frac{\partial(\rho b)}{\partial x_i}$$

Veličina  $\rho b$  je (masa po jedinici zapremine, odnosno, masa delića jedinične zapremine)  $\times$  (osobina koja se prati po jedinici mase) sistema sa konstantnom masom (jednačina (4.8) na strani 103). Pošto se prati kretanje materijalnog delića, izvod po vremenu  $d(\rho b)/dt$  je *materijalni izvod*, pa se može napisati:

$$\frac{D(\rho b)}{Dt} = \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} + u_i \frac{\partial(\rho b)}{\partial x_i} \quad (4.31)$$

Do iste jednačine je moglo da se dođe dosta jednostavnije. Kako je  $\rho b$  karakteristična veličina nekog materijalnog delića koji se kreće brzinom  $u_i$ , izvod veličine  $\varphi$  po vremenu je *materijalni izvod*. Zamenom  $\varphi = \rho b$  u jednačini (4.18) direktno se dobija jednačina (4.31).

Izraz (4.31) se može napisati i u drugačijem obliku. Član  $\partial(\rho b)/\partial t$ , lokalni izvod karakteristične veličine po vremenu se može izraziti iz prethodne jednačine:

$$\frac{\partial(\rho b)}{\partial t} = \frac{D(\rho b)}{Dt} - u_i \frac{\partial(\rho b)}{\partial x_i}$$

pa se može staviti u polazni izraz (4.14). Ako se zadnji član jednačine (4.14) razvije kao izvod proizvoda, nakon skraćivanja se dobija nešto drugačiji oblik izraza (4.15):

$$\frac{dB}{dt} = \int_{CV} \left[ \frac{D(\rho b)}{Dt} + \rho b \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] dV = S \quad (4.32)$$

Kako je  $\omega_{ii} = \partial u_i / \partial x_i$  brzina zapreminske dilatacije delića, poslednji član se može shvatiti kao promena unutrašnje zalihe veličine  $\rho b$ . Ceo izraz (4.32) pokazuje da je promena kroz vreme veličine  $B$ , koja je vezana za ceo sistem, (odnosno njen porast ili opadanje, ili proizvodnja i potrošnja) jednaka sumi svih promena te veličine vezanih za elementarni delić unutar nepomerljive granice sistema i povećanju ili smanjenju zalihe.

## 4.4 Princip održanja mase

U klasičnoj mehanici, kod sistema sa konstantnom masom, zakon konzervacije ili održanja mase je po definiciji ispunjen, pa se o njemu i ne govori. U izučavanju fluida, gde se koristi sistem sa konstantnom zapreminom, masa se mora eksplicitno održavati konstantnom, odnosno, *mora se eksplicitno obezbediti konzervativnost mase*. U nastavku će se prvo dati osnovna jednačina u opštem slučaju, a zatim će se jednačina uprostiti za ustaljeno strujanje homogenog fluida. Na kraju će se dati primer za tečenje u cevi.

### 4.4.1 Jednačina održanja mase

Ako se u prethodno izvedenim jednačinama koje se odnose na kontrolnu, konstantnu zapreminu, stavi da je veličina  $B$  ukupna masa sistema, tada je  $b$  masa po jedinici mase, odnosno jedinica ( $b = 1$ ). Iz osnovnog principa održanja mase<sup>19</sup> sledi da je brzina promene konstantne mase nula  $dB/dt = 0$ , pa jednačina (4.11) postaje:

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{CA} \rho u_i n_i dA = 0 \quad (4.33)$$

Napisana jednačina pokazuje da je povećanje mase u posmatranoj zapremini, plus razlika protoka mase kroz konturu (izlaz - ulaz), jednako nuli. Ili, da je povećanje mase zapremine  $V$  jednako razlici ulaza i izlaza protoka mase

<sup>19</sup>Princip klasične mehanike, da je masa nepromenljiva, i nije baš tačan. U nuklearnim reakcijama se masa može pretvoriti u energiju. Međutim, čak i u nuklearnim reaktorima, masa koja se "uništi" je zanemarljivo mala.



## 4.4. PRINCIP ODRŽANJA MASE

117

kroz konturu. Ista jednačina se može napisati i u integralnom obliku, po konstantnoj zapremini (jednačina (4.14)):

$$\int_{C\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} \right] d\mathcal{V} = 0 \quad (4.34)$$

Napisane dve jednačine (4.33) i (4.34) predstavljaju *jednačinu održanja mase u konačnoj zapremini  $\mathcal{V}$  ograničenoj površinom  $A$* . Jednačina održanja mase se često naziva još i *jednačina kontinuiteta ili jednačina nepromenljivosti mase*.

**Kontrolna zapremina  $C\mathcal{V}$**  može obuhvatiti bilo koje granice integracije. Da bi se zadovoljila prethodna jednačina (4.34), neophodno je da integrand u svakoj tački prostora bude nula. Iz tog uslova se dobija *jednačina održanja za elementarnu masu*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (4.35)$$

koja važi u bilo kojoj tački prostora  $C\mathcal{V}$ . Prvi sabirak jednačine predstavlja **promenu mase u jedinici vremena unutar konstantne zapremine**, dok drugi sabirak kaže da, *ako postoji promena mase, ona mora biti jednaka protoku mase kroz granicu te zapremine*. Sa desne strane jednačine stoji nula, jer produkcija mase nije moguća.

Ako se u jednačini (4.35) drugi sabirak diferencira, dobija se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0$$

Prvi i treći član jednačine predstavljaju lokalni i konvektivni član materijalnog izvoda gustine (ako se u jednačinu (4.18) stavi  $\varphi = \rho$ ), **pa se prethodna jednačina može napisati i u obliku**:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{odnosno} \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \omega_{ii} = 0 \quad (4.36)$$

Prvi sabirak predstavlja promenu (povećanje) gustine jednog delića u jedinici vremena, a drugi član ekspanziju delića usled povećanja gustine, jer pozitivna  **vrednost brzine zapreminske dilatacije  $\omega_{ii}$**  (izraz (4.20) na strani 110) znači da se delić povećava.

Do iste jednačine održanja elementarne mase se moglo doći i na osnovu **izraza (4.32), zamenom  $b = 1$ , postavljanjem uslova da je proizvodnja/potrošnja mase nula  $S = 0$ , deljenjem izraza sa elementarnom zapreminom  $d\mathcal{V}$  i postavljanjem uslova da integrand mora biti nula u svakoj tački prostora**.

**Primer 4.4.1**

U posmatranoj tački fluidnog prostora, u trenutku  $t_0$  gustina delića stišljivog fluida iznosi  $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$ , a brzine dilatacija u pravcima 2 i 3 su  $\partial u_2/\partial x_2 = 0,05 \text{ s}^{-1}$  i  $\partial u_3/\partial x_3 = -0,02 \text{ s}^{-1}$ . Gustina se kroz vreme menja. U trenutku  $t_0$  vrednost materijalnog izvoda gustine je  $D\rho/Dt = -42 \text{ kgm}^{-3}\text{s}^{-1}$ . Kolika je vrednost brzine dilatacije u pravcu  $x_1$  u trenutku  $t_0$ ?

Na osnovu jednačine održanja mase (4.36) napisane za pravce 1, 2 i 3, u trenutku  $t = 0$  mora biti ispunjen uslov:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = -42 + 1050 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 0,05 - 0,02 \right) = 0$$

Sređivanjem po nepoznatoj brzini dilatacije u pravcu  $x_1$  dobija se:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0,01 \text{ s}^{-1}$$

**4.4.2 Ustaljeno strujanje nehomogenog i homogenog fluida**

Uslov ustaljenosti strujanja znači da je u jednačini održanja mase (4.35) lokalna komponenta promene gustine nula  $\partial\rho/\partial t = 0$  pa se jednačina svodi na:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \tag{4.37}$$

U integralnom obliku jednačina održanja mase (4.33) se svodi na:

$$\int_{CA} \rho u_i n_i \, dA = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_M = 0$$

odnosno, na uslov da je protok mase (4.4) (strana 98) kroz granicu nula.

**Primer 4.4.2**

U rezervoar za pravljenje smeše ustaljeno dotiču voda ( $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) protokom  $Q_1 = 0,2 \text{ m}^3/\text{s}$  i hemikalija X specifične težine  $\gamma_2 = 7500 \text{ N/m}^3$  kroz cev preseka  $A_2 = 0,05 \text{ m}^2$  i brzinom  $V_2 = 4 \text{ m/s}$ . Iz rezervoara izlazi smeša čija je gustina  $\rho_3 = 940 \text{ kg/m}^3$ . Koliki su maseni  $Q_{\rho_3}$  i zapreminski  $Q_3$  protoci smeše?

#### 4.4. PRINCIP ODRŽANJA MASE

U jednačini (4.33) zbog ustaljenog strujanja je prvi sabirak nula, pa ostaje samo drugi sabirak:

$$\int_{CA} \rho u_i n_i dA$$

koji se svodi na tri masena protoka (uz pretpostavku da je brzina  $u = V$  konstantna po prečniku cevi):

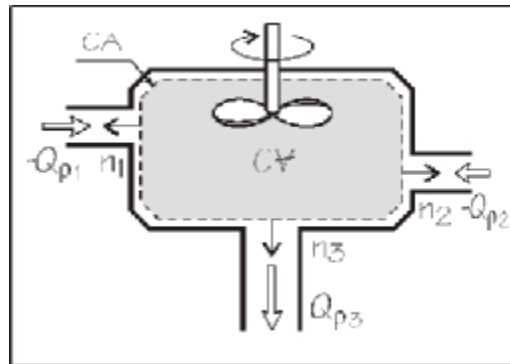
$$-Q_{\rho_1} - Q_{\rho_2} + Q_{\rho_3} = 0$$

Maseni protok kroz izlaznu cev je:

$$Q_{\rho_3} = \rho_1 Q_1 + \frac{\gamma_2}{g} V_2 A_2 = 1000 \times 0,2 + \frac{7500}{9,81} 4 \times 0,05 = 352,9 \text{ kg/s}$$

Volumetrijski protok se dobije deljenjem masenog sa gustinom fluida:

$$Q_3 = \frac{Q_{\rho_3}}{\rho_3} = \frac{352,9}{940} = 0,375 \text{ m}^3/\text{s}$$



Interesantno je proveriti u prethodnom primeru da li su volumetrijski protoci u ravnoteži, odnosno da li je ispunjeno  $\sum Q_i = 0$ :

$$Q_1 = 0,2 ; Q_2 = V_2 A_2 = 0,2 ; Q_3 = 0,375 \Rightarrow 0,2 + 0,2 > 0,375$$

Rezultat pokazuje da u rezervoar dotiče više vode i hemikalije X nego što ističe rastvora. Ovo je moguće kod fluida koji ne čine idealan rastvor, pa se oni izmešaju na nivou atoma: molekuli jednog fluida se uvuku u molekule drugog fluida. Zbog toga je **konzervacija mase fundamentalni zakon prirode, a ne konzervacija zapremine**. Volumetrijski protoci bi bili u ravnoteži samo kod fluida sa istom gustinom ili fluida koji čine idealan rastvor.

Ako se pored uslova o ustaljenosti tečenja postavi i uslov da je fluid **homogen, konstantne gustine**<sup>20</sup>  $\rho = \text{Const}$ , gustina se može izvući ispred diferencijala pa se jednačina održanja mase (4.37) svodi na uslov da je zbir brzina dilatacija u sva tri koordinatna pravca jednak nuli:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \omega_{ii} = 0 \tag{4.38}$$

<sup>20</sup>Pojam **homogen** je definisan u poglavlju 4.1.2, *Stišljiv i nestišljiv, homogen i nehomogen fluid*. Ovde se još jednom naglašava da **homogen** nije isto što i **nestišljiv**: nestišljiv fluid može menjati gustinu pod uticajem temperature ili rastvorenih materija. Promena koncentracije rastvorene soli u vodi, na primer, menja gustinu i po prostoru i kroz vreme, iako je voda nestišljiva.

gde je  $\omega_{ii}$  brzina zapreminske dilatacije delića (4.21). U integralnom obliku jednačina održanja mase se svodi na:

$$\int_{CA} u_i n_i dA = 0 \Rightarrow Q = 0$$

odnosno, na uslov da je protok zapremine (4.3) (strana 98) kroz granicu posmatrane zapremine jednak nuli.

**Primer 4.4.3**

Za ustaljeno strujanje homogenog fluida dat je raspored brzina:

$$u_x = U_0 L \frac{-x}{x^2 + y^2} \quad u_y = U_0 L \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad u_z = 0$$

Da li je ovakav raspored brzina moguć?

Uslov održanja mase (4.36) mora biti ispunjen za svako strujanje fluida. Za homogen fluid i za ustaljeno strujanje uslov se svodi na (4.38)  $\partial u_i / \partial x_i = 0$ . Za date uslove, brzine dilatacija su:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = U_0 L \left[ \frac{-1}{x^2 + y^2} - x(-1) \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} 2x \right] = U_0 L \left[ \frac{-1}{x^2 + y^2} + \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right]$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = U_0 L \left[ \frac{-1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right]$$

Njihov zbir treba da bude jednak nuli:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = U_0 L \left[ \frac{-1}{x^2 + y^2} + \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right]$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = U_0 L \left[ \frac{-2}{x^2 + y^2} + \frac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right] = U_0 L \frac{-2 + 2}{x^2 + y^2} = 0$$

**4.4.3 Primer tečenja u cevi**

Posmatra se ustaljeno tečenje homogenog i nestišljivog fluida kroz cev. U integralnoj jednačini održanja mase (4.33):

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{CA} \rho u_i n_i dA = 0$$

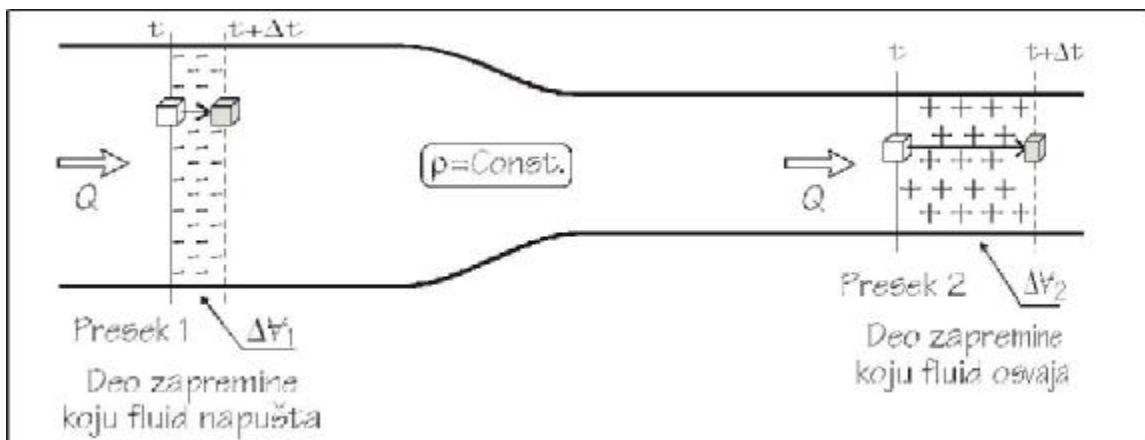
#### 4.4. PRINCIP ODRŽANJA MASE

Prvi član je nula jer je tečenje ustaljeno, a u drugom članu gustina  $\rho$  se može napisati ispred integrala, jer je fluid homogen pa je gustina konstantna:

$$\rho \int_{CA} u_i n_i dA = 0 \Rightarrow \int_{CA} u_i n_i dA = 0$$

Ako se pogleda prethodna jednačina, kao i jednačina (4.3) na strani 98, vidi se da je dobijeni integral jednak ukupnom zapreminskom protoku  $Q$  kroz celokupnu površinu  $CA$ , koja se nalazi oko posmatrane konstantne zapremine  $CV$ , pa se jednačina kontinuiteta svodi na uslov:

$$\Sigma Q_i = 0 \tag{4.39}$$



Slika 4.17: Deo zapremine koju fluid napušta za  $\Delta t$  mora biti jednak delu zapremine koju osvaja

Isti oblik jednačine kontinuiteta se dobija i ako se direktno primeni princip održanja mase na tečenje u cevi. Na slici 4.17 je prikazana cev, čiji se poprečni presek niz fluidnu struju smanjio. Za ustaljeno tečenje, masa fluida koja napusti presek 1, mora biti jednaka masi fluida koja osvoji presek 2, jer je fluid nestišljiv i neprekidan:

$$\rho V_1 = \rho Q_1 \times \Delta t \quad \rho V_2 = \rho Q_2 \times \Delta t \tag{4.40}$$

Iz uslova jednakosti dve mase, odnosno iz uslova jednakosti dve zapremine (jer je gustina konstantna), dobija se jednačina kontinuiteta<sup>21</sup>:

$$\rho V_1 = \rho V_2 \Rightarrow Q_1 = Q_2 \tag{4.41}$$

<sup>21</sup>Jednačina kontinuiteta će biti izvedena i u sledećem poglavlju 7.2.1 (strana 290), koristeći ovaj integralni pristup.

Jednačina se često piše i u formi srednje brzine po preseku (4.7):

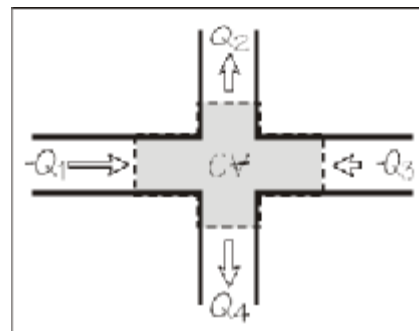
$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad \text{ili} \quad V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2} \quad (4.42)$$

odakle se, za dati primer na slici 4.17, jasno vidi da će se u smanjenom nizvodnom preseku  $A_2$ , brzina  $V_2$  povećati.

Na slici 4.18 je dat primer primene jednačine kontinuiteta na spoj četiri cevi. Kroz granice konstantne zapremine (osjenčeno na slici) prolaze protoci  $-Q_1$  (negativan protok jer je suprotnog smera u odnosu na smer normale na omotač zapremine),  $Q_2$ ,  $-Q_3$  i  $Q_4$ . Prema jednačini kontinuiteta (4.39) mora biti ispunjeno:

$$-Q_1 + Q_2 - Q_3 + Q_4 = 0$$

odnosno, *protok koji ulazi u posmatranu zapreminu mora biti isti kao protok koji izlazi iz te zapremine*:  $Q_1 + Q_3 = Q_2 + Q_4$ .



Slika 4.18: Detalj spoja četiri cevi, sa konstantnom zapreminom za koju se piše jednačina kontinuiteta

## 4.5 Održanje količine kretanja

Kad god se promeni brzina fluida ili kada se menja smer tečenja, **javlja se sila**. Prema zakonu akcije i reakcije, sila se prenosi sa fluida na konturu koja je izazvala promenu. **Primeri su brojni: sila udara mlaza vode u lopatice turbine ili sila vetra na dimnjak ili sila uzgona koja omogućava avionu da leti.**

Osnovni zakon koji se bavi silama i koji važi u mehanici krutog tela je Drugi Njutnov zakon: “Promena količine kretanja srazmerna je sili koja deluje na telo i vrši se u pravcu dejstva sile” [21]. Taj princip se odnosi na konstantnu, pokretnu masu. Primenom Rejnoldsove teoreme, taj princip će se primeniti na celu (nepokretnu) zapreminu fluida. Postaviće se integralna jednačina, kao i jednačina koja se odnosi na delić konstantne zapremine koji je nepokretan (ne prati se kretanje jednog delića) ali koji može biti bilo gde u posmatranoj zapremini - diferencijalna jednačina. Rešavanjem tih jednačina dobijaju se dve vrste rešenja: u integralnom pristupu se uvodi fiktivna inercijalna sila koja je jednaka priraštaju količine kretanja celokupne mase u posmatranoj zapremini, u jedinici vremena i ta inercijalna sila je u ravnoteži sa ostalim površinskim i zapreminskim silama. U diferencijalnom

pristupu, nakon neophodnih uprošćavanja dobija se Bernulijeva jednačina koja važi duž jedne strujnice i koja ima energetski karakter: zbir kinetičke energije, potencijalne energije i energije toka usled razlike pritisaka duž jedne strujnice je konstantan.

#### 4.5.1 Integralna i diferencijalna jednačina održanja količine kretanja

Količina kretanja ili impuls čestice je vektor, proizvod mase i brzine, i predstavlja osobinu inercijalnog sistema:  $\vec{B} = m\vec{u}$ . Prema (4.8), veličina  $b$  je tada vektor brzine  $\vec{b} = \vec{u}$ , a  $S$  iz (4.15) je, prema drugom Njutnovom zakonu kretanja, jednak sumi svih *pravih sila*<sup>22</sup> koje deluju na sistem sa konstantnom masom. Jednačina održanja količine kretanja u najopštijem smislu je:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{F} \quad (4.43)$$

Prelaskom sa konstantne mase na kontrolnu zapreminu, prema (4.11), prethodna jednačina se može napisati u sledećem, integralnom, obliku:

$$\int_{C\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{CA} \rho\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) dA = \vec{F} \quad (4.44)$$

Sila  $\vec{F}$  je suma svih zapreminskih i površinskih sila koje deluju na fluid u kontrolnoj zapremini  $C\mathcal{V}$  sa površinom  $CA$ .

Pretvaranjem površinskog integrala u zapreminski (jednačina (4.14)) i smanjenjem kontrolne zapremine do nivoa elementarnog fluidnog delića  $d\mathcal{V}$ , ukupna sila  $\vec{F}$  postaje *sila  $\vec{f}$  po jedinici zapremine*. Diferencijalna jednačina u vektorskoj notaciji tada glasi:

$$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\vec{u}u_j)}{\partial x_j} = \vec{f}$$

odnosno, *jednačina održanja količine kretanja za jediničnu zapreminu*<sup>23</sup> za pravac  $i$  je:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = f_i \quad (4.45)$$

<sup>22</sup>Sve sile se mogu podeliti u dve kategorije: *prave sile* koje potiču od uzajamnog susedstva između tela i za koje važe Njutnovi zakoni i *inercijalne sile* koje potiču od ubrzanja posmatranog sistema i za koje ne važe Njutnovi zakoni.

<sup>23</sup>Pošto jednačina održanja količine kretanja opisuje kretanje fluida, često se naziva i *dinamička jednačina*.

Udvojeni indeks  $j$ , iz prethodne dve jednačine, označava zbir parcijalnih izvoda u tri glavna pravca, a indeks  $i$  daje pravac za koji se piše jednačina. Levi deo jednačine predstavlja bilans količine kretanja u konstantnoj zapremini: prvi sabirak je promena količine kretanja u jedinici vremena, a drugi sabirak je protok količine kretanja kroz graničnu površinu. Suma svih pravih sila po jedinici zapremine, koja se nalazi sa desne strane jednačine, treba da doda ostvarenu promenu količine kretanja i količinu kretanja koja istekne kroz granicu.

Za pravac  $i = x$ , na primer, jednačina održanja količine kretanja za jediničnu zapreminu (4.45) glasi:

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_x u_z)}{\partial z} = f_x$$

Jednačina (4.45) se može preurediti diferenciranjem proizvoda iz oba sabirka sa leve strane:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} \right) = f_i$$

Izraz u zagradi je jednak nuli na osnovu jednačine održanja mase (4.35). Sređivanjem se dobija drugi oblik jednačine održanja količine kretanja za jediničnu zapreminu:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i \quad \Rightarrow \quad \rho \frac{DU_i}{Dt} = f_i \tag{4.46}$$

Jednačina važi u tački, za delić fluida, ali, za razliku od prethodne jednačine (4.45), više nije konzervativna (poglavlje 4.2 na strani 101). Da bi važila za celokupnu zapreminu, uz ovu jednačinu je potrebno rešavati i jednačinu kontinuiteta (4.35).

Prave sile koje deluju na konstantnu zapreminu fluida (odnosno, na fluidni delić) su *zapreminske* i *površinske sile*. Od zapreminskih sila u ovoj knjizi se uzima u obzir samo *gravitaciona sila*<sup>24</sup>, odnosno, težina, pri čemu je težina elementarnog delića dimenzija  $dx_1 \times dx_2 \times dx_3 = dV$  jednaka  $dG = \rho g dV$  (slika 3.1 na strani 34). Sila usled gravitacije po jedinici zapremine je  $\vec{f} = \rho \vec{g}$  i *uvek deluje vertikalno na dole*. Ako se koristi indeks  $i$  za pisanje vektorske

<sup>24</sup>Pored gravitacione sile, u zadacima u kojima se kreće kontrolna zapremina, odnosno čvrsta kontura u okviru koje se nalazi fluid koji teče, treba uzeti i silu usled ubrzanja mase fluida. U poglavlju 3.4, *Relativno mirovanje fluida*, na strani 79, prikazan je slučaj kada fluid miruje u sudu koji konstantno ubrzava ili u sudu koji se okreće konstantnom ugaonom brzinom.

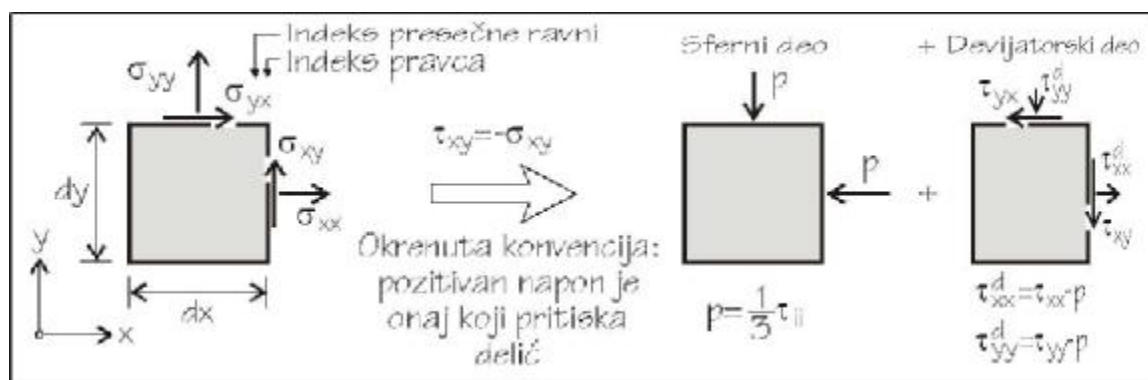


#### 4.5. ODRŽANJE KOLIČINE KRETANJA

jednačine, neophodno je projektovati  $\vec{g}$  na bilo koji pravac  $i$ , tako da *sila usled gravitacije po jedinici zapremine* postaje:

$$(f_i)_g = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} \tag{4.47}$$

gde znak  $(-)$  daje pravac na dole a sa  $h$  je označena *vertikalna osa sa smerom na gore*<sup>25</sup>.



Slika 4.19: Naponi - normalni i smičući u svom pozitivnom smeru (jer izazivaju pozitivne brzine deformacija, levi deo slike) i konvencija koja se koristi u Mehanici fluida: normalni naponi su pozitivni ako pritiskaju delić (desni deo slike)

Površinske sile na fluidni delić su rezultat delovanja površinskih normalnih i smičućih napona. Na slici 4.19, sa leve strane, nacrtan je fluidni delić, u  $(x, y)$  ravni sa odgovarajućim naponima u presečnoj ravni  $x$  i ravni  $y$ . Nacrtani su naponi koji zatežu delić, tako da su brzine deformacija pod dejstvom tih napona pozitivne. Međutim, u Mehanici fluida je *uobičajeno da se kao pozitivni naponi uzimaju naponi koji pritiskaju fluidni delić*. Na desnom delu slike su nacrtani usvojeni pozitivni naponi na fluidni delić, pri čemu je sada promenjena oznaka: umesto normalnih i smičućih napona  $\sigma_{ij}$  koriste se tangencijalni naponi  $\tau_{ij} = -\sigma_{ij}$ .

Kada fluid miruje, na delić deluje samo pritisak. Normalni naponi su jednaki  $\tau_{xx} = \tau_{yy}$  (slika 4.19), dok su tangencijalni naponi nula, jer nema promene brzine između dva delića (jednačina (2.6) na strani 16). U opštem slučaju, kada postoje naponi  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  normalni naponi neće biti jednaki, pa je zgodno da se pritisak na delić definiše kao (negativna) srednja vrednost

<sup>25</sup>Osa  $h$  je isto što i osa  $z$ , ali se ovde naglašava da je *isključivo vertikalna na gore*. U literaturi se često koristi i veliko slovo  $Z$ .

svih normalnih napona:

$$p = -\frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}\tau_{ii} \tag{4.48}$$

Pod dejstvom pritiska fluidni delić menja zapreminu, ali ne i oblik, pa se u skladu sa terminima koji su uvedeni u poglavlju 4.3.3, *Brzina deformacije materijalnog delića*, jednačina (4.27), pritisak može posmatrati kao *sferni deo tangencijalnih napona*. Ostatak normalnog napona (napisan u opštoj  $(i, j)$  notaciji):

$$\tau_{ij}^d = \delta_{ij}\tau_{ij} - p = \delta_{ij}\left(\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\right) \tag{4.49}$$

i svi (negativni) smičući naponi  $(1-\delta_{ij})\tau_{ij}$  čine *devijatorski deo tangencijalnih napona* (desni deo slike 4.19):

$$\tau_{ij}^d = (1-\delta_{ij})\tau_{ij} + \delta_{ij}\left(\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\right) = \tau_{ij} - \delta_{ij}\frac{1}{3}\tau_{kk} = \tau_{ij} - \delta_{ij}p \tag{4.50}$$

Od površinskih sila na elementarni delić, u jednačini (4.46), u obzir se uzimaju dve sile: *sila pritiska* i *sila usled tangencijalnih napona*. Sile se mogu odrediti ako se posmatra elementarna prizma zapremine  $dV$ , čiji se centar nalazi u  $(x, y, z)$ , sa pritiscima (slika 3.1, samo u  $y$  i  $z$  pravcima) i naponima koji deluju na njene stranice (slika 4.20, samo u  $y$  pravcu).

Sila usled pritiska se dobija sabiranjem komponenti u izabranom pravcu, slika 3.1 na strani 34. Pozitivan pritisak je onaj koji pritiska elementarni fluidni delić, jednačina (4.48) na strani 126. Za prikazani  $y$  pravac, ukupna sila na elementarnu prizmu je:

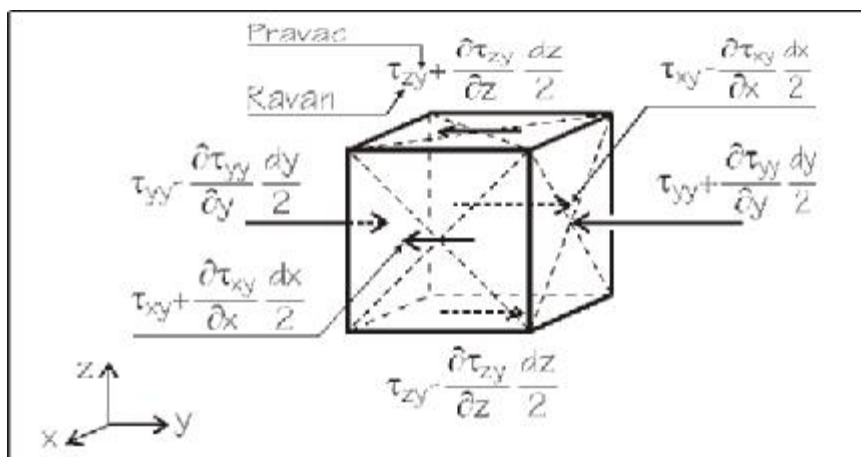
$$dP_y = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dx dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dx dz = -\frac{\partial p}{\partial y} dV$$

Deljenjem ukupne sile sa zapreminom elementarne prizme i uvođenjem indeksa  $i$  kojim se daje pravac sile, dobija se *sila usled pritiska po jedinici zapremine*:

$$(f_i)_p = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{4.51}$$

Svi tangencijalni naponi koji deluju na elementarnu prizmu u  $y$  pravcu, prikazani su na slici 4.20. Normalni napon  $\tau_{yy} = \tau_{yy}^d$  je devijatorski deo napona dat jednačinom (4.49), odnosno, razlika između punog normalnog

#### 4.5. ODRŽANJE KOLIČINE KRETANJA



Slika 4.20: Naponi koji deluju na elementarnu zapreminu (na slici su prikazani samo naponi u  $y$  pravcu)

napona i proseka normalnih napona, koji je prebačen u pritisak. Za pravac  $y$  sila usled tangencijalnih napona je:

$$dT_y = - \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dV$$

U opštem slučaju *sila od viskoznih tangencijalnih napona na jedinicu zapremine* za pravac  $i$  se može napisati kao:

$$(f_i)_\tau = - \frac{\partial \tau_{ji}^d}{\partial x_j} \tag{4.52}$$

gde udvojeni indeks  $j$  označava zbir tri parcijalna izvoda.

Stavljajući dobijene tri komponente sile (4.47), (4.51) i (4.52) u jednačinu (4.46), dobija se:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ji}^d}{\partial x_j} \tag{4.53}$$

*diferencijalna jednačina održanja količine kretanja za jediničnu zapreminu*<sup>26</sup> ili kako se još naziva, *diferencijalna jednačina kretanja za tačku, za  $i$ -ti pravac.*

<sup>26</sup>Zbog usvojene suprotne orijentacije tangencijalnih napona  $\tau_{ij} = -\sigma_{ij}$ , u jednačini (4.53), poslednji je član negativan. U literaturi se mogu naći i izvođenja gde se zadržava originalni, sferni deo napona, bez promenjenog znaka, pa je zadnji član jednačine pozitivan. Naravno, ova razlika nema kasnije nikakvog uticaja na konačna rešenja dinamičke jednačine ukoliko se dosledno poštuje usvojen sistem.

**Primer 4.5.1**

Napisati jednačinu kretanja (4.53) za vertikalni  $z$  pravac, u opštem obliku, a zatim za slučaj fluida u mirovanju.

U jednačini (4.53) indeks  $i$  treba zameniti pravcem  $z$ , a udvojeni indeks  $j$  se menja zbirom po pravcima  $x$ ,  $y$  i  $z$ . U opštem obliku, jednačina glasi:

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + \rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}^d}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}^d}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zz}^d}{\partial z}$$

U slučaju kada fluid miruje, sve tri komponente brzina su jednake nuli. Takođe, i svi tangencijalni naponi su nula, pa se prethodna jednačina svodi na:

$$0 = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{odnosno} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Dobijena diferencijalna jednačina mirovanja fluida je ista kao i diferencijalna jednačina hidrostatičke (3.4) izvedena u poglavlju 3.1.2 *Osnovna jednačina hidrostatičke*.

Jednačina (4.53) prati kretanje fluidnog delića, pa nije ni čudno što se sa leve strane jednačine pojavljuje materijalni izvod brzine (jednačina (4.19)), odnosno, ubrzanje delića:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ji}^d}{\partial x_j} \quad (4.54)$$

Napisana jednačina znači sledeće: masa pomnožena ubrzanjem delića jedinične zapremine, jednaka je sumi sila koje deluju na taj delić: gravitacionoj sili, sili usled pritiska i viskoznim ili silama trenja.

**4.5.2 Rešenje diferencijalne jednačine održanja količine kretanja za određena pojednostavljenja**

Diferencijalna jednačina (4.53), izvedena u prethodnom poglavlju, u opštem slučaju je nerešiva. U nastavku će se uvesti određena uprošćavanja koja će dovesti do analitičkog rešenja jednačine održanja količine kretanja, odnosno dinamičke jednačine.

Ako se pretpostavi da je fluid idealan (poglavljje 2.2 na strani 17), član u jednačini koji je posledica viskoznih tangencijalnih napona postaje nula  $\tau_{ji}^d = 0$ . Jednačina (4.53) se može podeliti sa gustinom  $\rho$ , čime se dobija dinamička jednačina poznata pod nazivom *Ojlerova jednačina*:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (4.55)$$

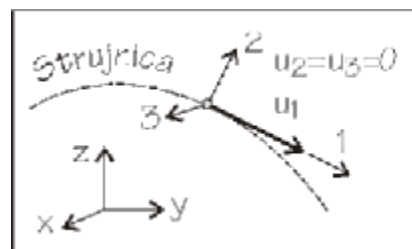
#### 4.5. ODRŽANJE KOLIČINE KRETANJA

Ovako napisana Ojlerova jednačina predstavlja skup od 3 nezavisne jednačine, za proizvoljne pravce 1, 2 i 3, dok je 5 veličina nepoznato: brzine  $u_1$ ,  $u_2$  i  $u_3$ , pritisak  $p$  i gustina  $\rho$ . Pored Ojlerove jednačine na raspolaganju je i jedna jednačina održanja mase (4.35) (jednačina kontinuiteta, strana 117), tako da je potrebna još jedna, peta jednačina, da bi sistem jednačina bio određen.

Peta jednačina je jednačina stanja, koja za tečnosti obično ima *uprošćen oblik*  $\rho = \text{Const}$ , dok kod gasova jednačina stanja zavisi od vrste procesa. Na primer, za spori izotermni proces, gde ne dolazi do promene temperature, koristi se veza  $p = \rho RT = \rho \times \text{Const}$ .

Sa napisanih pet jednačina dobijen je određen sistem. Na žalost, njegova integracija nije moguća analitički već samo približno, numerički, za određene konkretne početne i granične uslove.

Za analitičko rešenje potrebno je uprostiti sistem jednačina. U nekom  $(x,y,z)$  koordinatnom sistemu, koji je nezavisan od strujanja, brzina  $u$  ima sve tri komponente različite od nule (slika 4.21). Ako se, međutim, postavi tako koordinatni sistem, da se pravac 1 poklapa sa pravcem brzine, postojaće samo jedna komponenta brzine  $u_1$  različita od nule dok su druge dve komponente jednake nuli. Time se pojednostavljuje rešavanje dinamičke jednačine *uz ograničenje jednačine samo na pravac strujanja*. Ojlerova jednačina se sada može napisati u obliku:



Slika 4.21: U koordinatnom sistemu određenom strujnicom postoji samo jedna komponenta brzine

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

gde je izostavljen indeks 1 jer je u napred rečeno da jednačina prati brzinu  $u$ , odnosno, da jednačina *prati strujnicu*. Drugi sabirak sa leve strane se može malo preurediti, pa se dobija jednačina:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Dalje uprošćavanje zahteva i postavljanje uslova *ustaljenosti strujanja*, čime prvi sabirak iz prethodne jednačine postaje nula. Sada se jednačina može napisati u obliku zgodnom za integrisanje duž strujnice:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

Parcijalni izvod člana u zagradi je nula, pa se zaključuje da ceo član u zagradi nije funkcija pravca vektora brzine  $x$ . Sledi da *duž strujnice* važi:

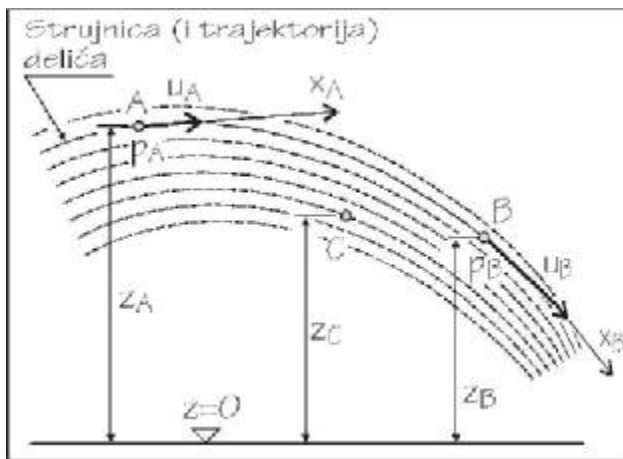
$$\frac{u^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = \text{Const1} \tag{4.56}$$

Deljenjem cele jednačine sa gravitacionim ubrzanjem  $g$ , jednačina dobija dimenziju dužine:

$$\frac{u^2}{2g} + h + \frac{p}{\rho g} = \text{Const2} \quad [\text{m}] \tag{4.57}$$

Dobijena jednačina se naziva *Bernulijeva<sup>27</sup> jednačina<sup>28</sup>*. Izvedena je iz jednačine održanja količine kretanja (odnosno iz dinamičke jednačine) u diferencijalnom obliku uz sledeće pretpostavke:

- idealan fluid, fluid bez viskoznosti, odnosno bez unutrašnjeg trenja,
- konstantna gustina fluida (što je oštriji uslov od uslova nestišljivosti),
- jednačina važi samo duž jedne strujnice, i
- strujanje je ustaljeno.



Slika 4.22: Bernulijeva jednačina važi samo za jednu strujnicu

nastala deljenjem sile po jedinici zapremine (jednačina (4.53)) sa gustinom  $\rho$ . Nakon integracije Ojlerove jednačine duž strujnice  $x$ , sila po jedinici mase se množi sa dužinom i dobija se rad po jedinici mase ili, ako se podeli sa gravitacionim ubrzanjem, rad po jedinici težine (4.57).

Na slici 4.22 je šematski prikazano ustaljeno strujanje idealnog fluida, sa 8 strujnica. Ako se koordinatni sistem tako postavi da je  $z$  osa vertikalna,

Poslednji uslov, da je strujanje ustaljeno, znači da se pritisak i brzina u jednoj tački strujnice ne menjaju kroz vreme (naravno, u jednom trenutku i duž jedne strujnice se pritisak i brzina mogu menjati). Pošto su strujnica i trajektorija u ustaljenom strujanju jedna ista linija, sledi da *Bernulijeva jednačina važi i duž trajektorije*.

Ojlerova jednačina (4.55), u dimenzionalnom smislu, predstavlja silu po jedinici mase, jer je

<sup>27</sup>Daniel Bernoulli (1700 - 1782), švajcarski matematičar, rođen u Holandiji, iz poznate matematičke porodice: otac Johann (1667-1748), stric Jacob (1654-1705), stariji brat Nicolaus II (1695-1726) i mlađi brat Johann II (1710-1790) su se, takođe, uspešno bavili matematikom). Na žalost, unutar porodice Bernuli je vladala izrazita ljubomora i rivalstvo. Danijel je bio dobar prijatelj sa Ojlerom, sa kojim je zajedno radio na mehanici vibrirajućih tela. Bavio se problemima mirovanja i kretanja fluida i uložio je dosta truda

## 4.5. ODRŽANJE KOLIČINE KRETANJA

131

tada se za deliće koji se nalaze u tačkama  $A$  i  $B$  i koji leže na jednoj strujnici, može napisati Bernulijeva jednačina, zato što su iste integracione konstante (Const2 iz jednačina (4.57)):

$$\frac{u_A^2}{2g} + z_A + \frac{p_A}{\rho g} = \frac{u_B^2}{2g} + z_B + \frac{p_B}{\rho g} \quad (4.58)$$

Za delić  $C$  se ovakav izraz ne može napisati, jer je na drugoj strujnici i konstanta u Bernulijevoj jednačini ima drugu vrednost.

Sređivanjem gornjeg izraza, dobija se:

$$\frac{u_B^2 - u_A^2}{2g} = (z_A - z_B) + \frac{p_A - p_B}{\rho g} \quad (4.59)$$

U skladu sa prethodnim dimenzionalnim razmatranjem, član sa leve strane Bernulijeve jednačine (4.59) predstavlja rad koji je, usled povećanja brzine delića, potreban za povećanje kinetičke energije delića jedinične težine. Taj potreban rad se dobija iz dva izvora: smanjenjem potencijalne energije, odnosno, radom sile težine usled smanjenja visine delića (prvi sabirak sa desne strane) i radom sile pritiska usled smanjenja pritiska u tačkama  $A$  i  $B$  (drugi sabirak), sve po jedinici težine delića.

Poslednji član u prethodnoj jednačini je rezultat rada sile pritiska, jer se fluidni delić pomerio iz tačke  $A$ , u kojoj vlada pritisak  $p_A$ , u tačku  $B$  sa pritiskom  $p_B$ . Rad se ostvaruje kretanjem fluida, pa se taj član po nekada naziva i *rad toka* ili *rad na pomeranju*. Često je u upotrebi i naziv *potencijalna energija usled pritiska*. U jezičkom smislu taj naziv nije korektan jer fluid, čak i kad je stišljiv, ne poseduje "energiju pritiska" kao što to poseduju čvrsta elastična tela. Sabijanjem fluida i povećanjem pritiska se ne skladišti energija pritiska, već se ona prenosi kretanjem fluida a da sam fluid tu energiju ne poseduje (kao što, na primer, poseduje kinetičku energiju).

Spajanjem, odnosno grupisanjem drugog i trećeg člana u jednačini (4.57), dobija se *uslov održanja mehaničke energije duž jedne strujnice*:

$$\frac{u^2}{2g} + \left( h + \frac{p}{\rho g} \right) = \text{Const2} \quad (4.60)$$

koji glasi: zbir kinetičke i potencijalne energije po jedinici težine fluidnog delića je konstantan duž jedne strujnice.

Za praktičnu primenu Bernulijeve jednačine problem predstavlja konstanta Const2 koja menja vrednost od jedne do druge strujnice. Kako je u izvođenju Bernulijeve jednačine pretpostavljeno da je fluid idealan,

neviskozan, kao *posledica nepostojanja tangencijalnih napona je i bezvrtložnost*: fluidni delići se tako deformišu da ne dolazi do njihove rotacije (slika 4.15 na strani 112). Uslov bezvrtložnosti je dat sa uslovom  $\Omega_k = 0$  (4.25) odnosno sa:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

Ako se ovaj uslov primeni na Ojlerovu jednačinu (4.55), u drugom sabirku sa leve strane se može izvod po pravcu  $j$  zameniti sa izvodom po pravcu  $i$ , pa cela jednačina postaje:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{4.61}$$

Primenjujući uslov konstantne gustine i ustaljenosti toka, uvlačenjem brzine  $u_j$  pod parcijalni izvod u drugom sabirku i grupisanjem svih izvoda po  $x_i$ , dobija se:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{u_j u_j}{2} + gh + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

Proizvod brzina  $u_j u_j$  je jednak zbiru kvadrata po svim pravcima, što je jednako brzini duž strujnice na kvadrat:  $u_j u_j = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = u^2$ . Da bi prethodna jednačina bila zadovoljena, mora biti ispunjen uslov da je po bilo kom pravcu  $i$  izraz u zagradi nezavistan od tog pravca, odnosno, da je izraz u zagradi konstantan:

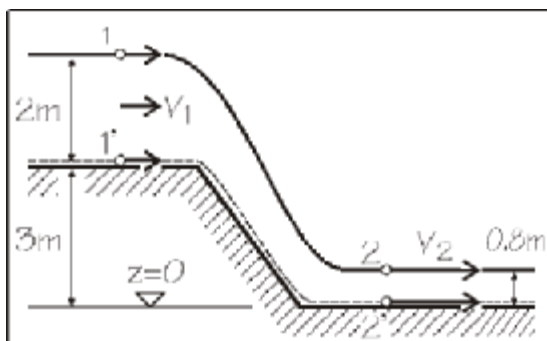
$$\frac{u^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = \text{Const3} \tag{4.62}$$

Dobijena je Bernulijeva jednačina koja ima isti oblik kao i jednačina (4.56), pri čemu *nije korišćen uslov integracije po jednoj strujnici već uslov bezvrtložnosti*, pa jednačina *važi za celo strujno polje*. Jednačina se može podeliti sa gustinom  $\rho$ , tako da se dimenzionalno dobije energija po jedinici težine delića, odnosno, dimenzija dužine (kao i jednačina (4.57)).

**Primer 4.5.2**

Voda se iz dovodnog kanala, u kome teče brzinom od 1 m/s i sa dubinom od 2 m, naglo spušta u donji kanal, u kome je dubina 0,8 m. Ako je denivelacija dna 3 m, kolika je brzina vode u donjem kanalu?





Kod kratkih objekata, često se usvaja pretpostavka da je fluid idealan i da je raspored brzina po preseku konstantan. Takođe, u preseku treba da bude i hidrostatička raspodela pritiska. Za tačke 1 i 2, koje su na površini vode, može se postaviti Bernulijeva jednačina:

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$

Pošto su obe tačke na površini vode,  $p_1 = p_2 = 0$ . Zamenom ulaznih podataka, dobija se:

$$\frac{1,0^2}{2 \times 9,81} + (3 + 2) + 0 = \frac{V_2^2}{2 \times 9,81} + 0,8 + 0 \Rightarrow \frac{V_2^2}{2 \times 9,81} = 4,251$$

pa je brzina  $V_2$  jednaka:

$$V_2 = \sqrt{4,251 \times 2 \times 9,81} = 9,13 \text{ m/s}$$

Isto rešenje bi se dobilo i za bilo koju drugu strujnicu. Na primer, ako se odabere strujnica koja je blizu dna, brzina  $V_{1'}$  je ista kao i  $V_1$ , kota tačke  $z_{1'} = 3 \text{ m}$  a visina pritiska u tački je  $p_{1'}/\rho g = 2 \text{ m}$ . Kota tačke 2' je nula, a visina pritiska je  $p_{2'}/\rho g = 0,8 \text{ m}$ . Bernulijeva jednačina ima isti oblik kao i prethodno napisana, pa je i rešenje za brzinu u tački 2' isto.

### 4.5.3 Primeri primene Bernulijeve jednačine

Bernulijeva jednačina prati mehaničku energiju jednog delića duž strujnice idealnog fluida. Ukoliko strujnice polaze i završavaju u rezervoarima, gde svi delići imaju istu mehaničku energiju (jednaku potencijalnoj), jednačina se može pisati za tačke 1 i 2, koje leže na bilo koje dve strujnice, jer je konstanta  $\text{Const2}$  iz jednačine (4.60) ista za sve strujnice.

Bernulijeva jednačina je izvedena za slučaj strujanja idealnog fluida. Taj uslov znači da se zanemaruje trenje, koje niz struju postepeno smanjuje raspoloživu mehaničku energiju fluidnom deliću. U praktičnoj primeni jednačine, često se prvo pretpostavi da je fluid idealan i za tu pretpostavku se nađe rešenje, na primer, protok ispod ustave u otvorenom kanalu. Zatim se dobijeno rešenje "popravlja" za slučaj realnog fluida, množenjem sa koeficijentom protoka, koji je odnos realnog i idealnog protoka i čija je vrednost uvek manja od jedinice. Za svaki konkretan slučaj vrednost koeficijenta protoka se određuje eksperimentalnim merenjima.

U izvođenju Bernulijeve jednačine pretpostavljeno je ustaljeno tečenje. U mnogim zadacima u građevinskoj hidrotehnici, neustaljenost se iskazuje kroz relativno spore promene, kao na primer isticanje vode iz rezervoara, gde se protok postepeno smanjuje usled smanjenja nivoa u rezervoaru. Takvi problemi se zovu *kvaziustaljeni* (poglavlje 4.1.4 na strani 90) i mogu se rešavati primenom Bernulijeve jednačine uz korišćenje i jednačine kontinuiteta, kojom će se u vremenskim intervalima od nekoliko minuta korigovati promene u graničnim uslovima.

U nastavku će se dati nekoliko primera primene Bernulijeve jednačine za tečenje nestišljivog fluida u cevima i u otvorenim tokovima. Pri tome se neće ulaziti detaljnije u prirodu raznih koeficijenta kojima se rešenje za idealno tečenje svodi na realno. Time bi se došlo do neophodnosti praćenja ukupne energije, a ne samo mehaničke energije delića, a to je oblast koja će se razmatrati u poglavlju 4.6 *Održanje energije sistema*.

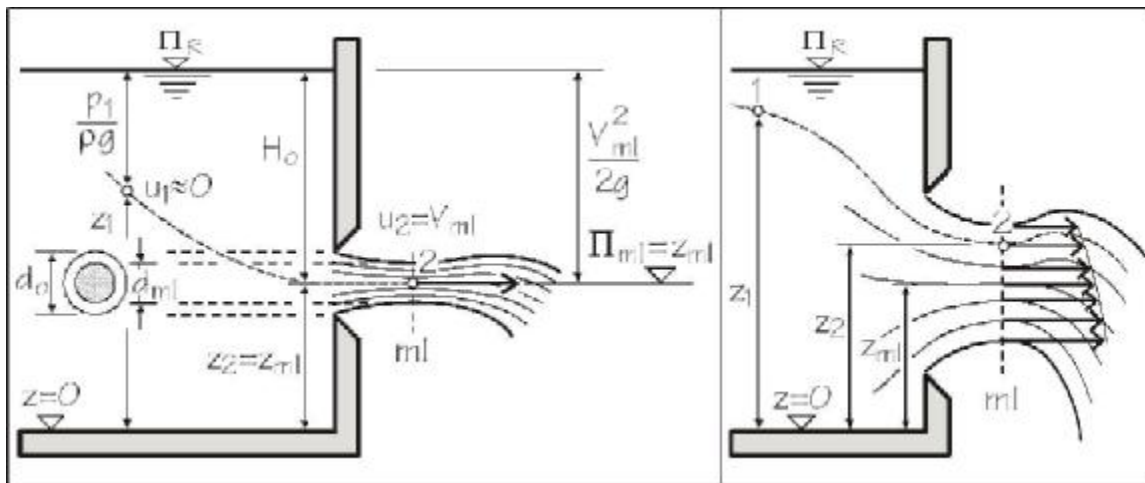
#### 4.5.3.1 Isticanje kroz oštroični otvor

U Hidrotehnici se često koriste *oštroični otvori, preliv i ustave*. Ako se otvor u konturi kroz koju prolazi fluid tako napravi da je sa uzvodne strane zid konture upravan na fluidnu struju, a sa nizvodne strane zasečen pod uglom od  $45^{\circ}$  (slika 4.23) tako da se formira oštra ivica, dobija se precizno definisan oblik izlazne fluidne struje koja će imati minimalan kontakt sa konturom pa, samim tim i minimalan efekat trenja. Kada otvor nije oštroični, strujanje zavisi i od debljine zida konture, njegove hrapavosti kao i kapilarnih napona.

Na slici 4.23, prikazano je isticanje iz rezervoara kroz oštroični otvor. Zid rezervoara je namerno nacrtan uveličano, da bi se jasno video detalj preseka. Fluidni delići iz rezervoara formiraju paraboličnu putanju kako bi prošli kroz oštroični otvor. Zbog inercije, u preseku otvora delići ne mogu naglo da promene putanju, pa se nešto nizvodnije od otvora formira suženi presek<sup>29</sup> u kome su sve strujnice međusobno paralelne i upravne na presek. Taj suženi presek se često naziva *vena contracta* ili *mlaz fluida* (na slici 4.23 je to presek *ml*). Odnos površina preseka mlaza prema površini otvora je:

$$C_A = \frac{A_{ml}}{A_o} = \left( \frac{d_{ml}}{d_o} \right)^2$$

<sup>29</sup>Suženi presek se obično formira nizvodno na rastojanju od oko 1/2 prečnika otvora. Na slici 4.23 je suženi presek odmaknut da bi se lakše prikazao tok fluida. Kod malih brzina, postoji izražen uticaj gravitacije na mlaz fluida, ali čak i tada postoji suženi presek nizvodno od otvora u kome se taj uticaj može zanemariti.



Slika 4.23: Isticanje kroz mali oštroični otvor (levi deo slike) i kroz veliki otvor gde pretpostavka o konstantnoj brzini po preseku otvora više ne važi (desni deo slike)

i naziva se koeficijent kontrakcije mlaza. Koeficijent kontrakcije se određuje pažljivim merenjem. Za kružni otvor njegova vrednost je približno konstantna i jednaka  $C_A = 0,65$ .

Zbog uslova paralelnosti strujnica u mlazu, moguće je postaviti Bernulijevu jednačinu (4.59) između tačke 1, koja se nalazi negde u rezervoaru, i tačke 2, koja je u centru mlaza (levi deo slike 4.23):

$$\frac{u_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{u_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$

Za veliki rezervoar i tačku 1, koja je dovoljno udaljena od otvora, brzina  $u_1$  je zanemarljivo mala. Zbir položajne kote tačke 1 i visine pritiska je jednak pijeometarskoj koti (jednačina (3.11) sa strane 38), koja se poklapa sa kotom rezervoara:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \Pi_R$$

Tačka 2 se nalazi u suženom preseku, gde je fluid u kontaktu sa atmosferom. Pritisak u tački je jednak atmosferskom pritisku, pa je  $p_2 = 0$ . Sređivanjem izraza dobija se:

$$\Pi_R = \frac{u_2^2}{2g} + z_2 \Rightarrow u_2 = \sqrt{2g(\Pi_R - z_2)} = \sqrt{2gH_o} = u_{ml} \quad (4.63)$$

gde je  $H_o$  rastojanje od osovine mlaza do pijeometarske kote rezervoara. Za mlaz čiji je prečnik relativno mali u odnosu na visinu  $H_o$  promena brzine

po visini mlaza se može zanemariti, pa se može staviti da je brzina u mlazu konstantna i jednaka brzini u tački 2.

Zavisnost brzine fluida, pri isticanju iz rezervoara, od kvadratnog korena rastojanja do nivoa u rezervoaru, 1643. godine je eksperimentalno dokazao Toričeli, pa se u njegovu čast jednačina (4.63) često naziva još i Toričelijeva jednačina. Brzina  $u_2 = u_{ml}$  je brzina u suženom preseku, dok u sâmom preseku otvora u ravni zida rezervoara i brzina i pritisak nisu uniformni, pa u tom preseku se *ne sme primenjivati Bernulijeva jednačina*.

Za mlaz prikazan na desnoj strani slike 4.23 se ne može smatrati da su brzine po preseku konstantne. Za tačku 2, koja sada nije u centru mlaza, već na bilo kojoj strujnici, postavlja se Toričelijeva jednačina:

$$u_2 = \sqrt{2g(\Pi_R - z_2)} \quad (4.64)$$

odakle se dobija brzina. Rešavanjem jednačine za sve tačke u preseku mlaza (u kome još uvek važi uslov da je sužen i da su strujnice međusobno paralelne i upravne na presek) dobija se raspored brzina  $u_2 = u_2(z_2)$ . Protok kod velikog otvora je integral brzina  $u_2$  po preseku mlaza, odnosno, suma proizvoda brzina i pripadajućih proticajnih površina.

Toričelijeva jednačina isticanja važi samo za idealan fluid. Brzina isticanja realnog fluida je nešto manja zbog postojanja trenja, pa se uvodi koeficijent brzine  $C_V$ . Prava brzina mlaza i protok kroz otvor su:

$$V_{ml} = C_V \sqrt{2gH_o}$$

$$Q = A_{ml} V_{ml} = C_V A_{ml} \sqrt{2gH_o}$$

Često je zgodnije protok izraziti u funkciji površine otvora u zidu a ne suženog mlaza. Korišćenjem koeficijenta kontrakcije, može se zameniti  $A_{ml} = C_A A_o$  pa se dobija:

$$Q = C_A C_V A_o \sqrt{2gH_o} = C_Q A_o \sqrt{2gH_o} \quad (4.65)$$

Koeficijent  $C_Q = C_A C_V$  se zove *koeficijent protoka*. Tipična vrednost za koeficijent brzine kod kružnog oštroičnog otvora je  $C_V = 0,95 \sim 0,98$  pa je koeficijent protoka obično u granicama  $C_Q = 0,61 \sim 0,64$ .

### Primer 4.5.3

U zatvorenom rezervoaru u kome se nalazi voda gustine  $\rho = 1 \text{ kg/dm}^3$  i dubine 3 m, pritisak u vazduhu iznad vode je  $p_{VAZ} = 15 \text{ kPa}$ . U dnu rezervora je oštroični kružni otvor prečnika  $d = 1 \text{ cm}$ . Ako je izmeren prečnik mlaza nizvodno od otvora  $d_{ml} = 0,81 \text{ cm}$  i ako je koeficijent brzine  $C_V = 0,96$ , koliki je protok kroz otvor?

#### 4.5. ODRŽANJE KOLIČINE KRETANJA

Referentna ravan se može postaviti na koti otvora, odnosno dna suda. Pritisak na koti površine vode je zadati pritisak vazduha, pa je piježometarska kota vode:

$$\Pi = \frac{p}{\rho g} + z = \frac{15}{1 \times 9,81} + 3 = 4,529 \text{ m}$$

Koeficijent kontrakcije mlaza je odnos površina mlaza i otvora u dnu suda:

$$C_A = \frac{A_{ml}}{A} = \frac{d_{ml}}{d} = \frac{0,81^2}{1^2} = 0,656$$

Protok kroz otvor na dnu je:

$$Q = C_A C_V A \sqrt{2g(\Pi - z_{ml})} = 0,656 \times 0,96 \frac{0,01^2 \pi}{4} \sqrt{2 \times 9,81(4,529 - 0)}$$

$$Q = 0,000466 \text{ m}^3/\text{s} = 0,466 \text{ L/s}$$

##### 4.5.3.2 Pito i Pito-Prantlova cev

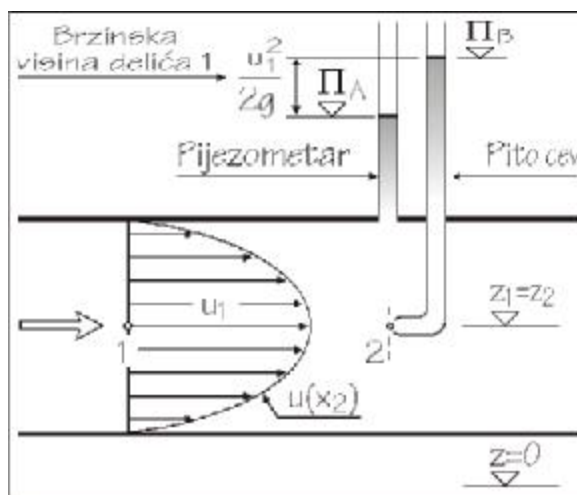
Zbir kinetičke i potencijalne energije duž jedne strujnice idealnog fluida je, prema Bernulijevoj jednačini, konstantan. Povećanje brzine delića je moguće samo na račun smanjenja potencijalne energije i obrnuto, usporavanjem delića kinetička energija se pretvara u potencijalnu.

Na slici 4.24 je prikazan fluidni delić 1 koji ima brzinu  $u_1$ . Na njegovom putu, neposredno nizvodno, nalazi se otvor savijene cevi (presek 2) u kojoj svi fluidni delići stoje. Kada delić 1 dođe do tačke 2, njegova brzina naglo padne sa  $u_1$  na nulu. Za taj delić se može napisati Bernulijeva jednačina:

$$\frac{u_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{u_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$

Pošto je  $z_1 = z_2$  i brzina  $u_2 = 0$ , jednačina se svodi na:

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g}$$



Slika 4.24: Pito cev pokazuje kolika je ukupna mehanička energija po jedinici težine fluida u jednoj strujnici

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho g} = \frac{u_1^2}{2g} \Rightarrow p_2 - p_1 = \Delta p = p_u = \frac{1}{2} \rho u_1^2 \quad (4.66)$$

Dobijena veličina  $p_u$  ima dimenziju pritiska [Pa]. Ona se zove *zaustavni pritisak*, jer predstavlja maksimalno povećanje pritiska koje se dobija kada se fluidni delić naglo zaustavi. Pojam zaustavnog pritiska se često koristi u Mehanici fluida i o njemu će biti više priče u oblasti otpora i opstrujavanja tela, u poglavlju 6.4, *Otpori oblika*. **Zaustavni pritisak kao maksimalno mogući pritisak je, takođe, zgodna mera za izražavanje relativnih pritisaka u fluidnoj struji i koristi se u oblasti Dimenzionalne analize, koja će biti obrađena u glavi 5.**

U savijenoj cevi B, kojoj pripada i delić 2, svi fluidni delići miruju, tako da se za deo fluida unutar cevi može napisati osnovna jednačina hidrostatičke:

$$\Pi_B = \frac{p_2}{\rho g} + z_2$$

Iz prethodno dobijene jednačine, sledi da se pritisak  $p_2$  poveća u odnosu na neporemećeni pritisak  $p_1$  za zaustavni pritisak  $p_u$ , pa je piježometarska kota za fluid u cevi B:

$$\Pi_B = \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_2$$

Ako se umesto zadnjeg člana  $z_2$  stavi kota tačke 1, prethodna jednačina se svodi na:

$$\Pi_B = \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{u_1^2}{2g} + \Pi_1$$

gde je  $\Pi_1$  piježometarska kota fluida na mestu gde je fluidni delić 1.

Kako su strujnice u preseku 1 paralelne i upravne na presek, piježometarska kota  $\Pi_1$  važi za ceo presek 1 pa će se i fluid u piježometarskoj cevi A, nacrtanoj na slici 4.24, popeti upravo do te kote. Prethodna jednačina postaje:

$$\Pi_B = \frac{u_1^2}{2g} + \Pi_A \Rightarrow \Pi_B - \Pi_A = \frac{u_1^2}{2g} = \frac{p_u}{\rho g}$$

odakle se vidi da razlika dve kote  $\Pi_B - \Pi_A$  predstavlja visinu zaustavnog pritiska  $\frac{p_u}{\rho g}$ , odnosno, brzinsku visinu  $\frac{u_1^2}{2g}$  fluidnog delića na koti  $z_1$ . Merenjem te razlike piježometarskih kota može se odrediti brzina delića, a pomeranjem cevi B po visini preseka, može se odrediti kompletan raspored brzina  $u(x_2)$ . Ako je tok fluida sa slobodnom površinom, tada je sâma slobodna površina piježometarska kota, pa druga piježometarska cev A nije potrebna.

Savijena cev B se zove Pito cev, po francuskom inženjeru Anriju Pitou<sup>30</sup>, koji ju je prvi upotrebio za merenje brzine vode u reci Seni 1732 godine. Interesantno je da je tek nekih 200 godina kasnije, nemac Ludvig Prantl<sup>31</sup>, napravio elegantnu konstrukciju spajanjem dve cevi u jednu celinu, čime je dobijena jednostavna i tačna sprava za merenje brzine fluida.

#### 4.5.3.3 Oštroivični preliv

Ukoliko se u otvoreni tok postavi vertikalna pregrada u kojoj se nalazi *oštroivični preliv*, moguće je uspostaviti vezu između visine mlaza fluida na prelivu i protoka. Oštroivični prelivi se najčešće prave tako da imaju otvor u pregradi celom širinom toka ili pravougaoni otvor sa širinom manjom od širine kanala (slika 4.25). Takođe, koriste se i prelivi sa otvorom posebnih oblika, kao na primer trougaoni “V” preliv sa uglom od  $90^0$ .

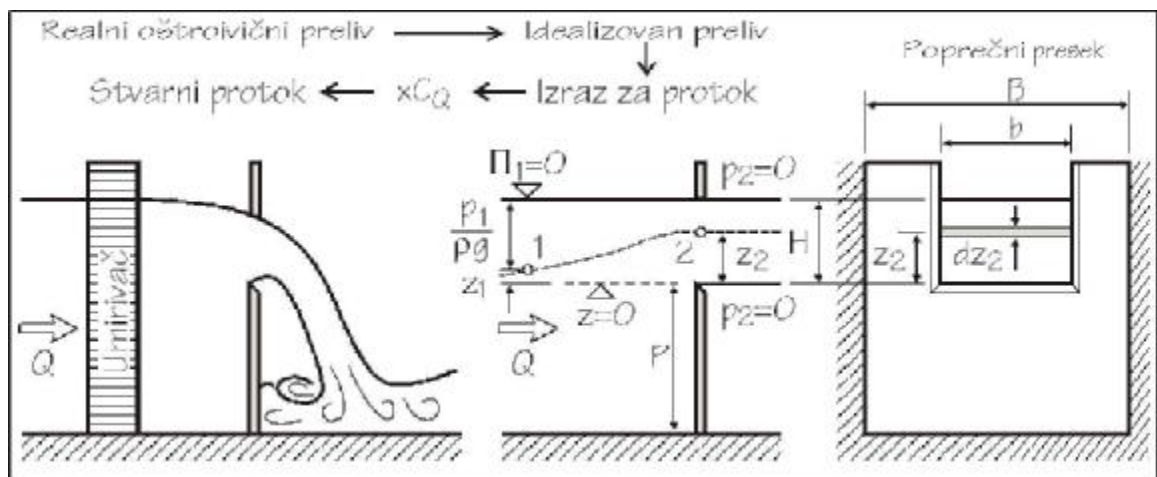
Strujna slika uzvodno i nizvodno od preliva je veoma kompleksna (levi deo slike 4.25), tako da ne postoje uslovi za direktnu primenu Bernulijeve ili Ojlerove jednačine. Mada je nizvodno od preliva moguće obezbediti atmosferski pritisak sa obe strane mlaza, zbog nesimetrične zakrivljenosti strujnica ne postoji suženi presek u kome bi strujnice bile paralelne i upravne na presek a pritisak uniforman. Na protok preko preliva utiču i turbulencija u dolaznoj fluidnoj struji kao i postojanje dolazne brzine, čiji raspored zavisi od geometrije dovodnog kanala i trenja u kanalu.

Analitičku zavisnost visine prelivnog mlaza od protoka je prvi uspostavio nemački inženjer Vajsbah<sup>32</sup>, usvajajući sledeća značajna pojednostavljenja

<sup>30</sup>Henri de Pitot (1695 - 1771) francuski matematičar i fizičar. Radio je kao građevinski inženjer na odvodnjavanju močvarnog zemljišta, konstrukciji mostova, sistema za navodnjavanje i sistema za odbranu od poplava. 1732 godine je upotrebio efekat zaustavnog pritiska za merenje brzine u reci Seni tako što je savio staklenu cev pod  $90^0$  i njome u nizu tačaka u profilu reke merio brzinsku visinu  $u^2/2g$ .

<sup>31</sup>Ludwig Prandtl (1875 - 1953) nemački inženjer koga najčešće nazivaju i ocem moderne mehanike fluida, ali koji nikada nije bio priznat kao pravi naučnik. U svojim istraživanjima, koristeći vizuelizaciju toka, uočio je postojanje sloja oko tela u kojima je gradijent brzine veliki i definisao je teoriju graničnog sloja, prema kojoj se fluidni tok može razdvojiti na deo uz samu čvrstu granicu, gde viskoznost ima dominantnu ulogu i na udaljeniji deo gde se fluid smatra neviskoznim i idealnim (poglavlje 6.3.2 *Raspored brzina i granični sloj oko tanke ploče*, strana 250). Takođe, dao je teorijske osnove za proračun sile uzgona na krila aviona čime je značajno doprineo razvoju avijacije početkom dvadesetog veka. U toku rada na eksperimentima, doprineo je razvoju merne opreme, između ostalog i pravljenjem etalonske, referentne Pito-Prantlove sonde.

<sup>32</sup>Julius Weisbach (1806 - 1871) nemački inženjer i profesor matematike i geometrije, mineralogije, rudarstva, geodezije, optike, mašinstva, ... Interesantno je da je pre početka svoje profesorske karijere, 1830. godine proveo šest meseci pešačeći kroz Mađarsku, Tiroliju i Bavariju. Hidraulikom se “zarazio” za vreme posete Pariskom sajmu industrije, 1839.



Slika 4.25: Kompleksno tečenje preko oštrogivnog preлива se može uprostiti, uz primenu empirijskih koeficijenta na dobijene izraze

(slika 4.25 sa desne strane):

1. uzvodno od preлива dolazna brzina je uniformna sa hidrostatičkom raspodelom pritisaka po preseku,
2. mlaz preko preлива je horizontalan, svi fluidni delići se u ravni preлива kreću horizontalno, upravno na prelivnu ivicu,
3. pritisak oko preлива kao i u samom prelivu je atmosferski,
4. zanemaruje se efekat viskoznosti i površinskog napona.

Za usvojene uslove Bernulijeva jednačina duž jedne strujnice je:

$$\frac{u_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{u_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$

i svodi se na oblik:

$$\frac{u_1^2}{2g} + \Pi_1 = \frac{u_2^2}{2g} + z_2$$

Ako je referentni sistem ( $z = 0$ ) postavljen na koti vrha prelivne ivice, tada je pijezometarska kota  $\Pi_1$  jednaka visini  $H$  od ivice preлива do nivoa fluida u preseku 1. Iz prethodne jednačine se dobija brzina u mlazu:

$$u_2 = \sqrt{2g \left( H - z_2 + \frac{u_1^2}{2g} \right)}$$

godine. Svoje najznačajnije radove, čiji se rezultati i danas koriste, je publikovao baš iz oblasti hidraulike.



koja nije konstantna po visini mlaza  $z_2$ . Često se kod oštroičnih preliava zbir visine prelivnog mlaza i brzinske visine u dolaznom preseku 1 označava sa  $H_0$ :

$$H_0 = H + \frac{u_1^2}{2g}$$

Protok preko preliava se dobija kao suma proizvoda svih brzina  $u_2(z)$  i pripadajućih elementarnih površina  $dA$ . U slučaju pravougaonog, oštroičnog preliava, datog na slici 4.25, elementarne površine su pravougaonici konstantne širine  $b$  i visine  $dz_2$ , pa je protok preko preliava:

$$\begin{aligned} Q_{id} &= \int_A u_2 dA = b \int_0^H u_2 dz_2 = \\ &= b\sqrt{2g} \int_0^H \sqrt{\left(H - z_2 + \frac{u_1^2}{2g}\right)} dz_2 = \\ &= -\frac{2}{3}b\sqrt{2g} \left[ \left(H - z_2 + \frac{u_1^2}{2g}\right)^{3/2} \right]_0^H = \\ &= \frac{2}{3}b\sqrt{2g} \left[ \left(H + \frac{u_1^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{u_1^2}{2g}\right)^{3/2} \right] \end{aligned}$$

Dobijena jednačina za protok nije direktno rešiva, jer se sa desne strane nalazi brzina  $u_1$  koja je funkcija protoka<sup>33</sup>  $u_1 = Q/A_1$ . Do rešenja se dolazi iterativnim postupkom, pri čemu se u prvoj iteraciji dolazna brzina  $u_1$  može zanemariti, a u narednim iteracijama, uzima se brzina  $u_1$ , koja se računa iz protoka dobijenog prethodnom iteracijom. Često se u rešavanju protoka dolazna brzinska visina skroz zanemaruje, pa izraz za protok postaje:

$$Q_{id} = \frac{2}{3}b\sqrt{2g}H^3$$

Da bi se odredio protok na realnom prelivu, potrebno je dobijeni analitički izraz pomnožiti sa koeficijentom protoka  $C_Q$ :

$$Q = C_Q \times Q_{id}$$

Koeficijent protoka se određuje za svaku geometriju preliava i dolaznih uslova laboratorijskim merenjima. Koeficijent u sebi uključuje i neravnomernost brzina u presecima 1 i 2, tako da se u izrazima za protok ne koriste brzine

<sup>33</sup>Prilikom rešavanja zadatka, pravi se česta greška u obračunu poprečnog preseka  $A_1$ . Kao poprečni presek treba uzeti celokupni proticajni presek dubine  $(H + P)$ , od dna kanala do površine fluida, a ne samo dubinu  $H$ !

delića  $u_1$  i  $u_2$  već srednje profilske brzine  $V_1$  i  $V_2$ . U literaturi [1, 12], mogu se naći tablice i dijagrami iz kojih se određuje koeficijent protoka za većinu standardnih oblika preliva.

#### Primer 4.5.4

Voda teče pravougaonim kanalom konstantne širine  $B = 1$  m. Visina prelivnog mlaza je  $H = 25$  cm a preliv je oštroični pravougaoni, širine  $b = 0,4$  m i visine  $P = 0,3$  m. Koliki je protok kanalom ako je za date geometrijske uslove koeficijent protoka  $C_Q = 0,61$ ?

Kao prva iteracija proračuna protoka može se uzeti da je dolazna brzina u kanalu nula:

$$Q^{(1)} = C_Q \frac{2}{3} b \sqrt{2gH^3} = 0,61 \frac{2}{3} 0,4 \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,25^3} = 0,09007 \text{ m}^3/\text{s} = 90,07 \text{ L/s}$$

Dolazna brzina za tako sračunat protok je:

$$V_1 = \frac{Q^{(1)}}{A_1} = \frac{Q^{(1)}}{B(H+P)} = \frac{0,09007}{1,0(0,25+0,3)} = 0,164 \text{ m/s}$$

a član brzinske visine u preseku 1 je:

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{0,164^2}{2 \times 9,81} = 0,001371 \text{ m} = 1,371 \text{ mm}$$

Kako se u izrazu za protok pojavljuje zbir visine prelivnog mlaza  $H$  i brzinske visine, rezultat prve iteracije pokazuje opravdanost pretpostavke o zanemarenju dolazne brzine. U drugoj iteraciji, protok je:

$$\begin{aligned} Q^{(2)} &= C_Q \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \left[ \left( H + \frac{V_1^2}{2g} \right)^{3/2} - \left( \frac{V_1^2}{2g} \right)^{3/2} \right] = \\ &= 0,61 \frac{2}{3} 0,4 \sqrt{2 \times 9,81} \left[ (0,25 + 0,001371)^{3/2} - 0,001371^{3/2} \right] = \\ &= 0,09077 \text{ m}^3/\text{s} = 90,77 \text{ L/s} \end{aligned}$$

Dobijeni protok je veći od protoka iz prve iteracije za 0,7%. U većini proračuna, greška manja od 1% se smatra prihvatljivom. Ako bi se nastavilo sa iteracijama, brzina  $V_1$  u drugoj iteraciji je 0,1650 m/s a brzinska visina 1,388 mm, dok je protok  $Q^{(3)} = 90,78$  L/s, što se može konačno usvojiti kao tačna vrednost.

#### 4.5.4 Navie-Stoksove jednačine

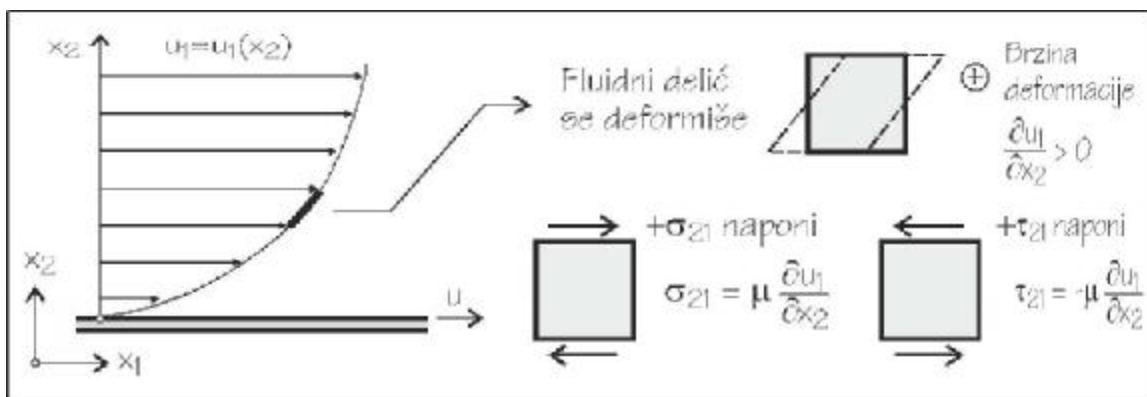
Dinamička jednačina (4.53), odnosno (4.54), na strani 128, sadrži član  $\frac{\partial \tau_{ji}^d}{\partial x_j}$  koji predstavlja površinsku silu od devijatorskog dela napona ( $-\sigma_{ij}^d$ ).

Kao posledica delovanja te sile dolazi do deformacija, pa bi trebalo da postoji veza između tangencijalnih napona ( $\tau_{ij}^d$ ) i brzina deformacija ( $\omega_{ij}$ ).

Za strujanje fluida konstantne gustine, pri čemu postoji samo jedna komponenta brzine  $u_1$ , a druge dve su nula  $u_2 = u_3 = 0$ , izvodi komponenti 2 i 3 su takođe nula, pa važi i da je:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$$

na osnovu uslova (4.38) da je zbir brzina dilatacija u sva tri pravca jednak nuli. Brzina  $u_1$  je samo funkcija pravca 2 (uz pretpostavku da je strujanje u dve ravni), odnosno,  $u_1 = u_1(x_2)$ .



Slika 4.26: Pozitivni smerovi brzina deformacija i napona na fluidni delić

U poglavlju 2.2 *Viskoznost* je jednačinom (2.6) na strani 16, data veza između tangencijalnog napona i ugaone brzine (jednačina (4.22), strana 111):

$$\tau(y) = \mu \frac{du}{dy}$$

Za date uslove, veza se može napisati u sledećem obliku:

$$\tau_{21} = \tau_{12} = -\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \tag{4.67}$$

gde je u skladu sa konvencijom o pozitivnim smerovima napona (slika 4.19 na strani 125 i slika 4.26), u izrazu za tangencijalni napon promenjen znak.

Za opisane uslove strujanja, brzina deformacija  $\omega_{ij}$  je:

$$\omega_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \Rightarrow \omega_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

jer je  $u_2 = 0$ . Kombinujući prethodni izraz sa izrazom (4.67) dobija se:

$$\tau_{12} = -2\mu\omega_{12}$$

Dobijena relacija se može proširiti na ceo devijatorski deo napona i deformacija (4.29):

$$(-\sigma_{ji}^d) \tau_{ji}^d = -2 \mu \omega_{ji}^d = -2 \mu \left( \omega_{ji} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \omega_{kk} \right) \quad (4.68)$$

Sređivanjem izraza zamenom članova koji nose deformaciju  $\omega_{ji}$  (4.26) i  $\omega_{kk}$  (4.20), dobija se veza između tangencijalnog napona i brzine deformacija:

$$\tau_{ji}^d = -\mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (4.69)$$

Površinska sila u pravcu  $i$  je izvod tangencijalnog napona  $\tau_{ji}^d$  po koordinatnom pravcu  $x_j$ :

$$\frac{\partial \tau_{ji}^d}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (4.70)$$

Kod drugog člana zbira se može promeniti redosled diferenciranja, pa će se dobiti sledeći oblik:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \quad (4.71)$$

U trećem članu zbira (4.70), mogu se spojiti parcijalni izvod  $x$ , po pravcu  $j$  i Kronekerov simbol  $\delta_{ij}$ , tako da se dobija parcijalni izvod po pravcu  $i$ :

$$\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \quad (4.72)$$

U izrazu je  $i$  udvojeni indeks  $k$  zamenjen indeksom  $j$ , jer se radi o zbiru po tri osnovna koordinatna pravca, pa je svejedno koja se oznaka koristi.

Spajanjem drugog (4.71) i trećeg (4.72) člana izraza, dobija se:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)$$

Kada se uvrste sređeni članovi u jednačinu (4.70), dobija se veza između površinske sile i brzine deformacija:

$$\frac{\partial \tau_{ji}^d}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \quad (4.73)$$

Stavljanjem te veze u dinamičku jednačinu (4.54) (strana 128), dobija se:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \quad (4.74)$$

*dinamička jednačina za viskozni, Njutnovski fluid.* Jednačina je vektorska, što znači da su izrazom (4.74) napisane tri jednačine, za osnovne koordinatne pravce  $i = 1$ ,  $i = 2$  i  $i = 3$ . One se najčešće zovu *Navie<sup>34</sup>-Stoksove<sup>35</sup> jednačine*.

Izvedene Navie-Stoksove jednačine važe za viskozne fluide, kod kojih je **viskoznost promenljiva po prostoru**  $\mu = \mu(x_i)$ . To je najčešće slučaj kod strujanja fluida koji su izloženi temperaturnim uticajima. Ako se pretpostavi da je fluid homogen, tako da viskoznost ne zavisi od koordinatnog pravca, tada se koeficijent viskoznosti  $\mu$  može izvući ispred parcijalnog izvoda po  $x_i$ , odnosno po  $x_j$ . Treći član zbira (4.74), tada se može napisati u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = -\mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} \right)$$

gde je pokazano da član, sa udvojenim indeksom  $(\partial x_j \partial x_j)$ , predstavlja zbir tri člana, po pravcima 1, 2 i 3. Četvrti član zbira (4.74) se može napisati u obliku:

$$\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

pa Navie-Stoksove jednačine za homogen fluid postaju:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (4.75)$$

<sup>34</sup>Claude-Louis Marie Henri Navier (1785 - 1836) francuski inženjer i kasnije profesor, koji se specijalizovao za mehaniku elastičnih tela. Radio je na projektovanju mostova i prvi je dao potpunu teoriju visećih mostova. Danas je poznatiji po radovima iz mehanike fluida, gde je 1821. godine dao prvi oblik Navie-Stoksove jednačine za nestišljive fluide, a godinu dana kasnije i za viskozne fluide. Interesantno je da je do korektnog oblika jednačina došao bez poznavanja koncepta tangencijalnih napona, već direktno uzimajući sile među molekulima kao meru trenja.

<sup>35</sup>George Gabriel Stokes (1819 - 1903) engleski matematičar i fizičar, irskog porekla, jedan od predsednika Kraljevskog udruženja engleskih naučnika. Kombinujući izvrsno matematičko znanje i sklonost ka eksperimentalnom radu, u mnogim oblastima je postavio fundamentalne matematičke principe. U svojim prvim radovima iz 1842. i 1843. se bavio ustaljenim kretanjem nestišljivog fluida, da bi kasnije počeo da se bavi i talasnim kretanjima i viskoznošću. Velike doprinose je dao i u teoriji prostiranja svetlosti kao i u razvoju opšte matematičke fizike.

pri čemu je član površinske sile za homogeni fluid:

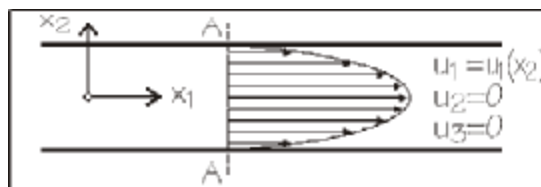
$$\frac{\partial \tau_{ji}^d}{\partial x_j} = -\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (4.76)$$

Ako se pretpostavi da je fluid homogen i nestišljiv ( $\rho = \text{Const.}$ ) tada je na osnovu jednačine održanja mase (4.38) (strana 119) član  $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$ , pa se Navie-Stoksove jednačine svode na:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (4.77)$$

### Primer 4.5.5

Za jednoliku ravansku ustaljenu struju homogenog, viskoznog i nestišljivog fluida, pokazati da je pijeziometarska kota konstantna po preseku struje.



Prema datoj skici, brzine su  $u_1 = u_1(x_2)$ ,  $u_2 = u_3 = 0$ . Za date uslove je i  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$  jer iz uslova  $\rho = \text{Const.}$  sledi  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ .

Za homogen nestišljiv fluid primenjuju se Navie-Stoksove jednačine (4.77). Za slučaj ustaljenog strujanja, član sa leve strane, materijalni izvod brzine je nula:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = 0$$

pa su Navie-Stoksove jednačine:

$$0 = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

Deljenjem sa  $\rho g$  jednačina se piše za pravac 2, upravno na fluidnu struju:

$$0 = -\frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{p}{\rho g} \right) + 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_2} (\Pi) = 0 \Rightarrow \Pi = \text{Const.}$$

odakle sledi da je pijeziometarska kota konstantna duž preseka, u pravcu 2. Da bi se videlo od čega zavisi pijeziometarska kota, napisaće se i Navie-Stoksova jednačina za pravac 1:

$$0 = -\frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{p}{\rho g} \right) + \frac{\mu}{\rho g} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} (\Pi) = \frac{\mu}{\rho g} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}$$

Iz uslova da  $\Pi$  zavisi samo od  $x_1$  a brzina  $u_1$  od  $x_2$ , dolazi se do toga da su oba člana izraza konstante, pa se parcijalni izvodi mogu zameniti totalnim:

$$\frac{d\Pi}{dx_1} = \frac{\mu}{\rho g} \frac{d^2 u_1}{dx_2^2} = \text{Const.} \Rightarrow \frac{d\Pi}{dx_1} = I_\Pi = \text{Const.}$$

Za date granične uslove, izraz se može integrirati, odakle će se dobiti raspored brzina i nagib pijezometarske linije.

#### 4.5.5 Rešenje integralne jednačine održanja količine kretanja za ustaljeno tečenje homogenog fluida u cevi

Integralna jednačina (4.44) održanja količine kretanja, odnosno dinamička jednačina data na strani 123, napisana za bilo koji pravac  $i$  glasi:

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} dV + \int_{CA} \rho u_i (u_j n_j) dA = F_i \quad (4.78)$$

Sa leve strane jednačine se nalazi priraštaj količine kretanja u jedinici vremena, po određenoj zapremini  $V$ , uvećan za protok količine kretanja u jedinici vremena kroz omotač, graničnu površinu  $A$  posmatrane zapremine  $V$ . Drugi sabirak je pozitivan ako je protok koji napušta zapreminu veći od onoga koji u nju ulazi. Prema drugom Njutnovom zakonu, vektorski zbir ova dva člana  $F_i$  mora biti jednak zbiru pravih sila koje deluju na konačnu zapreminu.

Prethodna jednačina se u najopštijem obliku može napisati kao uslov da je zbir dva vektora, odnosno dve sile, jednak nuli:

$$\vec{I} + \vec{F} = 0 \quad (4.79)$$

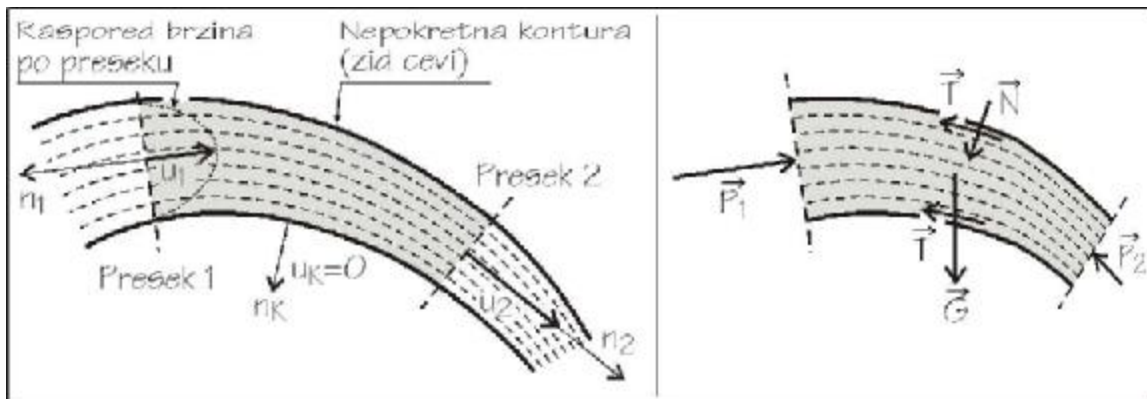
odakle je prema jednačini (4.78), sila  $\vec{I}$  za pravac  $i$  negativan zbir prva dva sabirka:

$$I_i = - \left( \int_{CV} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} dV + \int_{CA} \rho u_i (u_j n_j) dA \right) \quad (4.80)$$

Ovako definisana sila  $\vec{I}$ , zove se *inercijalna sila* ili *fiktivna sila* i predstavlja primenu Dalamberovog<sup>36</sup> principa, kojim se zadaci dinamike fluida svode na statiku: iako se fluid kreće, može se smatrati da posmatrano telo zapremine  $V$  miruje pošto su sve prave sile i inercijalne sile u ravnoteži.

Jednačine (4.78), odnosno (4.79), moraju biti zadovoljene u okviru određene, konstantne zapremine. Na slici 4.27 je prikazan tok fluida kroz cev,

<sup>36</sup>Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783) kontraverzni francuski matematičar, koji je lako ulazio u svađu sa svima oko sebe. Dao je izvanredan doprinos primeni matematike u fizici, posebno u oblasti održanja kinetičke energije, poboljšanjem Njutnove definicije sile. Bavio se statikom i dinamikom fluida, primenjujući integralni pristup umesto Bernulijevog diferencijalnog, usput tvrdeći da je njegov pristup bolji! Radio je na pisanju Enciklopedije sa Volterom i Didroom, gde je bio zadužen za matematiku i fizičku astronomiju. Sarađivao je, a i intenzivno svađao, sa Ojlerom.



Slika 4.27: Na deo cevi između preseka 1 i 2 se primenjuje dinamička jednačina: na levom delu slike su prikazane brzine, a na desnom delu slike sve prave sile, koje treba zajedno sa fiktivnim inercijalnim silama da “zatvore” poligon sila (prema jednačini (4.79))

koja se *postepeno sužava*. Tečenje je ustaljeno a fluid je homogen. Zapremina u okviru koje se rešava dinamička jednačina je omeđena **presecima 1 i 2, kao i nepokretnom konturom cevi**.

U dinamičkoj jednačini (4.78), zbog ustaljenog tečenja, član sa parcijalnim izvodom po vremenu je nula. U površinskom integralu, deo površine koji se odnosi na konturu (na levoj strani slike 4.27 je ort konture označen sa  $n_K$ ), množi se sa brzinom nula, pa ostaje samo deo površine na presecima 1 i 2. Ako se pretpostavi da su brzine u presecima konstantne, jednake  $V_1$  i  $V_2$  (prema (4.7)), tada se rešenje dinamičke jednačine svodi na:

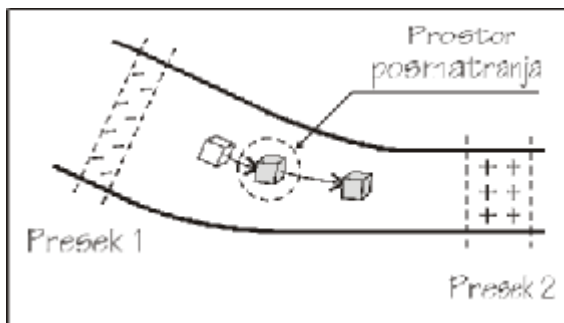
$$\rho Q \vec{V}_2 - \rho Q \vec{V}_1 = \vec{F} \tag{4.81}$$

Negativan znak kod preseka 1 ukazuje da je smer brzine suprotan od smera orta površine, odnosno da je u pitanju dotok količine kretanja.

Sa leve strane jednačine (4.81), nalazi se *priraštaj količine kretanja posmatrane mase u jedinici vremena*, u uslovima ustaljenog tečenja fluida konstantne gustine kroz cev. Do istog izraza se može doći i direktnom primenom osnovnog principa održanja količine kretanja, pri istim uslovima, na deo fluida između dva preseka cevi (slika 4.28). Prema jednačini kontinuiteta (4.42), zbog promene preseka cevi duž fluidne struje, u svakom od preseka delići imaju različite brzine. Delić koji je sivo obojen, u trenutku  $t$ , ima količinu kretanja  $m \vec{V}_t$ . U sledećem vremenskom trenutku  $t + \Delta t$ , kada napusti svoje mesto i pomeri se niz fluidnu struju, imaće veću brzinu pa će njegova količina kretanja  $m \vec{V}_{t+\Delta t}$  da poraste. Međutim, u tom sledećem vremenskom trenutku  $t + \Delta t$ , na upražnjeno mesto sivog delića će doći beli



delić (jer je fluid neprekidan), koji će sada imati brzinu i količinu kretanja jednaku onoj koju je imao sivi delić u trenutku  $t$ . Može se zaključiti da unutar posmatranog prostora, kroz vreme, ne dolazi do promene količine kretanja<sup>37</sup>.



Slika 4.28: Jedina prava promena količine kretanja se događa na krajevima zapremine, u presecima 1 i 2

za  $m\vec{V}_2 = \rho Q \Delta t \vec{V}_2$ . Ukupna promena količine kretanja u vremenskom intervalu  $\Delta t$  je:

$$-\rho Q \Delta t \vec{V}_1 + \rho Q \Delta t \vec{V}_2$$

pa se dobija da je promena količine kretanja u jedinici vremena ista kao i leva strana jednačine (4.81):

$$\rho Q \vec{V}_2 - \rho Q \vec{V}_1$$

Inercijalna sila  $\vec{I}$ , koja je jednaka negativnoj vrednosti promene količine kretanja (4.80), može se razdvojiti na dve komponente, na preseke 1 i 2. Za tečenje u cevi, u skladu sa jednačinom (4.81) inercijalne sile  $I_1$  i  $I_2$  su:

$$\vec{I}_1 = \rho Q \vec{V}_1 \quad \vec{I}_2 = -\rho Q \vec{V}_2 \quad (4.82)$$

Zbog promenjenog znaka u izrazu, sila  $\vec{I}_1$  deluje u pravcu ulazne brzine  $\vec{V}_1$ , a sila  $\vec{I}_2$  suprotno od izlazne brzine  $\vec{V}_2$ . Može se zaključiti da je *smer komponente inercijalne sile takav da sila uvek deluje ka poprečnom preseku kontrolne zapremine, odnosno, da inercijalna sila uvek deluje ka masi fluida.*

Učinjena pretpostavka u rešavanju jednačine (4.80), o konstantnoj brzini u preseku, bila je korišćena i kod izvođenja jednačine kontinuiteta, jer je srednja brzina  $V$  isto što i integralni oblik  $\frac{1}{A} \int_A u \, dA$ . U dinamičkoj jednačini se unutar integrala javlja proizvod brzine, pa sada više nije  $V^2$  isto što i

Promena količine kretanja se događa samo na krajevima zapremine, u presecima 1 i 2, tako da je dovoljno posmatrati preseke fluidne struje, a ne celu masu fluida. U preseku 1 se oduzima deo mase  $m = \rho V = \rho Q \Delta t$  pa se, uz pretpostavku o tome da je brzina u preseku konstantna i jednaka srednjoj profilskoj brzini, smanjuje količina kretanja za  $m\vec{V}_1 = \rho Q \Delta t \vec{V}_1$ . U preseku 2 se osvaja ista masa pa se količina kretanja povećava

<sup>37</sup>Već je rečeno da se koristi Ojlerov pristup u analizi strujnog polja, u kome se neustaljenost vezana za fluidni delić izbegava tako što se posmatra fiksni nepokretan prostor, u kome je onda strujanje ustaljeno.

$\frac{1}{A} \int_A u^2 dA$ . Da bi se tačnije rešio integral u uslovima neravnomernog rasporeda brzine po poprečnom preseku (prikazano u preseku **A** slike 4.27 kao i na slici 4.9, strana 98), uvodi se koeficijent  $\beta$  definisan kao:

$$\beta QV = \int_A u^2 dA \Rightarrow \beta = \frac{1}{QV} \int_A u^2 dA \tag{4.83}$$

pa je tačno rešenje dinamičke jednačine:

$$\beta_2 \rho Q \vec{V}_2 - \beta_1 \rho Q \vec{V}_1 = \vec{F} \tag{4.84}$$

a inercijalne sile po presecima su:

$$\vec{I}_1 = \beta_1 \rho Q \vec{V}_1 \quad \vec{I}_2 = -\beta_2 \rho Q \vec{V}_2 \tag{4.85}$$

Koeficijent  $\beta$ , zove se *Businessov*<sup>38</sup> koeficijent i on je uvek veći od 1,00. Za parabolični raspored brzina u kružnoj cevi, koji se ostvaruje pri laminarnom tečenju (biće obrađivano u poglavlju 6.1), Businessov koeficijent je  $\beta = 4/3 = 1,333$ , a za razvijeno turbulentno tečenje u cevi, gde su brzine po preseku ujednačenije  $\beta = 1,01 \sim 1,10$ . Kod preciznijih obračunavanja sila na konstrukciju potrebno je koristiti Businessov koeficijent, dok će se u nastavku knjige njegov uticaj zanemarivati.

### Primer 4.5.6

Raspored brzina u kružnoj cevi je dat sledećim izrazom:

$$u = u_{max} \left(\frac{y}{R}\right)^{1/7} \quad 0 \leq y \leq R$$

gde je  $R$  poluprečnik cevi a  $y$  rastojanje od zida cevi. Izračunati koliki je Businessov koeficijent  $\beta$  i prokomentarisati rezultat.

Srednja brzina  $V$  je, prema jednačinama (4.3) i (4.7) data sa:

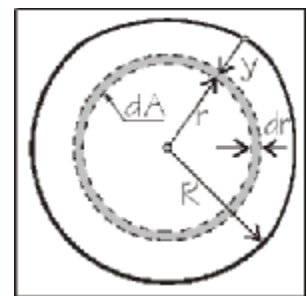
$$V = \frac{Q}{A} = \frac{1}{R^2 \pi} \int_A u dA$$

Na slici je prikazan kružni presek. Za osnosimetričan raspored brzine, elementarna površina  $dA$  se može zameniti kružnim prstenom širine  $dr$ :

$$dA = 2r\pi dr \quad r = R - y \quad dr = -dy$$

Granica integracije je od  $R$  do  $0$ . Ako se promeni znak priraštaja  $dy$  integracija će ići od  $0$  do  $R$ :

$$V = \frac{1}{R^2 \pi} \int_R^0 2r\pi u dr = \frac{2u_{max}}{R^2} \int_0^R (R - y) \left(\frac{y}{R}\right)^{1/7} dy = \frac{98}{120} u_{max}$$



<sup>38</sup>Valentin Joseph Boussinesq (1842 - 1929) francuski matematičar i fizičar, koji je dao značajan doprinos u oblasti hidraulike. Proučavao je talasno kretanje, otpore trenja, raspored brzina kao i fenomen razvoja turbulencije.

#### 4.5. ODRŽANJE KOLIČINE KRETANJA

Zamenom srednje brzine u jednačinu za Businessov koeficijent  $\beta$  (4.83) dobija se:

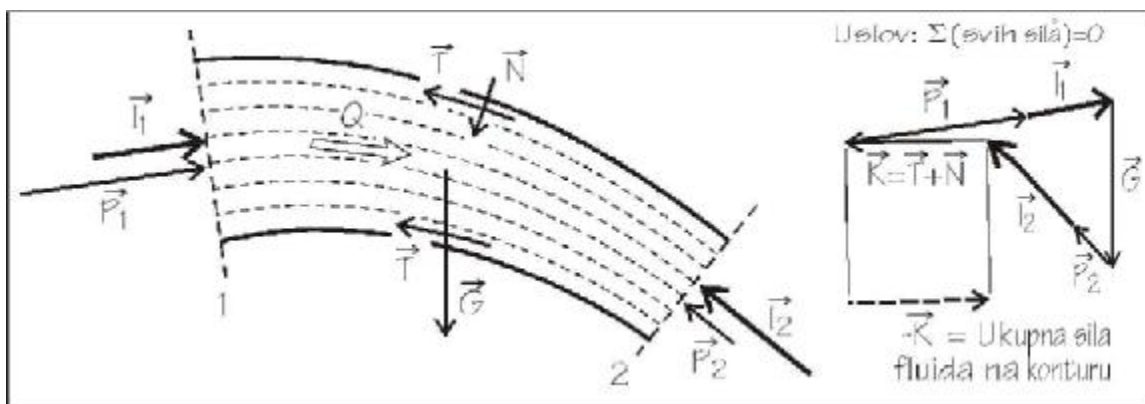
$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{QV} \int_A u^2 dA = \frac{2\pi}{AV^2} \int_R^0 r u_{max}^2 \left(\frac{y}{R}\right)^{2/7} dr = \\ &= \frac{2\pi}{R^2\pi} \left(\frac{120}{98}\right)^2 \int_0^R (R-y) \left(\frac{y}{R}\right)^{2/7} dy = \\ &= \frac{2,9988}{R^2} \int_0^R \left(R^{5/7} y^{2/7} - R^{-2/7} y^{9/7}\right) dy = \frac{2,9988}{R^2} \left(R^2 \frac{7}{9} - R^2 \frac{7}{16}\right) = 1,02 \end{aligned}$$

Dobijeni Businessov koeficijent pokazuje da su stvarne inercijalne sile za 2% veće od sila koje se dobijaju uz pretpostavku o konstantnoj, srednjoj brzini po preseku.

Prave sile koje deluju na posmatranu zapreminu, prikazane su na slici 4.27, sa desne strane (sile težine, pritiska i konturna sila), dok su na slici 4.29 date i fiktivne sile, čime je postignuta ravnoteža sila:

$$\vec{I}_1 + \vec{P}_1 + \vec{T} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{I}_2 + \vec{P}_2 = 0 \tag{4.86}$$

Od zapreminskih sila najčešće se uzima samo *sila težine*  $\vec{G} = \rho g \vec{V}$  i ona deluje iz težišta zapremine vertikalno na dole. Od površinskih sila, u obzir se uzimaju *sile pritiska na presecima* 1 i 2, koje se računaju po načelima hidrostatičke i čiji je pozitivan smer ka preseku (sile  $\vec{P}$  na slici), kao i *ukupna sila kojom kontura deluje na fluid*  $\vec{K}$ , koja je zbir trenja između fluida i zida konture (sila  $\vec{T}$ ) i normalnih napona (sila  $\vec{N}$ ).



Slika 4.29: Vektorski zbir svih sila koje deluju na posmatranu zapreminu fluida, između preseka 1 i 2, je nula

U praktičnim primerima, koji će biti dati u nastavku, najčešće se dinamičkom jednačinom traži rezultujuća sila  $-\vec{K}$ , kojom fluid deluje na konturu. To su sile  $\vec{T} + \vec{N}$  sa suprotnim smerom, smerom od fluida ka konturi:

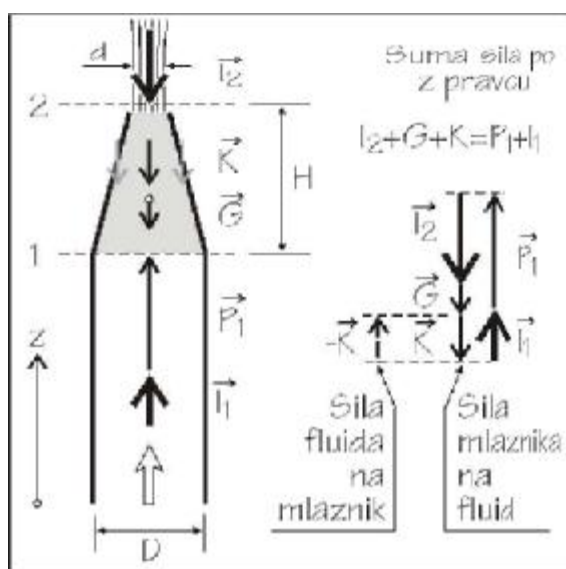
$$-\vec{K} = -(\vec{T} + \vec{N}) = \vec{I}_1 + \vec{P}_1 + \vec{G} + \vec{I}_2 + \vec{P}_2 \quad (4.87)$$

### 4.5.6 Primeri primene jednačine sila

Korišćenjem jednačine održanja količine kretanja u integralnom obliku (4.86), ili kako se češće naziva *dinamičke jednačine ili jednačine sila*, dolazi se jednostavno do praktičnih rešenja pri opterećenju konstrukcije fluidom koji se kreće. Pri tome se, zbog integralnog pristupa, ne ulazi u komplikovane jednačine, kojima bi se odredio raspored brzina i pritiska unutar posmatranog fluida.

U korišćenju jednačine sila treba biti oprezan, jer se *moraju zadovoljiti uslovi postavljeni pri izvođenju jednačine*: ustaljeno tečenje, fluid konstantne gustine, brzina u preseku približna srednjoj brzini i nepokretna kontura. Takođe, neophodno je *korektno obračunati sve sile koje deluju na izdvojenu masu fluida*. U nastavku će se dati dva primera primene jednačine sila: jedan za tečenje u cevi i drugi za tečenje u otvorenom kanalu.

#### 4.5.6.1 Sila na vertikalni mlaznik



Slika 4.30: Određivanje sile vode na vertikalni mlaznik

Posmatra se isticanje vode vertikalno u vis kroz mlaznik, cev koja se pri svom vrhu smanjuje sa prečnika  $D$  na manji prečnik  $d$ . Pretpostavlja se da je poznat protok kroz cev i pije-zometarska kota za presek u cevi pre suženja. Potrebno je odrediti silu kojom voda deluje na mlaznik.

Na levom delu slike 4.30 je prikazan detalj cevi sa mlaznikom. Na desnom delu su nacrtane sve sile koje deluju na posmatranu zapreminu. Za date podatke mogu se odrediti pritisak u preseku 1 i brzine u presecima 1 i 2. Sile na zapreminu su:

- Sila pritiska<sup>39</sup> u preseku 1:  

$$P_1 = p_1 A_1$$
- Sila pritiska u preseku 2 je nula, jer mlaz izlazi u atmosferu pa je u preseku hidrostatski pritisak nula:  

$$P_2 = 0 \quad (p = 0)$$
- Inercijalne sile u presjecima:  $I_1 = \rho Q V_1$  i  $I_2 = \rho Q V_2$ . Vezu između brzina  $V_1$  i  $V_2$  daje jednačina kontinuiteta:  

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$
- Sila težine vode između preseka 1 i 2:  $G = \rho g \mathcal{V}$ . Zapremina mlaznika se može izračunati kao zapremina zarubljenog konusa:  

$$\mathcal{V} = \frac{D^2 \pi}{4} \cdot \frac{H}{3} \left( 1 + \frac{d}{D} + \frac{d^2}{D^2} \right)$$
- Sila konture na fluid  $K$  je nepoznata. Pošto je deo cevi sa mlaznikom kratak, može se zanemariti uticaj trenja i smatrati da je celokupna sila rezultat normalnih napona između zida cevi i vode.

Sve sile između preseka 1 i 2 moraju biti u ravnoteži, pa je, sa desne strane slike 4.30, nacrtan poligon sila. Vektorska jednačina sume sila, kada se napiše za pravac  $z$ , glasi:

$$P_1 + I_1 - G - (+K) - I_2 = 0$$

gde je za silu  $K$ , stavljen predznak  $(+K)$ , da se zna da je to *sila konture na fluid*. Tražena sila fluida na konturu  $(-K)$  je jednaka:

$$(-K) = P_1 + I_1 - G - I_2$$

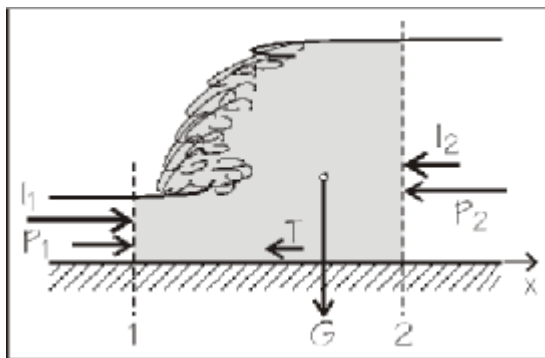
Za proračun sile pritiska potreban je pritisak u preseku 1, a on se ne može odrediti iz do sada pomenutih jednačina.

#### 4.5.6.2 Hidraulički skok

U otvorenim tokovima, rekama i kanalima, dubina vode zavisi od protoka ali i od nagiba dna, trenja i uzvodnih i nizvodnih graničnih uslova. U glavi 8 *Ustaljeno tečenje u otvorenim tokovima* ove knjige će detaljno biti reči o režimima tečenja i pravcima prostiranja uticaja, kao i o uslovima koji nameću promenu dubine duž toka (nejednoliko tečenje).

<sup>39</sup>Da bi se odredio pritisak  $p_1$  potrebna je još i energetska jednačina (4.119), koja će biti izložena kasnije u ovom poglavlju.

Generalno, ako se u toku sa malim nagibom dna, gde bi trebala da bude velika dubina, a veoma mala brzina (pa samim tim i jaka gravitaciona sila), nekim graničnim uslovom (recimo ustavom) nametne vodi mala dubina i velika brzina (odnosno, velika inercijalna sila), doći će do “sukoba” uticaja u kanalu. Sa nizvodne strane trenje i gravitacija nameću veliku dubinu, koja bi trebala da vlada kanalom, a sa uzvodne strane inercijalna sila nameće malu dubinu, sa željom da se ista propagira u nizvodnom pravcu.



Slika 4.31: Hidraulički skok u otvorenom kanalu

koja pretpostavlja tečenje idealnog fluida<sup>41</sup>, ne može se koristiti. Rešenje skoka se dobija postavljanjem jednačine sila (4.87) (na slici su nacrtane sve sile sa svojim smerovima):

$$\vec{T} + \vec{N} + \vec{I}_1 + \vec{P}_1 + \vec{G} + \vec{I}_2 + \vec{P}_2 = 0$$

Vektorska jednačina se postavlja za pravac  $x$ , pravac toka vode. Sile pritiska su funkcija dubina ispred i iza skoka i geometrije kanala (oblika poprečnog preseka)  $P_x = P_x(h, A(h))$ . Inercijalne sile su funkcija protoka i brzine, a brzina zavisi od geometrije poprečnog preseka  $I_x = I_x(A(h), Q)$ . Ukoliko se kanal tako napravi da nema promena poprečnog preseka, sila  $N_x = 0$  je nula. Takođe, ukoliko se dno kanala na mestu skoka tako napravi da bude horizontalno, komponenta sile težine u pravcu toka  $x$  je nula  $G_x = 0$ . Na kraju, sila trenja  $T_x$  se može zanemariti, jer je mala u odnosu na sile pritiska i inercijalne sile. Polazna jednačina se svodi na  $I_1 + P_1 = I_2 + P_2$  odnosno na:

$$\rho Q V_1 + p_{T1} A_1 = \rho Q V_2 + p_{T2} A_2 \Rightarrow \rho \frac{Q^2}{A_1} + \rho g h_{T1} A_1 = \rho \frac{Q^2}{A_2} + \rho g h_{T2} A_2$$

<sup>40</sup>Detaljnije o hidrauličkom skoku, mehanizmima nastajanja i uklapanju skoka u liniju nivoa u poglavlju 8.5 *Hidraulički skok*.

<sup>41</sup>Upravo su viskozne sile te sile koje treba da u malim vrtlozima skoka potroše višak kinetičke energije i da smire tok.

Pomirenje ta dva suprotna pravca prostiranja uticaja je u *hidrauličkom skoku*<sup>40</sup>. Voda jedan deo kinetičke energije pretvara u potencijalnu, dižući svoj nivo, a drugi deo kinetičke energije sama sebi oduzima kroz vrtloge, smiruje se i naglo prelazi iz oblasti malih dubina, a velikih brzina u oblast velikih dubina, a malih brzina.

Na slici 4.31 je prikazan hidraulički skok. Zbog velikog gubitka energije u skoku, Bernulijeva jednačina (4.57),

U ovoj jednačini mora biti poznata dubina sa jedna strane skoka i protok ili su poznate obe dubine, pa se iz jednačine može odrediti protok.

## 4.6 Održanje energije sistema

U jednačinama koje su dobijene korišćenjem principa održanja količine kretanja, pojavljuje se rad sila kojima se menja energija fluidnog delića iz potencijalne u kinetičku i obrnuto (jednačina (4.59) na strani 131 odnosno jednačina (4.60) na strani 131). To znači da u procesu kretanja fluida dolazi *do transfera energije ka i od fluidnog delića*. **Taj transfer energije mora ispuniti jedan od osnovnih principa fizike: u odsustvu nuklearnih reakcija, energija se ne može ni stvoriti ni uništiti.**

Prvi zakon termodinamike je zakon održanja energije, koji tvrdi da su rad i toplota različiti, ali ekvivalentni oblici transfera energije. Zakon uspostavlja **relaciju između** količine toplote, koju sistem (telo konstantne mase) primi ili oda, izvršenog rada i promene unutrašnje energije sistema: *količina toplote koja se preda sistemu ide na povećanje unutrašnje energije i na rad koji taj sistem vrši na okolna tela.*

U nastavku će se prvi zakon termodinamike primeniti na fluid pri čemu će se preći sa tela konstantne mase na fluid konstantne zapremine. Izvešće se integralna jednačina održanja ukupne energije, energetska jednačina, kao i jednačina održanja samo mehaničke i samo toplotne energije. Pokazaće se da se, **sređivanjem jednačine mehaničke energije, dobija Bernulijeva jednačina** (kao i iz jednačine održanja količine kretanja, jer obe jednačine “prate” samo mehaničku energiju), dok se, uprošćavanjem energetske jednačine, za slučaj tečenja u cevi, dobija sličan oblik kao i Bernulijeva jednačina, ali sa članovima koji ukazuju da se deo energije nepovratno “troši” na zagrevanje fluida. Na kraju će se navesti nekoliko primera upotrebe energetske jednačine.

### 4.6.1 Integralna i diferencijalna jednačina održanja energije

Prvi zakon termodinamike se u formi jednačine može napisati kao:

$$\Delta \tilde{Q} = \Delta \mathbf{E} + \Delta \hat{W} \quad (4.88)$$

gde je  $\Delta \tilde{Q}$  količina toplote koja se dovede u sistemu,  $\Delta \mathbf{E}$  povećanje unutrašnje energije a  $\Delta \hat{W}$  rad koji se utroši na okolna tela dok se menja unutrašnja energija.

U prethodnoj jednačini se mogu konačne promene  $\Delta$  svesti na promene u malom vremenskom intervalu  $dt$ . Prebacujući unutrašnju energiju kao jednu od karakteristika inercijalnog sistema na desnu stranu izraza, dobija se:

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{d\tilde{q}}{dt} - \frac{d\hat{w}}{dt} \tag{4.89}$$

Unutrašnja energija fluida je zbir dva člana: kinetičke energije fluidnih delića, koja zavisi od njihove brzine  $m \times u^2/2$ , i interne energije  $m \times e$ , koja je rezultat oscilovanja atoma u molekulu i uzajamnog dejstva molekula fluida pod uticajem toplote delića<sup>42</sup>:

$$\mathbf{E} = \int_{\mathbf{V}} \frac{\rho u^2}{2} d\mathbf{V} + \int_{\mathbf{V}} \rho e d\mathbf{V} = \int_{\mathbf{V}} \rho \left( \frac{u^2}{2} + e \right) d\mathbf{V} \tag{4.90}$$

Ako se sa  $B$  označi unutrašnja energija  $\mathbf{E}$ , tada je, prema jednačini (4.8) (strana 103) veličina  $b$  jednaka  $b = u^2/2 + e$ . Jednačina (4.89), koja važi za sistem sa konstantnom masom, u sistemu sa konstantnom zapreminom (u skladu sa (4.11) na strani 105) postaće:

$$\int_{C\mathbf{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{u^2}{2} + e \right) \right] d\mathbf{V} + \int_{CA} \rho \left( \frac{u^2}{2} + e \right) u_i n_i dA = \frac{d\tilde{q}}{dt} - \frac{d\hat{w}}{dt} \tag{4.91}$$

gde je skalarni proizvod vektora  $\vec{u} \cdot \vec{n}$  napisan pomoću udvojenog indeksa  $i$ . Dobijena jednačina predstavlja *jednačinu održanja energije (ili energetske jednačinu)* za sistem sa konačnom, konstantnom zapreminom, u jedinici vremena.

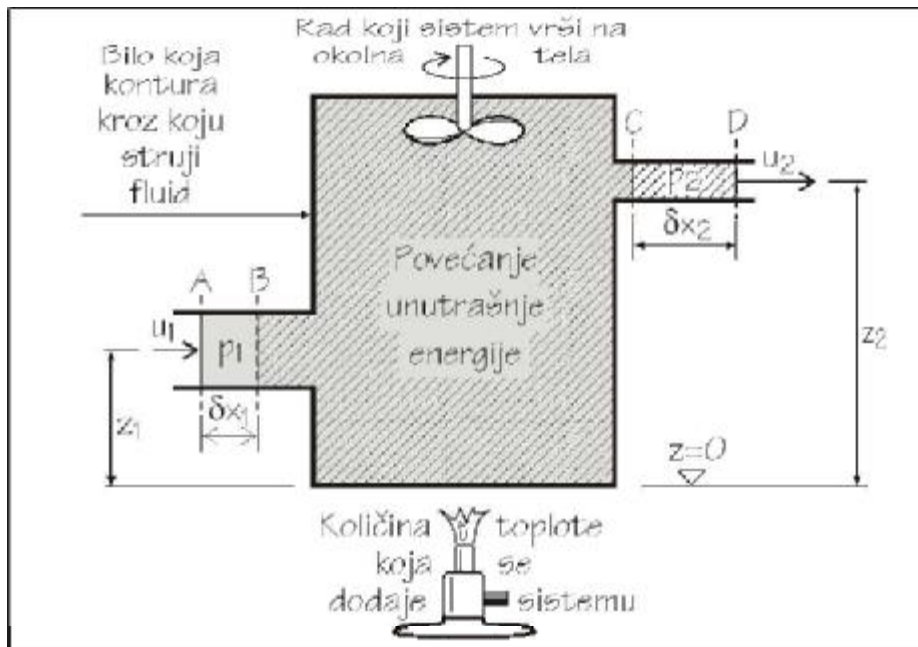
Poslednji član  $d\hat{w}/dt$  u prethodnoj jednačini je ukupno utrošeni rad u jedinici vremena i može se napisati kao zbir rada zapreminske sile, površinskih sila pritiska i trenja po konturi (viskozne sile) i mehaničkog rada koji se upotrebi na pokretanje nekog sistema (turbine, pumpe ili ventilatora), sve u jedinici vremena:

$$\frac{d\hat{w}}{dt} = \frac{d\hat{w}_g}{dt} + \frac{d\hat{w}_p}{dt} + \frac{d\hat{w}_\tau}{dt} + \frac{d\hat{w}_M}{dt} \tag{4.92}$$

---

<sup>42</sup>U većini knjiga Mehanike fluida se zakon održanja energije postavlja za ukupnu energiju tela, gde se pored unutrašnje energije pojavljuje i potencijalna energija. Kako se ovde radi o termodinamičkom procesu, korektnije je poći od unutrašnje energije. Potencijalna energija će se pojaviti kasnije, u toku izvođenja zakona o održanju energije, kao posledica rada zapreminske sile, sile težine. Finalna jednačina će na kraju biti ista, ali se prikazanim postupkom jasno stavlja do znanja kako se došlo do potencijalne energije.





Slika 4.32: Prvi zakon termodinamike: količina toplote, koja se preda sistemu ide na povećanje unutrašnje energije i na rad koji taj sistem vrši na okolna tela

Od zapreminskih sila ovde se razmatra samo sila težine. Rad te sile po jedinici vremena je jednak proizvodu sile težine (jednačina (4.47) na strani 125) i brzine:

$$\frac{d\hat{w}_g}{dt} = - \int_V -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} u_i dV = \int_V \rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} u_i dV \quad (4.93)$$

Znak (–) ispred integrala ukazuje na to da je ukupan rad gravitacione sile negativan, jer gravitacija dodaje rad na zapremini  $V$ , dok je po definiciji pozitivan rad onaj koji zapremina troši.

Rad sile težine u jedinici vremena i po jedinici zapremine se može napisati kao zbir dva člana:

$$\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} u_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho g h u_i) - g h \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i)$$

Parcijalni izvod u zadnjem članu se na osnovu jednačine održanja mase (4.35) (strana 117) pretvara u negativni parcijalni izvod gustine po vremenu:

$$\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} u_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho g h u_i) + g h \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho g h u_i) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho g h)$$

Proizvod  $(gh)$  ne zavisi od vremena pa je uvučen u parcijalni izvod kao konstanta.

Ako se prethodni izraz stavi u jednačinu (4.93) i ako prvi sabirak pređe sa zapreminskog integrala na površinski, dobija se rad sile težine u jedinici vremena:

$$\frac{d\hat{w}_g}{dt} = \int_A \rho gh u_i n_i dA + \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho gh) dV \quad (4.94)$$

Rad sile pritiska se obavlja po konturi  $A$  konačne zapremine. Za elementarni delić na konturi  $dA$  koji se pomera brzinom  $\vec{u}$ , rad sile pritiska u jedinici vremena je proizvod sile i brzine, odnosno:

$$\frac{d\hat{w}_p}{dt} = \int_A p u_i n_i dA \quad (4.95)$$

Rad je pozitivan, jer se troši na savlađivanje pritiska, koji je suprotnog smera od smera orta površine  $dA$ , a površina  $dA$  se pomera u smeru orta  $\vec{n}$ .

Sila od viskoznih tangencijalnih napona po konturi posmatrane zapremine je proizvod tangencijalnog napona  $\tau_{ij}^d$  (jednačina (4.50) na strani 126) i posmatrane površine. Rad u jedinici vremena je površinski integral, koji se može predstaviti i u formi zapreminskog integrala:

$$\frac{d\hat{w}_\tau}{dt} = \int_A \tau_{ij}^d u_j n_i dA = \int_V \frac{\partial(\tau_{ij}^d u_j)}{\partial x_i} dV \quad (4.96)$$

Ukoliko se kontrolna zapremina tako izabere da nema pokretne granice (kontura je čvrsta), brzina fluida uz granicu će biti nula pa neće biti rada viskoznih sila uz konturu. Takođe, ako se mesto preseka kroz fluidnu struju (presek  $A$ , odnosno  $C$  na slici 4.32) tako izabere da strujnice budu upravne na presek, u izrazu (4.96) će učestvovati samo normalni viskozni naponi, pri čemu je njihov doprinos zanemarljivo mali.

Izraz (4.92) se može staviti u jednačinu energije (4.91). Ako se rad sile težine (4.94) i pritiska (4.95) sabere sa odgovarajućim površinskim i zapreminskim integralima, dobija se jednačina održanja energije u integralnom obliku (u jedinici vremena):

$$\begin{aligned} \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{u^2}{2} + gh + e \right) \right] dV + \int_{CA} \rho \left( \frac{u^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} + e \right) u_i n_i dA = \\ = \frac{d\tilde{q}}{dt} - \frac{d\hat{w}_\tau}{dt} - \frac{d\hat{w}_M}{dt} \end{aligned} \quad (4.97)$$

Član  $\left(\frac{\rho u^2}{2} + \rho gh + \rho e\right)$  odnosno  $\left(\frac{\rho u^2}{2} + \rho gh + p + \rho e\right)$  je zbir kinetičke energije, potencijalne energije (kod površinskog integrala u potencijalnu energiju spada i pritisak koji omogućava pronos energije kroz konturu, objašnjenje je dato na strani 131) i interne toplotne energije, po jedinici zapremine<sup>43</sup>. Jednačina (4.97) pokazuje da se povećanje energije u posmatranoj zapremini i protok energije, koja izlazi kroz površinu koja okružuje posmatranu zapreminu, nadoknađuje iz dotoka količine toplote (energije) u jedinici vremena umanjenom za rad, koji ta energija utroši u jedinici vremena na savladavanje viskoznih sila i pokretanje nekog mehaničkog sistema.

Jednačina održanja energije se može napisati i u diferencijalnom obliku. Potrebno je prvo u osnovnoj integralnoj jednačini održanja energije (4.97), površinski integral zameniti zapreminskim, primenom Gausove teoreme (jednačina (4.13), na strani 106). Zatim, član jednačine, koji označava rad viskoznih sila, treba zameniti zapreminskim integralom (4.96). Takođe, član koji označava dovedenu količinu toplote u sistem u jedinici vremena, treba napisati kao protok toplote kroz konturu posmatrane zapremine, odnosno, kao promenu količine toplote u posmatranoj zapremini:

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = - \int_A \tilde{q}_i n_i dA = - \int_V \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial x_i} dV \quad (4.98)$$

Znak  $(-)$  ukazuje na to da je pozitivan smer protoka količine toplote kada ona *ulazi u sistem*. Na kraju, u osnovnoj integralnoj jednačini održanja energije (4.97), trebalo bi smanjiti kontrolnu zapreminu do nivoa elementarnog fluidnog delića  $dV$ , što dovodi do diferencijalne jednačine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{u^2}{2} + gh + e \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \rho u_i \left( \frac{u^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} + e \right) \right] = \\ = - \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial (\tau_{ij}^d u_j)}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (4.99)$$

U jednačini je izostavljen mehanički rad, koji ne može da se svede na nivo elementarne zapremine, pa je *diferencijalna jednačina ograničena*. U rešavanju jednačine za poznate konturne uslove, *ako postoji mehanički rad, on se mora naknadno, eksplicitno, uzeti u obzir*.

<sup>43</sup>U izučavanju stišljivih fluida, gasova, često se koristi pojam *entalpija*. To je zbir interne energije i pritiska po jedinici mase  $\tilde{h} = e + p/\rho$ . Takođe, koristi se i pojam *ukupna entalpija* koja obuhvata entalpiju, kinetičku i potencijalnu energiju po jedinici mase  $\tilde{H} = \tilde{h} + u^2/2 + gh$ .

U prethodnoj jednačini se prvi član, parcijalni izvod po vremenu, može razviti u zbir:

$$\left(\frac{u^2}{2} + gh + e\right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} + e\right) + \rho g \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.100)$$

a drugi član, parcijalni izvod po pravcu  $i$ :

$$\left(\frac{u^2}{2} + gh + e\right) \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} + \rho u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u^2}{2} + e\right) + \rho g u_i \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} \quad (4.101)$$

Zbir prvih članova iz (4.100) i (4.101) je, prema jednačini održanja mase (4.35) (strana 117), jednak nuli. Poslednji član u (4.100) je nula, jer vertikalno merena visina  $h$  ne zavisi od vremena. Takođe, poslednji član u jednačini (4.101) je zbir parcijalnih izvoda  $p$  i  $u_i$  po  $x_i$ . Sređivanjem preostalih članova dobija se diferencijalna jednačina održanja energije za jediničnu zapreminu:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} + e\right) + \rho u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u^2}{2} + e\right) &= \\ &= -\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial(\tau_{ij}^d u_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} - \rho g u_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (4.102)$$

Leva strana prethodne jednačine se može napisati i korišćenjem materijalnog izvoda  $D\varphi/Dt$  (jednačina (4.18) na strani 108) gde je veličina  $\varphi$  jednaka internoj energiji po jedinici mase fluidnog delića  $\varphi = u^2/2 + e$ :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{u^2}{2} + e\right) = -\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial(\tau_{ij}^d u_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} - \rho g u_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad (4.103)$$

čime se dobija sličan oblik jednačine, kao i diferencijalna jednačina održanja količine kretanja (4.54), (strana 128).

Dobijena diferencijalna jednačina održanja energije (4.103), pokazuje da je povećanje unutrašnje (zbir kinetičke i interne) energije po jedinici mase fluidnog delića, jednako dotoku količine toplote umanjenom za rad viskoznih sila, sila pritiska i sile težine, sve u jedinici vremena. Ne treba zaboraviti da je, prilikom prelaska sa integralnog pristupa na diferencijalni, izostavljen još i mehanički rad u jedinici vremena, koji treba naknadno obračunati.

## 4.6.2 Jednačine mehaničke i toplotne energije

U prethodnom poglavlju je izvedena jednačina održanja ukupne energije, odnosno, održanja zbiru mehaničke i toplotne energije. U nastavku će se razdvojiti uticaji mehaničke i toplotne energije, uz određivanje procesa koji su zaduženi za konverziju iz mehaničke u toplotnu i toplotne u mehaničku energiju.

Ako se količina kretanja delića (masa×brzina) pomnoži sa polovinom brzine, dobija se mehanička energija  $mu^2/2$ . Analogno tome, ako se jednačina održanja količine kretanja (4.54), sa strane 128, pomnoži skalarno sa brzinom  $u_i$ , pri čemu se leva strana izraza može srediti na sledeći način:

$$u_i \rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{u_i u_i}{2} \right) = \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{u^2}{2} \right)$$

dobija se jednačina održanja mehaničke energije:

$$\rho \frac{D}{Dt} \frac{u^2}{2} = -\rho g u_i \frac{\partial h}{\partial x_i} - u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - u_i \frac{\partial \tau_{ji}^d}{\partial x_j} \quad (4.104)$$

Kao što se rešavanjem diferencijalne jednačine održanja količine kretanja (4.54), u poglavlju 4.5.2, došlo do Bernulijeve jednačine (4.57), tako se i diferencijalna jednačina održanja mehaničke energije (4.104) može analitički rešiti uz određena pojednostavljenja. Tako, na primer, za ustaljeno strujanje idealnog fluida konstantne gustine, lokalna komponenta materijalnog izvoda i rad viskoznih napona su nule, pa se izraz (4.104) može napisati kao skalarni proizvod brzine i gradijenta skalara (tri sabirka u zagradi):

$$u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{u^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

Ako se jednačina ograniči na jednu strujnicu<sup>44</sup>, i ako se postavi uslov da je brzina različita od nule, dolazi se do Bernulijeve jednačine iste kao i (4.57):

$$\frac{u^2}{2g} + h + \frac{p}{\rho g} = \text{Const2} \quad [\text{m}] \quad (4.105)$$

To što i održanje količine kretanja i održanje mehaničke energije dovode do istog izraza, pokazuje da je isti fizički zakon, drugi Njutnov princip, u osnovi obe jednačine. Međutim, u narednom poglavlju će se dati rešenje

<sup>44</sup>Uz dodavanje uslova bezvrtložnosti  $\Omega_k = 0$ , Bernulijeva jednačina važi za sve strujnice, odnosno, za celo strujno polje.

integralne jednačine održanja ukupne energije sistema, koje će dovesti do jednačine slične Bernulijevoj, ali sa bitno drugačijim značenjem. U tom rešenju se neće koristiti pretpostavka o idealnom fluidu, jer će upravo viskoznost biti ta koja oduzima jedan deo mehaničke energije fluidnoj struji.

Prethodna jednačina održanja mehaničke energije (4.104), dodavanjem i oduzimanjem sa desne strane članova  $p \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$  i  $\tau_{ij}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ , uz malo preuređenje dvojnih indeksa<sup>45</sup>, dovodi se u oblik jednačine mehaničke energije:

$$\rho \frac{D}{Dt} \frac{u^2}{2} = - \frac{\partial(\tau_{ij}^d u_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial(pu_i)}{\partial x_i} - \rho g u_i \frac{\partial h}{\partial x_i} + p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \tau_{ij}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (4.106)$$

koji je pogodan da se oduzme od jednačine održanja ukupne energije (4.103).

Nakon oduzimanja te dve jednačine, ((4.103)-(4.106)), dobija se *jednačina toplotne energije*:

$$\rho \frac{De}{Dt} = - \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial x_i} - p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \tau_{ij}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (4.107)$$

Poslednja dva člana sa desne strane izraza, sa promenjenim znakom javljaju se i u jednačini mehaničke energije i u jednačini toplotne energije. Kroz njih se obavlja prenos, odnosno, konverzija energije, iz jednog vida u drugi:

1. Član  $p \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$  predstavlja rad sile pritiska po jedinici zapremine i u jedinici vremena na deformaciji fluidnog delića<sup>46</sup> i može biti pozitivan i negativan. Ovaj član nosi reverzibilnu konverziju energije: kroz njega se mehanička energija pretvara u toplotnu, ali i iz toplotne se energija može vratiti u mehaničku.
2. Član  $\tau_{ij}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$  predstavlja rad viskoznih sila po jedinici zapremine i u jedinici vremena na deformaciji fluidnog delića<sup>47</sup> i može biti samo ne-

<sup>45</sup>Ukupan rad viskoznih sila je skalar, sa devet sabiraka  $\partial(\tau_{ji}^d u_i)/\partial x_j$ . Isti rezultat se dobija i ako se zameni redosled indeksa (što je ovde zgodnije), pa se rad viskoznih sila može napisati kao  $\partial(\tau_{ij}^d u_j)/\partial x_i = \tau_{ij}^d \partial u_j / \partial x_i + u_j \partial \tau_{ij}^d / \partial x_i$ .

<sup>46</sup>Sila pritiska (4.48) je ista u svim pravcima delića i pod njenim dejstvom se delić tako deformiše da menja zapreminu a zadržava oblik. Zbog toga se u literaturi ovaj član često zove i *sferni deo deformacionog rada po jedinici zapremine i jedinici vremena*.

<sup>47</sup>Zbog toga što je rad pod dejstvom devijatorskog dela tangencijalnih napona (4.50), u literaturi se ovaj član često zove i *devijatorski deo deformacionog rada po jedinici zapremine i jedinici vremena*.

gativan<sup>48</sup>. Pretvaranje mehaničke energije u toplotnu kroz viskozne sile je uvek ireverzibilno, pomoću viskoznosti nije moguće vratiti energiju iz toplotne u mehaničku.

Prvi član, koji obezbeđuje konverziju energije u oba smera, kod nestišljivih fluida je nula. Odatle sledi važan zaključak, koji se odnosi na tečnosti, nestišljive fluide kod kojih se trenje ne može zanemariti: *konverzija energije je uvek od mehaničke ka toplotnoj, u suprotnom smeru nije moguća. Energija koju viskoznost oduzme od mehaničke energije i pretvori u toplotnu je sa stanovišta glavnog strujanja izgubljena, nema člana u jednačini koji je može vratiti, pa se zato drugi član, ireverzibilni, često naziva član gubitka energije.*

### 4.6.3 Rešenje integralne jednačine održanja energije za ustaljeno tečenje homogenog fluida u cevi

Na strani 156 je izvedena integralna jednačina održanja energije (4.91). Jednačina važi za konstantnu zapreminu, oivičenu konturom koja u opštem slučaju može biti pokretna. Sređivanjem člana koji nosi ukupno utrošeni rad, jednačina održanja energije je svedena na oblik (4.97). U nastavku se daje rešenje u kome je težište na ireverzibilnoj konverziji energije, na gubicima. U narednom poglavlju ponoviće se rešenje jednačine (4.91), ali uz stavljanje naglasaka na radove svih sila koje učestvuju u energetskom bilansu.

Ako se pretpostaviti da je strujanje fluida ustaljeno, tada unutar posmatrane zapremine nema promene ukupne energije kroz vreme (povećanja ili opadanja), tako da se prvi član iz jednačine (4.97), zapreminski integral lokalnog izvoda po vremenu, može zanemariti. Što se tiče protoka ukupne energije kroz konturu, drugog člana sa leve strane jednačine, ako u kontrolnoj zapremini postoji samo jedan ulazni i jedan izlazni presek (kao na slici 4.32 ili kod tečenja u cevi, slika 4.27), površinski integral po konturi posmatrane zapremine može se napisati u vidu zbira dva integrala, po presecima. Polazna jednačina (4.97) održanja energije se tada svodi na jednačinu:

$$\int_{A_1} \rho \left( \frac{u^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} + e \right) u_i n_i dA + \int_{A_2} \rho \left( \frac{u^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} + e \right) u_i n_i dA = \frac{d\tilde{q}}{dt} - \frac{d\hat{w}_\tau}{dt} - \frac{d\hat{w}_M}{dt} \quad (4.108)$$

<sup>48</sup>Ovo je u koliziji sa nekim knjigama Mehanike fluida, gde se ovaj član naziva funkcija disipacije  $Y_{dis}$  i gde se zaključuje da je on uvek pozitivan. Razlika proizilazi iz usvojenog pozitivnog smera tangencijalnih napona: ovde je prihvaćen pozitivan smer onaj koji pritiska elementarnu zapreminu, kao što je prikazano slikom 4.20 na strani 127.

Ukoliko se ulazni i izlazni kontrolni preseki tako izaberu, da između njih nema pokretnih mehaničkih sistema, iz prethodne jednačine se može izostaviti poslednji član sa desne strane, ukupno utrošeni mehanički rad u jedinici vremena<sup>49</sup>.

Kontrolni preseki treba da zadovolje uslov da je u njima brzina upravna na presek i da vlada hidrostatički raspored pritisaka. U tom slučaju je član  $\left(gh + \frac{p}{\rho}\right)$  konstantan po preseku i može se izvući ispred integrala, a proizvod  $u_i n_i$  se svodi na brzinu  $-u_1$  odnosno  $+u_2$ .

Ako se, dalje, postavi uslov da je i kontura posmatrane zapremine nepokretna, prema jednačini (4.96) rad sile trenja duž konture je nula, dok se na samom mestu preseka 1 i 2 može zanemariti, pa je pretposlednji član u jednačini (4.108):

$$\frac{d\hat{w}_\tau}{dt} \approx 0$$

U rešavanju integralne jednačine održanja energije, *izostavljanje člana koji nosi viskoznost nije isto što i pretpostavka o idealnom fluidu. Viskoznost fluida unutar posmatrane zapremine postoji i zadužena je za ireverzibilnu konverziju mehaničke energije u internu, toplotnu energiju.* Korišćenjem integralne jednačine se to ne vidi eksplicitno, jer se posmatraju samo protoci kroz konturu i promena stanja sistema, bez ulaženja u procese unutar same zapremine. Ako bi se koristio diferencijalni pristup, kao na primer u jednačini toplotne energije (4.107), na strani 162, videlo bi se da se mehanička energija pretvara u toplotnu upravo kroz viskoznost.

U integralnoj energetskoj jednačini (4.108), kao problem ostaje još rešavanje površinskog integrala. Po istom principu kao što je uveden i Businessov koeficijent (jednačina (4.83) na strani 150), uvođenjem koeficijenta kinetičke energije  $\alpha$  ili, kako se još naziva Koriolisovog<sup>50</sup> koeficijenta, promenljiv ras-

<sup>49</sup>Sistem koji se sastoji od cevovoda i pumpe se obično rešava iz dva dela. Kontrolni preseki se postavljaju od ulaza u cev do ispred pumpe, kao i iza pumpe do izlaza iz cevovoda, dok se energija koju pumpa dodaje fluidu naknadno uzima u obzir. Moguć je i drugačiji pristup, kada se u energetsku jednačinu naknadno dodaje ovaj izostavljeni član, kao što je to pokazano jednačinom (4.122) na kraju ovog poglavlja, strana 173.

<sup>50</sup>Gaspard Gustave de Coriolis (1792 - 1843), francuski profesor mehanike i inženjerske matematike, blizak saradnik Košija (videti fusnotu 7 na strani 200). Bavio se problemima trenja, hidraulike, rada i ergonomije mašina. Uveo je pojmove 'rad' i 'kinetička energija' kao i jedinicu rada 'dynamode'. Pokazao je da se zakoni kretanja mogu koristiti i u rotirajućem referentnom sistemu ukoliko se uvede dodatna sila kroz Koriolisovo ubrzanje (kasnije je u njegovu čast tako nazvano). Koriolisova sila se primenjuje i u analizi kretanja



pored brzine po poprečnom preseku  $u$  se može zameniti konstantnom srednjom profilskom brzinom  $V$ :

$$\alpha \frac{V^2}{2} Q = \int_A \frac{u^3}{2} dA \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{QV^2} \int_A u^3 dA \quad (4.109)$$

**Primer 4.6.1**

Za tok fluida u kružnoj cevi, sa rasporedom brzina istim kao i u primeru 4.5.6:

$$\frac{u}{u_{max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/7} \quad 0 \leq y \leq R$$

odrediti koliki je Koriolisov koeficijent  $\alpha$ ?

Pošto je isti raspored brzina kao i u primeru 4.5.6 (strana 150), ista je i srednja brzina:

$$V = \frac{98}{120} u_{max}$$

Zamenom srednje brzine u jednačinu (4.109) i rešavanjem dobija se Koriolisov koeficijent:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{QV^2} \int_A u^3 dA = \frac{2\pi}{AV^3} \int_0^R r u_{max}^3 \left(\frac{y}{R}\right)^{3/7} dr = \\ &= \frac{2\pi}{R^2\pi} \left(\frac{120}{98}\right)^3 \int_0^R (R-y) \left(\frac{y}{R}\right)^{3/7} dy = \\ &= \frac{3,672}{R^2} \int_0^R \left(R^{4/7} y^{3/7} - R^{-3/7} y^{10/7}\right) dy = \frac{3,672}{R^2} \left(R^2 \frac{7}{10} - R^2 \frac{7}{17}\right) = 1,058 \end{aligned}$$

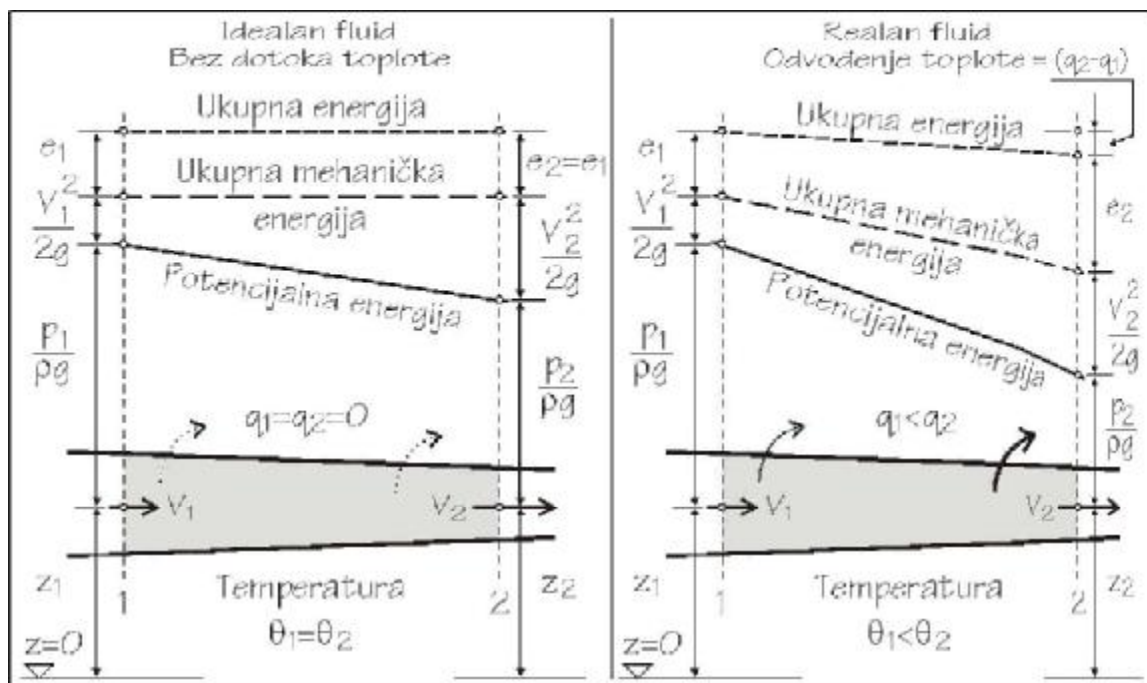
Integrisanjem jednačine (4.108) za nestisljiv fluid dobija se *energetska jednačina za fluid između dva preseka* u jedinici vremena:

$$\rho Q \left( -\alpha_1 \frac{V_1^2}{2} - gh_1 - \frac{p_1}{\rho} - e_1 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2} + gh_2 + \frac{p_2}{\rho} + e_2 \right) = \frac{d\tilde{q}}{dt} \quad (4.110)$$

Prebacujući sve veličine uz uzvodni presek sa leve strane, a uz nizvodni presek sa desne strane i deljenjem sa težinom u jedinici vremena  $\rho g Q$ , dobija se drugi oblik jednačine energije, izražen u metrima:

$$\alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + h_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{e_1}{g} = \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{e_2}{g} + \left( -\frac{1}{\rho g Q} \frac{d\tilde{q}}{dt} \right) \text{ [m]} \quad (4.111)$$

vodenih masa na Zemljinoj površini, pa je u njegovu čast, 1963. francuski istraživački okeanografski brod nazvan "Koriolis".



Slika 4.33: Promene ukupne energije, mehaničke i potencijalne za tečenja idealnog i realnog fluida

Jednačina (4.111) je napisana za ustaljeno strujanje realnog nestišljiviog fluida. Za idealan fluid, u uslovima gde nema dodatnog mehaničkog rada i gde je uspostavljena ravnoteža između temperature fluida i spoljne temperature, nema transfera toplote. Kako se temperatura fluida između preseka 1 i 2, ne menja i interne energije  $e_1$  i  $e_2$  su iste. Jednačina (4.111) dobija oblik:

$$\alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + h_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$

sličan Bernulijevoj jednačini (4.58). Na levoj polovini slike 4.33, prikazan je takav slučaj gde je  $e_1 = e_2$  i  $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = 0$ .

Kod tečenja realnog fluida (desna polovina slike 4.33), potrebno je utrošiti rad na savlađivanje viskoznih sila. Energija koja se pri tome troši se transformiše u toplotu, pa temperatura fluida, odnosno interna energija po jedinici mase  $e$ , postepeno raste. Sa porastom temperature fluida dolazi i do transfera toplote od fluida ka spoljnoj sredini, pa raste i odvođenje energije po jedinici mase  $-q$  (pozitivna vrednost  $q$  je kada se toplota dovodi u posmatranu zapreminu). Ukupan gubitak korisne, mehaničke energije po jedinici težine fluida je rezultat trenja:

$$h_T = \frac{e_2 - e_1}{g} - \frac{1}{\rho g Q} \frac{d\tilde{q}}{dt} \quad (4.112)$$

dok je interna energija na dobitku, za razliku  $e_2 - e_1$ . Član  $h_T$  se često u inženjerskoj praksi uprošćeno naziva *gubitak energije*. U većini praktičnih problema, gubitak energije se eksperimentalno određuje merenjima na modelu ili na prirodnim objektima. Samo povećanje interne energije koje rezultuje podizanjem temperature fluida, kao i prenos toplote kroz konturu, u većini slučajeva nisu od primarnog značaja<sup>51</sup>.

Kod stišljivih fluida koji ovde nisu razmatrani (dobijeno rešenje jednačine (4.110) je ograničeno na nestišljive fluide sa konstantnom gustinom), prelazak mehaničke energije u internu nije gubitak za ukupnu energiju, jer je i interna energija zajedno sa mehaničkom deo ukupne, korisne energije. Pretposlednji član u jednačini toplotne energije (4.107), na strani 162, je kod stišljivih fluida različit od nule, tako da se kroz taj član može obaviti konverzija toplotne energije nazad u mehaničku energiju.

---

#### Primer 4.6.2

Kaptaža vode za lokalni vodovod se nalazi na koti 432 mnm. Od kaptaže se voda cevovodom spušta do rezervoara potrošača, čija je slobodna površina na koti 360 mnm. Višak energije koju poseduje voda se uništava regulacionim zatvaračem. Ako se pretpostavi da je cevovod termički izolovan od okoline i da je specifični toplotni kapacitet vode  $C_p = 4,18 \text{ KJ}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$ , za koliko se poveća temperatura vode?

Energetska jednačina se postavlja za kompletan cevovod, gde je ulazni presek na koti 432 m, a izlazni na koti 360 m. Uz pretpostavku da je prečnik cevovoda isti, iste su i brzine  $V_1$  i  $V_2$ . Takođe, pritisci na ulaznom i izlaznom preseku su isti, atmosferski. Jednačina (4.111) se svodi na:

$$gh_1 + e_1 = gh_2 + e_2 \Rightarrow e_2 - e_1 = g(h_1 - h_2) = 9,81(432 - 360) = 706,32 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Toplotni kapacitet vode je dat u  $\text{KJ}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$ . Sređivanjem jedinica, dobija se:

$$C_p = 4,18 \frac{\text{KJ}}{\text{kg } ^\circ\text{C}} = 4180 \frac{\text{J}}{\text{kg } ^\circ\text{C}} = 4180 \frac{\text{N m}}{\text{kg } ^\circ\text{C}} = 4180 \frac{\text{m}^2/\text{s}^2}{^\circ\text{C}}$$

Povećanje temperature vode je za:

$$\Delta\theta = \frac{e_2 - e_1}{C_p} = \frac{706,32}{4,18 \cdot 10^3} = 0,17 \text{ } ^\circ\text{C}$$

---

<sup>51</sup>Jedna od primena u kojoj se mora voditi računa o grejanju vode u toku rada sistema, je ispitna linija za proveru karakteristika pumpi. Te ispitne linije su obično zatvorenog tipa: voda kruži kroz cevi do pumpe, zatim kroz regulacioni zatvarač kojim se uništava energija koju pumpa dodaje vodi i nazad u pumpu. Kod većih snaga pumpi, energija koju treba prevesti u toplotu nije zanemarljiva, pa je neophodno obezbediti i aktivno hlađenje vode u sistemu.

Ako je temperatura vode na izvoristu 10<sup>0</sup>C, kod potrošača će usled konverzije mehaničke energije u toplotnu biti približno 10,2<sup>0</sup>C, što je zanemarljiva promena.

Energetska jednačina (4.111) se najčešće piše u takvom obliku gde figuriše član koji nosi trenje (4.112):

$$\alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + h_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_T \tag{4.113}$$

gde su  $\alpha$  Koriolisov koeficijent,  $V^2/2g$  brzinska visina [m],  $h$  geodetska visina [m],  $p/\rho g$  visina pritiska [m] i  $h_T$  gubitak energije na trenje [m].

U najopštijem obliku, energetska jednačina pokazuje da je *energija na ulazu u posmatranu zapreminu jednaka zbiru energije na izlazu i izgubljene energije na putu od ulaza do izlaza*, pa se često piše i u obliku<sup>52</sup>:

$$E_1 = E_2 + \Delta E_{1-2} \tag{4.114}$$

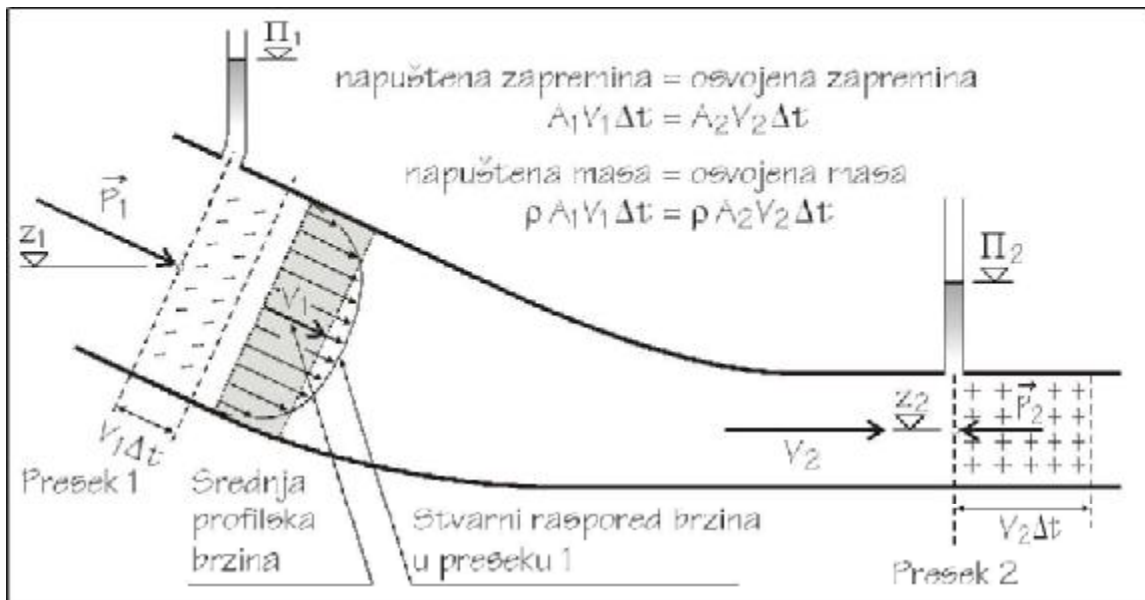
#### 4.6.4 Drugi oblik rešenja integralne jednačine održanja energije za ustaljeno tečenje homogenog fluida

U uvodu prethodnog poglavlja 4.6.3 je najavljeno da se do istog rešenja energetske jednačine, u uslovima ustaljenog strujanja homogenog fluida kroz nepokretnu konturu, može doći i direktno iz jednačine (4.91) koja prati promenu unutrašnje energije (kinetičke  $m \times u^2/2$  i interne  $m \times e$ ). **Kada nema razmene toplote između fluida i sredine, i kada nema spoljnog rada, za masu fluida koja u vremenskom trenutku  $t$  zauzima prostor u cevi između dva preseka, jednačina se svodi na stav da je *priraštaj unutrašnje energije jednak radu pravih sila na posmatranu masu.***

Na slici 4.34 je prikazan tok fluida kroz cev koja se niz fluidnu struju postepeno sužava. U uzvodnom preseku 1 se srednjom brzinom  $V_1$  (srednja, profilska brzina je definisana uslovom (4.7), na strani 99) napušta zapremina  $\mathcal{V} = A_1 V_1 \Delta t = Q \Delta t$ , mase  $m = \rho \mathcal{V}$ , dok se u nizvodnom preseku 2 osvaja ista zapremina, odnosno masa. Ukupna energija te mase, po presecima, je zbir kinetičke  $m \times V^2/2$  i interne energije  $m \times e$ :

$$-\mathbf{E}_1 = -\rho Q \Delta t \left( \frac{V_1^2}{2} + e_1 \right) \quad + \mathbf{E}_2 = +\rho Q \Delta t \left( \frac{V_2^2}{2} + e_2 \right)$$

<sup>52</sup>Potrebno je obratiti pažnju na ustaljenu praksu korišćenja reči “energija” a da se pri tome misli na “energiju po jedinici težine”, dimenzije [m]. U tekstu se prava energija piše debljim uspravnim slovom **E**, a energija po jedinici težine kurzivom *E*.

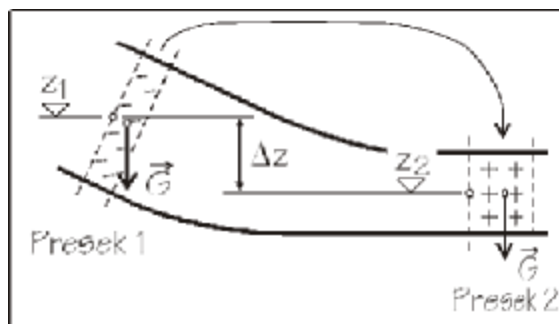


Slika 4.34: Do promene energije dolazi usled toga što fluid napusti jedan deo zapremine (uz prvi presek), a drugi deo zapremine osvoji (uz drugi presek)

pa je promena, odnosno priraštaj ukupne energije za vreme  $\Delta t$ :

$$E_2 - E_1 = \rho Q \Delta t \left( \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + e_2 - e_1 \right) \quad (4.115)$$

Ukupna energija je napisana korišćenjem pretpostavke da je u preseku konstantna brzina. Stvarna brzina nije konstantna (na slici 4.34 je nacrtan tipičan turbulentni profil brzina u preseku 1), pa uz kinetičku energiju treba uvesti korekcionni član, Koriolisov koeficijent  $\alpha$  (jednačina (4.109), na strani 165):  $\alpha_2 V_2^2/2$  i  $\alpha_1 V_1^2/2$ . Vrednost Koriolisovog koeficijenta kod laminarnih tokova je  $\alpha = 2$ . Pri turbulentnom tečenju, Koriolisov koeficijent ima vrednost od  $\alpha = 1,10$  za slabije izraženu turbulenciju do  $\alpha = 1,01$  za razvijeni turbulentni tok. Kako je u većini zadataka u okviru građevinske hidrotehnike tečenje u cevima turbulentno, u proračunima se Koriolisov koeficijent najčešće zanemaruje.



Slika 4.35: Rad sile težine se svodi na premeštanje “napušteno” u “osvojeno” zapreminu

Sile koje svojim radom povećavaju energiju fluida su sila težine, sila pritiska i konturna sila:

- *Rad sile težine* se obavlja na svim delićima celokupne zapremine između preseka 1 i 2. U ukupnoj sumi, taj rad je jednak radu koji bi se utrošio na “prebacivanje” napuštene zapremine iz preseka 1, u osvojenu zapreminu preseka 2 (slika 4.35). Težina fluida koji se tako “premešta” je  $G = mg = \rho Q \Delta t g$ . Pomeranje “premeštene” zapremine u pravcu sile  $G$  je visinsko rastojanje težišta dve zapremine  $\Delta z = z_1 - z_2$ , pa je rad sile težine:

$$W_g = G \Delta z = \rho g Q \Delta t (z_1 - z_2)$$

- *Rad sile pritiska* se ostvaruje samo na presecima 1 i 2. Sila pritiska u preseku 1 je  $P_1 = p_1 A_1$ . Pomeranje preseka je  $V_1 \Delta t$ , pa je rad sile u preseku 1  $W_{p1} = p_1 A_1 V_1 \Delta t = Q \Delta t p_1$ . U preseku 2 rad sile pritiska je negativan jer je pomeranje u suprotnom smeru od pozitivnog smera sile, tako da je ukupan rad sile pritiska:

$$W_p = Q \Delta t (p_1 - p_2)$$

- *Konturna sila  $K$*  je zbir sile trenja i normalne sile. Normalna sila  $N$  ne daje rad jer je, prema pretpostavci, kontura nepokretna. Sila trenja  $T$  je posledica viskoznosti fluida, ali je njen rad duž konture isto nula, jer delići fluida, koji se nalaze neposredno uz konturu imaju brzinu nula. Činjenica da viskoznost, odnosno sila trenja, ne učestvuje direktno u energetske jednačini, objašnjava se integralnim pristupom: prati se promena energije celokupne mase, bez ulaženja u unutrašnjost struje. Viskoznost je na diferencijalnom nivou, na nivou fluidnog delića, odgovorna za prelazak korisne mehaničke energije u toplotnu. Na integralnom nivou, to će se samo manifestovati povećanjem interne energije  $m \times e$ , između ulaznog i izlaznog preseka.

Izjednačenjem promene ukupne energije (4.115) sa radom sila, dobija se energetska jednačina:

$$\rho Q \Delta t \left( \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + e_2 - e_1 \right) = \rho g Q \Delta t (z_1 - z_2) + Q \Delta t (p_1 - p_2)$$

Deljenjem cele jednačine sa težinom  $G$ , dobija se:

$$\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} + \frac{e_2 - e_1}{g} = z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \quad [\text{m}] \quad (4.116)$$

#### 4.6. ODRŽANJE ENERGIJE SISTEMA

Sa leve strane jednačine se nalazi zbir priraštaja kinetičke i interne, toplotne energije, dok je, sa desne strane, rad sile težine i sile pritiska, sve po jedinici težine. Sređivanjem članova prethodne jednačine:

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{e_1}{g} = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{e_2}{g} \quad (4.117)$$

dobija se oblik istovetan jednačini (4.111), osim što je ovde korišćena pretpostavka da je brzina po preseku konstantna i jednaka srednjoj brzini, kao i da nema razmene toplotne energije kroz konturu cevi.

Član  $(e_2 - e_1)/g$  predstavlja povećanje interne energije, odnosno, povećanje toplote fluida usled trenja. Interna energija se kod nestišljivih fluida ne može pretvoriti u neki drugi vid energije, pa je sa stanovišta obavljanja mehaničkog rada beskorisna. Kako je povećanje interne energije upravo jednako smanjenju korisne energije fluidne struje, to se taj član obično zove *gubitak energije* i izražava se u dimenziji visine<sup>53</sup>:

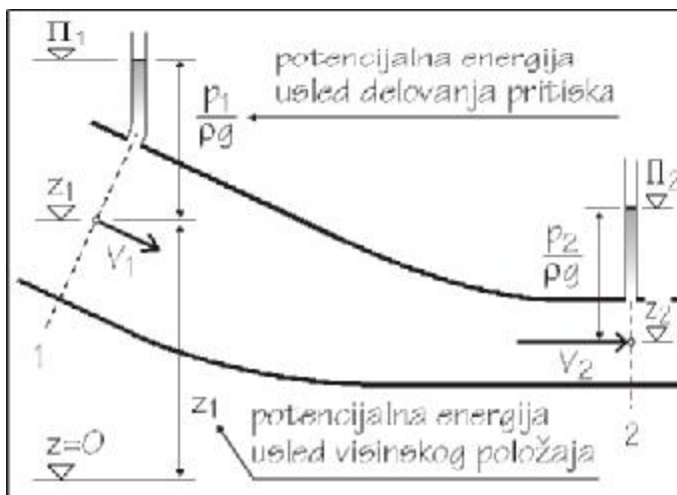
$$h_T = \Delta E_{1-2} = \frac{e_2 - e_1}{g} \quad [\text{m}]$$

U jednačini (4.117), drugi i treći član, rad sile težine i rad sile pritiska, mogu se zameniti piježometarskom kotom u preseku:

$$\Pi_1 = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \quad [\text{m}] \quad (4.118)$$

Prilikom rešavanja osnovne jednačine hidrostatičke (jednačina (3.11), na strani 38), piježometarska kota je uvedena kao integraciona konstanta. Kroz energetske jednačine, piježometarska kota dobija svoje pravo fizičko tumačenje, jer se vidi da *ona predstavlja potencijalnu energiju* (po jedinici težine) u preseku, izraženu visinom fluida.

Potencijalna energija je sposobnost da se obavi rad, pa se prema (4.118), može razdvojiti na *potencijalnu energiju usled visinskog položaja* i *potencijalnu energiju usled delovanja pritiska* (slika 4.36).



Slika 4.36: Piježometarska kota u presecima 1 i 2

<sup>53</sup>Isti član za gubitak energije je dobijen i u jednačini (4.112).

Sređivanjem jednačine (4.117), dobija se oblik jednačine, u kome se vidi da je ukupna energija u jednom preseku zbir kinetičke i potencijalne energije:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \Pi_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \Pi_2 + \Delta E_{1-2} \quad [\text{m}] \quad (4.119)$$

odnosno, da je ukupna energija na ulazu u posmatranu zapreminu jednaka zbiru energije na izlazu i izgubljene energije:

$$E_1 = E_2 + \Delta E_{1-2} \quad [\text{m}] \quad (4.120)$$

#### 4.6.5 Poređenje energetske sa Bernulijevom jednačinom

Dobijena energetska jednačina (4.113), odnosno (4.119), veoma liči na Bernulijevu jednačinu (4.57), sa strane 130, pa se često, *pogrešno*, i ona naziva *Bernulijevom jednačinom*<sup>54</sup>. Energetska i Bernulijeva jednačina su suštinski različite:

- Nastale su kao posledica dva različita principa: energetska je rezultat prvog termodinamičkog zakona, dok je Bernulijeva rezultat principa održanja količine kretanja<sup>55</sup>.
- Energetska jednačina se primenjuje na realan fluid konstantne zapremine između dva preseka, dok se Bernulijeva jednačina primenjuje na tačke duž jedne strujnice idealnog fluida. To znači da bi korišćenje koeficijenta kinetičke energije (Koriolisovog koeficijenta) u Bernulijevoj jednačini bilo nekorektno.
- Kod energetske jednačine nisu korišćene pretpostavke o viskoznosti ili bezvrtložnosti. Jednačina se primenjuje na realan fluid, u kome viskoznost pravi gubitak energije, pretvara mehaničku energiju u toplotnu.

---

#### Primer 4.6.3

Voda teče ustaljeno kroz dugačku cev konstantnog prečnika. U preseku *A* na koti  $z_A = 9 \text{ m}$ , pritisak u centru cevi je  $p_A = 28 \text{ kPa}$ , dok je u preseku *B* na koti  $z_B = 12 \text{ m}$  pritisak u centru cevi  $p_B = 11 \text{ kPa}$ . U kom smeru teče voda?

<sup>54</sup>Ponegde se, u literaturi, energetska jednačina zove i *proširena Bernulijeva jednačina*.

<sup>55</sup>Doduše ni zakoni fizike nisu nezavisni! Ako se energetska jednačina napiše za jednu strujnicu ( $V$  se menja sa  $u$  a  $\alpha = 1$ ) idealnog fluida (nema  $h_T$ ), dobija se Bernulijeva jednačina - to pokazuje da je prvi zakon termodinamike opštiji zakon, da je zakon održanja količine kretanja izveden iz termodinamičkog.



Koristeći energetska jednačinu (4.114) treba odrediti razliku ukupnih energija  $E_A - E_B$ . Ako je razlika pozitivna, smer toka je od  $A$  ka  $B$ .

$$E_A - E_B = \alpha_A \frac{V_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\rho g} + z_A - \left( \alpha_B \frac{V_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\rho g} + z_B \right)$$

Kako je cev konstantnog preseka brzine u presecima su iste, kao i korekcionni faktori, pa se prethodna jednačina dovodi do oblika:

$$E_A - E_B = \frac{p_A - p_B}{\rho g} + z_A - z_B = \frac{28 - 11}{1 \times 9,81} + 9 - 12 = -1,27 \text{ m}$$

Smer tečenja vode je od  $B$  ka  $A$ . Treba uočiti da se postavljeni zadatak ne može rešiti primenom Bernulijeve jednačine, jer se razmatra tok realnog fluida, gde dolazi do gubitka energije u smeru tečenja vode.

Kod tokova gde se može primeniti Bernulijeva jednačina, ukupna energija je konstantna duž strujnice. U jednačini se pojavljuje brzina fluida  $u$  sa kvadratom, pa je smer toka neodređen, odnosno, jednačina važi za bilo koji smer toka. Kod energetske jednačine, trenje oduzima energiju fluidu u pravcu toka, tako da je smer toka uvek od preseka sa većom ukupnom energijom ka preseku sa manjom. Jedini izuzetak je, ako se između kontrolnih preseka nalazi pumpa, hidraulička mašina, koja dodaje energiju po jedinici težine:

$$H_P = E_M = -\frac{1}{\rho g Q} \frac{d\hat{w}_M}{dt} \quad [\text{m}] \quad (4.121)$$

Znak (—) pokazuje da je rad mašine suprotan od pozitivnog rada, koji konstantna zapremina troši na spoljni mehanički sistem. U opštem obliku, energetska jednačina (4.120) je tada:

$$E_1 = E_2 + \Delta E_{1-2} - H_P \quad [\text{m}] \quad (4.122)$$

#### 4.6.6 Primer primene energetske jednačine

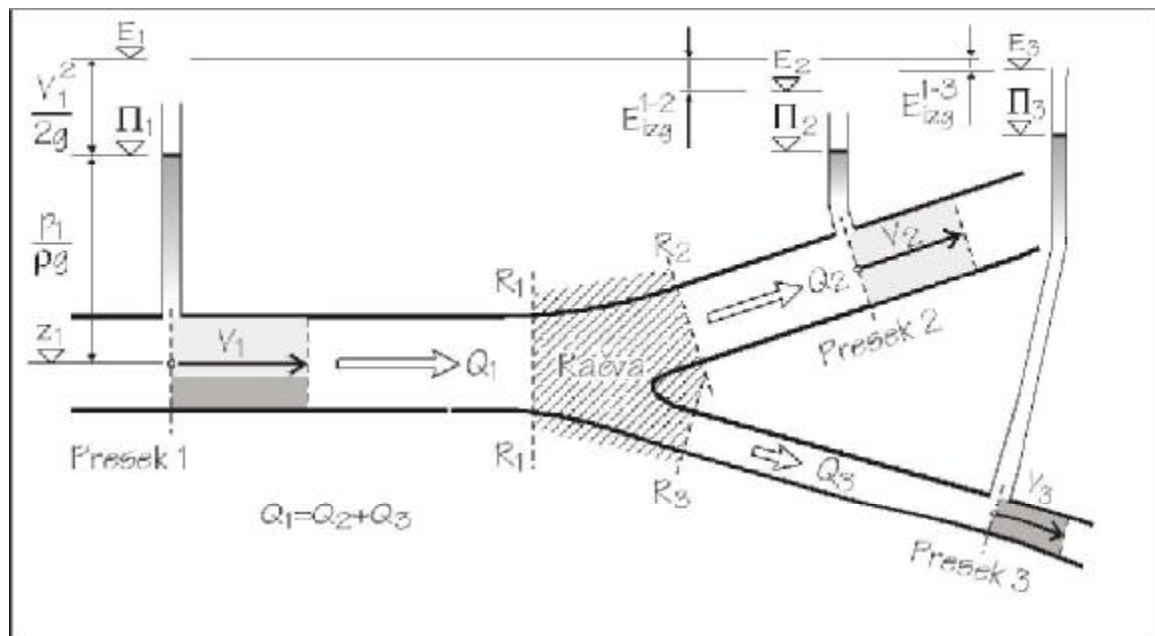
Jednačina održanja energije, ili energetska jednačina, često se koristi u oblasti građevinske hidrotehnike. Većina rešenja u oblasti tečenja u cevima, tečenja u otvorenim tokovima ili u podzemnim vodama, bazira se na primeni energetske jednačine. Pri tome se, po pravilu, zanemaruje promena interne energije i problem transfera toplote, već se samo prati mehanička energija kroz zbir pijezometarske kote i brzinske visine. Ukoliko u sistemu postoji neka hidraulička mašina, koja daje ili oduzima rad fluidu, njen uticaj se obračunava odvojeno.

U nastavku će se dati dva primera primene energetske jednačine. Prvi primer se odnosi na račvanje fluidne struje i pokazuje kako se piše jednačina, ako fluid prolazi kroz više od dva poprečna preseka. Drugi primer je isticanje kroz oštroični otvor, isti kao i primer koji je korišćen kod Bernulijeve jednačine. Na tom primeru će se, još jednom, podvući razlike između dve slične jednačine, koje se često pogrešno izjednačuju.

U narednom poglavlju, prilikom izučavanja tečenja u cevi, daće se u okviru tačke 7.2.3.4, *Primeri pisanja energetske jednačine*, još nekoliko primera pisanja energetske jednačine, kao i crtanja energetske i pijezometarske linije.

#### 4.6.6.1 Račvanje fluidne struje

Izvođenje energetske jednačine, u prethodnom poglavlju, sprovedeno je za ustaljeno tečenje u cevi, gde celokupna fluidna struja prolazi kroz jedan ulazni i jedan izlazni presek. Isti princip, koji je korišćen u drugom delu poglavlja, primeniće se u nastavku, na slučaj račvanja fluidne struje.



Slika 4.37: Pri račvanju cevi, postavlja se jedna energetska jednačina za masu fluida koja “ode” kroz jedan krak i druga jednačina za masu koja “ode” drugim krakom

Na slici 4.37, prikazana je cev poprečnog preseka  $A_1$ , koja se niz fluidnu struju deli na dve druge cevi, preseka  $A_2$  i  $A_3$ . Tečenja u presecima 1, 2 i 3 moraju zadovoljiti uslove paralelnosti i upravnosti fluidne struje. Fluid koji struji je homogen i konstantne gustine. Pretpostavlja se da fluid struji od

preseka 1 ka presecima 2 i 3. Za masu fluida između tri preseka, može se napisati da je promena ukupne energije jednaka radu svih sila:

$$\begin{aligned}
 &-\rho Q_1 \Delta t \left( \frac{V_1^2}{2} + e_1 \right) + \rho Q_2 \Delta t \left( \frac{V_2^2}{2} + e_2 \right) + \rho Q_3 \Delta t \left( \frac{V_3^2}{2} + e_3 \right) = \\
 &= \rho g Q_2 \Delta t (z_1 - z_2) + \rho g Q_3 \Delta t (z_1 - z_3) + \\
 &+ Q_1 \Delta t p_1 - Q_2 \Delta t p_2 - Q_3 \Delta t p_3 \qquad (4.123)
 \end{aligned}$$

Iz jednačine kontinuiteta koja se može napisati za samu račvu, sledi da su protoci  $Q_1 = Q_2 + Q_3$ , pa se prvi član jednačine (4.123) može razdvojiti na dva sabirka:

$$-\rho Q_2 \Delta t \left( \frac{V_1^2}{2} + e_1 \right) - \rho Q_3 \Delta t \left( \frac{V_1^2}{2} + e_1 \right)$$

Prvi član u trećem redu jednačine (4.123), rad sile pritiska uz presek 1, takođe se može razdvojiti na dva dela:  $Q_2 \Delta t p_1 + Q_3 \Delta t p_1$ . Grupisanjem sa ostala dva člana iz trećeg reda, dobija se ukupan rad sile pritiska:

$$Q_2 \Delta t (p_1 - p_2) + Q_3 \Delta t (p_1 - p_3)$$

Sređivanjem jednačine (4.123) dobija se:

$$\begin{aligned}
 &\rho Q_2 \Delta t \left( \frac{V_1^2}{2} + e_1 - \frac{V_2^2}{2} - e_2 \right) + \rho g Q_2 \Delta t (z_1 - z_2) + Q_2 \Delta t (p_1 - p_2) = \\
 &= -\rho Q_3 \Delta t \left( \frac{V_1^2}{2} + e_1 - \frac{V_3^2}{2} - e_3 \right) - \rho g Q_3 \Delta t (z_1 - z_3) - Q_3 \Delta t (p_1 - p_3)
 \end{aligned}$$

Izvlačenjem člana koji nosi težinu fluida ispred zgrade, dobija se:

$$\begin{aligned}
 &\rho g Q_2 \Delta t \left[ \left( \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left( \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \Delta E_{1-2} \right) \right] = \\
 &= -\rho g Q_3 \Delta t \left[ \left( \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left( \frac{V_3^2}{2g} + z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \Delta E_{1-3} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Jednačina se može napisati i u opštem obliku proizvoda težine i energije izražene visinom:

$$\underbrace{m_2 g}_{>0} \underbrace{(E_1 - E_2 - \Delta E_{1-2})}_{\geq 0} = - \underbrace{m_3 g}_{>0} \underbrace{(E_1 - E_3 - \Delta E_{1-3})}_{\geq 0} \qquad (4.124)$$

Članovi sa masom su uvek pozitivni i veći od nule. Vrednost člana u zagradi ne može biti negativna, jer je pretpostavljeni smer strujanja fluida od preseka 1 ka preseku 2 i od preseka 1 ka preseku 3, pa se energija, koju poseduje fluid, ne može povećati niz fluidnu struju. Jedino moguće rešenje jednačine (4.124). je da su članovi u zagradama nula, čime se dobija sistem od dve jednačine (4.125) i(4.126):

$$E_1 = E_2 + \Delta E_{1-2} \quad (4.125)$$

$$E_1 = E_3 + \Delta E_{1-3} \quad (4.126)$$

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (4.127)$$

Uz dve energetske jednačine, dopisana je i treća jednačina, jednačina kontinuiteta (4.127), koja je korišćena prilikom izvođenja. Za primenu ovih jednačina *neophodno je unapred poznavati smer tečenja fluida, jer se jednačine moraju pisati samo u nizvodnom smeru.*

Moguć je i drugi način rešavanja problema račvanja fluidne struje. Ako se račva podeli na tri dela uvođenjem preseka na samom mestu račvanja (odnosno, dovoljno blizu gde su strujnice međusobno paralelne), mogu se napisati tri energetske jednačine (4.120):

$$E_1 = E_{R1} + \Delta E_{1-R1}$$

$$E_{R2} = E_2 + \Delta E_{R2-2}$$

$$E_{R3} = E_3 + \Delta E_{R3-3}$$

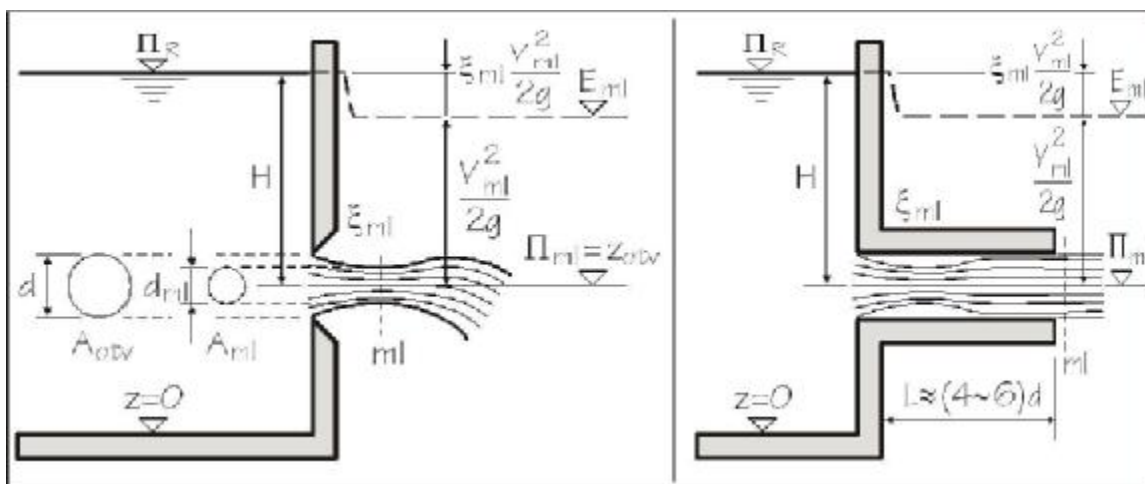
i jedna jednačina kontinuiteta koja će povezati tri protoka. Ako se pretpostavi da unutar račve, male zapremine označene šrafurom na slici 4.37, neće doći do promene ukupne energije<sup>56</sup>, tada će biti  $E_{R1} = E_{R2} = E_{R3}$ , pa će se postavljeni sistem od tri jednačine svesti na već dobijene dve jednačine (4.125) i (4.126).

Kao zaključak primera, može se ustanoviti pravilo po kome se za sistem račvanja ili spajanja  $n$  fluidnih struja, piše  $n - 1$  energetske jednačine za svaki od pretpostavljenih smerova fluidne struje. Zajedno sa jednačinom kontinuiteta, dobija se sistem od  $n$  jednačina sa  $n$  nepoznatih protoka (ili brzina). Ako se odabere pogrešan smer fluidne struje u jednoj od račvi, dobiće se nelogična (negativna) rešenja, pa je potrebno ponoviti proračun sa okrenutim smerom.

<sup>56</sup>U glavi knjige 7 *Tečenje fluida kroz cevi*, detaljnije će se obraditi tečenje u cevi. Tu će se gubici energije podeliti na linijske i lokalne, pa će se videti da ovu pretpostavku treba korigovati.

**4.6.6.2 Isticanje iz suda**

U primerima Bernulijeve jednačine u poglavlju 4.5.3.1, dato je rešenje za slobodno isticanje kroz oštroični otvor. Brzina u izlaznom mlazu je, u tom primeru, određena prateći jednu strujnicu, uz pretpostavku da je fluid idealan (jednačina (4.63) na strani 135). Prava brzina isticanja je nešto manja, pa je uveden korekcionni faktor  $C_V$ , koeficijent brzine, tako da je na kraju dobijena jednačina isticanja iz suda (4.65). U nastavku će se pokazati da se do istog rešenja može doći i primenom energetske jednačine (4.120).



Slika 4.38: Isticanje iz suda sa oštroičnim otvorom (levi deo slike) i sa naglavkom (desni deo)

Na izlazu iz oštroičnog otvora dolazi do suženja mlaza, zbog zakrivljenog kretanja delića. Presek “ml” je najuži deo sa paralelnim strujnicama i na tom mestu su ispunjeni uslovi za postavljanje kontrolnog preseka. Energetska jednačina se postavlja od rezervoara do suženog preseka. Pri proračunu gubitaka energije zanemaruju se gubici na trenje, jer je rastojanje između izabranih preseka malo.

$$E_R = E_{ml} + \Delta E_{R-ml} \Rightarrow \Pi_R + \frac{V_R^2}{2g} = \Pi_{ml} + \frac{V_{ml}^2}{2g} + \xi \frac{V_{ml}^2}{2g}$$

Brzinska visina u rezervoaru se zanemaruje, tako da je  $\frac{V_R^2}{2g} = 0$ :

$$\Pi_R - \Pi_{ml} = H = (1 + \xi) \frac{V_{ml}^2}{2g}$$

Sređivanjem prethodne jednačine po brzini u mlazu, dobija se:

$$V_{ml} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi}} \sqrt{2gH} = C_V \sqrt{2gH} = C_V \times V_{ID} \tag{4.128}$$

gde je  $C_V = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$  koeficijent brzine a izraz  $V_{ID} = \sqrt{2gH}$  brzina idealnog fluida<sup>57</sup>.

Vrednosti koeficijenta lokalnog gubitka  $\xi$  zavisi od izrade oštroičnog otvora. Za dobro napravljen oštroični otvor njegova vrednost je  $\xi \approx (0,05 - 0,10)$ , pa se vrednost koeficijenta brzine kreće u opsegu  $C_V \approx (0,95 - 0,98)$ .

Protok je proizvod brzine i poprečnog preseka mlaza  $A_{ml}$ :

$$Q = V_{ml}A_{ml} = V_{ml}A_{otv}C_A$$

Međutim, jednostavnije je da se u računu koristi poprečni presek samog otvora  $A_{otv}$ , jer je to veličina koja se lako meri. Koeficijent  $C_A = A_{ml}/A_{otv}$  je koeficijent kontrakcije mlaza. On je uvek manji od 1 i određuje se pažljivim merenjem. Vrednost  $C_A$  za kružni oštroični otvor je  $C_A \approx 0,65$ .

Proizvod koeficijenta brzine  $C_V$  i koeficijenta kontrakcije mlaza  $C_A$  je koeficijent protoka  $C_Q$ :

$$C_Q = C_VC_A \quad C_Q \approx 0,60 \text{ za kružni oštroični otvor}$$

Odavde se, na kraju, dobija jednačina isticanja za realan fluid istog oblika kao i jednačina (4.65), na strani 136:

$$Q = C_VC_AA_{otv}\sqrt{2gH} = C_QA_{otv}\sqrt{2gH}$$

Na desnoj strani slike 4.38, prikazan je slučaj isticanja iz suda kroz kratak naglavak. Na skici se vidi da se fluidna struja, na samom početku naglavka, skupila u suženi presek, slično kao i kod oštroičnog otvora. Međutim, u naglavku dolazi i do vraćanja fluidne struje na prečnik jednak prečniku prvobitnog preseka, čime se deo kinetičke energije mlaza vraća u potencijalnu energiju. Ako je naglavak relativno kratak, pa ne postoji značajniji gubitak na trenje duž naglavka, ukupan gubitak energije je manji nego kod isticanja kroz oštroični otvor, pa je i protok veći.

Energetska jednačina se postavlja na isti način kao i u prethodnom slučaju, samo što je sada  $A_{ml} = A_{otv}$ , pa je koeficijent kontrakcije  $C_A = 1$ . Zbog zanemarenja gubitaka na trenje, uzima se nešto veći koeficijent lokalnog gubitka energije  $\xi$ , tako da je koeficijent brzine  $C_V \approx 0,8 - 0,9$ . Kao rezultat dobija se da je protok kroz otvor veći nego kod oštroičnog otvora istog prečnika ( $C_Q \approx 0,8 - 0,9$ ).

<sup>57</sup>Poznata je još i kao *Toričelijev princip*.

## Glava 5

# Dimenzionalna analiza, sličnost i modeli

U prethodnoj glavi 4, *Osnove dinamike fluida*, izvedene su jednačine održanja u diferencijalnom obliku. Te jednačine su u opštem slučaju nerešive i za svaki konkretan zadatak Mehanike fluida potrebna su uprošćavanja i provere kroz eksperimente na modelu ili na stvarnom sistemu. Rešenje strujanja realnog fluida je najčešće kombinacija osmišljenog eksperimenta i primene uprošćenih jednačina u tumačenju dobijenih eksperimentalnih podataka.

Kao i u drugim inženjerskim oblastima (mašinstvo, elektrotehnika, konstruktivni deo građevine), eksperimenti su sastavni deo oblasti Mehanike fluida te je neophodno poznavati pravila kako se određeni problem koji se izučava, iz realnog života (ili iz *prirode*) može preneti u laboratoriju, kako napraviti *model*, koje veličine na modelu treba eksperimentalno izučiti i kako ih posle tumačiti u realnom sistemu. Cilj svakog eksperimenta je da se dobiju opšta rešenja, primenljiva ne samo na jednom, konkretnom problemu, već uporediva i sa drugim, sličnim sistemima i eksperimentima koje su sproveli drugi istraživači.

U ovoj glavi će se prvo dati osnove *dimenzionalne analize*, oblasti koja proučava veličine i dimenzije, kao i odnose između njih. Dimenzionalna analiza nije isključivo vezana uz Mehaniku fluida već se može primeniti u bilo kojoj oblasti tehnike. Upoređujući dimenzije veličina, koje učestvuju u fenomenu koji se izučava, određuju se međusobne zavisnosti, a time se omogućava uspostavljanje novog *dimenzionalnog sistema*. U tom novom dimenzionalnom sistemu, *pravi se fizički model uz postavljanje uslova zadovoljenja sličnosti strujanja i odnosa dominantnih uticaja*. Rezultati merenja i zaključci dobijeni na modelu se zatim *preslikavaju na prirodu*.

## 5.1 Dimenzionalna analiza

### 5.1.1 Uvod u dimenzionalnu analizu

Dimenzionalna analiza je oblast koja se bavi analizom dimenzija veličina koje učestvuju u pojavi koja se istražuje. Analiza se zasniva na pretpostavci **da veza između veličina koje učestvuju u pojavi a koja unapred nije poznata i tek treba da se istraži, mora biti ista kao i veza između njihovih dimenzija.** Drugim rečima, analizirajući veze između dimenzija veličina koje učestvuju u istraživanoj pojavi, istraživači dobijaju i moguće veze između veličina bez detaljnijeg ulaženja u same jednačine kojima se opisuje pojava.

Dimenzionalna analiza je direktno povezana sa korišćenjem dimenzionalnih sistema. U poglavlju 2.1, *Veličine, dimenzionalni sistem i jedinice mere* (na strani 10), data je osnovna definicija pojma *veličina kao i razlog postojanja dimenzionalnog sistema* i potreba da se on propiše, unificira. Međutim, činjenica da je dimenzionalni sistem propisan zakonom, istovremeno znači da on nije optimalan za svaku od izučavanih pojava, te da je često u analizama bolje koristiti neki drugi dimenzionalni sistem.

---

#### Primer 5.1.1

Analizira se zapremina flaša na jednoj proizvodnoj liniji. Ispravne flaše treba da budu zapremine  $V = 1,50 \text{ dm}^3$  (1,5 L). Merenjima na kraju proizvodne linije, uz poštovanje SI sistema, dobijene su vrednosti 1,50; 1,52; 1,49; 1,51; 1,48; ...  $\text{dm}^3$ . Da li radnik na kontroli ima jasan uvid u greške nastale u proizvodnji flaša? Šta ako se ista linija koristi i za proizvodnju flaša od 2 L?

Ako se za prikaz rezultata merenja zapremine umesto SI sistema i dužine kao osnovne veličine koristi očekivana zapremina flaše od 1,5 L tada proizvedene flaše imaju zapremine 1,000; 1,013; 0,993; 1,007; 0,987... odnosno, radnik na proizvodnoj liniji može odmah videti relativna odstupanja zapremine. Promenom proizvodnog programa sa flaše od 1,5 L na 2 L potrebno je promeniti i dimenzionalni sistem, pa se sada kao jedinica mere uzima očekivana zapremina od 2 L.

---

Primenom dimenzionalne analize se po pravilu odustaje od standardnog SI dimenzionalnog sistema i prelazi na sistem koji bolje fizički interpretira razmatranu pojavu. Kao rezultat promene dimenzionalnog sistema dolazi do smanjenja broja nezavisno promenljivih veličina čime se omogućuje *jednostavnije skaliranje problema na relaciji priroda - model uz neophodna zanemarivanja.*

Prilikom izbora novih osnovnih veličina, moraju se ispoštovati tri osnovna pravila:



## 5.1. DIMENZIONALNA ANALIZA

181

1. da osnovne veličine budu *međusobno nezavisne* jer ako su međusobno zavisne, onda nisu osnovne veličine i jedna od njih se može predstaviti kao kombinacija ostalih;
2. da budu *karakteristične za fiziku problema koji se izučava* inače se u razmatranom problemu neće smanjiti broj nezavisno promenljivih veličina;
3. osnovne jedinice moraju biti *sveobuhvatne*, moraju omogućavati izražavanje svih ostalih izvedenih veličina preko izabраниh osnovnih.

Vrednosti ovako izabраниh osnovnih veličina predstavljaju novu *mernu jedinicu*.

**Primer 5.1.2**

Koje od ponuđenih kombinacija su prihvatljive kao nove osnovne veličine a koje kombinacije nisu i zašto?

Vel. 1	Vel. 2	Vel. 3	Komentar
Masa	Dužina	Površina	Nije dobar izbor jer ne figuriše vreme a dužina i površina su međusobno zavisne veličine
Masa	Vreme	Dužina	U redu
Vreme	Ubrzanje	Dužina	Nije dobar izbor, jer nema mase
Sila	Dužina	Vreme	U redu
Gustina	Protok	Dužina	U redu

U zadacima Mehanike fluida najčešće se kao osnovne veličine usvajaju dužina (čime se opisuje geometrija problema), brzina (da bi se opisalo polje brzina) i gustina (kao nosilac mase).

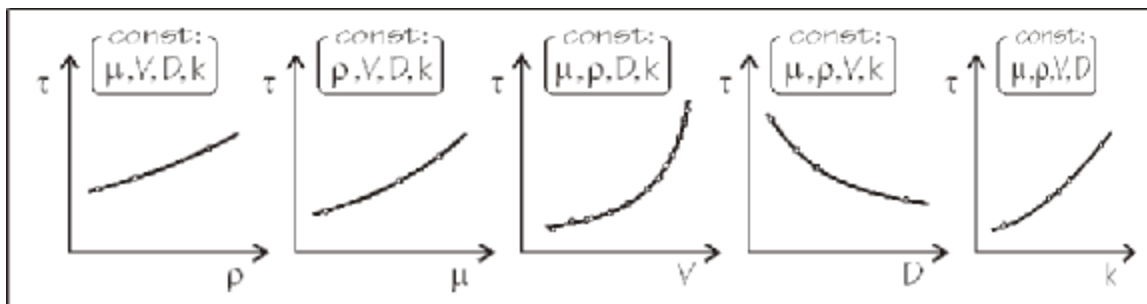
Izborom novog dimenzionalnog sistema se postiže pojednostavljenje u eksperimentalnom izučavanju razmatrane pojave. Ako se, na primer, izučava trenje u kružnoj cevi prilikom jednolikog ustaljenog tečenja (poglavlje 6.1.1 *Koeficijent linijskog gubitka energije*) dobija se da pad energije duž cevi zavisi od tangencijalnog napona (jednačina (6.7) na strani 220):

$$I_e = I_{II} = \frac{\tau}{\rho g R} = \text{Const.} \quad (5.1)$$

U daljem izvođenju je pretpostavljeno da viskoznost fluida i geometrijski uslovi ne utiču na trenje, te je dobijena jednostavna veza gubitka energije i koeficijenta trenja  $\lambda$ . U realnosti je, međutim, tangencijalni napon složena funkcija sledećih veličina:

$$\tau = \varphi(\rho, \mu, V, D, k) \quad (5.2)$$

gde su  $\rho$  i  $\mu$  fizička svojstva fluida,  $V$  brzina koja opisuje kinematičnost i  $D$  (prečnik cevi) i  $k$  (hrapavost zida cevi) geometrijski parametri koji opisuju uslove strujanja. Izučavanje te funkcionalne zavisnosti podrazumeva pravljenje eksperimenta: uspostavljanje ustaljenog strujanja kroz cev konstantnog prečnika  $D$  i hrapavosti  $k$ , pri čemu se meri pad pritiska na nekom rastojanju  $L$  pri tečenju različitih fluida pri različitim brzinama.



Slika 5.1: U  $[M, L, T]$  dimenzionalnom sistemu analiza tangencijalnog napona od ostalih zavisnih veličina zahteva veliki broj eksperimenata

Opisani eksperiment bi bio obiman, jer bi zahtevao da se u instalaciji varira samo jedan parametar (slika 5.1), dok se svi ostali zadržavaju konstantnim. Za sve te izmerene rezultate bi se nalazila odgovarajuća veza, da bi se na kraju pokušalo sa formiranjem neke opšte relacije.

Primenjujući dimenzionalnu analizu moguće je odabrati nove osnovne veličine koje su primerenije problemu trenja u cevi. Umesto SI sistema  $[M, L, T]$  zgodnije je odabrati sistem gde se osnovne veličine već nalaze u spisku veličina datih u jednačini (5.2). Ako se, na primer, odaberu  $[\rho, V, D]$ , ostale veličine se mogu izraziti kao njihova kombinacija<sup>1</sup>:

$$\tau = N_\tau \times \rho^1 V^2 D^0 \Rightarrow N_\tau = \frac{\tau}{\rho V^2} \quad (5.3)$$

$$\mu = N_\mu \times \rho^1 V^1 D^1 \Rightarrow N_\mu = \frac{\mu}{\rho V D} \Rightarrow \frac{1}{N_\mu} = \frac{\rho V D}{\mu} \quad (5.4)$$

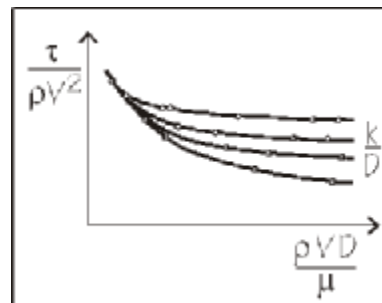
$$k = N_k \times \rho^0 V^0 D^1 \Rightarrow N_k = \frac{k}{D} \quad (5.5)$$

gde je sa  $N$  označen merni broj (rezultat merenja veličine u novom dimenzionalnom sistemu) pa se dimenzionalni izraz (5.2) može napisati u bezdimenzionalnom obliku:

$$\frac{\tau}{\rho V^2} = \phi \left( \frac{\rho V D}{\mu}, \frac{k}{D} \right) \quad (5.6)$$

<sup>1</sup>Uobičajeno je da se fizičke konstante fluida pišu u bezdimenzionalnim sistemima u imeniocu izraza, pa je to iskorišćeno u izrazu (5.4).

Promenom dimenzionalnog sistema, umesto tangencijalnog napona dobijen je koeficijent tangencijalnog napona, pri čemu on zavisi samo od dve bezdimenzionalne veličine,  $\rho VD/\mu$  i  $k/D$ . Projektovanje eksperimenta je sada mnogo jednostavnije. Potrebno je varirati samo dve bezdimenzionalne veličine sa desne strane izraza (5.6) a svi dobijeni rezultati se mogu predstaviti na samo jednom dijagramu 5.2. Eksperiment je jednostavan i zbog toga što sada nije neophodno koristiti različite fluide da bi se odredila zavisnost trenja od viskoznosti i gustine. Takođe, postupak omogućuje potpunu nezavisnost od izabranog sistema jedinica za osnovne veličine, jer je analiziran bezdimenzionalan izraz.



Slika 5.2: U novom dimenzionalnom sistemu  $[\rho, V, D]$  tangencijalni napon postaje koeficijent koji zavisi od dve bezdimenzionalne veličine

### 5.1.2 Bakingemova $\Pi$ teorema

U prethodnom primeru je pokazano da se izraz sa šest dimenzionalnih veličina (5.2) sveo na izraz sa tri bezdimenzionalne veličine (5.6) nakon promene dimenzionalnog sistema. Odnos broja dimenzionalnih i bezdimenzionalnih veličina je definisan Bakingemovom<sup>2</sup>  $\Pi$  (pi) teoremom: *Ako je jednačina sa (m) varijabli dimenziono homogena, može se svesti na (m - n) nezavisnih bezdimenzionih proizvoda, gde je (n) minimalan broj osnovnih veličina potrebnih da se opišu varijable.*

Bezdimenzionalni proizvodi se često nazivaju *pi članovi*, a za njihovo pisanje koristi se simbol  $\Pi$ . Sam dokaz  $\Pi$  teoreme je veoma komplikovan. U primeru sa analizom otpora u kružnoj cevi, gde se pošlo od dimenzionalnog izraza šest veličina (5.2) ( $m = 6$ ) nakon uzimanja prečnika cevi, brzine u cevi i gustine vode kao osnovnih veličina ( $n = 3$ ) dobijen je bezdimenzionalan izraz (5.6) sa  $m - n = 3$   $\Pi$  člana:

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3) \text{ gde su pojedini } \Pi \text{ članovi:}$$

<sup>2</sup>Edgar Buckingham (1867 - 1940) američki naučnik koji je stekao obrazovanje na Harvardu i univerzitetu Lajpcig. Radio je u američkom birou za zemljište i u birou za nacionalne standarde. Oblasti interesovanja su mu bile fizika zemljišta, osobine gasova, akustika, mehanika fluida i zračenje crnih tela. Mada je više istraživača, uključujući i Lorda Rayleigha (1842 - 1919), radilo pre njega na razvoju dimenzionalne analize, Bakingem je prvi u svojim radovima (1914) formulisao  $\Pi$  teorem.

$$\Pi_1 = \tau \times \rho^{-1} V^{-1} D^0$$

$$\Pi_2 = \mu \times \rho^{-1} V^{-1} D^{-1}$$

$$\Pi_3 = k \times \rho^0 V^0 D^{-1}$$

što je u skladu sa Bakingemovom  $\Pi$  teoremom. U našoj praksi se umesto  $\Pi$  člana češće koristi forma u kojoj se pojavljuje *merni broj*  $N$  koji je *količnik dimenzionalne veličine i novih osnovnih veličina dignutih na odgovarajući eksponent*. Izraz (5.6) je napisan upravo u takvoj formi.

Postupak određivanja bezdimenzionalnih mernih brojeva  $N$  se može formalno definisati kroz sledeće korake:

1. Nabrojati sve varijable, dimenzionalne i bezdimenzionalne (konstante) koje su uključene u razmatrani problem:

$$X_1 = \varphi(X_2, X_3, \dots, X_m)$$

Ovo je verovatno najvažniji korak jer je od suštinske važnosti da se u razmatranje uključe sve dominantne veličine. Spisak varijabli se formira na bazi znanja eksperimentatora i fizičkih zakona koji su uključeni u fenomen. Da bi spisak varijabli bio što kraći (i time se olakšali eksperimenti) važno je da sve varijable budu nezavisne. Na primer, ako su za fenomen bitni prečnik cevi i njena površina, dovoljno je uzeti jednu od te dve veličine.

2. Izraziti svih  $m$  varijabli u osnovnom dimenzionalnom sistemu. Najčešće se koristi SI sistem  $[M, L, T]$  ili ponekad sistem u kome je sila osnovna veličina  $[F, L, T]$ . U prilogu A su date neke izvedene veličine.
3. Izabrati minimalan broj  $n$  varijabli koje su bitne za razmatrani problem i koje mogu da se koriste kao osnovne veličine. Proveriti da li su međusobno nezavisne i da li se pomoću njih mogu izraziti sve ostale veličine. Merni broj za osnovne veličine je  $N = 1$ .
4. Za sve ostale varijable (kojih ima  $m - n$ ) odrediti merni broj  $N$  kao količnik veličine i osnovnih varijabli dignutih na odgovarajući stepen, tako da merni broj bude bezdimenzionalan.
5. Formirati bezdimenzionalnu relaciju oblika:

$$N_1 = \phi(N_2, N_3, \dots, N_{m-n})$$

Kako su merni brojevi u stvari bezdimenzionalni koeficijenti, treba razmotriti da li je moguće reorganizovati ih na neki smisleniji način, kako bi se dobio fizički logičniji izraz. Na primer, u bezdimenzionalnom izrazu (5.3) za tangencijalni napon, ako se merni broj  $N_\tau$  pomnoži i podeli sa  $1/2$ , dobija se izraz:

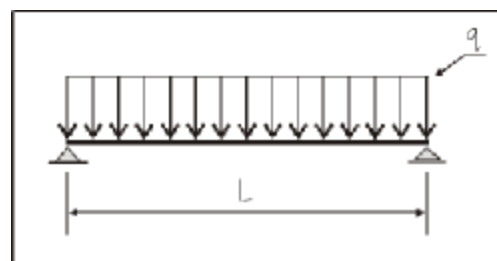
$$\frac{1}{2}N_\tau = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho V^2} = C_\tau \tag{5.7}$$

U imeniocu se javlja prepoznatljiv član, zaustavni pritisak, veličina koja predstavlja jednu od karakteristika strujanja (poglavlje 4.5.3.2). Bezdimenzionalni merni broj  $N_\tau$  postaje neki drugi bezdimenzionalni broj, koji se najčešće zove *koeficijent tangencijalnog napona*  $C_\tau$ .

### 5.1.3 Primeri primene dimenzionalne analize

**Prosta greda** Prvi primer primene Bakingemove teoreme je iz oblasti statike konstrukcija. Potrebno je analizirati moment savijanja proste grede u zavisnosti od raspodeljenog opterećenja i raspona grede  $M_0 = \varphi(q, L)$ .

Nepoznata veza momenta na sredini grede, raspona grede i opterećenja se može dobiti iz eksperimenta: napravi se greda, postave merne trake na sredini grede kako bi se merio moment  $M_0$  i opterećuje se greda različitim opterećenjima  $q$ . Takođe, potrebno je napraviti i drugu seriju eksperimenata sa gredama različitih dužina  $L$  pri čemu se sve grede opterećuju istim opterećenjem  $q$ .



Slika 5.3: Određivanje momenta savijanja proste grede dimenzionalnom analizom

Druga mogućnost je da se sprovede dimenziona analiza i da se odredi koliki je bezdimenzionalni moment. Veličine koje su od interesa su  $M_0$ ,  $q$  i  $L$ . One se mogu predstaviti bilo u SI sistemu  $[M, L, T]$  ili, još jednostavnije u sistemu gde su sila i dužina osnovne veličine  $[F, L]$ :

Veličina	$[M, L, T]$ sistem	$[F, L]$ sistem
$M_0$	$M^1 L^2 T^{-2}$	$F^1 L^1$
$q$	$M^1 T^{-2}$	$F^1 L^{-1}$
$L$	$L^1$	$L^1$

Kao osnovne veličine mogu se uzeti raspodeljeno opterećenje  $q$  i dužina  $L$ . Te veličine su međusobno nezavisne, a obe veličine su potrebne da bi se

dimenziono izrazio moment, tj. nije moguće napisati izraz:  $M_0 = N_M \times q^a$  ni izraz:  $M_0 = N_M \times L^a$  gde bi  $a$  bio bilo koji eksponent.

Biranjem  $q$  i  $L$  za osnovne veličine, moment na sredini grede može da se napiše:

$$M_0 = N_M \times q^a L^b$$

Eksponenti  $a$  i  $b$  se određuju korišćenjem zajedničkog sistema  $[F, L]$ :

$$[F^1 L^1] = [F^1 L^{-1}]^a [L]^b$$

Izjednačujući eksponente uz iste veličine, dobija se:

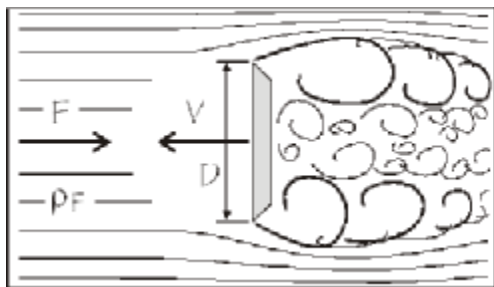
$$\begin{aligned} \text{Uz silu } F &: & 1 = a & \Rightarrow & a = 1 \\ \text{Uz dužinu } L &: & 1 = -a + b & \Rightarrow & b = 2 \end{aligned}$$

pa je:

$$M_0 = N_M q^1 L^2 \Rightarrow N_M = \frac{M_0}{q L^2} = \text{Const.} \tag{5.8}$$

Polazni dimenzionalni izraz u kome moment zavisi od dve veličine se sveo u  $[q^1 L^2]$  dimenzionalnom sistemu na jednu konstantu, na merni broj  $N_M$  odnosno na bezdimenzionalni moment koji ne zavisi ni od jedne veličine. Ovo znači da je potreban svega jedan eksperiment i da je vrednost konstante koja se odredi u tom eksperimentu primenljiva na sve raspone greda i na sve veličine raspodeljenog opterećenja.

**Opstrujavanje tela** Analizira se sila na telo oblika kružne ploče prečnika  $D$  postavljeno upravno na fluidnu struju, usled delovanja fluida koji se kreće brzinom  $V$  (slika 5.4).



Slika 5.4: Sila otpora oštroi-  
čnog diska brzine  $V$

Pretpostaviće se da su veličine od značaja za silu brzina fluida  $V$ , gustina fluida  $\rho$  i prečnik ploče  $D$ . Dimenzionalno, sila se može predstaviti kao funkcionalna zavisnost 3 veličine:

$$F = \varphi(\rho, V, D) \tag{5.9}$$

a svaka od tih veličina se može izraziti preko SI sistema  $[M, L, T]$ :

$$\begin{aligned} [F] &= [MLT^{-2}] \\ [\rho] &= [ML^{-3}] \\ [V] &= [LT^{-1}] \\ [D] &= [L] \end{aligned}$$

Kao nove osnovne veličine uzimaju se  $\rho$ ,  $V$  i  $D$  jer su međusobno nezavisne i sveobuhvatne. Koristeći novi sistem, moguće je napisati silu kao:

$$F = N_F \times \rho^a V^b D^c \quad (5.10)$$

EkspONENTI se određuju korišćenjem zajedničkog SI sistema, izjednačavanjem eksponenata uz  $L$ ,  $T$  i  $M$ :

$$\begin{aligned} [MLT^{-2}] &= [ML^{-3}]^a [LT^{-1}]^b [L]^c \\ \text{EkspONENTI uz } [M] &: 1 = a & \Rightarrow a = 1 \\ [T] &: -2 = -b & \Rightarrow b = 2 \\ [L] &: 1 = -3a + b + c & \Rightarrow c = 2 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Prema Bakingemovoj teoremi trebalo bi odabrati najmanji mogući broj novih osnovnih veličina. Ako se pokuša sa izborom  $\rho$  i  $V$  kao osnovnih veličina, jer su sveobuhvatne i međusobno nezavisne, dobija se da izraz:

$$F = N_F \times \rho^a V^b$$

nije moguće rešiti:

$$\begin{aligned} [MLT^{-2}] &= [ML^{-3}]^a [LT^{-1}]^b \\ \text{EkspONENTI uz } [M] &: 1 = a & \Rightarrow a = 1 \\ [T] &: -2 = -b & \Rightarrow b = 1 \\ [L] &: 1 = -3a + b & \Rightarrow 1 \neq -3 + 1 \end{aligned}$$

Na osnovu izračunatih koeficijenata (5.11), dimenzionalni izraz (5.10) za silu u novom sistemu dužina, brzina, gustina je:

$$F = N_F \times \rho V^2 D^2$$

gde je  $N_F$  merni broj. BezdimeNZionalna sila je:

$$N_F = \frac{F}{\rho V^2 D^2}$$

Početni izraz  $F = \varphi(\rho, V, D)$  koji je imao četiri dimezionalne nezavisne veličine ( $m = 4$ ), izborom tri veličine kao osnovnih veličina ( $n = 3$ ) se sveo na ( $m - n = 1$ ) bezdimenzionalnih veličina  $N_F = \phi(1, 1, 1)$  odnosno na jednu konstantu  $N_F = Const$ . Ako se istražuje sila na ploču, odavde sledi da je dovoljan samo jedan eksperiment da se odredi konstanta  $N_F$ , umesto serije eksperimenata sa različitim gustinama fluida  $\rho$ , pri različitim brzinama  $V$  i sa različitim veličinama ploče  $D$ .

Bezdimenzionalnu konstantu  $N_F$  treba preurediti kako bi se dobio fizički “opravdaniji” izraz. Umesto  $\rho V^2$  može se napisati zaustavni pritisak a umesto prečnika ploče  $D^2$  staviti površinu kruga:

$$N_F = \frac{\frac{1}{2} \frac{\pi}{4} F}{\frac{1}{2} \rho V^2 A} \Rightarrow \frac{8}{\pi} N_F = C_F = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho V^2 A}$$

Nova bezdimenzionalna konstanta  $C_F$  se obično naziva *koeficijent sile* i može se protumačiti kao odnos realne sile na ploču i neke referentne sile, koja bi se dobila ako bi celokupni zaustavni pritisak proizveo silu na ploču:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Koeficijent} \\ \text{sile} \end{array} \right] = \frac{[\text{Realna sila}]}{[\text{Zaustavni pritisak}] \times [\text{Površina}]} \quad (5.12)$$

Sprovedenom dimenzionalnom analizom je dobijeno da je koeficijent sile  $C_F$  konstanta. Međutim, u nizu eksperimenata, merenjima se pokazalo da  $C_F$  nije konstantno već da zavisi i od viskoznosti fluida kao i od debljine ploče. To znači da je polazna pretpostavka o dominantnim uticajima na silu bila pogrešna i da spisak dimenzionalnih veličina treba dopuniti:

$$F = \varphi(\rho, V, D, \mu, d) \quad (5.13)$$

gde su  $\mu$  viskoznost fluida i  $d$  debljina ploče. Ako  $\rho, V, D$  ostanu osnovne veličine, sila  $F$  se u bezdimenzionalnom obliku i dalje izražava preko koeficijenta sile:

$$C_F = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho V^2 A}$$

Bezdimenzionalna debljina ploče se može predstaviti kao:

$$d = N_d \times D \Rightarrow N_d = \frac{d}{D}$$

gde se  $N_d$  obično naziva *relativna debljina ploče*.



Viskoznost fluida  $\mu$  je u novom dimenzionalnom sistemu:

$$\mu = N_\mu \times \rho^a V^b D^c$$

Koristeći SI sistem, moguće je odrediti eksponente  $a$ ,  $b$  i  $c$ :

$$\begin{aligned}
 [ML^{-1}T^{-1}] &= [ML^{-3}]^a [LT^{-1}]^b [L]^c \\
 \text{Eksponenti uz } [M] &: 1 = a & \Rightarrow a = 1 \\
 [T] &: -1 = -b & \Rightarrow b = 1 \\
 [L] &: -1 = -3a + b + c & \Rightarrow c = 1
 \end{aligned}$$

pa je bezdimenzionalni izraz za viskoznost:

$$N_\mu = \frac{\mu}{\rho V D}$$

Uobičajena praksa je da se bezdimenzionalni izrazi za materijalne konstante fluida ( $\mu, \nu, \delta, \dots$ ) pišu tako da materijalna konstanta bude u imeniocu razlomka:

$$\frac{1}{N_\mu} = Re = \frac{\rho V D}{\mu} \tag{5.14}$$

Inverzna vrednost bezdimenzionalne viskoznosti predstavlja Rejnoldsov<sup>3</sup> broj. On pokazuje odnos inercijalnih uticaja (gustina i brzina u brojiocu) i viskoznih uticaja (viskoznost u imeniocu). Što je veći Rejnoldsov broj, to je viskoznost slabija i ne uspeva da smiri vrtloge u toku.

Kao rezultat dimenzionalne analize sile na ploču, dobija se bezdimenzionalni izraz:

$$C_F = \phi \left( Re, \frac{d}{D} \right)$$

Izraz pokazuje da koeficijent  $C_F$  nije konstantan, već da je funkcija Rejnoldsovog broja  $Re$  i relativne debljine ploče  $\frac{d}{D}$ .

### Primer 5.1.3

Za slučaj opstrujavanja ploče (slika 5.4) odrediti bezdimenzionalni merni broj za pritisak, ako su osnovne veličine gustina fluida  $\rho$ , brzina dolazne fluidne struje  $V$  i prečnik ploče  $D$ .

Traži se izraz za pritisak u obliku:  $p = N_p \times [\rho^a V^b D^c]$ . Koristeći SI sistem kao pomoćni sistem, nepoznati eksponenti se određuju izjednačavanjem eksponenata uz

<sup>3</sup>Biografija Rejnoldsa je data u fusnoti 1 na strani 88.

veliĉine  $L$ ,  $T$  i  $M$ :

$$\begin{aligned}
 [ML^{-1}T^{-2}] &= [ML^{-3}]^a [LT^{-1}]^b [L]^c \\
 [M] &: 1 = a && \Rightarrow a = 1 \\
 [T] &: -2 = -b && \Rightarrow b = 2 \\
 [L] &: -1 = -3a + b + c && \Rightarrow c = 0
 \end{aligned}$$

Bezdimenzionalni izraz za pritisak je:

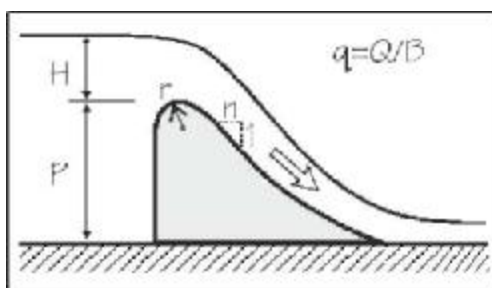
$$N_p = \frac{p}{\rho V^2} \Rightarrow C_p = \frac{p}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

gde je  $C_p$  koeficijent pritiska, koji je jednak koliĉniku pritiska i zaustavnog pritiska:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Koeficijent} \\ \text{pritiska} \end{array} \right] = \frac{[\text{Pritisak}]}{[\text{Zaustavni pritisak}]} \quad (5.15)$$

Dobijeni izraz je sliĉan izrazu za bezdimenzionalni tangencijalni napon (5.7). To je i logiĉno, jer su i pritisak i tangencijalni napon sile po jedinici površine: pritisak je rezultat normalne sile, a tangencijalni napon rezultat tangencijalne sile.

**Prelivanje preko brane** Preko brane preliva voda protokom  $Q$  (slika 5.5). Naći jednaĉinu za jediniĉni protok  $q = Q/B$ , gde je  $B$  širina brane, pretpostavljajući da je sloj vode na brani dovoljno debeo da se mogu zanemariti uticaji površinskog napona, kao i da je uticaj gravitacije znatno veći od uticaja viskoznosti.



Slika 5.5: Prelivanje preko brane visine  $P$  i širine  $B$

Veliĉine koje su bitne za prelivanje preko brane su visina vode  $H$ , visina brane  $P$ , zaobljenje krune brane  $r$ , mizvodni nagib  $n$  i gravitaciono ubrzanje  $g$ :

$$q = \varphi(g, H, P, r, n)$$

Sve veliĉine izražene preko SI sistema su:

$$[q] = [L^2T^{-1}]$$

$$[g] = [LT^{-2}]$$

$$[H] \quad [P] \quad \text{i} \quad [r] = [L]$$

Potrebne su samo dve veliĉine kao osnovne. Ako se izaberu  $g$  i  $H$ , jediniĉni protok se može izraziti kao:

$$q = N_q \times g^a H^b$$

Sređivanjem izraza po vremenu i dužini, dobija se:

$$[L^2T^{-1}] = [LT^{-2}]^a [L]^b$$

$$\begin{aligned} \text{EkspONENTI uz } [T] &: -1 = -2a \Rightarrow a = 1/2 \\ [L] &: 2 = a + b \Rightarrow b = 3/2 \end{aligned}$$

pa je traženi izraz za jedinični protok:

$$q = N_q \times g^{1/2} H^{3/2} = C_q \sqrt{gH^3} \quad (5.16)$$

Izraz je napisan u standardnoj formi, koja se koristi u oblasti otvorenih tokova. Koeficijent  $C_q$  je *koeficijent protoka* i za idealan fluid je jednak jedinici a za realan fluid je manji od jedan.

Iz polazne dimenzionalne veze za  $q$ , sledi da protok zavisi i od visine brane  $P$ , poluprečnika krune brane i nagiba brane (koji je već bezdimenzioni parametar). Bezdimenzionalna visina brane se može napisati kao  $H/P$  a poluprečnik kao  $r/P$ , pa se polazni dimenzionalni izraz svodi na sledeći bezdimenzionalni:

$$C_q = \phi \left( \frac{H}{P}, \frac{r}{P}, n \right) \quad (5.17)$$

gde se vidi da  $C_q$  nije "pravi" koeficijent, jer zavisi od tri bezdimenzionalne veličine.

#### 5.1.4 Komentari u vezi dimenzionalne analize

Postupak dimenzionalne analize izložen u prethodnim poglavljima je u principu jednostavan. Koristeći SI sistem ili neki drugi pogodan opšti dimenzionalni sistem, uspostavlja se veza između varijabli, koje su izabrane za osnovne veličine, i ostalih varijabli koje opisuju razmatrani fenomen. U nastavku će se razmotriti kriterijumi za izbor svih varijabli koje učestvuju u nekom fenomenu i ograničenja u vezi toga, kao i da li su dobijena rešenja jedinstvena, odnosno, da li rešenja zavise od izbora dimenzionalnog sistema. Na kraju će se još jednom analizirati veza dobijenih bezdimenzionalnih veličina sa sâmim eksperimentima, zbog kojih se uglavnom i radi dimenzionalna analiza.

##### 5.1.4.1 Izbor varijabli

Prvi korak u dimenzionalnoj analizi je nabranje svih varijabli, dimenzionalnih i bezdimenzionalnih (konstanti) koje su bitne za razmatrani fenomen:

$$X_1 = \varphi(X_2, X_3, \dots, X_m)$$

Za analizu i eksperimentalni rad sigurno je dobro u spisku imati što manje varijabli. Sa druge strane, ako se ne uključe sve dominantne varijable, dimenzionalna analiza neće moći da pruži dobar uvid u njihovu međuzavisnost.

**Koje sve varijable treba uzeti kao dominantne? Nema jednostavne procedure** kojom se to može definisati. Neophodno je dobro poznavanje fenomena i osnovnih fizičkih zakonitosti, kao i veliko iskustvo u eksperimentalnom radu. Česta greška je da se uključe nepotrebne varijable koje opisuju geometriju, kao na primer prečnik cevi i površina, ili dužine pravih deonica cevi ispred i iza zatvarača, ili dve brzine vode u sistemu sa dva prečnika cevi, i slično.

**Prilikom izvođenja bezdimenzionalnih brojeva**, može se dogoditi da nije moguće odrediti sve eksponente uz novoizabrane osnovne veličine. Razlog za to može da bude loš izbor novih osnovnih veličina koje nisu sveobuhvatne ili nekompletan spisak svih dominantnih varijabli. Usled neiskustva, može se dogoditi da se izaberu nove osnovne veličine koje jesu međusobno nezavisne i koje jesu sveobuhvatne, ali koje na kraju neće dati dobar uvid u fizičko značenje bezdimenzionalnih brojeva. Na primer, bezdimenzionalni pritisak u sistemu  $[\rho, V, L]$  je fizički prepoznatljiv (5.15) (primer 5.1.3) dok se to ne može reći za rešenje (5.18) u sistemu  $[\mu, V, L]$ .

Opasnija greška je, ako se izostave bitne varijable, pa se nakon dimenzionalne analize ne pojave u bezdimenzionalnoj funkciji bitni bezdimenzionalni brojevi. U datom primeru opstrujavanja tela, na strani 186, krenulo se od pretpostavke da sila na telo zavisi, pored brzine fluida i prečnika diska, samo od gustine fluida, a ne i od viskoznosti (5.9). U nizu sprovedenih eksperimenata se, međutim, pokazalo da ta pretpostavka ne daje dobre rezultate i da je neophodno u spisak dominantnih varijabli dodati još i viskoznost i debljinu ploče (5.13).

Prilikom sastavljanja liste bitnih varijabli, treba razmotriti sve veličine kojima se može u potpunosti opisati strujanje:

- geometrijske, odnosno konturne uslove  $L_i$ ,
- kinematske uslove date ili preko brzina  $V_i$  ili protoka  $Q, q, i$
- materijalne konstante:  $\rho, \mu, g, \delta, K, \dots$

U većini neustaljenih fenomena su bitni i početni uslovi, odnosno, stanje svih varijabli na početku eksperimenta i tokom vremena. Zbog toga je ponekad u spisak bitnih varijabli potrebno uključiti i potreban broj vremenskih trenutaka  $t_i$ .

## 5.1.4.2 Jedinstvenost rešenja

Izbor novih osnovnih veličina iz spiska bitnih varijabli se vrši uglavnom na osnovu iskustva. Različiti skup osnovnih veličina daje i različita rešenja za bezdimenzionalne merne brojeve. Da li su ta rešenja međusobno nezavisna pa samim tim i nose neke nove informacije?

Ako se analizira pritisak na telo usled opstrujavanja, kao bitne veličine se mogu uzeti gustina i viskoznost fluida, brzina fluida i prečnik ploče:

$$p = \varphi(\rho, \mu, V, D)$$

Novne osnovne veličine mogu biti ili  $[\rho, V, D]$  (prva kombinacija), ili  $[\mu, V, D]$  (druga kombinacija). Bezdimenzionalni broj za pritisak je za prvu kombinaciju osnovnih veličina:

$$\frac{p}{\rho V^2} = \phi_0 \left( \frac{\mu}{\rho V D} \right) = \phi_1 \left( \frac{\rho V D}{\mu} \right)$$

dok je za drugu kombinaciju:

$$\frac{p D}{\mu V} = \phi_2 \left( \frac{\rho V D}{\mu} \right) \quad (5.18)$$

Oba rešenja za bezdimenzionalni pritisak će na kraju dovesti do istog izraza za pritisak  $p$  mada su funkcije  $\phi_1$  i  $\phi_2$  različite. Rešenja nisu međusobno nezavisna, jer je moguće napraviti proizvod bezdimenzionalnih brojeva iz prve relacije da bi se dobio bezdimenzionalni broj iz druge relacije:

$$\left( \frac{p}{\rho V^2} \right)^a \left( \frac{\rho V D}{\mu} \right)^b = \frac{p D}{\mu V}$$

pri čemu su eksponenti  $a = 1$  i  $b = 1$ .

Da li je prvi ili drugi oblik bezdimenzionalnog broja bolji za opisivanje fenomena, u mnogome zavisi od potreba, a i samih mogućnosti da se napravi eksperiment. Dobro je koristiti bezdimenzionalne brojeve koji su opšteprihvaćeni u Mehanici fluida jer se time olakšava razmena podataka i međusobno upoređivanje rezultata eksperimenata.

## 5.1.4.3 Veza sa eksperimentima

Dimenzionalna analiza se najčešće koristi za analizu pojava čija direktna analitička veza sa drugim veličinama nije unapred poznata te je tu vezu neophodno istražiti kroz eksperimente. Na osnovu ustanovljenih veza bezdimenzionalnih brojeva, projektuje se eksperiment i kasnije se tumače dobijeni

rezultati. Pri tome važi opšte pravilo da sa porastom broja bezdimenzionalnih brojeva raste i kompleksnost eksperimenata.

Ako je rezultat dimenzionalne analize samo jedan bezdimenzionalni broj, to znači da je on konstanta, čiju vrednost treba ustanoviti samo jednim eksperimentom. Dobra praksa je, naravno, da se uradi više ponovljenih eksperimenata u promenjenim uslovima, kako bi se i merenjima potvrdila ispravnost rezultata dimenzionalne analize. Takođe, usled neizbežnih slučajnih grešaka u merenjima, najverovatnija vrednost konstante se dobija kao srednja vrednost više rezultata merenja.

---

#### Primer 5.1.4

U primeru sa prostom gredom (strana 185) dimenzionalna analiza pokazuje da je merni broj za moment konstanta, da ne zavisi od drugih bezdimenzionalnih veličina:

$$N_M = \frac{M_0}{qL^2}$$

U sprovedenom eksperimentu, za gredu dužine  $L = 1$  m, pri različitim opterećenjima su izmereni momenti  $M_0$ . Izračunati bezdimenzionalni moment  $N_M$ .

Veličina	Dimenzija	1	2	3	4	5
$q$	kN/m	0,818	1,522	2,010	3,153	4,050
$M_0$	Nm	0,103	0,191	0,251	0,392	0,505
$N_M$	–	0,1259	0,1251	0,1249	0,1243	0,1247

Iz izmerenih momenata na sredini grede izračunat je bezdimenzionalni moment  $N_M$  (poslednji red u tabeli). Rezultat bi trebalo da bude jedan, konstantan broj, ali on varira zbog neizbežnih grešaka u merenju. Najverovatnija vrednost bezdimenzionalnog momenta je jednaka srednjoj vrednosti:

$$N_M = \frac{1}{5}(0,1259 + 0,1251 + 0,1249 + 0,1243 + 0,1247) = 0,12498 = 0,125$$

Analitičko rešenje istog problema daje moment na sredini grede:

$$M_0 = \frac{1}{8}qL^2$$

što je u potpunoj saglasnosti sa rezultatima obavljenog eksperimenta.

---

Kada su dva bezdimenzionalna broja rezultat dimenzionalne analize, oblika:

$$N_1 = \phi(N_2)$$

rezultati eksperimenta se mogu prikazati jednom linijom, na dijagramu sa osama  $N_1$  i  $N_2$ . U primeru prelivanja preko brane (strana 190) pokazano je u izrazu (5.17) da koeficijent protoka zavisi od relativne visine brane:

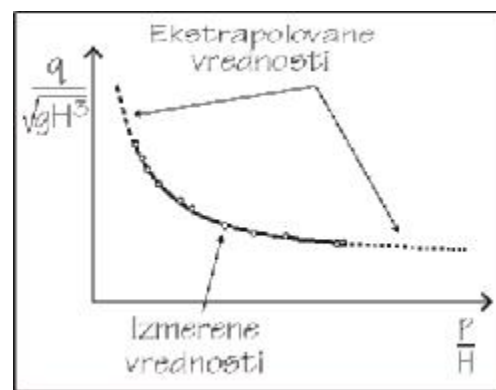
$$C_q = \frac{q}{\sqrt{gH^3}} = \phi\left(\frac{P}{H}\right)$$

U eksperimentu treba napraviti opite sa nekoliko različitih visina prelivnog mlaza  $H$  dok samu visinu brane  $P$  nije neophodno menjati. Naravno, ako se želi postići veliki opseg promena  $P/H$ , neophodno je napraviti i eksperimente sa različitim visinama brane  $P$ .

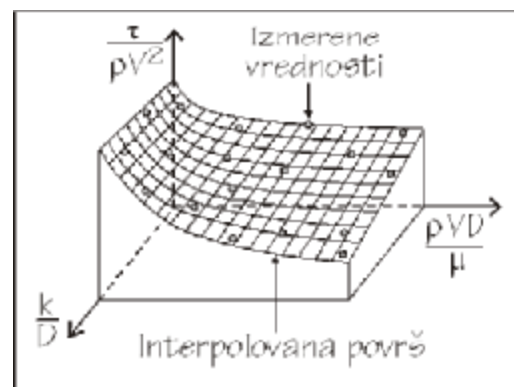
Na slici 5.6, dat je primer dobijenih rezultata merenja (tačke) i fitovane krive kroz te tačke (puna linija). Oblik krive, koja se koristi za fitovanje izmerenih rezultata zavisi od problema koji se izučava i trebalo bi da bude zasnovan na teorijskoj analizi. Na osnovu rezultata fitovanja, moguće je u određenoj meri i ekstrapolovati funkciju  $\phi$  (isprekidana linija na slici 5.6), mada u tome treba biti posebno pažljiv.

Kako raste broj bezdimenzionalnih brojeva, tako i kompleksnost samog eksperimenta i obrade podataka značajno raste. Kod tri bezdimenzionalna broja opšta zavisnost je oblika  $N_1 = \phi(N_2, N_3)$  i nju je još uvek moguće prikazati na standardnim dijagramima sa  $N_1$  i  $N_2$  osama, pomoću familije krivih linija sa konstantnim  $N_3$  brojem. Na slici 5.2 je na taj način prikazana zavisnost mernog broja za tangencijalni napon u odnosu na merni broj za viskoznost (odnosno, Reynoldsov broj) za različite vrednosti mernog broja za hrapavost (odnosno, pri konstantnoj relativnoj hrapavosti).

U poslednje vreme su popularni i trodimenzionalni prikazi prostornih površina koje su definisane funkcijom  $\phi$  (slika 5.7). Kroz izmerene tačke se interpoluje teorijska funkcija primenom, obično, metode najmanjih kvadrata razlika između izmerenih i fitovanih vrednosti. Ako nije poznat teorijski oblik



Slika 5.6: Funkcija  $\phi$  - veza dva bezdimenzionalna broja



Slika 5.7: Prostorni prikaz veze tri bezdimenzionalna broja

površine, tada se najčešće smatra da su izmerene tačke apsolutno tačne, a prostor između tačaka se interpoluje nekom od korelacionih ili statističkih metoda.

### 5.1.5 Standardni bezdimenzionalni brojevi u Mehanici fluida

U oblasti Mehanike fluida, bezdimenzionalne veličine se često koriste kao način sporazumevanja. Na primer, kao uslov za izbor dobrog mesta za postavljanje merila protoka na cevi, obično se kaže da mora postojati prilazna pravolinijska deonica minimalne dužine  $10D$ . Ovo je mnogo praktičnije nego da se definišu potrebne dužine u metrima, u zavisnosti od prečnika cevi.

Najčešće veličine koje se koriste kao osnovne veličine u dimenzionalnoj analizi su gustina, brzina i dužina. Kroz gustinu fluida se u analizu unosi masa, kao pokazatelj inercijalnosti. Brzina može biti srednja brzina fluida u cevi, brzina objekata koji se kreće kroz fluidnu struju koja miruje ili brzina nekog karakterističnog fluidnog delića. Brzina je pokazatelj kinematičnosti toka i kroz nju se u analizu unosi vreme. Na kraju, sa odabranom karakterističnom dužinom ili prečnikom se opisuju geometrijski uslovi zadatka.

U svakom zadatku Mehanike fluida su uključene jedna ili više materijalnih (dimenzionalnih) konstanti čije vrednosti mogu biti nepromenljive (konstantne) ili promenljive u prostoru i vremenu. Za usvojeni novi dimenzionalni sistem  $[\rho, V, L]$  moguće je naći bezdimenzionalne brojeve materijalnih konstanti. U tabeli 5.1, date su neke najčešće korišćene materijalne konstante u bezdimenzionom obliku, a u nastavku se daju i komentari o nekoliko najčešće korišćenih brojeva.

**Bezdimenzionalna viskoznost** Bezdimenzionalni broj koji predstavlja viskoznost je *Rejnoldsov broj*, sa oznakom  $Re$ . Rejnoldsov broj je veoma značajan za većinu zadataka Mehanike fluida i u prethodnim primerima je već pokazano kako se on dobija (5.14):

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu}$$

U izrazu za Rejnoldsov broj  $\mu$  je *dinamički koeficijent viskoznosti*, a odnos  $\mu/\rho$  je *kinematski koeficijent viskoznosti* (jednačina (2.8), na strani 16).

Rejnoldsov broj se najčešće tumači kao *odnos inercijalnih i viskoznih uticaja*. Ako se inercijalna sila definiše preko proizvoda mase i ubrzanja i izrazi se u dimenzionalnom sistemu  $[\rho, V, L]$  dobija se:

$$F_I = ma = \rho L^3 \times V^2 L^{-1} = \rho V^2 L^2 \quad (5.19)$$



Bezdim. grupa	Ime Oznaka	Tumačenje (odnos sila)	Primena
$\frac{\rho VL}{\mu}$	Rejnoldsov broj <i>Re</i>	<u>inercijalne</u> <u>viskozne</u>	Generalno važno za većinu hidrotehničkih zadataka
$\frac{V^2}{gL}$	Frudov broj <i>Fr</i>	<u>inercijalne</u> <u>gravitacione</u>	Tok sa slobodnom površinom, talasi
$\frac{p}{\rho V^2}$	Euler-ov broj <i>Eu</i>	<u>pritisak</u> <u>inercijalne</u>	Problemi gde je bitan pritisak ili razlika pritiska)
$\frac{\rho V^2 L}{\delta}$	Veberov broj <i>We</i>	<u>inercijalne</u> <u>površ. napon</u>	Problemi gde je površinski napon dominantan (male dubine)
$\frac{V}{c}$	Mahov broj <i>Ma</i>	<u>inercijalne</u> <u>stišljivost</u>	Tok sa izraženom stišljivošću fluida (c je brzina zvuka)
$\frac{\rho V^2}{K}$	Košijev broj <i>Ca</i>	<u>inercijalne</u> <u>stišljivost</u>	Tok sa izraženom stišljivošću fluida (K je modul stišljivosti)
$\frac{\omega L}{V}$	Strouhal-ov broj <i>St</i>	<u>inerc.</u> <u>lokalne</u> <u>inerc. konvekt.</u>	Neustaljeni tok sa karakterističnim frekvencijama $\omega$ oscilacija

Tabela 5.1: Najčešće korišćeni bezdimenzionalni brojevi u Mehanici fluida

Viskozna sila je proizvod tangencijalnog napona i površine, pa izražena u istom dimenzionalnom sistemu je jednaka:

$$F_V = \tau A = \mu VL \quad (5.20)$$

Sada se vidi da je odnos te dve sile jednak Rejnoldsovom broju:

$$\frac{F_I}{F_V} = \frac{\rho V^2 L^2}{\mu VL} = \frac{\rho VL}{\mu} = Re$$

Kod razvijenog laminarnog toka ovakvo tumačenje Rejnoldsovog broja nije dobro, jer je inercijalna sila nula dok je Rejnoldsov broj veći od nule. Isti fenomen se može posmatrati i preko odnosa karakterističnih vremenskih skala koje učestvuju u fenomenu. Viskoznost je “zadužena” za molekularni,

difuzni transfer, koji se obavlja sa vremenskom razmerom  $T_{DIF}$ , dok se konvektivni transfer vrši pomeranjem delića brzinom  $V$ , pa je vremenska skala  $T_{KON}$ :

$$T_{DIF} = \frac{L^2}{\nu} \quad T_{KON} = \frac{L}{V}$$

gde je  $L$  karakteristična dužina. Inverzni odnos tih vremena, odnosno, odnos brzina kojima se obavljaju konvektivni i difuzni transfer, je jednak Reynoldsovom broju:

$$\frac{1/T_{KON}}{1/T_{DIF}} = \frac{T_{DIF}}{T_{KON}} = \frac{L^2 V}{\nu L} = \frac{V L}{\nu} = Re$$

Dobijena relacija daje i drugo fizičko tumačenje Reynoldsovog broja kao *odnosa brzina konvektivnog i difuznog transfera momenta* u fluidu. Kod malih Reynoldsovih brojeva, u laminarnom tečenju, difuzni transfer je dominantan, jer je brzina približno jednaka nuli. Kod velikih Reynoldsovih brojeva turbulencija i velika srednja brzina su zaduženi za konvektivni transfer a difuzni transfer je zanemarljiv.

**Bezdimenzionalna gravitacija** Bezdimenzionalni broj, koji predstavlja gravitaciju. je *Frudov*<sup>4</sup> broj, sa oznakom  $Fr$ . Gravitaciono ubrzanje  $g$  se može napisati kao:

$$g = N_G \times \frac{L}{T^2} = N_G \times \frac{V^2}{L}$$

pa se sređivanjem dobija Frudov broj<sup>5</sup>:

$$Fr = \frac{1}{N_G} = \frac{V^2}{gL} \quad (5.21)$$

Frudov broj je značajan u oblasti dinamike fluida, gde sila gravitacije utiče na kretanje fluidnih delića. Svi zadaci sa otvorenim tokovima spadaju u ovu oblast. Takođe i zadaci koji izučavaju otpore na telo moraju uzeti u

<sup>4</sup>William Froude (1810 - 1870), engleski inženjer građevine, matematičar i poznati projektant brodova. Froude je obavio pionirska istraživanja u oblasti modeliranja brodova vučenjem kroz bazen.

<sup>5</sup>Važna napomena: U anglosaksonskoj stručnoj literaturi je uobičajeno da se koristi Frudov broj koji je kvadratni koren iz recipročne vrednosti mernog broja  $N_G$ :

$$Fr = \frac{1}{\sqrt{N_G}} = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

obzir Frudov broj, ako se telo nalazi samo delimično potopljeno u fluid, kao na primer otpor kretanja broda ili opterećenje mostovskog stuba.

Frudov broj se može tumačiti i kao odnos inercijalne sile (čiji je predstavnik brzina) i gravitacione, koja pod dejstvom dubine i gravitacije pokušava da “smiruje” fenomen. Gravitaciona sila (sila težine) je proizvod mase i gravitacionog ubrzanja. Ako se masa izrazi u  $[\rho, L]$  dimenzionalnom sistemu, dobija se:

$$F_G = mg = \rho g L^3 \quad (5.22)$$

pa se vidi da je odnos inercijalne sile (5.19) i gravitacione sile jednak Frudovom broju:

$$\frac{F_I}{F_G} = \frac{\rho V^2 L^2}{\rho g L^3} = \frac{V^2}{gL} = Fr \quad (5.23)$$

Ako je Frudov broj veći od 1, znači da je inercijalna sila “jača” od gravitacione i da su uticaji brzine dominantni. Takvo tečenje je povezano sa “silovitim” tečenjem. Obrnuto, ako je Frudov broj manji od 1, tečenje je sa malim brzinama, “mirno”, jer je gravitacija “jača”.

**Bezdimenzionalna kapilarna konstanta** U Mehanici fluida, na Gradevinskom fakultetu, za najveći broj zadataka, bitni su viskoznost i gravitacija, pa se zato najčešće i koriste Rejnoldsov i Frudov broj. U manjem broju zadataka su interesantni kapilarna konstanta i stišljivost (zajedno sa brzinom propagacije talasa), dok se ostale materijalne konstante veoma retko sreću.

Bezdimenzionalni broj, koji predstavlja kapilarnu konstantu, je *Veberov<sup>6</sup> broj*, sa oznakom  $We$ . Površinski napon (kapilarna konstanta)  $\delta$ , može se napisati kao sila po jedinici dužine:

$$\delta = N_\delta \times FL^{-1} = N_\delta \times \rho LV^2$$

pa je Veberov broj inverzna vrednost bezdimenzionog mernog broja:

$$We = \frac{1}{N_\delta} = \frac{\rho LV^2}{\delta} \quad (5.24)$$

Veberov broj je od značaja za strujanja sa izraženim uticajem granice dva fluida ili kod strujanja tankog sloja fluida preko čvrste granice. Kod većine površinskih tokova, kada je veoma mala dubina (ili tanak sloj vode koji teče) kapilarne sile postaju značajne i treba ih, pored gravitacije, uzeti u obzir. Takođe, u analizi vlage u zemljištu, kapilarne sile mogu biti za red veličine veće od gravitacionih sila.

<sup>6</sup>Moritz Weber (1871 - 1951), nemački profesor pomorske mehanike. Uveo je u upotrebu standardne bezdimenzionalne brojeve kao osnovu za istraživanje sličnosti.

**Bezdimenzionalni moduo stišljivosti** Bezdimenzionalni broj, koji predstavlja stišljivost, je *Košijev*<sup>7</sup> broj, sa oznakom *Ca*. Prema definiciji (2.10) (strana 22), relativno smanjenje zapremine je jednako odnosu povećanja pritiska i zapreminskog modula stišljivosti *K*:

$$K = N_K \times p = N_K \times ML^{-1}T^{-2} = N_K \times \rho V^2$$

Košijev broj je jednak mernom broju:

$$Ca = N_K = \frac{\rho V^2}{K} \tag{5.25}$$

Pokazatelj stišljivosti fluida je i brzina propagacije talasa kroz fluid *c* koja je jednaka korenu odnosa modula stišljivosti i gustine:

$$c = N_c \times \sqrt{\frac{K}{\rho}} = N_c \times \sqrt{\frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-3}}} = N_c \times \sqrt{\frac{L^2}{T^2}} = N_c \times V$$

**Bezdimenzionalni broj za brzinu propagacije**, zove se *Mahov*<sup>8</sup> broj, sa oznakom *Ma*:

$$Ma = \frac{1}{N_c} = \frac{V}{c} \tag{5.26}$$

Može se uspostaviti veza između Mahovog i Košijevog broja, ako se u Mahovom broju brzina propagacije talasa napiše preko stišljivosti:

$$Ma = \frac{V}{c} = \frac{V}{\sqrt{\frac{K}{\rho}}} = V \sqrt{\frac{\rho}{K}} \Rightarrow Ma^2 = \frac{\rho V^2}{K} = Ca$$

tako da se oba broja mogu koristiti za opisivanje uticaja stišljivosti fluida, odnosno, kao pokazatelj odnosa inercijalnih sila i sila stišljivosti. Kada je **Mahov broj relativno mali (ispod 0,3)**, inercijalne sile izazvane kretanjem fluida su relativno slabe i ne mogu da naprave značajniju promenu gustine fluida. Zbog toga se u praktičnim zadacima određivanja opterećenja građevinskih objekata od strane vetra može značajno uprostiti rešenje zanemarujući stišljivost vazduha.

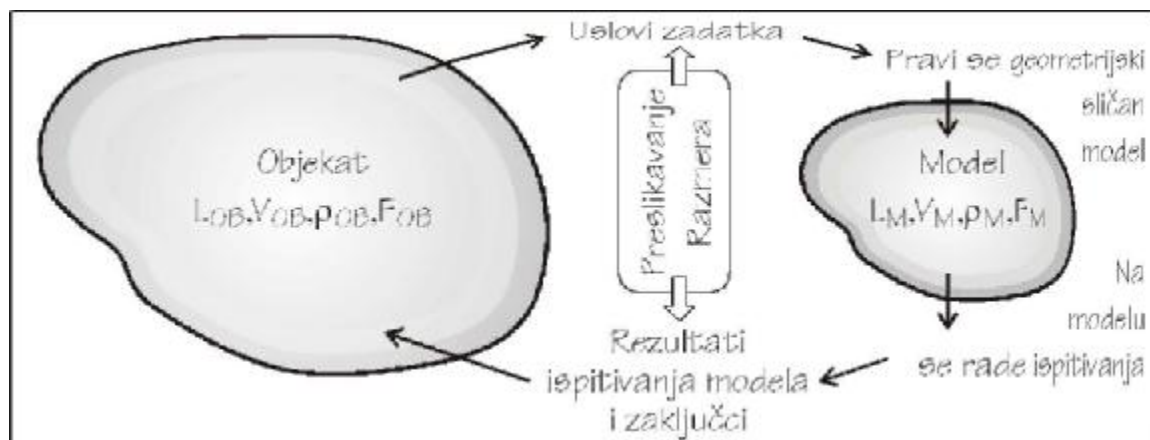
<sup>7</sup>Augustin Louis de Cauchy (1789 - 1857), francuski inženjer hidrodinamike i matematičar. Bavio se analizom realnih i kompleksnih brojeva, teorijom permutacija, kao i konvergencijom i divergencijom beskonačnih nizova, diferencijalnih jednačina, determinanti i verovatnoća u matematici i fizici.

<sup>8</sup>Ernst Mach (1838 - 1916), češko-austrijski fizičar i filozof. U oblasti fizike se bavio interferencijom, difrakcijom, polarizacijom i refrakcijom svetla, kao i supersoničnim brzinama i pojavom stojećih talasa.

## 5.2 Sličnost i fizički modeli

Postoji veliki broj problema, koji zahtevaju korišćenje *geometrijski sličnog* modela, na kome će se u *kontrolisanim uslovima* izučavati određene pojave. Svi veći inženjerski projekti, kao što su izrade velikih rečnih i morskih luka, brana na rekama, brodova, aviona, superbrzih vozova, mostova sa velikim rasponom i slično, zahtevaju pravljenje modela. Sve do kraja 20-og veka su pravljene skoro isključivo fizički modeli, dok se danas često kombinuju fizički i matematički modeli. Fenomeni, koji su dobro istraženi i koji mogu da se modeliraju za određenu geometriju uprošćenim matematičkim modelima turbulencije, računaju se upotrebom 2D ili 3D simulacija (akustika pozorišne sale, strujanje vode u jezeru, itd.). Svi ostali detalji, koji su prekomplikovani za matematičko modeliranje ili gde postojeći matematički modeli strujanja nisu dovoljno tačni (višefazno strujanje, mešavina vode i vazduha na brzotocima preliva, komplikovani granični uslovi, itd.) i dalje zahtevaju pravljenje fizičkih modela.

Opšta definicija modela bi mogla da bude da je to *sve ono na čemu se nešto proučava*, dok je definicija prirode, odnosno objekta da je to *sve ono na šta se proučavanja odnose*. Ovakva definicija obuhvata razne vrste modela: matematičke, fizičke, ali i foto modele, ekonomske modele kao i sociološke modele. Sam pojam *fizički model* vezuje se za ispitivanje nekih fizičkih fenomena na modelu (na primer, automobil ili avion u aerotunelu, ili preliv na brani), a zatim na prenošenje dobijenih rezultata na prirodu. Problem sa kojim je suočen svaki modelar je *kakav i koliko veliki* (odnosno, mali) treba da bude model, kao i *kako uspostaviti relacije između izmerenih veličina na modelu i istih u prirodi*.



Slika 5.8: Objekat i geometrijski sličan model

Da bi rezultati merenja na modelu bili uporedivi sa prirodom, model i strujna slika na modelu moraju biti *slični* prirodi, odnosno objektu u prirodi. Sličnost znači *moгуćnost preslikavanja nekog problema sa objekta na model* (slika 5.8). Sa objekta na model se prenose uslovi zadatka, a sa modela na objekat rezultati dobijeni ispitivanjima modela kao i zaključci dobijeni tokom eksperimenta. Odnos veličina koje se prenose između objekta i modela se naziva *razmera*. Za neku veličinu  $X$  razmera je:

$$X_{\star} = \frac{X_O}{X_M} \quad [-]$$

Simbol zvezde ( $\star$ ) se koristi kao oznaka za razmeru<sup>9</sup>. Razmera za veličinu  $X_{\star}$  je uvek bezdimenzionalni broj jer je količnik dve iste veličine.

Uslov da su model i objekat *geometrijski slični* je prilično jasan: koeficijent gubitka energije na leptirastom zatvaraču, na primer, sigurno najviše zavisi upravo od konstrukcije zatvarača i ne bi imalo smisla koristiti neki drugi, na primer kuglični zatvarač, da se modelira leptirasti. Koji su još uslovi sličnosti koje treba da ispuni model? Strujna slika oko objekta je sigurno bitna za većinu fenomena, pa bi bilo dobro da se i ona verno predstavi na modelu, odnosno, da bude ispunjena *kinematska sličnost*. Kako se na modelu istražuju sile koje treba preneti na prirodu, neophodno je da bude ispunjena i *dinamička sličnost*.

### 5.2.1 Geometrijska sličnost

Geometrijska sličnost podrazumeva da su *objekat i model istog oblika ali različitih veličina*. Sve razmere za dužine treba da budu iste:

$$L_{\star} = \frac{L_{1O}}{L_{1M}} = \frac{L_{2O}}{L_{2M}} = \frac{L_{3O}}{L_{3M}} = \dots = \frac{L_{nO}}{L_{nM}}$$

Razmera za površine je  $A_{\star} = L_{\star}^2$  a za zapremine  $V_{\star} = L_{\star}^3$ .

Kompletnu geometrijsku sličnost, na žalost, često nije moguće postići. Ako se, na primer, modelira transport finog nanosa u kanalu, koristeći model razmere za dužine  $L_{\star}$ , model tečenja vode u betonskom kanalu zahteva smanjenje hrapavosti dna na modelu u istoj razmeri kao i smanjenje dužina. To bi značilo da je na modelu potrebno napraviti izuzetno glatko dno, što

<sup>9</sup>Neki autori kao oznaku za razmeru koriste malo slovo  $r$  od engleske reči *ratio* - odnos, pa je razmera za dužine, na primer  $L_r = L_O/L_M$ . Često se koristi i *modelska razmera* sa oznakom  $\lambda$  koja je jednaka inverznoj vrednosti razmere  $L_{\lambda} = 1/L_{\star} = L_M/L_O$ . Za modelsku razmeru za dužine od 1:20 ili  $\lambda = 0,05$  odgovarajuća razmera za dužine je 20:1 odnosno  $L_{\star} = 20$ . Modelska razmera se standardno koristi u kartografiji.

često nije moguće. Kretanje peska po dnu u prirodi treba modelirati sa **prahom koji je  $L_*$  puta manji od peska**, a tada su kohezione sile drukčije nego kod peska. Pa čak ni uslovi tečenja u samom modelu verovatno neće biti isti, jer će zbog velikog smanjenja poprečnog preseka doći do smanjenja Reynoldsovog broja, pa će tečenje biti laminarno umesto turbulentnog koje je na objektu.

Rešenje se često nalazi u svesnoj distorziji modela, kada se usvajaju različite razmere za dužinu, širinu, hrapavost ili neku drugu dužinsku dimenziju. Takvi modeli su, po pravilu, komplikovaniji za analizu i za prenošenje rezultata na objekat i zahtevaju detaljno izučavanje efekta distorzije na dobijene rezultate.

### 5.2.2 Kinematska sličnost

Kinematska sličnost znači da je, pored geometrijske sličnosti, postignuta i *sličnost za brzine*. Razmere za brzine u svim odgovarajućim tačkama objekta i modela treba da budu iste:

$$V_* = \frac{V_{1O}}{V_{1M}} = \frac{V_{2O}}{V_{2M}} = \frac{V_{3O}}{V_{3M}} = \dots = \frac{V_{nO}}{V_{nM}}$$

Zahvaljujući geometrijskoj i kinematskoj sličnosti, strujna slika oko modela će biti ista kao i strujna slika u prirodi.

---

#### Primer 5.2.1

Ako je automobil dužine 4,0 m (objekat) a njegov model dužine 0,5 m, kolika je razmera za dužine? Ako se model automobila kreće brzinom od 10 m/s, kolika je brzina automobila (objekta)?

Razmera za dužine je odnos dužina objekta i modela:

$$L_* = \frac{L_O}{L_M} = \frac{4,0}{0,5} = 8$$

Razmera  $L_* = 8$  važi samo za dužine. Da bi se odredila brzina automobila (objekta) potrebno je prvo naći razmeru za brzine, kao odnos brzina objekta i modela:

$$V_* = \frac{V_O}{V_M}$$

Ako se uvrsti razmera za dužine u prethodni izraz, dobija se:

$$V_* = \frac{\frac{L_O}{T_O}}{\frac{L_M}{T_M}} = \frac{L_O}{L_M} \frac{T_M}{T_O} = L_* \frac{1}{T_*} = 8 \frac{1}{T_*}$$

Razmera za vreme po pravilu nije  $T_{\star} = 1$  (vreme ne protiče istom brzinom na objektu, u prirodi, i na modelu) već je u zadatku nepoznata. Bez dodatnih uslova nije moguće odgovoriti kolika će biti brzina automobila (objekta).

U datom primeru je prilikom izvođenja razmere za brzine, pokazano prvo pravilo sličnosti: *Razmere za dimenzionalne veličine se odnose kao dimenzije tih veličina.* Dakle, brzina automobila  $V$ , koja može da se izračuna kao pređeni put  $L$ , za vreme  $T$ :

$$V = \frac{L}{T} \quad \text{ima razmeru} \quad V_{\star} = \frac{L_{\star}}{T_{\star}}$$

Kako se razmere odnose kao i njihove dimenzije, sledi da postoji onoliko nezavisnih razmera koliko i nezavisnih osnovnih veličina. U Mehanici fluida se koriste tri osnovne veličine, pa odatle sledi da su na raspolaganju i tri nezavisne razmere.

Iz prvog pravila posredno sledi i drugo pravilo sličnosti: *Bezdimenzionalne veličine se prenose nepromenjene sa modela na objekat, odnosno, Razmera za bezdimenzionalne veličine je 1.* Ako pritisak u nekoj tački može da se izračuna preko izraza:

$$p = C_p \frac{1}{2} \rho V^2$$

tada je razmera za pritisak:

$$p_{\star} = (C_p)_{\star} \left(\frac{1}{2}\right)_{\star} \rho_{\star} (V^2)_{\star} = \rho_{\star} (V_{\star})^2$$

Jedan od problema pri izradi modela je postizanje sličnosti za brzine na granicama modela. Model koji se napravi je uvek “isečak” iz prirode, “prozor” kroz koji se gleda na deo prirodnog strujanja. Strujnu sliku koja je na granicama tog prozora, u prirodi, često je teško ili nemoguće reprodukovati na modelu, jer je na modelu to istovremeno i fizička granica prostora. Na primer, ako se pravi model brane na reci i ako je bitna strujna slika u okolini zahvatnih građevina, veoma je bitno da se na modelu postigne verna strujna slika u uzvodnim presecima. Kako je, međutim, model konačne dužine (obično je sa uzvodne strane dugačak  $L/W = 3 - 5$  gde je  $W$  širina reke), veoma je teško postići da voda iz nekog rezervoara ulazi u model upravo sa istim rasporedom brzina kao što se to događa u prirodi. Zbog toga je potrebno “kalibrisati” model, proveriti verodostojnost strujne slike na modelu u odnosu na prirodu i oceniti uticaj eventualne razlike strujne slike na rezultate istraživanja.

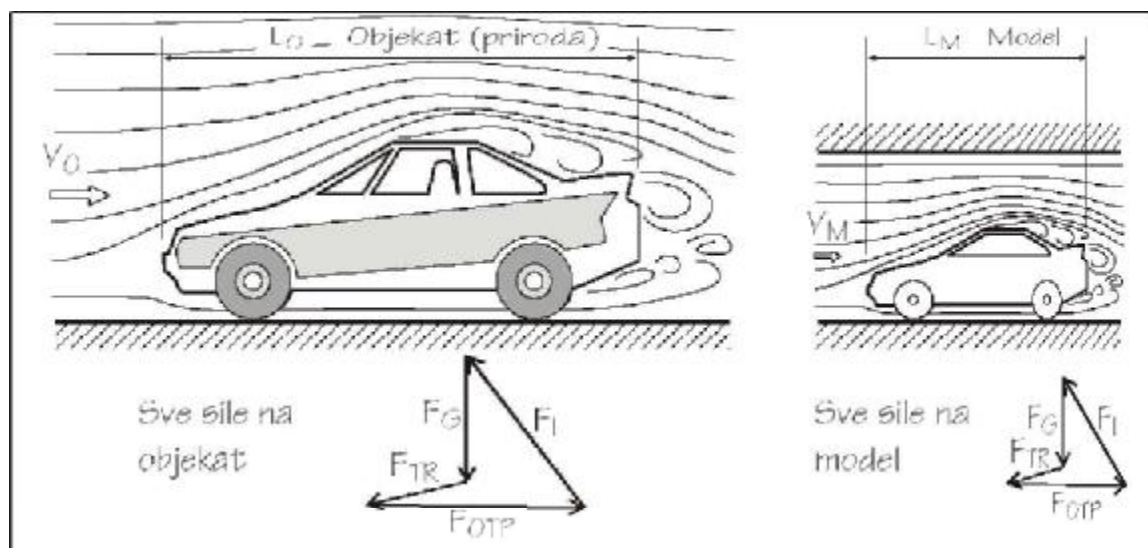


Drugi primer ograničenosti modela da verno reprodukuje strujnu sliku iz prirode se vidi na slici 5.9, gde se model automobila ispituje u vazдушnom tunelu. Uslov da dolazne brzine budu istovetne, ovde je relativno lako postići, dok je drugi uslov, da je iznad automobila “beskonačan” prostor, gotovo nemoguće postići zbog ograničenih dimenzija vazdušnog tunela (na slici je nacrtan zbog toga zid i iznad modela). Znači, pored osnovnih ispitivanja sila na model, neophodno je sprovesti i posebna istraživanja o uticaju blizine drugog zida na strujnu sliku.

### 5.2.3 Dinamička sličnost

Dinamička sličnost znači da je, pored geometrijske i kinematske sličnosti, postignuta i *sličnost svih odgovarajućih sila*. U obzir se uzimaju realne sile (zapreminske, sila težine  $F_G$  i površinske, sila pritiska  $F_P$  po preseku i normalno na konturu i viskozna sila  $F_\mu$ , ili sila trenja) i fiktivna inercijalna sila (slika 7.9 na strani 295), pri čemu mora biti postignuta ravnoteža tih sila (jednačina (7.10) na strani 295):

$$\vec{F}_G + \vec{F}_P + \vec{F}_\mu + \dots + \vec{F}_I = 0$$



Slika 5.9: Sličnost dimenzija, brzina i sila koje deluju na automobil u mirovanju pri kretanju fluida brzinom  $V$

Kako prema dinamičkoj sličnosti razmere za sve interesantne sile moraju biti iste (slika 5.9), sledi:

$$F_\star = \frac{F_{G_O}}{F_{G_M}} = \frac{F_{P_O}}{F_{P_M}} = \frac{F_{\mu_O}}{F_{\mu_M}} = \dots = \frac{F_{I_O}}{F_{I_M}}$$

Ako se fiktivna inercijalna sila uzme kao referentna sila, tada se prethodna jednakost  $n$  sila može napisati kao  $n - 1$  nezavisnih uslova:

$$\left(\frac{F_I}{F_G}\right)_O = \left(\frac{F_I}{F_G}\right)_M, \left(\frac{F_I}{F_P}\right)_O = \left(\frac{F_I}{F_P}\right)_M, \left(\frac{F_I}{F_\mu}\right)_O = \left(\frac{F_I}{F_\mu}\right)_M, \dots \quad (5.27)$$

U poglavlju 5.1.5, *Standardni bezdimenzionalni brojevi u Mehanici fluida*, uvedeni su bezdimenzionalni brojevi za većinu materijalnih konstanti (tabela 5.1). Pokazano je da su svi bezdimenzionalni brojevi u stvari odnosi inercijalnih sila i odgovarajućih realnih sila. Na primer, za Frudov broj (5.21) je pokazano izrazom (5.23) da se dobija kao odnos:

$$Fr = \frac{F_I}{F_G}$$

pa se onda prva jednakost u uslovu dinamičke sličnosti može napisati kao:

$$(Fr)_O = (Fr)_M \Rightarrow Fr_\star = \frac{(Fr)_O}{(Fr)_M} = 1$$

Uslov dinamičke sličnosti nameće da su Frudovi brojevi na objektu i modelu isti, odnosno, da je njihova razmera jednaka jedinici. Slično se može izvesti i za ostale jednakosti iz izraza (5.27), zamenjujući redom odgovarajuće bezdimenzionalne brojeve iz tabele 5.1, što daje  $n - 1$  nezavisnih uslova sličnosti svih sila:

$$Fr_\star = 1, \quad Eu_\star = 1, \quad Re_\star = 1, \quad We_\star = 1, \dots \quad (5.28)$$

Na primer, ako je u nekom fenomenu dominantna samo sila težine (od realnih sila), model mora da zadovolji sličnost za sile težine i inercijalne sile, odnosno, da zadovolji da je razmera za Frudov broj  $Fr_\star = 1$ .

Uvođenjem dinamičke sličnosti, sada je moguće završiti primer 5.2.1, sa strane 203. Potrebno je odrediti koji su uticaji na objekat dominantni, i postaviti uslov da je razmera za odgovarajući broj jedinca. Ako su to uticaji viskoznosti, tada se uvodi uslov:

$$Re_\star = 1 \Rightarrow \frac{V_\star L_\star}{\nu_\star} = 1$$

Kako se modelira sa istim fluidom kao i na objektu, može se staviti da je  $\nu_\star = 1$ , pa se dobija nedostajuća veza između razmere za dužinu i za brzinu  $V_\star L_\star = 1$ , pomoću koje je moguće rešiti primer.

## 5.2.4 Sloboda izbora razmera za fizičke modele

Ako se kreće u avanturu pravljenja modela, kako odabрати razmere za osnovne veličine, dužinu  $L_*$ , brzinu  $V_*$  i gustinu  $\rho_*$ ? Izbor tih razmera nije slobodan, jer se kroz uslov o zadovoljenju geometrijske, kinematske i dinamičke sličnosti vezuju pojedine razmere.

Najprostiji model treba da obezbedi sličnost samo geometrijskih (konturnih) i početnih uslova, pri čemu se ne postavljaju zahtevi za sličnost sila. Kod takvog modela je slobodan izbor sve tri razmere:  $L_*$ ,  $V_*$  i  $\rho_*$ . Međutim, kako je izbor fluida sa kojim se modelira ograničen, razmera za gustinu mora biti fiksirana. Ako je na modelu i na objektu isti fluid, razmera će biti  $\rho_* = 1,0$ , inače je  $\rho_* = \rho_O / \rho_M \neq 1,0$ . Ovakva sličnost se naziva *inercijalna*, ili *geometrijska sličnost*, a istraživač je slobodan da izabere preostale dve razmere prema raspoloživom prostoru i uslovima u laboratoriji.

Ako se pored inercijalne (geometrijske) sličnosti traži i sličnost sila, onda je to *dinamička sličnost*, pa je potrebno ispuniti uslove (5.28), odnosno, obezbediti da razmere bezdimenzionalnih fizičkih karakteristika fluida ( $Re$ ,  $We$ ,  $Ca$ ,  $Fr$ ), koje u sebi nose odnose traženih sila i inercijalnih sila, budu jednake jedinici. *Dinamička sličnost vezuje broj nezavisnih razmera tako da svaki dodatni zahtev o sličnosti neke od sila smanjuje za po jedan slobodne dve razmere (treća je vezana inercijalnim uslovom):*

- *Broj slobodnih razmera:  $(3-1)-1=1$*  Ako se postavi uslov o sličnosti samo jedne, dominantne sile, koja je pod uticajem jedne fizičke karakteristike fluida (na primer, viskoznosti), tada se broj slobodnih razmera smanjuje sa dve na jednu. Obično se kao slobodna razmera uzima dužina.
- *Broj slobodnih razmera:  $(3-1)-2=0$*  Ako se traži da model ispuni uslov sličnosti za dve sile, broj slobodnih razmera je nula. Model je (barem teorijski) još uvek moguće napraviti, ali su sve razmere fiksirane. U realnosti, pitanje je da li je izvodljiv takav model, jer je potrebno naći fluid koji će se koristiti na modelu sa tačno definisanim karakteristikama, kako bi se ispunile zahtevane razmere.
- *Broj slobodnih razmera:  $(3-1)-3=?$*  I na kraju, ako se traži da model ispuni uslov sličnosti za tri ili više sila, model mora imati sve razmere jednake jedinici, odnosno, *model je isto što i objekat, priroda*.

U okviru kursa Mehanike fluida, na Građevinskom fakultetu, uglavnom se izučavaju fenomeni koji zavise od jedne dominantne sile: ili od sile viskoznosti (svi efekti povezani sa trenjem) ili od gravitacije (otvoreni tokovi):

1. Sličnost za viskozne uticaje ( $\mu$ ) znači uslov da je razmera za Reynoldsov broj (strana 196, *Bezdimezionalna viskoznost*) jednaka jedinici:

$$Re_{\star} = 1,0 = \frac{\rho_{\star} V_{\star} L_{\star}}{\mu_{\star}} = \frac{V_{\star} L_{\star}}{\nu_{\star}}$$

Ova sličnost se često naziva Reynoldsova sličnost. Ako je isti fluid na modelu i objektu, Reynoldsova sličnost se svodi na vezu razmera za brzine i dužine:

$$V_{\star} L_{\star} = 1 \quad \Rightarrow \quad V_{\star} = \frac{1}{L_{\star}}$$

pa se za 4 puta manji model, na primer, dobija da je potrebno postići 4 puta veće brzine na modelu da bi efekat viskoznosti ostao isti. Upravo zbog ove činjenice se često u modeliranju fenomena koje izaziva voda, na modelu koristi vazduh.

Takođe, treba obratiti pažnju da vreme na modelu znatno brže teče nego na objektu:

$$V_{\star} = \frac{1}{L_{\star}} \quad \Rightarrow \quad \frac{L_{\star}}{T_{\star}} = \frac{1}{L_{\star}} \quad \Rightarrow \quad T_{\star} = L_{\star}^2$$

a i gravitaciono ubrzanje nije isto:

$$g_{\star} = \frac{L_{\star}}{T_{\star}^2} = \frac{V_{\star}^2}{L_{\star}} = \frac{1}{L_{\star}^3} \quad (5.29)$$

2. Sličnost za gravitacione uticaje ( $g$ ) znači uslov da je razmera za Frudov broj (strana 198, *Bezdimezionalna gravitacija*) jednaka jedinici:

$$Fr_{\star} = 1,0 = \frac{V_{\star}^2}{g_{\star} L_{\star}}$$

Ova sličnost se naziva Frudova sličnost. U najvećem broju slučajeva su objekat i model u uslovima istog Zemljinog ubrzanja pa je uglavnom  $g_{\star} = 1,0$  a Frudova sličnost se svodi na:

$$\frac{V_{\star}^2}{L_{\star}} = 1 \quad \Rightarrow \quad V_{\star} = \sqrt{L_{\star}}$$

Kod Frudove sličnosti, manji model znači i (sa korenom) manje brzine. Razmera za vreme je:

$$T_{\star} = \frac{L_{\star}}{V_{\star}} = \frac{L_{\star}}{\sqrt{L_{\star}}} = \sqrt{L_{\star}}$$

a za protok:

$$Q_{\star} = V_{\star} A_{\star} = \sqrt{L_{\star}} L_{\star}^2 = L_{\star}^{5/2}$$

Prilikom izvođenja razmera za pojedine veličine, koristi se pravilo sličnosti gde se razmere odnose kao dimenzije tih veličina. Da bi se izračunala razmera za neku veličinu, potrebno je napisati neki od najjednostavnijih dimenzionalnih obrazaca (na primer, protok  $Q$  je proizvod brzine  $V$  i površine  $A$ , a površina je dužina  $L$  na kvadrat), a zatim formirati razmeru: sve dimeznionalne veličine dobijaju u indeksu zvezdicu, a svi bezdimenzionalni brojevi postaju jedinice.

### 5.2.5 Primeri fizičkih modela

**Sličnost za inercijalne i gravitacione uticaje - Frudova sličnost** Frudova sličnost se koristi kod fenomena gde je težina fluida dominantna, u oblasti otvorenih tokova (prelivi, propagacija talasa, propusna moć kanala, sile na ustave i slično) i u oblasti otpora kretanja tela koja su delimično uronjena u vodu.

#### Primer 5.2.2

Model ustave je napravljen prema Frudovoj sličnosti. Razmera za dužine je  $L_{\star} = 16$ . Kolika će biti razmera za brzinu ispod ustave, razmera za fluktuacije pritiska na dno i za silu na ustavu?

Uslov za Frudovu sličnost je da razmera za Frudov broj bude jedan:

$$Fr_{\star} = 1,0 = \frac{V_{\star}^2}{g_{\star} L_{\star}} = \frac{V_{\star}^2}{L_{\star}}$$

gde je stavljeno da je razmera za gravitaciono ubrzanje  $g_{\star} = 1$ . Tražena razmera za brzine je:

$$V_{\star}^2 = L_{\star} \Rightarrow V_{\star} = \sqrt{L_{\star}} = \sqrt{16} = 4$$

Dobijena razmera za brzine važi za sve brzine na modelu, pa i za brzinu ispod ustave.

Kako je u pitanju Frudov model pravljen za zadovoljenje gravitacionih uticaja, za razmeru za pritisak je zgodno koristiti obrazac u kome se pojavljuje gravitacija. U hidrostatici se koristi obrazac:

$$p = \rho g(\Pi - z) = \rho gL$$

gde je član  $(\Pi - z)$  zamenjen bilo kojom dužinom  $L$ . Razmera za pritisak je:

$$p_* = \rho_* g_* L_* = \rho_* L_*$$

Kako nije rečeno da li je isti fluid na objektu i na modelu, pretpostaviće se da se koristi voda u oba slučaja, pa je razmera za gustinu  $\rho_* = 1$ . Tražena razmera za pritisak i za fluktuacije pritiska na dno je tada:

$$p_* = L_* = 16$$

Razmera za silu na ustavu se jednostavno dobija kada se zna razmera za pritisak:

$$F = pA \Rightarrow F_* = (\rho_* g_* L_*) L_*^2 \Rightarrow F_* = L_*^3 = 4096$$

opet uz pretpostavku da je isti fluid na modelu i na objektu.

U datom primeru je dobijena velika razmera za sile. To praktično znači da će izmerena sila na modelu biti izuzetno mala: 16 puta smanjujući dužine, sila na modelu se smanjuje 4096 puta! Ovo predstavlja često praktičan **problem u izvođenju eksperimenta**. Takođe, treba voditi računa da razmera za vreme kod Frudove sličnosti nije jedinica, odnosno, vreme ne protiče istom brzinom na modelu i na objektu.

**Istovremena Frudova i Rejnoldsova sličnost** Prilikom izbora razmera, postavljanje uslova za istovremenu sličnost za dva uticaja, ukupan broj slobodnih razmera je nula, odnosno, sve razmere su međusobno povezane. Takav model je prilično teško napraviti, jer modelar ima ograničen dijapazon mogućih fluida sa kojima će modelirati prirodu, pa je i razmera za gustinu i viskoznost fluida ograničena.

### Primer 5.2.3

Koje uslove treba da zadovolji model koji ima isti odnos inercijalnih i gravitacionih sila, kao i inercijalnih i viskoznih sila, odnosno model koji istovremeno zadovoljava uslove  $Fr_* = 1$  i  $Re_* = 1$ ?

Postavljeni uslovi daju sledeću vezu razmera za brzine i dužine:

$$Fr_* = 1 \Rightarrow V_*^2 = L_* \tag{5.30}$$

$$Re_* = 1 \Rightarrow \frac{\rho_* V_* L_*}{\mu_*} = \frac{V_* L_*}{\nu_*} = 1,0 \Rightarrow V_* L_* = \nu_* \tag{5.31}$$

Ako se na modelu i objektu koristi isti fluid ( $\rho_* = 1$ ), tada je razmera za kinematsku viskoznost  $\nu_* = 1$ , pa se iz uslova  $Re_* = 1$  dobija veza razmera brzine i dužine:

$$V_* L_* = 1 \quad \Rightarrow \quad V_* = \frac{1}{L_*} \quad (5.32)$$

Sređivanjem izraza (5.30) i (5.32) dobija se rešenje za razmere  $V_*$  i  $L_*$ :

$$\left. \begin{array}{l} V_*^2 = L_* \\ V_* = \frac{1}{L_*} \end{array} \right\} \begin{array}{l} V_* = 1 \\ L_* = 1 \end{array}$$

Dobijeno rešenje pokazuje da ako se fiksira razmera za gustinu uzimanjem istog fluida, objekat i model moraju biti isti jer je razmera za dužine 1. Ako se na modelu i objektu upotrebe različiti fluidi, brzina iz izraza (5.30) se može staviti u izraz (5.31) i naći razmera za kinematsku viskoznost:

$$V_* = \sqrt{L_*} \quad \Rightarrow \quad \nu_* = V_* L_* \quad \Rightarrow \quad \nu_* = L_*^{1/2} L_* = L_*^{3/2} = V_*^3 \quad (5.33)$$

Dakle, da bi se ispunio postavljeni uslov, potrebno je na modelu koristiti takav fluid čija je kinematska viskoznost  $\nu_M = \nu_O L^{-3/2}$ .

Dobijen uslov o potrebnoj razmeri za kinematsku viskoznost u datom primeru nije lako postići. Eksperimentatorima je na raspolaganju veoma sužen opseg mogućih fluida, te je prilično teško napraviti model. Ako se, na primer, voda na objektu zameni vazduhom na modelu, tada je razmera za kinematsku viskoznost (5.33):

$$\nu_* = \frac{\nu_O}{\nu_M} = \frac{10^{-6}}{1,6 \cdot 10^{-5}} = 0,0625$$

Model treba da ima razmeru za dužine:

$$L_* = \nu_*^{2/3} = 0,1575$$

odnosno, model treba da bude veći od objekta. Nešto je “zgodnije” istraživati otpore usled strujanja vazduha na objektu, jer je sada moguće koristiti vodu kao modelski fluid, pa će razmere za dužine i brzine biti:

$$L_* = \frac{1}{0,1575} = 6,35 \quad V_* = \sqrt{L_*} = \sqrt{6,35} = 2,52$$

**Objekat i model su iste konstrukcije** U hidrotehničkoj praksi se ponekad sreće i situacija da se na objektu obavljaju eksperimenti koristeći neki drugi fluid. Tada se i dalje govori o modeliranju, pri čemu je razmera za dužine  $L_{\star} = 1$  a razmere za gustinu i viskoznost zavise od vrste upotrebljenog fluida. U najvećem broju slučajeva se radi o Rejnoldsovom modelu, a ispitivanja se sprovode radi utvrđivanja koeficijenta otpora (trenja ili oblika).

**Primer 5.2.4**

Pri pravljenju velikih tunelskih dovoda vode do hidrocentrale, bitno je postići što manje gubitke energije, odnosno, što manji koeficijent linijskog gubitka energije. Parametri tunela se često određuju uduvavanjem vazduha i merenjem pada pritiska na izabranoj deonici. Pri normalnim uslovima, gustina vazduha je  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$  i viskoznost  $\mu = 1,92 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$ , dok su gustina vode  $\rho = 1,0 \text{ kg/dm}^3$  i viskoznost vode  $\mu = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}$ . Kod trenja je dominantna viskoznost, pa se u modelskoj analizi moraju zadovoljiti sličnosti za inercijalne i viskozne uticaje. Ukoliko se izmeri razlika pritiska između dva preseka na cevovodu  $\Delta p = 1,0 \text{ kPa}$  pri radu sa vazduhom, kolika će biti razlika pritiska u radu sa vodom?

Iz uslova zadatka sledi da mora biti zadovoljena Rejnoldsova sličnost:

$$Re_{\star} = 1 \Rightarrow \frac{\rho_{\star} V_{\star} D_{\star}}{\mu_{\star}} = 1 \Rightarrow V_{\star} = \frac{\mu_{\star}}{\rho_{\star} D_{\star}}$$

Objekat i model su jedan isti cevovod, tako da je razmera za dužine:

$$D_{\star} = \frac{D_O}{D_M} = 1$$

Na objektu se koristi voda a na modelu vazduh, pa su razmere za gustinu i viskoznost:

$$\rho_{\star} = \frac{\rho_O}{\rho_M} = \frac{1000}{1,2} = 833,33$$

$$\mu_{\star} = \frac{\mu_O}{\mu_M} = \frac{1,0 \cdot 10^{-3}}{1,92 \cdot 10^{-5}} = 52,0833$$

Iz uslova da se koristi Rejnoldsova sličnost, sledi i razmera za brzine:

$$V_{\star} = \frac{\mu_{\star}}{\rho_{\star} D_{\star}} = \frac{52,0833}{833,33} = 0,0625$$

Na cevovodu je izmerena razlika pritiska od  $\Delta p_M = 1,0 \text{ kPa}$ . Da bi se odredila razlika pritiska na objektu, potrebno je naći razmeru za pritisak. Kao dimenzionalni obrazac, koristiće se zaustavni pritisak:

$$p = C_p \frac{1}{2} \rho V_2^2$$



pa je razmera za pritisak:

$$p_{\star} = C_{p_{\star}} \left( \frac{1}{2} \right)_{\star} \rho_{\star} V_{\star}^2 = \rho_{\star} V_{\star}^2 = 833,33 \times 0,0625^2 = 3,255$$

Razlika pritisaka na objektu će biti:

$$p_{\star} = \frac{\Delta p_O}{\Delta p_M} \Rightarrow \Delta p_O = p_{\star} \Delta p_M = 3,255 \times 1,0 = 3,255 \text{ kPa}$$

Interesantno je pogledati kolika treba da bude brzina vazduha na modelu da bi se postigla brzina vode na objektu od 2 m/s. Razmera za brzine je:

$$V_{\star} = 0,0625 = \frac{V_O}{V_M} \Rightarrow V_M = \frac{V_O}{V_{\star}} = \frac{2}{0,0625} = 32 \text{ m/s}$$

pa se dobija prilično velika potrebna brzina vazduha u tunelu od  $V = 32 \text{ m/s}$  ili  $V = 115 \text{ km/h}$ .

Prilikom izvođenja razmere za pritisak u datom primeru, korišćen je obrazac za zaustavni pritisak. Da li je mogao da se koristi obrazac iz prethodnog primera 5.2.3:  $p = \rho gh$ ? Razmere za gustinu  $\rho_{\star}$  i dužinu  $h_{\star} = D_{\star}$  su poznate, ali kolika je razmera za gravitaciju  $g_{\star}$ ? Na strani 208 je pokazano (5.29) da razmera za gravitaciono ubrzanje kod Rejnoldsove sličnosti nije jedinica. Razmera  $g_{\star}$  se može, na primer, posredno odrediti iz brzinske visine:

$$\frac{V_{\star}^2}{g_{\star}} = L_{\star} \Rightarrow g_{\star} = \frac{V_{\star}^2}{L_{\star}} = 0,0625^2 = 0,003906$$

pa je sada razmera za pritisak ista kao i izvedena preko zaustavnog pritiska:

$$p_{\star} = \rho_{\star} g_{\star} L_{\star} = 833,33 \times 0,003906 \times 1,0 = 3,255$$

Razmeru za gravitaciju je moguće dobiti i iz dimenzija ubrzanja, preko razmere za vreme:

$$g_{\star} = \frac{L_{\star}}{T_{\star}^2} \Rightarrow T_{\star} = \frac{L_{\star}}{V_{\star}} = \frac{1}{0,0625}$$

$$g_{\star} = \frac{1}{\left( \frac{1}{0,0625} \right)^2} = 0,0625^2 = 0,003906$$



## Glava 6

# Hidrodinamički otpori

Otpori koji se javljaju na granici fluida i čvrste konture, i koji su rezultat kretanja fluida se nazivaju *hidrodinamički otpori*. Sile proizišle iz tih otpora **postoje samo ako postoji razlika u relativnim brzinama fluida i čvrste konture**. Mogu se posmatrati dve situacije: kada se fluid kreće (teče) *unutar čvrste, nepokretne konture* (na primer tečenje kroz cevi) ili kada se fluid *nalazi oko čvrste konture* pri čemu kontura miruje, a fluid se kreće (na primer mostovski stub) ili fluid miruje a kontura se kreće (na primer podmornica).

Oblast hidrodinamičkih otpora je važna jer sile otpora ulaze u ukupan bilans sila ili kao gubitak energije koji treba korektno obračunati ili kao aktivna sila sa kojom se treba “boriti”, primiti je konstrukcijom ili je savladati nekim motorom.

Zajedničko za sve hidrodinamičke otpore je zavisnost strujne slike (rasporeda brzina) od relativnog odnosa brzina (inercijalni uticaj) i viskoznosti, odnosno, od Rejnoldsovog broja (5.14). Pri malim brzinama i jakoj viskoznosti (odnosno pri malim Rejnoldsovim brojevima) strujanje je laminarno a raspored brzina je moguće analitički odrediti. Za velike Rejnoldsove brojeve viskoznost je slaba da spreči pojavu turbulencije, pa raspored brzina (kao i hidrodinamičke otpore) nije više moguće odrediti analitički, već su neophodna i eksperimentalna istraživanja<sup>1</sup>. **Analize dodatno komplikuje i činjenica da granica između dva režima kretanja, laminarnog i turbulentnog, nije precizna već u mnogome zavisi od uslova strujanja.**

U nastavku ove glave će se prvo detaljnije analizirati otpori pri kretanju fluida u cevi. Koristeći dimenzionalnu analizu (poglavlje 5.1) doći će se do koeficijenta trenja, koji bi trebalo da bude konstantan za određenu cev

---

<sup>1</sup>U prethodnoj glavi 5, *Dimenzionalna analiza, sličnost i modeli*, bilo je dosta reči o eksperimentalnom istraživanju.

i fluid. Međutim, pokazaće se da koeficijent gubitka energije na trenje nije konstantan već da zavisi od Rejnoldsovog broja i geometrijskih karakteristika cevi (odnosa prečnika i hrapavosti).

U drugom delu ove glave izučavaće se otpori kretanja tela kroz fluid, ili obrnuto, otpor prilikom kretanja fluida oko nepokretnog tela. Zbog lakšeg izučavanja, ukupni otpori će se razdvojiti na dve grupe: na otpore usled trenja i otpore nastale promenom rasporeda brzina pa time i promenom pritiska oko tela.

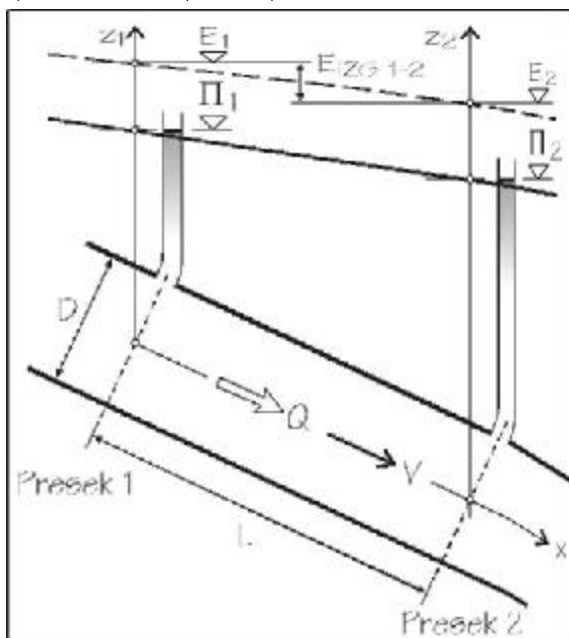
## 6.1 Trenje pri jednolikom tečenju kroz cev kružnog poprečnog preseka

### 6.1.1 Koeficijent linijskog gubitka energije

Jednačina održanja energije, u integralnom obliku, sređena za ustaljeno tečenje homogenog fluida (poglavljje 4.5.5 i poglavljje 4.6.4) kroz cev i napisana između dva preseka glasi:

$$E_1 = E_2 + \Delta E_{1-2}$$

(jednačina (4.114), strana 168 i jednačina (4.120), strana 172).



Slika 6.1: Gubitak energije između dva preseka je rezultat trenja

gubitaka energije (lokalnih poremećaja), pa je pad ukupne energije samo usled trenja (slika 6.1).

Član  $\Delta E$  predstavlja “gubitak” energije po jedinici težine, odnosno, energiju koja je iz korisne mehaničke prešla u toplotnu energiju (jednačina (4.112), strana 166). Gubitak energije je rezultat delovanja trenja između fluida i zida cevi kao i lokalnih poremećaja fluidne struje (nagle promene brzine ili pravca brzine, suženja ili proširenja cevi, zatvarači i slično).

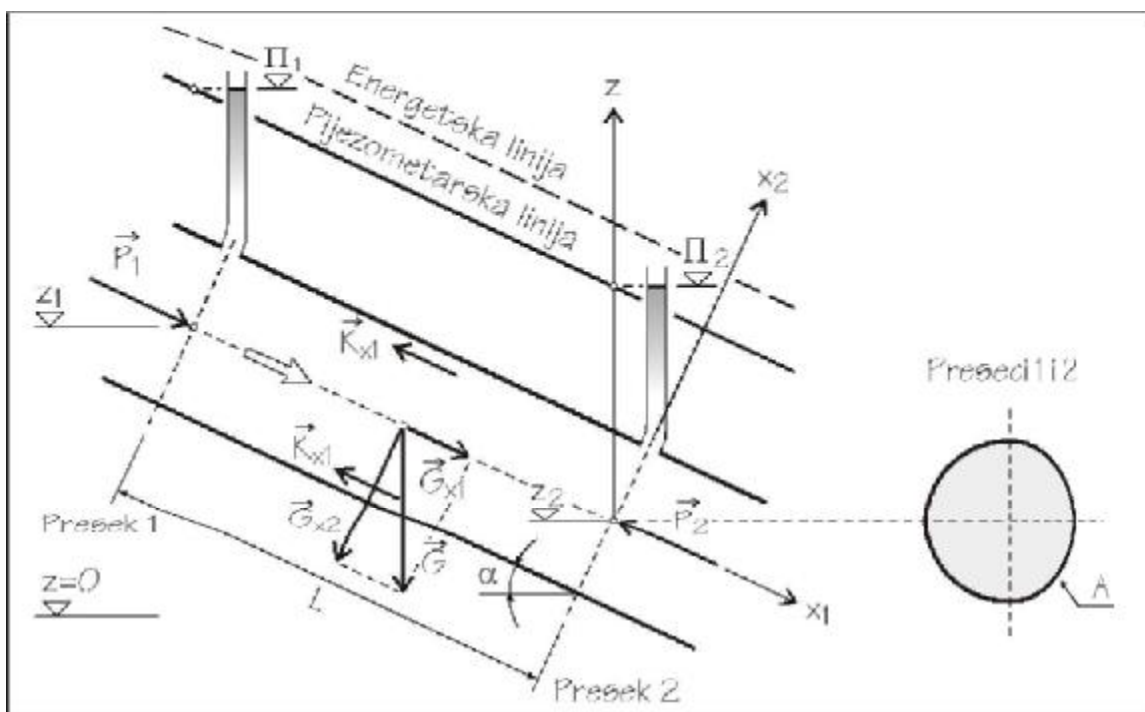
Da bi se izučio uticaj trenja na gubitak energije, neophodno je posmatrati slučaj tečenja kroz dugačku pravu deonicu cevi, gde nema promene poprečnog preseka cevi pa nema ni usputne promene brzine. U posmatranoj deonici nema drugih gu-

### 6.1. TRENJE PRI JEDNOLIKOM TEČENJU KROZ CEV

Za date uslove je pad pijezometarske linije jednak gubitku energije:

$$\Pi_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \Pi_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta E_{1-2} \Rightarrow \Pi_1 - \Pi_2 = \Delta E_{1-2} \quad (6.1)$$

Kako su gubici energije povezani sa konturnom silom  $K$  u razmatranje se mora uvesti i dinamička jednačina.



Slika 6.2: U jednolikom strujanju komponenta sopstvene težine u pravcu strujanja i sile pritiska na presecima se uravnotežuju sa silom trenja

Ako se, prema jednačini (4.86) (strana 151), odnosno jednačini (4.87) (strana 152) nacrtaju sve sile između izabranih preseka (slika 6.2), vrednosti pojedinih sila su:

- Sile pritiska u presecima 1 i 2:

$$P_1 = p_1 A_1 \quad P_2 = p_2 A_2$$

Pošto su površine poprečnih preseka jednake  $A_1 = A_2 = A$ , ukupna sila pritiska je:

$$P_1 - P_2 = A(p_1 - p_2)$$

- Inercijalne sile (zbirno):

$$I = -\rho Q (V_2 - V_1)$$

Iz jednačine kontinuiteta i uz uslov jednakosti proticajnih površina dobija se:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \Rightarrow V_2 = V_1 \Rightarrow I = 0$$

- Sopstvena težina fluida:

$$G = \rho g V = \rho g A L$$

Sopstvena težina se može podeliti na komponente u pravcima  $x_1$  (pravac toka) i  $x_2$  (normalno na pravac toka). Za proračun je značajna komponenta u pravcu toka:

$$G_{x_1} = G \sin \alpha \quad \text{gde je} \quad \sin \alpha = \frac{z_1 - z_2}{L}$$

$$G_{x_1} = \rho g A (z_1 - z_2) \tag{6.2}$$

- Sila konture  $K$  je samo usled trenja (jer je strujanje jednoliko, nema promene u preseku fluidne struje) i ona uvek deluje suprotno od smera tečenja. Za proračun je značajna komponenta  $K_{x_1}$  po obimu cevi (u daljem tekstu  $K_x$ ).

Sve sile moraju biti u ravnoteži, pa se može postaviti dinamička jednačina:

$$A (p_1 - p_2) + \rho g A (z_1 - z_2) = K_x$$

Kada se gornja jednačina podeli sa  $\rho g A$ , dobija se:

$$\left( \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} \right) + (z_1 - z_2) = \frac{K_x}{\rho g A}$$

Uz uslov da je  $\Pi = \frac{p}{\rho g} + z$ , dobija se:

$$\Pi_1 - \Pi_2 = \frac{K_x}{\rho g A} \tag{6.3}$$

Jednačina (6.3) daje vezu sile trenja sa razlikom (padom) piježometarske kote u jednolikom strujanju. Izjednačavanjem jednačina (6.1) i (6.3) potvrđuje se da *celokupan gubitak energije fluidne struje odlazi na trenje*:

$$\Delta E_{1-2} = \frac{K_x}{\rho g A} \tag{6.4}$$

Sila  $K_x$  je sila trenja po unutrašnjem omotaču cevi. Ona je direktno srazmerna sa unutrašnjom površinom cevi i tangencijalnim naponom (ili naponom trenja):

$$K_x = \tau O L$$

gde je  $\tau$  tangencijalni napon koji ima dimenziju pritiska,  $O$  okvašeni obim (slika 6.3), a  $L$  dužina na kojoj se ostvaruje pad energije  $\Delta E$ .

Ako se izraz za  $K_x$  stavi u jednačinu za proračun gubitka energije (6.4), dobija se sledeći izraz:

$$\Delta E_{1-2} = \frac{\tau O L}{\rho g A}$$

Odnos površine poprečnog preseka  $A$  i okvašenog obima  $O$  se naziva *hidraulički radijus* (slika 6.3):

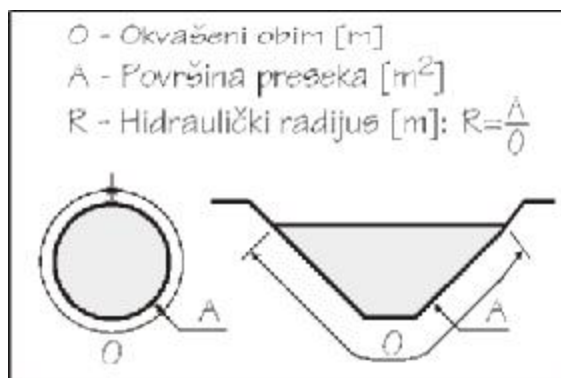
$$R = \frac{A}{O} \tag{6.5}$$

Hidraulički radijus je veličina koja je bitna za gubitak energije, jer označava *podnost poprečnog preseka da propušta fluid*. Što je vrednost hidrauličkog radijusa  $R$  veća to su manji gubici energije i povoljniji su uslovi za transport fluida.

Za istu površinu poprečnog preseka  $A$ , maksimalna vrednost hidrauličkog radijusa  $R$  je kod kružnog preseka, dok za kvadratni i, posebno, uske pravougaone preseke hidraulički radijus je manji (fluid teže protiče nego kroz kružni presek).

Izraz za proračun gubitka energije sada može da se napiše kao:

$$\Delta E_{1-2} = \frac{\tau L}{\rho g R} \text{ ili } I_E = \frac{\Delta E_{1-2}}{L} = \frac{\tau}{\rho g R} \tag{6.6}$$



Slika 6.3: Hidraulički radijus je odnos proticajne površine i okvašenog obima

gde je  $I_E$  nagib linije energije. Kod jednolikog strujanja ( $A_1 = A_2 \rightarrow V_1 = V_2$ ), nagib linije energije je isti kao nagib piježometarske linije  $I_E = I_\Pi$ :

$$I_E = I_\Pi = \frac{\tau}{\rho g R} = \text{Const.} \quad (6.7)$$

Kod rešavanja praktičnih zadataka, dobijena veza tangencijalnog napona i nagiba energetske linije nije puno od pomoći. Bolje bi bilo uspostaviti vezu između tangencijalnog napona i brzine fluida, jer je sigurno da tangencijalni napon  $\tau$  nije isti za različite brzine u jednoj istoj cevi.

Primenom dimenzionalne analize (poglavlje 5.1) dobijena je veza između napona i brzine u obliku (5.7) (strana 185):

$$C_\tau = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho V^2} \quad (6.8)$$

odnosno, da je koeficijent tangencijalnog napona odnos tangencijalnog napona i zaustavnog pritiska (poglavlje 4.5.3.2). Problem izučavanja tangencijalnog napona, dimenzionalne veličine koja zavisi od brzine u cevi, tako se svodi na lakši problem analize bezdimenzionalnog koeficijenta  $C_\tau$ .

Kada se izraz za tangencijalni napon stavi u jednačinu (6.6) dobija se:

$$\Delta E_{1-2} = \frac{C_\tau \frac{1}{2}\rho V^2 L}{\rho g R} = C_\tau \frac{L V^2}{R 2g} \quad (6.9)$$

Za cev kružnog poprečnog preseka hidraulički radijus je:

$$R = \frac{A}{O} = \frac{D^2 \pi}{4} \frac{1}{D \pi} = \frac{D}{4} \quad (6.10)$$

pa je:

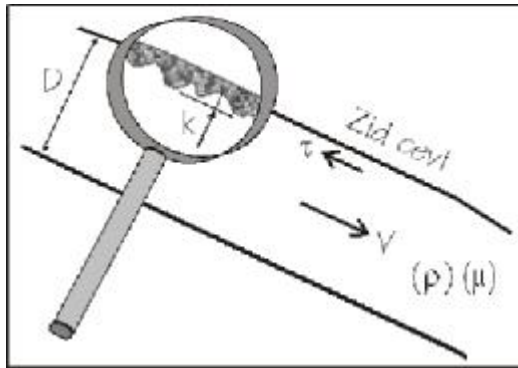
$$\Delta E_{1-2} = 4C_\tau \frac{L V^2}{D 2g}$$

Umesto  $4C_\tau$  uvodi se novi bezdimenzionalni koeficijent  $\lambda = 4C_\tau$ , *koeficijent linijskog gubitka energije*. Ukupan gubitak energije usled trenja, između dva preseka, je sada:

$$\Delta E = \lambda \frac{L V^2}{D 2g} \quad (6.11)$$



Izraz (6.11) je poznat u literaturi kao Darsi<sup>2</sup>-Vajsbahova<sup>3</sup> jednačina za proračun gubitka energije na trenje<sup>4</sup>.



Slika 6.4: Tangencijalni napon  $\tau$  zavisi od  $D$ ,  $V$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  i  $k$

U izvođenju Darsi-Vajsbahove jednačine, korišćen je koeficijent tangencijalnog napona  $C_\tau$ . Pošto su koeficijenti bezdimenzionalni, za očekivati je da će imati konstantnu vrednost, tako da bi i koeficijent trenja  $\lambda$  (koji se još naziva i Darsijev koeficijent trenja) trebalo da bude konstantan za jednu cev. Međutim, brzo je uočeno da ovako izveden koeficijent trenja nije konstantan, već da u jednoj cevi, za jedan isti fluid, ima različite vrednosti.

Da bi se razmotrili razlozi zašto koeficijent trenja nije konstanta, analiziraće se koje sve veličine utiču na gubitak energije primenom dimenzionalne analize. Na slici 6.4, prikazan je jako uveličan detalj zida cevi. Tangencijalni napon  $\tau$  na kontaktu zida cevi i fluida zavisi od sledećih veličina:

- prečnika cevi  $D$ , jer od veličine prečnika zavisi raspored brzina u cevi pa samim tim i izvod brzine uz sam zid cevi,
- srednje profilske brzine  $V$  odnosno protoka  $Q = VA$ ,
- gustine fluida  $\rho$ ,
- dinamičkog koeficijenta viskoznosti fluida  $\mu$ , koji je pokazatelj unutrašnjeg trenja između slojeva fluida, i
- apsolutne hrapavosti  $k$ , koja predstavlja visinu izbočina na zidu cevi.

Može se napisati sledeća dimenzionalna relacija (jednačina (5.2), na strani 181):

$$\tau = \varphi(\rho, \mu, V, D, k) \tag{6.12}$$

<sup>2</sup>Henri-Philibert-Gaspard Darcy (1803 - 1858) francuski inženjer i naučnik. Učestvovao je u pravljenju akvadukta dugačkog 12,7 km kojim se voda dovodila gravitaciono do grada Dižon. Za potrebe projektovanja akvadukta i vodovodnog sistema u samom gradu, bavio se istraživanjima koeficijenta trenja  $\lambda$  u cevima pod pritiskom. Postavio je osnovne relacije veze koeficijenta trenja i parametara toka: brzine, prečnika i hrapavosti. Poslednjih par godina proveo je istražujući tokove vode u kolonama sa peskom, na osnovu čega je izveo Darsijev zakon, koji se i danas primenjuje za tokove vode u poroznim podzemnim sredinama.

<sup>3</sup>Biografija Vajsbaha je data u fusnoti 32 na strani 139.

<sup>4</sup>Jednačinu za gubitak energije na trenje (6.11) je izveo 1845. godine Vajsbah. Međutim, Vajsbah nije dao adekvatno tumačenje koeficijenta trenja  $\lambda$  tako da je njegova jednačina bila znatno "lošija" od, u to vreme široko prihvaćene Pronijeve (Gaspard Clair Francois Marie Riche de Prony, 1755-1839) jednačine za gubitak energije  $\Delta E = L/D(aV + bV^2)$  gde su  $a$  i  $b$  empirijski koeficijenti. Tek je Darsi u svojim radovima kritički prišao Pronijevoj jednačini (mada je Proni bio profesor Darsiju) i prihvatio dimenzionalno korektnu Vajsbahovu jednačinu (6.11) pri čemu je dao vezu između koeficijenta

Biranjem tri veličine ( $\rho, V, D$ ) za osnovne, zavisnost se svodi na<sup>5</sup>  $6 - 3 = 3$  bezdimenzionalnih veličina.

Za osnovne veličine zgodno je izabrati prečnik cevi  $D$ , srednju profilsku brzinu  $V$  i gustinu fluida  $\rho$ . U takvom dimenzionalnom sistemu tangencijalni napon  $\tau$ , viskoznost fluida  $\mu$  i apsolutna hrapavost  $k$ , predstavljeni su bezdimenzionalnim brojevima<sup>6</sup>:

- koeficijentom tangencijalnog napona  $C_\tau = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho V^2}$ ,
- Reynoldsovim brojem  $Re = \frac{\rho V D}{\mu}$ , i
- relativnom hrapavošću  $\frac{k}{D}$ .

Dimenzionalni izraz za tangencijalni napon se sada može napisati u bezdimenzionalnom obliku kao:

$$C_\tau = \phi\left(Re, \frac{k}{D}\right) \quad \text{ili} \quad \phi'\left(C_\tau, Re, \frac{k}{D}\right) = 0 \quad (6.13)$$

Na osnovu dobijene veze, obavljena je serija eksperimentalnih istraživanja zavisnosti koeficijenta tangencijalnog napona  $C_\tau$  (odnosno, Darsi-Vajsbahovog koeficijenta  $\lambda$ ) od Reynoldsovog broja  $Re$  i relativne hrapavosti  $k/D$ . Rezultati dobijeni takvim ispitivanjima se obično prikazuju na  $\log C_\tau / \log Re$  dijagramu, kao familija krivih linija za različite konstantne vrednosti  $k/D$ .

Na dobijenim dijagramima (slika 6.13, na strani 236) se jasno mogu izdvojiti dve oblasti sa različitim zavisnostima  $C_\tau$  od  $Re$ : prva je pri malim Reynoldsovim brojevima, gde je tečenje u laminarnom režimu (poglavljje 4.1.3, *Laminarno i turbulentno tečenje*), a druga, dosta složenija, pri turbulentnom režimu. Razlike u obliku dijagrama jasno ukazuju na postojanje različitih mehanizama, koji utiču na vrednost linijskog gubitka energije.

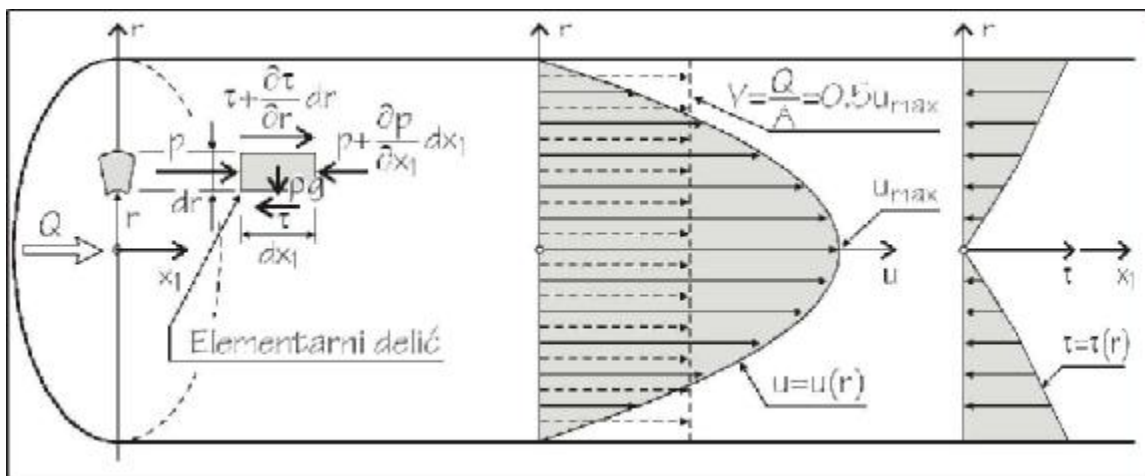
U narednim poglavljima će se posmatrati jednoliko tečenje u cevi prečnika  $D$  i hrapavosti  $k$ , pri čemu će se protok postepeno povećavati, tako da će se obuhvatiti svi režimi tečenja. Za svaki od režima će se analizirati mehanizam formiranja gubitka energije i moguće jednačine za njegov proračun.

<sup>5</sup>Prema Bakingemovoj  $\Pi$  teoremi, poglavljje 5.1.2.

<sup>6</sup>Poglavljje 5.1.5 *Standardni bezdimenzionalni brojevi u Mehanici fluida*

6.1.2 Trenje u cevi pri laminarnom tečenju

Pri jako malom protoku fluida kroz cev, srednja brzina  $V = Q/A$  je mala, pa je i vrednost Reynoldsovog broja  $Re = \rho V D / \mu$  mala. U nizu eksperimenata je primećeno da je u takvim uslovima strujanje fluida "slojevito", uredno, i da nema mešanja između pojedinih slojeva (levi deo slike 4.3 na strani 89). Uzrok takvom načinu kretanja (strujanja) su jake viskozne sile. Takvo strujanje se naziva *laminarno* ili *slojevito*.



Slika 6.5: Laminarno tečenje u kružnoj cevi: sile na elementarni delić po jedinici površine i zapremine, teorijski raspored brzina i raspored tangencijalnih napona

Hrapavost cevi  $k$  u laminarnom tečenju ne utiče na strujanje jer su male izbočine na zidu cevi u potpunosti prekrivene slojem fluida. Na elementarni fluidni delić (slika 6.5) deluju samo sila težine (po jedinici zapremine), sila pritiska i tangencijalna sila (po jedinici površine). Ako se koristi cilindrični koordinatni sistem, uz uslove da ustaljeno teče nestišljiv fluid i da je tečenje osnosimetrično oko centralne ose cevi  $x_1$ , pri čemu od brzina postoji samo komponenta u pravcu ose, može se napisati diferencijalna jednačina održanja količine kretanja (4.53) (strana 127) u sledećem obliku:

$$\mu \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) \right] = \frac{dp}{dx_1} \tag{6.14}$$

odnosno, posle sređivanja leve strane izraza i stavljanja pizometarske kote umesto pritiska sa desne strane:

$$\frac{d\Pi}{dx_1} = \frac{\mu}{\rho g} \left( \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right) \tag{6.15}$$

Leva strana izraza (6.15) zavisi samo od pravca  $x_1$  a desna strana od  $r$ , tako da je izraz moguć samo ako su obe strane konstantne. Odatle sledi da je:

$$\frac{d\Pi}{dx_1} = \text{Const.} = -I_{\Pi} \tag{6.16}$$

Rešavanjem jednačine (6.15) uz zamenu (6.16) dobija se raspored brzina:

$$u = -\frac{\rho g}{4\mu} I_{\Pi} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \tag{6.17}$$

Iz uslova da je u centru cevi (za  $r = 0$ ) brzina konačna, dobija se vrednost konstante  $C_1 = 0$ . Konstanta  $C_2$  se dobija iz uslova da je brzina na zidu cevi (gde je<sup>7</sup>  $r = R$ ) jednaka nuli  $u = 0$ :

$$C_2 = \frac{\rho g}{4\mu} I_{\Pi} R^2$$

pa je raspored brzina po preseku pri laminarnom tečenju u kružnoj cevi:

$$u = \frac{\rho g}{4\mu} I_{\Pi} (R^2 - r^2) \tag{6.18}$$

Dobijeni izraz pokazuje da je raspored brzina kvadratna parabola, koja u centru (za  $r = 0$ ) ima maksimalnu vrednost  $u_{max}$ :

$$u = u_{max} \quad \text{za} \quad r = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{max} = \frac{\rho g}{4\mu} I_{\Pi} R^2 \tag{6.19}$$

Raspored brzina po preseku se može napisati i u bezdimenzionalnom obliku, u odnosu na maksimalnu brzinu, deljenjem (6.18) sa (6.19):

$$\frac{u}{u_{max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \tag{6.20}$$

Protok kroz cev se može odrediti integrisanjem rasporeda brzina (6.18) po kružnom preseku:

$$Q = \int_0^R 2r\pi u \, dr = \frac{\rho g \pi}{8\mu} I_{\Pi} R^4 = \frac{u_{max}}{2} R^2 \pi = \frac{u_{max}}{2} A \tag{6.21}$$

gde je  $A$  površina poprečnog preseka cevi. Ako je srednja profilska brzina definisana kao  $Q/A$ , sledi da je *srednja brzina duplo manja od maksimalne brzine* (slika 6.5):

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{u_{max}}{2} \tag{6.22}$$

---

<sup>7</sup>Veliko slovo  $R$  se ovde upotrebljava za poluprečnik cevi  $R = D/2$ , što ne treba pomešati sa hidrauličkim radijusom iz jednačine (6.10).

Sređivanjem izraza za protok (6.21) po nagibu piježometarske linije, vidi se da nagib linije zavisi samo od protoka na prvi stepen:

$$I_{\Pi} = \frac{8\mu}{\rho g \pi R^4} Q = \text{Const.} \times Q^{1,0} \quad (6.23)$$

odnosno, da je gubitak energije na trenje u laminarnom režimu *proporcionalan brzini na prvi stepen*. Zbog toga se često laminarni režim tečenja naziva i *linearni zakon otpora*.

Ako se umesto protoka u jednačinu (6.23) stavi srednja profilska brzina  $Q = VA = VR^2\pi$ , a nagib piježometarske linije izrazi preko Darsi-Vajsbahove jednačine (6.11):

$$I_{\Pi} = \frac{8\mu}{\rho g \pi R^4} VR^2\pi = \lambda \frac{1}{2R} \frac{V^2}{2g} \quad (6.24)$$

može se izračunati vrednost Darsijevog koeficijenta linijskog gubitka energije:

$$\lambda = \frac{32\mu}{\rho RV} = \frac{64\mu}{\rho DV} = \frac{64}{Re} \quad (6.25)$$

### Primer 6.1.1

Kakva je veza između linijskog gubitka energije i brzine za laminarno tečenje?

Linijski gubitak energije je:

$$E_{IZG} = \lambda \frac{L V^2}{D 2g}$$

Ako se u izraz stavi vrednost koeficijenta  $\lambda$  (6.25):

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64\mu}{\rho VD}$$

dobija se:

$$E_{IZG} = \frac{64\mu}{\rho VD} \frac{L V^2}{D 2g} = \frac{32\mu L}{\rho g D^2} V \Rightarrow E_{IZG} = \text{Const.} \times V^{1,0}$$

odakle se vidi da je gubitak energije proporcionalan sa brzinom na prvi stepen. Isti rezultat je dobijen i u jednačini (6.23), analizom protoka kroz cev.

Do istog izraza za koeficijent linijskog gubitka energije  $\lambda$  je moguće doći i određivanjem tangencijalnog napona na zidu cevi (za  $r = R$ ):

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} = \frac{\rho g I_{\Pi} R}{2} \quad (6.26)$$

gde je brzina  $u$  uzeta na osnovu jednačine (6.18). Nagib pijeziometarske linije  $I_{\Pi}$  se može izračunati iz (6.18) uz uvažavanje (6.22):

$$I_{\Pi} = \frac{4\mu u_{max}}{\rho g R^2} = \frac{8\mu V}{\rho g R^2} \quad (6.27)$$

tako da se dobija vrednost tangencijalnog napona na zidu cevi:

$$\tau = \frac{4\mu V}{R} = \frac{2\mu u_{max}}{R} \quad (6.28)$$

Darsijev koeficijent linijskog gubitka energije je tada:

$$\lambda = 4 C_{\tau} = 4 \frac{\frac{4\mu V}{R}}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{32\mu}{\rho VR} = \frac{64\mu}{\rho VD} = \frac{64}{Re} \quad (6.29)$$

Iz dobijenih jednačina (6.25), odnosno (6.29), sledi da je u laminarnom režimu tečenja *koeficijent linijskog gubitka energije moguće analitički odrediti*. Dobijena relacija je, naravno, više puta eksperimentalno potvrđena. Često se, čak, koristi i za određivanje koeficijenta viskoznosti fluida: uspostavi se ustaljeno tečenje kroz cev, izmeri se protok i na osnovu toga se izračuna koeficijent viskoznosti.

### Primer 6.1.2

Iz rezervoara sa konstantnim nivoom ističe protok  $Q$ . Za date podatke na slici, uz zanemarenje lokalnog gubitka energije na ulazu u cev i brzinske visine na izlazu iz cevi, kao i uz pretpostavku da je tečenje u cevi laminarno, odrediti kinematski koeficijent viskoznosti  $\nu$ .

Za date podatke, brzina u cevi je:

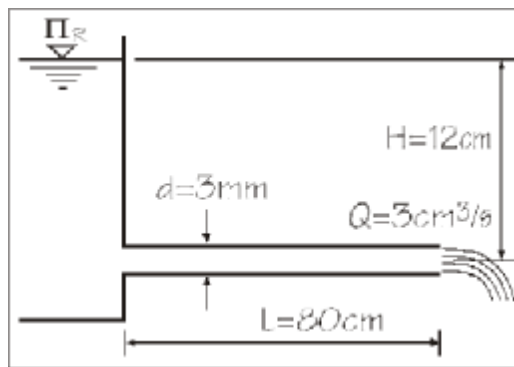
$$V = \frac{Q}{A} = \frac{3 \cdot 10^{-6} \times 4}{32 \cdot 10^{-6} \times \pi} = 0,424 \text{ m/s}$$

Energetska jednačina za preseke od rezervoara do izlaza iz cevi, uz zanemarenje lokalnog gubitka energije i izlazne brzinske visine, glasi:

$$\Pi_R = \Pi_{izl} + \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \Rightarrow H = \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Za pretpostavljeno laminarno tečenje, koeficijent linijskog gubitka energije je:

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64\nu}{VD} \Rightarrow H = \frac{32\nu LV}{D^2 g}$$



odakle se dobija koeficijent kinematske viskoznosti:

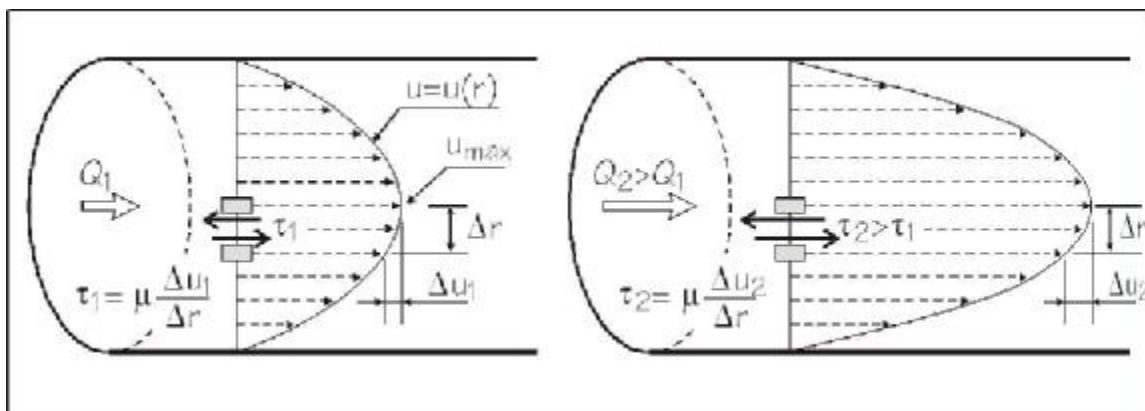
$$\nu = \frac{HD^2g}{32LV} = \frac{0,12 \times 0,003^2 \times 9,81}{32 \times 0,8 \times 0,424} = 0,9761 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Proračun je korektan samo za male vrednosti Rejnoldsovog broja<sup>8</sup>:

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{0,424 \times 0,003}{0,9761 \cdot 10^{-6}} = 1303,15$$

### 6.1.3 Prelaz iz laminarnog u turbulentno tečenje

Sa povećanjem protoka u cevi, odnosno povećanjem brzine, raste i razlika između brzina susednih delića. Na slici 6.6, sa leve strane, prikazan je raspored brzina pri laminarnom tečenju u cevi, pri manjem protoku, a sa desne pri većem.



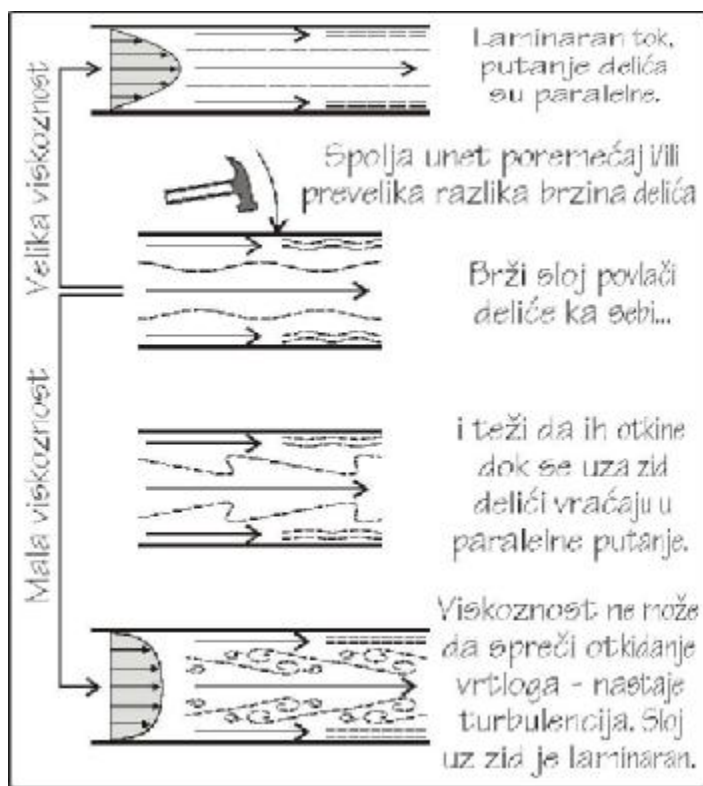
Slika 6.6: Sa povećanjem protoka u istoj cevi raste i razlika brzina između dva susedna fluidna delića pa raste i tangencijalni napon

Kako tangencijalni napon između dva delića zavisi od razlike njihovih brzina, sa porastom protoka taj napon raste. Brži delići sve više bivaju kočeni od strane sporijih i obrnuto, sporije deliće sve više povlače brži, tako da raste i njihova želja da se izmešaju, da skrenu sa svog pravolinijskog, slojevitog puta. Dok je viskoznost u stanju da zadži deliće u slojevitom tečenju, u cevi opstaje laminaran režim.

Pri određenoj brzini u cevi viskoznost više nije u stanju da održi slojevito tečenje. U centru cevi se pojavljuju delići koji prelaze iz jednog u drugi sloj,

<sup>8</sup>Kasnije u tekstu će se pokazati da je uslov o laminarnom tečenju ispunjen, jer je Rejnoldsov broj manji od kritične vrednosti.

čime “uzburkaju” (slika 6.7) prethodno pravolinijske slojeve. Čim se javi prvi uzburkani, odnosno *turbulentni* slojevi, turbulencija se poput “zaraze” proširi po poprečnom preseku od centra ka zidu cevi, sve do manjih brzina uz zid gde je viskoznost još uvek dovoljno jaka da održava uredno, laminarno, slojevito tečenje.



Slika 6.7: Viskoznost je veličina koja se “bori” sa vrtlozima



Slika 6.8: Različite oblasti u cevi pri pojavi turbulentnog tečenja: 1) Laminaran podsloj, 2) Turbulentno jezgro

inarni podsloj skroz iščezava. Takvo tečenje se naziva *potpuno razvijeno turbulentno tečenje*.

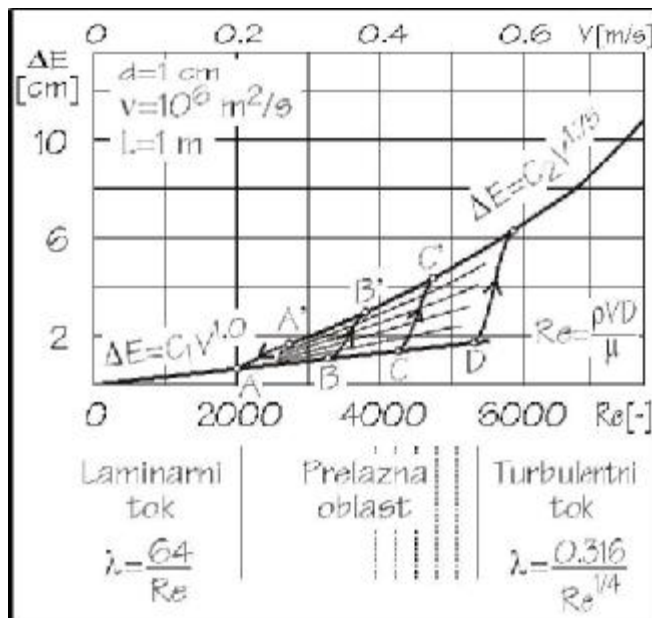
Za istu cev i fluid, vrednost brzine, pri kojoj će se pojaviti prvi vrtlozi u centru cevi, nije jednoznačna, nije uvek ista. Ta vrednost zavisi, ne samo od brzine, već i od spoljnih uticaja (da li je cev izložena spoljnim vibracijama), kao i od neravnomernosti dolaznog toka, koliko je dolazna fluidna struja “mirna”. U prelasku iz laminarnog tečenja u turbulentno postoji i pojava histerezisa, tj. *jednom izazvani vrtlozi teže da opstanu i kada se smanji brzina fluida u cevi*.

Tečenje sa vrtlozima se naziva *turbulentno* tečenje. Vrtlozi se prvo pojavljuju u centru cevi gde je brzina najveća, i formiraju *turbulentno jezgro* (slika 6.8). Sloj uz zid cevi u kome je brzina manja i u kojoj je viskoznost još uvek dominantna se zove *laminarni podsloj*. Sa porastom brzine, širina turbulentnog jezgra raste, dok se laminaran podsloj smanjuje. Pri nekoj velikoj brzini, lam-



Na slici 6.9, dat je dijagram zavisnosti izgubljene energije i Reynoldsovog broja za *jednu istu cev*. Prvi deo dijagrama je za laminarno tečenje, za linearan zakon otpora. Prelazna oblast, odnosno prelaz iz laminarnog u turbulentno tečenje je neodređena jer zavisi od “mirnoće” dolazne struje kao i spoljnih poremećaja- vibracija. Takođe, proces je sa histerezisom: jednom započeta turbulencija se pri smanjenim brzinama teže vraća u laminarno tečenje. Sa dijagrama se vidi da, sa povećanjem brzine vode u cevi (i porastom  $Re$  broja), raste “potrošnja” energije u odnosu na laminaran režim, jer pored viskoznosti uz zid treba energijom “hraniti” i vrtloge u centru cevi. Međutim, iako je viskoznost u turbulenciji “slaba” da se nosi sa velikim vrtlozima, ona će i dalje da “smiruje” i oduzima energiju sitnijim vrtlozima koji nastaju raspadanjem velikih. To je i osnovni mehanizam prelaska kinetičke energije toka u toplotnu energiju.

Turbulentno tečenje je jedna od najkomplicovanijih oblasti fizike<sup>9</sup>. Problem u turbulentnom tečenju je što se vrtlozi javljaju haotično, a kada se otkinu, sa sobom nose informaciju o pritisku, brzini, temperaturi, momentu itd. sa mesta odakle su pošli. Vrtlozi teže da *uproseče sve karakteristike toka kroz proces mešanja*. Sa pojavom turbulencije, raspored brzina po preseku se više ne može analitički odrediti, pa se samim tim ni vrednost koeficijenta



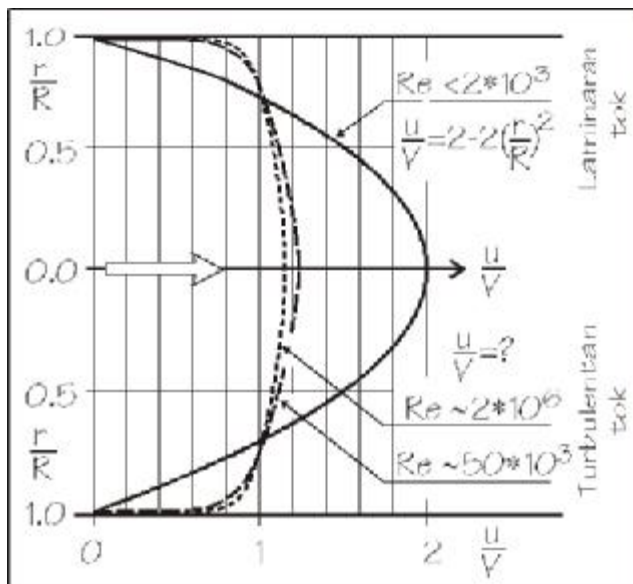
Slika 6.9: Gubitak energije (po jedinici težine fluida) za laminaran tok (samo usled viskoznosti) i turbulentan tok (usled viskoznosti i vrtloga)

<sup>9</sup>Turbulencijom se bavio i Werner Heisenberg (1901 - 1976) nemački fizičar, pionir u oblasti kvantne mehanike. Poznat je Hajzenbergov princip neodređenosti, po kome pri istovremenom merenju (posmatranju) parova osobina atomskih čestica, što se više saznaje o jednoj osobini, utoliko se manje može saznati o drugoj. Zbog toga, nije moguće istovremeno znati i položaj i brzinu neke atomske čestice. Još gore, što se jedna čestica detaljnije posmatra (meri) utoliko će više biti oštećene njene izvorne osobine. Prema [7] na samrti je Hajzelberg rekao: “Kada vidim boga, pitaću ga dve stvari: zašto relativitet i zašto turbulencija. Očekujem da ću dobiti odgovor samo na prvo pitanje.”

linijskog gubitka energije ne može izraziti analitički, jednoznačnim izrazom.

Na slici 6.10, prikazan je uticaj turbulencije na profil brzina u poprečnom preseku cevi. Brzine su normalizovane deljenjem sa srednjom brzinom, tako da svi prikazani profili imaju isti, jedinični protok. Pri laminarnom tečenju raspored brzina je kvadratna parabola, a maksimalna brzina je dva puta veća od srednje.

Sa pojavom turbulencije maksimalna brzina u centru cevi se smanjuje, tako da nije više dva puta veća od srednje brzine, a mala brzina, uz zid cevi, se povećava. Sa povećanjem Reynoldsovog broja i razvojem turbulencije, profil brzina sve više teži pravoj liniji, tako da je, pri kompletno razvijenom turbulentnom tečenju, brzina, u centru cevi veća od srednje brzine samo za 12 do 13%. Raspored brzina  $u/V$  se ne može analitički odrediti, već se dobija na osnovu brojnih eksperimentalnih istraživanja za različite stepene razvijenosti turbulencije i različite hrapavosti cevi, kao i na osnovu pretpostavke o karakteru dijagrama (logaritamski, eksponencijalni i slično). Zbog toga se u literaturi može naći veliki broj različitih izraza za rasporede brzina i, iz njih izvedenih izraza za linijske gubitke.



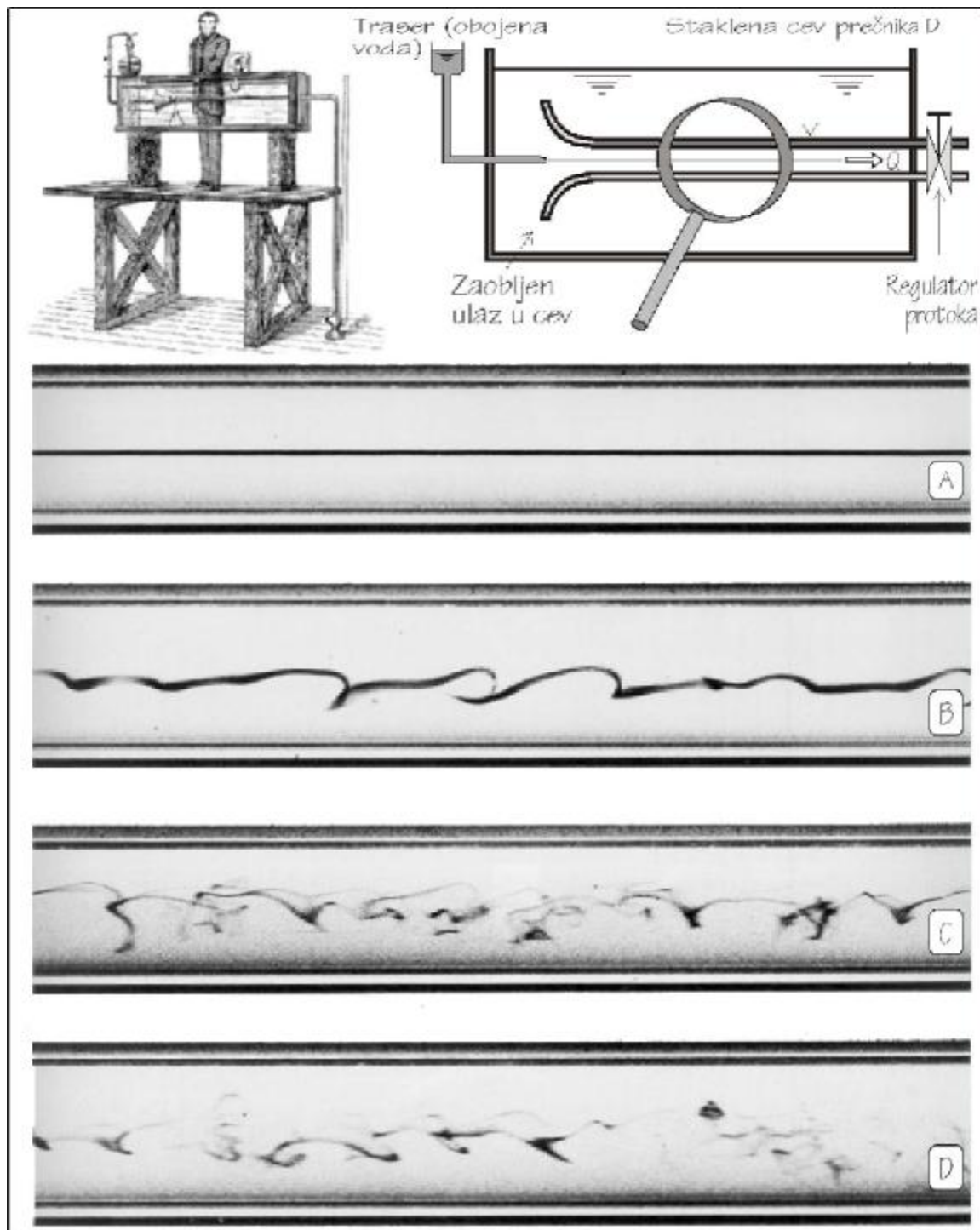
Slika 6.10: Raspored brzina u kružnoj cevi za laminarno tečenje i za različite stepene razvijenosti turbulencije

### 6.1.4 Granica između laminarnog i turbulentnog tečenja u cevi

Koja je granica između laminarnog i turbulentnog tečenja? Osborn Reynolds<sup>10</sup> je 1883. godine izveo niz eksperimenata koristeći vizuelizaciju toka<sup>11</sup>, da bi utvrdio pod kojim uslovima i pri kojim brzinama tečenje ostaje slojevito. Zahvaljujući njegovom radu, uveden je određen "red" u oblasti turbulencije i pokazano je da bezdimenzionalna viskoznost (po njemu i nazvanoj Reynoldsov broj) može opisati mehanizam formiranja vrtloga.

<sup>10</sup>Biografija Osborna Reynoldsa je data u fusnoti 1 na strani 88.

<sup>11</sup>Poglavlje 4.1.7 *Trajektorija, strujnica i emisiona linija.*



Slika 6.11: Eksperimentalno istraživanje prelaska iz laminarnog u turbulento tečenje putem vizuelizacije toka: Reynoldsova aparatura (gore levo) i presek kroz aparaturu (gore desno). Fotografije prikazuju različite režime tečenja: A) laminarno, B) povećanjem brzine dolazi do nestabilnosti u toku, C) i D) daljim povećanjem brzine tok postaje turbulentan (fotografije preuzete iz knjige *An Album of Fluid Motion*, M.V. Dyke, 1982)

Na slici 6.11, u gornjem levom uglu, prikazana je aparatura koju je koristio Osborn Reynolds, a u gornjem desnom uglu, dat je šematski prikaz načina ubrizgavanja boje (trase) u staklenu cev. Ulaz u staklenu cev je tako oblikovan da se što manje remeti strujno polje. Brzina vode u cevi se reguliše nizvodnim ventilom, a traser, koji se ubrizgava, mora imati istu početnu brzinu kao i brzina vode u cevi.

Pri malim brzinama i malim Reynoldsovima brojevima (fotografija A, na slici 6.11) ubrizgani mlaz trase putuje sa vodom kao neprekinuta nit. To pokazuje da se "ofarbani" deliци ne mešaju sa susednim deliциma i da je tok laminaran. Ako se poveća brzina (fotografija B) mlaz trase postaje nestabilan, ali još uvek kontinualan. Ako se u ovoj fazi toka brzina smanji, tok se vraća u laminaran.

Sa daljim povećanjem brzine dolazi do pojave turbulencije (fotografije C i D). Ubrizgani mlaz boje se prekida i meša po širini staklene cevi, farbajući i susedne deliце. Smanjenjem brzine tok se neće odmah vratiti u laminaran, već će ostati turbulentan i pri Reynoldovim brojevima, koji su važili prilikom slikanja fotografije A.

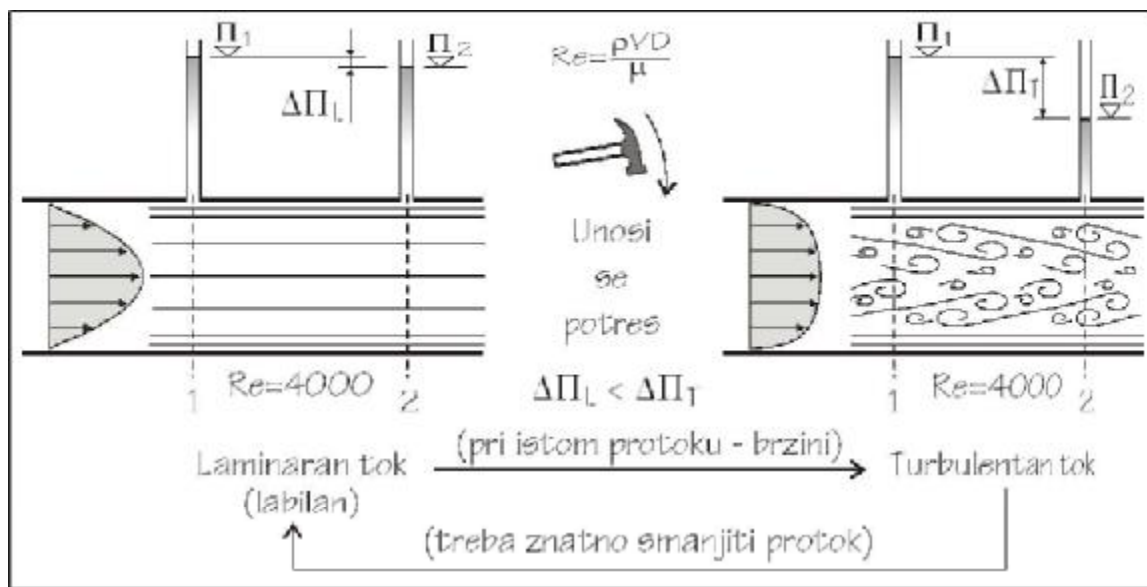
Na osnovu niza eksperimentalnih ispitivanja, Reynolds je potvrdio da granica između laminarnog i turbulentnog tečenja nije fiksna i da zavisi od mnogih faktora, kao što su oblik prilazne deonice, spoljne vibracije, itd. Za inženjersku praksu je prihvatljivo da se pri  $Re < 2000$  smatra da je tečenje u cevi laminarno. Za vrednosti  $Re \approx 4000$  tok može biti laminaran, ako su stabilni uslovi tečenja dok je za  $Re > 10000$  tečenje sigurno turbulentno.

Kao indikator pojave razvoja turbulencije može poslužiti i eksperiment prikazan na slici 6.12. U tom eksperimentu se koristi činjenica da je pri turbulentnom tečenju povećana potrošnja energije toka. Ako se posmatra pad pijeometarske kote između dva preseka, za laminarno tečenje sa velikim  $Re$  brojem (na primer pri  $Re = 4000$ ), koeficijent trenja  $\lambda$  je mali, pa je samim tim mali i linijski gubitak energije. Ako se pri istom protoku (i istom  $Re$  broju) malo zatrese cev, tok će preći u turbulentan i naglo će porasti gubitak energije  $\Delta\Pi_T > \Delta\Pi_L$ .

### 6.1.5 Turbulentno tečenje u cevi

Pri turbulentnom tečenju u ukupnim linijskim gubicima, kao što je to već pokazano na slici 6.9, učestvuju i trenje (odnosno tangencijalni napon na zidu cevi) i vrtlozi u centru cevi. Koji je od ova dva elementa dominantan "potrošač" energije zavisi od stepena razvijenosti turbulencije.

Sredinom i krajem 19-og veka, učinjen je značajan napor da se otkrije priroda gubitaka energije u cevi. Obavljeno je niz eksperimenata u Americi,



Slika 6.12: Pri istom protoku pad piježometarske kote između dva preseka je manji kod laminarnog tečenja nego kod turbulentnog

Nemačkoj, Francuskoj i Engleskoj, i dobijene su razne algebarske jednačine koje, na žalost, nisu bile dovoljno uopštene. Fanning<sup>12</sup> je prvi, 1877. godine, sakupio rezultate svih tih eksperimenata, uniformisao rezultate koristeći Darsijev koeficijent trenja  $\lambda$  iz Vajsbahove jednačine (6.11) za gubitak energije i umesto da traži algebarski izraz za  $\lambda$ , formirao je tablice njegove zavisnosti od brzine, prečnika cevi, vrste materijala i hrapavosti. Prvi upotrebljivi dijagram je znatno kasnije, tek 1943. godine, konstruisao Raus<sup>13</sup>, da bi Mudi<sup>14</sup> godinu dana kasnije, 1944. konstruisao dijagram kakav

<sup>12</sup>John Thomas Fanning (1837 - 1911), američki inženjer. Izdao je 1877. godine knjigu: *A practical treatise on water-supply engineering: Relating to the hydrology, hydrodynamics, and practical construction of water-works*, u kojoj je štampao veliki broj praktičnih tablica i ilustracija.

<sup>13</sup>Hunter Rouse (1906 - 1996), američki hidrauličar poznat po radovima iz oblasti razvoja i mehanike turbulencije u fluidima. Bio je profesor na MIT-ju, na Kolumbija univerzitetu i na Ajova univerzitetu, gde se bavio problemima sličnosti, fizičkim i numeričkim modelima, difuzijom mlaza, trenjem u graničnom sloju i nanosima. U toku svog nastavnčkog rada, snimio je nastavne filmove iz Mehanike fluida koji su i danas aktuelni. Izdao je knjige: *Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers* (1938), *Elementary Mechanics of Fluids* (1946), *Basic Mechanics of Fluids* (1953), i *History of Hydraulics* (1957).

<sup>14</sup>Lewis Ferry Moody (1880 - 1953), američki inženjer, koji je bio u publici kada je Raus predstavio svoju verziju dijagrama za Darsijev koeficijent. Sledeće godine publikuje svoj rad, korigovan dijagram Darsijevog koeficijenta trenja: Moody, L. F., "Friction Factors for Pipe Flow", *Transactions of the ASME*, Vol. 66, 1944. [19]. Pored izučavanja trenja u cevima, bavio se i problemima kavitacija kod turbina. 1922. godine je prvi uveo kavitacioni koeficijent.

je u upotrebi i danas (slika 6.13). Na osnovu tog dijagrama jasno se mogu izdvojiti tri dominantne oblasti tečenja u cevi:

- **Oblast III**<sup>15</sup> Turbulentno tečenje u hidraulički glatkoj cevi

U početnom stadijumu razvoja turbulencije, laminaran podsloj sa slike 6.8, dovoljno je veliki da prekriva sve neravnine i hrapavost na zidu cevi, pa tangencijalni napon na zidu cevi (koji je odgovoran za trenje) ne zavisi od turbulencije. Iako je turbulencija promenila raspored brzina po profilu (slika 6.10), *trenje zavisi samo od viskoznosti, odnosno, od Rejnoldsovog broja:*

$$\lambda = \lambda(Re) \tag{6.30}$$

Ukupan pad energije duž cevi je veći nego što bi bio da je tok laminaran, jer se energija troši na savlađivanje viskoznosti ali i na održavanje vrtloga u centru cevi.

Ovakav režim tečenja se naziva turbulentno tečenje u *hidraulički glatkoj cevi*, jer je viskoznost prekrila neravnine na zidu i napravila cev idealno glatkom. Važno je da se shvati da *jedna ista cev može biti i hidraulički glatka i hrapava*, u zavisnosti od stepena razvijenosti turbulencije.

- **Oblast IV** Prelazna oblast

Sa daljim povećanjem protoka u istoj cevi, raste brzina odnosno Rejnoldsov broj. Širina turbulentnog jezgra postepeno raste a laminarni podsloj biva sve tanji, tako da više ne uspeva da prekrije hrapavost zida cevi *k*. Hrapavost počinje da daje svoj doprinos u stvaranju novih vrtloga. Koeffcijent trenja u takvom režimu zavisi i od Rejnoldsovog broja i od relativne hrapavosti:

$$\lambda = \lambda\left(Re, \frac{k}{D}\right) \tag{6.31}$$

Od relativne hrapavosti cevi zavisi pri kojim Rejnoldsovim brojevima je tečenje u prelaznoj oblasti. Za veću relativnu hrapavost, prelazna oblast počinje već za male vrednosti Rejnoldsovog broja (od 5 000 do 10 000), dok kod veoma glatkih cevi režim turbulentnog tečenja u glatkoj cevi može ostati i za vrednosti Rejnoldsovog broja od par miliona.

---

<sup>15</sup>Ako se laminaran režim označi kao oblast I, a prelazni režim između laminarnog i turbulentnog kao oblast II, tri oblasti u turbulentnom režimu nose oznake III, IV i V.

- **Oblast V** Turbulentno tečenje u hidraulički hrapavoj cevi

Pri još većem povećanju brzine laminarni podsloj više ne postoji, te *viskoznost nema nikakvu ulogu na raspored brzine u cevi, kao ni na otpore trenja*, pa Reynoldsov broj ne utiče na gubitke energije. Hrapavost zida cevi postaje glavni “generator” vrtloga, tako da je koeficijent trenja *konstanta koja zavisi samo od geometrije i fizičkih karakteristika cevi*:

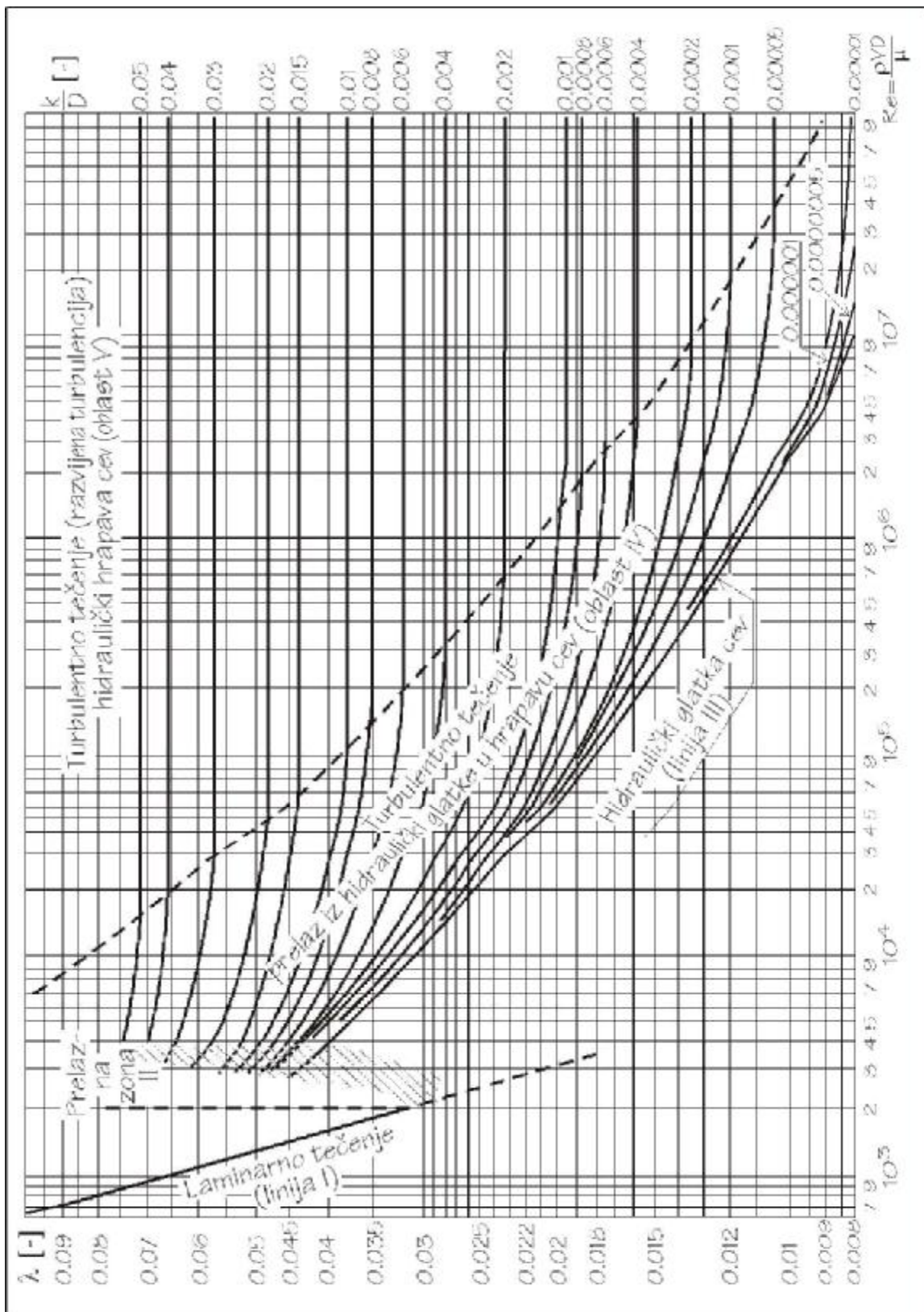
$$\lambda = \lambda\left(\frac{k}{D}\right) \quad (6.32)$$

Ovakav režim tečenja se naziva turbulentno tečenje u *hidraulički hrapavoj cevi*. U većini praktičnih proračuna, tečenja vode se pretpostavlja ovaj režim tečenja<sup>16</sup>, jer se tako dobijaju jednostavnija rešenja: za **usvojenu hrapavost cevi iz tablica se određuje koeficijent gubitka energije  $\lambda$**  i, za date granične uslove, primenom energetske jednačine se računa protok kroz cev. Nakon završenog proračuna korektno bi bilo proveriti da li je dobijeno rešenje takvo da je ispunjena pretpostavka o turbulentnom tečenju u hrapavoj cevi.

Na Mudijevom dijagramu 6.13, prikazana je zavisnost logaritma Darsijevog koeficijenta trenja  $\lambda$  od logaritma Reynoldsovog broja  $Re$ . Oblast laminarnog tečenja (linija I) je predstavljena pravom linijom ( $\lambda = 64/Re$ ), koja važi za Reynoldsov broj manji od 2000. Za sve ostale oblasti, linije na dijagramu su povučene kao najbolja aproksimacija niza merenja, koja su obavljena od strane većeg broja istraživača.

Prelazna zona II, na dijagramu 6.13, je oblast u kojoj je moguća i linija I (laminarno tečenje) i linije III (turbulentno tečenje u glatkoj cevi) ili oblast IV (turbulentno tečenje, prelaz iz glatke u hrapavu cev), u zavisnosti od uslova tečenja i relativne hrapavosti cevi. Sa povećanjem Reynoldsovog broja, linija III postaje granica minimalnih koeficijenta trenja, koja bi se dobila kod idelano glatkih cevi, sa apsolutnom hrapavošću bliskom nuli. Za sve realne cevi, sa hrapavostima reda veličine milimetra, tečenje se odvija ili u oblasti IV (najčešći slučaj za većinu vodovodnih primena) ili u oblasti V (uglavnom kod velikih tranzitnih cevovoda). Važno je uočiti da se **jedna ista cev može ponašati i kao hidraulički glatka i kao hidraulički hrapava cev**, što

<sup>16</sup>U ovoj knjizi će se, takođe, kroz celu glavu 7 *Tečenje fluida kroz cevi* prećutno pretpostavljati turbulentno tečenje u hidraulički hrapavoj cevi, jer će se smatrati da je koeficijent trenja  $\lambda$  konstantan, nezavisan od brzine u cevi. Time se dobija na jednostavnosti i lakšem objašnjenju koncepta tečenja u cevima.



Slika 6.13: Zavisnost Darsijevoeg koeficijenta trenja (koeficijenta linijskog gubitka energije) od Rejnoldsovog broja [19]



isključivo zavisi od brzine u toj cevi (odnosno od Rejnoldsovog broja) i njene hrapavosti.

Izrazi za koeficijent linijskog gubitka  $\lambda$ , za oblasti III (6.30), IV (6.31) i V (6.32), ne mogu se dobiti na osnovu analitičkog rešenja rasporeda brzina u cevi, kao što je to bilo moguće kod laminarnog tečenja, za oblast I. Korišćenjem teorije graničnog sloja (poglavlje 6.3.2, *Raspored brzina i granični sloj*), potrebno je pretpostaviti oblik rasporeda brzina (uglavnom logaritamski ili eksponencijalni) i prilagoditi pretpostavljen raspored brzina izmerenim vrednostima za različite uslove i za različite oblasti tečenja. Na osnovu takvog rasporeda brzina, dobija se i izraz za Darsijev koeficijent  $\lambda$ .

Kao rezultat opisanog postupka, u literaturi je moguće naći čitav niz obrazaca za koeficijent trenja  $\lambda$ , počev od jako jednostavnih do kompleksnih implicitnih izraza oblika  $\lambda = f(\lambda, Re, k/D)$ . Neki obrasci su nastali kao rezultat detaljnog ispitivanja veoma glatkih cevi u laboratorijskim uslovima, drugi obrasci su dobijeni iz niza eksperimenata obavljenih na cevima istog prečnika, ali sa veštačkim nanošenjem (lepljenjem sa unutrašnje strane) različitih hrapavosti, ili na osnovu merenja na realnim starim vodovodnim sistemima. Treba shvatiti da zbog prirode turbulencije *ne postoji "najbolji" obrazac za koeficijent trenja*, već treba poznavati uslove pod kojima je svaki od obrazaca izveden i na osnovu toga birati odgovarajući za problem koji se rešava.

U oblasti turbulentnog tečenja u hidraulički glatkoj cevi (linija III), na osnovu detaljnih ispitivanja koja je vršio Blazijus<sup>17</sup> merenjima pri  $Re < 80\,000$  na glatkim cevima i uz pretpostavku o eksponencijalnom rasporedu brzina u profilu kružne cevi, dobijen je izraz za koeficijent trenja:

$$\text{Linija III: } \lambda = f(Re) = \frac{0,3164}{Re^{1/4}} \quad (6.33)$$

U primeru 6.1.1, na strani 225, pokazano je da, pri laminarnom tečenju, gubitak energije je proporcionalan brzini u cevi na prvi stepen. Ako se ista analiza ponovi za oblast III, primenjujući (6.33) u obrascu za proračun gubitka energije (6.11), dobija se da je gubitak energije proporcionalan brzini u cevi na stepen 1,75:

$$\text{Gubitak energije za liniju III: } \Delta E = \text{Const.} \times V^{1,75} \quad (6.34)$$

<sup>17</sup>Paul Richard Heinrich Blasius (1883 - 1970) nemački inženjer i naučnik, jedan od prvih Prantlovih studenata koji je matematički formulisao silu u graničnom sloju. Takođe, on je prvi primenio teoriju sličnosti da bi pokazao da je Darsijev koeficijent funkcija Rejnoldsovog broja pri tečenju kroz idealno glatke cevi. Na osnovu serije svojih ispitivanja, 1913. godine je formulisao izraz (6.33).

Za istu oblast tečenja, Nikuradze<sup>18</sup> je obavio niz eksperimenata sa glatkim i veštački ohrapavljenim cevima. Na osnovu tih rezultata, us pretpostavku o logaritamskom rasporedu brzina, dobijena je jednačina koja bolje opisuje koeficijent trenja:

$$\text{Linija III: } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0,86 \ln(Re\sqrt{\lambda}) - 0,8 \quad (6.35)$$

U literaturi se ova jednačina često naziva Prantlova ili Karmanova<sup>19</sup>. Jednačina je implicitna, jer je nepoznat koeficijent trenja  $\lambda$  funkcija samog sebe. Izraz se rešava iterativno, tako što se prvo pretpostavi jedna vrednost za koeficijent  $\lambda^{(1)}$ , a zatim se računa druga iteracija  $\lambda^{(2)} = f(\lambda^{(1)}, Re)$ . Ako se vrednosti između prve i druge iteracije razlikuju, potrebno je ponoviti proračun  $\lambda^{(3)} = f(\lambda^{(2)}, Re)$ .

### Primer 6.1.3

Ako je vrednost  $Re = 4\,000$ , kolika je razlika u koeficijentu trenja  $\lambda$  za laminarno i turbulentno tečenje?

a) Laminarno tečenje

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{4\,000} = 0,016$$

b) Turbulentno tečenje

$$\lambda = \frac{0,316}{Re^{1/4}} = \frac{0,316}{4\,000^{1/4}} = 0,04$$

Koeficijent trenja se dobija 2,5 puta veći pri turbulentnom nego pri laminarnom tečenju. Kako izračunati gubitak energije? Inženjerski pristup problemu je sledeći: oba tečenja su fizički moguća i koje će se javiti zavisi samo od uslova. Sa turbulentnim

<sup>18</sup>Johann Nikuradse (1894 - 1979), nemački istraživač, učenik Prantla. Bio je poznat po svojoj pedantnosti u izvođenju eksperimenata. Bavio se merenjima rasporeda brzina u cevima različitih preseka. Prvi je uočio da izotaha u cevima pravougaonog preseka nisu konkavne. Godine 1933. je obavio niz eksperimenata iz oblasti merenja pada pritiska u glatkim i veštački ohrapavljenim cevima, dobijenim lepljenjem peska uniformne granulacije sa unutrašnje strane cevi.

<sup>19</sup>Theodor von Kármán (Sköllöskislaki Kármán Todor) (1881 - 1963), američki naučnik mađarske nacionalnosti, Prantlov student. Po završnim studijama, radio je u Mađarskoj 1914. godine na projektima helikoptera i u Nemačkoj na proučavanju sila uzgona na avionska krila. U Ameriku je otišao 1930. godine, na mesto direktora Aeronautičke laboratorije na Kalifornijskom institutu za tehnologije. Njegov najveći doprinos je iz oblasti aeronautike, pre svega supersoničnih i hipersoničnih brzina, kao i oscilatornih tokova. U svom radu je uočio neophodnost upotrebe matematičkih alata za rešavanje strujanja fluida i za interpretaciju dobijenih rezultata.

režimom treba računati kada se traže gubici, jer se dobija lošija varijanta, odnosno manja propusna moć cevi. Ako se proveravaju maksimalni pritisci koji se mogu javiti u sistemu, onda se koristi laminarni režim.

U prelaznoj oblasti IV kada cev postepeno prelazi iz hidraulički glatke u hidraulički hrapavu, koeficijent trenja  $\lambda$  je funkcija i Rejnoldsovog broja  $Re$  i relativne hrapavosti  $k/D$ . Obrasci, kojima se izračunava koeficijent trenja su kombinacija obrazaca za III i V oblast. Kako su Nikuradzeovi eksperimenti sa veštački ohrapavljenim cevima obuhvatili veliki dijapazon relativnih hrapavosti u oblasti IV, na osnovu tih rezultata i uz pretpostavku o logaritamskom rasporedu brzina, Kolbruk je dao obrazac za koeficijent trenja u implicitnom obliku:

$$\text{Oblast IV: } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0,86 \ln \left( \frac{k}{3,7D} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} \right) \quad (6.36)$$

ili uprošćeno, u eksplicitnom obliku:

$$\text{Oblast IV: } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0,86 \ln \left( \frac{k}{3,7D} + \frac{5,13}{Re^{0,89}} \right) \quad (6.37)$$

Jedna od kritika Nikuradzeovih eksperimenata je da su njima obuhvaćene samo veštački ohrapavljene cevi i da su dobijene vrednosti za hrapavost manje nego što su u realnim sistemima, gde pored hrapavosti samih cevi, na trenje utiču i spojevi cevi, neregularnost u dimenzijama i slično. Kolbruk i Vajt su obavili niz merenja na vodovodnim cevima i na postojećim vodovodnim sistemima. Na osnovu tih rezultata i uz kombinaciju eksponencijalne zavisnost iz režima glatke cevi, dobili su sledeći, najčešće korišćen obrazac<sup>20</sup>:

$$\text{Oblast IV: } \lambda = 0,115 \left( \frac{k}{D} + \frac{60}{Re} \right)^{1/4} \quad (6.38)$$

#### Primer 6.1.4

Koliki je koeficijent trenja za vodovodnu distributivnu cev prečnika  $D = 300 \text{ mm}$ ?

Ako se pretpostavi da je uobičajena srednja brzina vode u vodovodnim cevima  $V_{SR} = 0,8 \text{ m/s}$ , za viskoznost vode od  $\mu = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$  dobija se:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{1000 \times 0,8 \times 0,3}{10^{-3}} = 240\,000 = 0,24 \cdot 10^6$$

<sup>20</sup>Rezultati istraživanja su objavljeni u radu: C. F. Colebrook and C. M. White, Proc. Roy. Soc. Lon., Ser. A 161, 367 (1937).

Za cev koja je u upotrebi par godina, uobičajena je hrapavost zida  $k = 1,0 \text{ mm}$ , pa je relativna hrapavost:

$$\frac{k}{D} = \frac{0,001}{0,3} = 0,0033$$

Prema vrednosti  $Re$  broja (dijagram 6.13) oblast tečenja je prelaz iz glatke u hrapavu cev (oblast IV), pa se, u zavisnosti od primenjenog obrasca dobijaju sledeće vrednosti koeficijenta trenja:

- Obrazac Kolbruk-Vajta za oblast IV (6.38):  $\lambda = 0,02814$
- Karmanov implicitni obrazac (6.36):  $\lambda = 0,02803$
- Karmanov eksplicitni obrazac (6.37):  $\lambda = 0,02821$
- Očitanjem sa dijagrama 6.13:  $\lambda = 0,0272$
- Srednja vrednost prethodne četiri vrednosti:  $\lambda = 0,0279$

Koju vrednost uzeti za proračun? Da li je rešenje uzeti što više obrazaca, pa računati sa srednjom vrednošću? Ne - rešenje je da se upotrebi obrazac dobijen za što približnije uslove analiziranom problemu. U ovom primeru bi to bio Kolbruk-Vajtov obrazac, jer je dobijen na osnovu merenja na realnim vodovodnim sistemima.

U oblasti V, turbulentnom tečenju u hidraulički hrapavoj cevi, koeficijent trenja je funkcija samo relativne hrapavosti  $k/D$ . Na osnovu Kolbruk-Vajtovih merenja dobijen je eksponencijalni obrazac, sa eksponentom na  $1/4$ :

$$\text{Oblast V: } \lambda = 0,115 \left( \frac{k}{D} \right)^{1/4} \tag{6.39}$$

Često je u upotrebi i eksponencijalni obrazac koji koristi eksponent  $1/3$ :

$$\text{Oblast V: } \lambda = 0,189 \left( \frac{k}{D} \right)^{1/3} \tag{6.40}$$

Uz pretpostavku o logaritamskoj zavisnosti brzine u cevi, Karman je dao logaritamski oblik izraza za proračun koeficijenta trenja, u eksplicitnom obliku:

$$\text{Oblast V: } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,74 - 0,86 \ln \frac{k}{D} \tag{6.41}$$

Bez obzira na obrazac kojim se obračunava koeficijent trenja u oblasti V, pošto on ne zavisi od Rejnoldsovog broja, odnosno od brzine, ako se uradi

analiza veze gubitka energije i brzine u cevi, kao što je to urađeno u (6.34) za oblast III, dobija se:

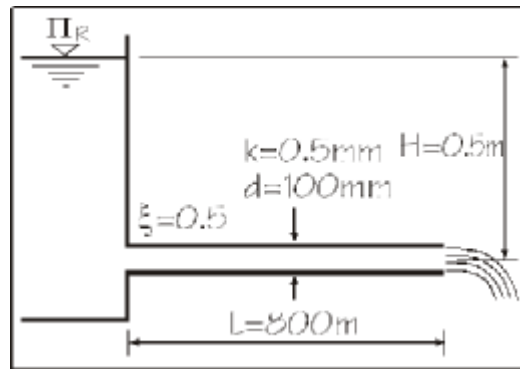
$$\text{Gubitak energije za oblast V: } \Delta E = \text{Const.} \times V^{2,0} \quad (6.42)$$

odnosno, pad energije je proporcionalan kvadratu brzine. Zbog toga se često oblast turbulentnog tečenja u hrapavoj cevi zove još i *kvadratni zakon otpora*.

Pored ovde datih obrazaca za proračun Darsijevog koeficijenta trenja u literaturi se može naći i još niz drugih oblika, manje ili više složenih obrazaca. Njihovo navođenje, međutim, ne bi vodilo ka boljem objašnjenju osnovnog principa, a to je da u turbulentnom režimu tečenja ne postoji jednoznačan, analitički obrazac za koeficijent trenja, već da se na osnovu niza sprovedenih eksperimenata i uz pretpostavljene rasporede brzina u cevi, dobijaju približni obrasci.

**Primer 6.1.5**

Za date podatke sa slike odrediti kolika je brzina kojom voda ističe iz rezervoara sa konstantnim nivoom. Kinematski koeficijent viskoznosti vode je  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .



Da bi se rešio zadatak, potrebno je poznavati koeficijent linijskih gubitaka  $\lambda$ , odnosno, potrebno je znati režim tečenja u cevi. Kako nije poznat protok, ne može se izračunati ni Rejnoldsov broj, pa će se pretpostaviti da je turbulentan režim u hrapavoj cevi (oblast V).

Primenom eksponencijalnog obrasca (6.39) dobija se prva iteracija za  $\lambda$ :

$$\lambda^{(1)} = 0,115 \left( \frac{k}{D} \right)^{1/4} = 0,115 \left( \frac{0,5}{100} \right)^{1/4} = 0,0306$$

pa se brzina kroz cev može odrediti iz energetske jednačine:

$$\Pi_R = \Pi_{izl} + \frac{V^2}{2g} + \xi \frac{V^2}{2g} + \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = \Pi_{izl} + \left( 1 + \xi + \lambda \frac{L}{D} \right) \frac{V^2}{2g}$$

Sređivanjem po brzini, dobija se rešenje u prvoj iteraciji:

$$V^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi + \lambda \frac{L}{D}}} \sqrt{2gH} = \frac{1}{\sqrt{1,5 + 0,0306 \frac{800}{0,1}}} \sqrt{2 \times 9,81 \times 2} = 0,4 \text{ m/s}$$

odakle se može izračunati Rejnoldsov broj za prvu iteraciju brzine:

$$Re^{(1)} = \frac{V^{(1)} D}{\nu} = \frac{0,4 \times 0,1}{1,0 \cdot 10^{-6}} = 39,99 \cdot 10^3$$

Sa dijagrama 6.13 se vidi da je za dobijeni  $Re^{(1)}$  broj i cev sa relativnom hrapavošću  $k/D = 0,005$  režim tečenja u oblasti 1V, pa je potrebno izvršiti korekciju proračuna. Za drugu iteraciju se koristi eksponencijalni izraz (6.38) gde se uzima Rejnoldsov broj iz prve iteracije  $Re^{(1)}$ :

$$\lambda^{(2)} = 0,115 \left( \frac{k}{D} + \frac{60}{Re^{(1)}} \right)^{1/4} = 0,115 \left( \frac{0,5}{100} + \frac{60}{39990} \right)^{1/4} = 0,0327$$

Izračunata brzina u drugoj iteraciji (koristeći  $\lambda^{(2)}$ ) je  $V^{(2)} = 0,386$  m/s a Rejnoldsov broj  $Re^{(2)} = 38600$ . Razlika između brzina u prve dve iteracije je 3,5% pa je potrebno izračunati još jednu iteraciju:

$$\lambda^{(3)} = 0,115 \left( \frac{0,5}{100} + \frac{60}{18829} \right)^{1/4} = 0,0327 \Rightarrow V^{(3)} = 0,386 \text{ m/s}$$

### 6.1.6 Otpori trenja u cevima različitih poprečnih preseka

Sva prethodna razmatranja su izvedena za kružnu cev sa osnosimetričnim rasporedom brzina. U praksi se koriste i cevi drugačijih preseka: elipsaste, pravougaone ili čak i šestougaone<sup>21</sup>. Bez obzira na poprečni presek cevi, u njima će se javljati isti fenomeni prilikom tečenja fluida kao i kod kružnih cevi.

Za detaljno izučavanje otpora u cevima drugih profila, neophodno je znati raspored brzina u njima, a on direktno zavisi od oblika preseka i relativnog odnosa stranica u preseku. Međutim, kao približno rešenje mogu se uzeti rezultati i izrazi izvedeni za kružnu cev. Na početku poglavlja 6.1.1, *Koeficijent linijskog gubitka energije*, na strani 220, dobijen je gubitak energije (6.9), odakle se može odrediti nagib energetske linije u zavisnosti od koeficijenta tangencijalnog napona i hidrauličkog radijusa:

$$\Delta E_{1-2} = C_\tau \frac{L V^2}{R 2g} \Rightarrow I_E = C_\tau \frac{V^2}{2gR} \tag{6.43}$$

Za kružni presek, stavljen je odgovarajući hidraulički radijus (slika 6.3, na strani 219)  $R = D/4$  i uveden je Darsijev koeficijent trenja  $\lambda = 4 C_\tau$ , pri čemu je  $\lambda = \lambda \left( Re, \frac{k}{D} \right)$ , tako da je dobijen često korišćen obrazac (6.11):

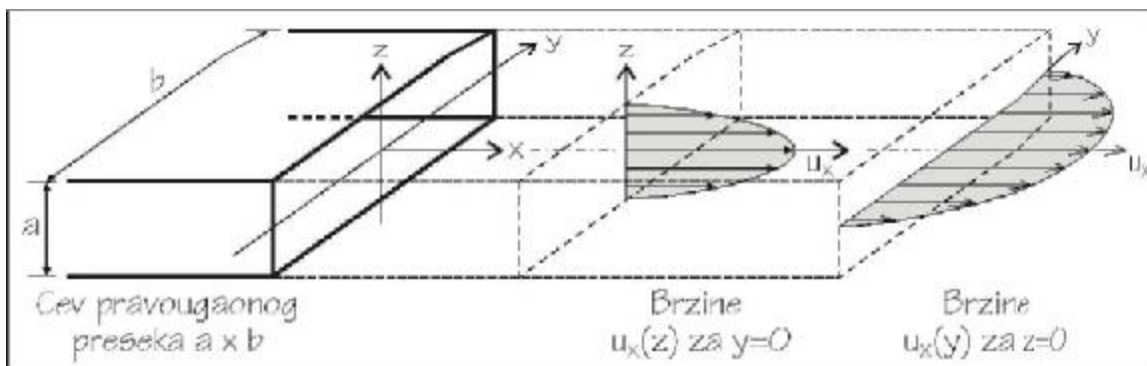
$$\Delta E = I_E L = \lambda \frac{L V^2}{D 2g}$$

<sup>21</sup>Šestougaone cevi se najčešće koriste za hlađenje generatora, gde je prostor za smeštaj cevi ograničen pa je potrebno što bolje "spakovati" cevi.

Ako cev nije kružna, gubitak energije po jedinici dužine cevi može se računati prema izrazu (6.43) samo je potrebno uraditi sledeće:

1. U izrazu (6.43) staviti odgovarajući hidraulički radijus  $R_{\diamond} = A_{\diamond}/O_{\diamond}$ , gde je  $A_{\diamond}$  proticajni poprečni presek cevi proizvoljnog poprečnog preseka, a  $O_{\diamond}$  njen okvašeni obim.
2. Koeficijent tangencijalnog napona je kao i kod kružne cevi  $C_{\tau} = \lambda/4$ .
3. Odrediti *ekvivalentni hidraulički prečnik cevi*  $D_{\diamond}$  (ili ekvivalentan prečnik cevi), kao reprezentativnu dužinu koja će se koristiti za proračun Rejnoldsovog broja  $Re_{\diamond}$  i relativne hrapavosti cevi  $k/D_{\diamond}$ . Kao što je hidraulički prečnik kružne cevi  $D = 4R$  (sledi iz  $R = D/4$ ), tako je ekvivalentni hidraulički prečnik cevi proizvoljnog oblika:

$$D_{\diamond} = 4R_{\diamond} = 4 \frac{A_{\diamond}}{O_{\diamond}} \tag{6.44}$$



Slika 6.14: Raspored brzina u kvadratnoj cevi zavisi i od  $y$  i od  $z$  pravca

Za laminaran režim tečenja u proizvoljnom preseku cevi moguće je analitički izvesti izraz za koeficijent trenja. To izvođenje, međutim, nije jednostavno kao kod kružne cevi, jer raspored brzine  $u_x$  u opštem slučaju zavisi i od  $y$  i  $z$  koordinata. Na slici 6.14, prikazan je primer cevi kvadratnog preseka, sa brzinama  $u_x$  za samo jedan presek ( $y = 0$  i  $z = 0$ ). U svakom drugom preseku, raspored brzina je različit.

Približno rešenje za koeficijent trenja u laminarnom režimu se može dobiti ako se koristi isti izraz kao i za kružnu cev (6.25) (na strani 225), a umesto konstante 64 se stavi koeficijent  $C_o$  čija vrednost zavisi od oblika poprečnog preseka:

$$\lambda = \frac{C_o}{Re} \tag{6.45}$$

$D_{\diamond}$	Odnos $a/b$	Koeficijent $C_o$
$2ab/(a+b)$	0,001	96
	0,05	89,9
	0,10	84,7
	0,25	72,9
	0,50	62,2
	0,75	57,9
	1,00	56,9

Tabela 6.1: Ekvivalentni prečnik  $D_{\diamond}$  i koeficijent  $C_o$  iz obrasca za trenje u laminarnom režimu  $\lambda = C_o/Re_{\diamond}$  za pravougaonu cev preseka  $a \times b$

U literaturi se mogu naći vrednosti koeficijenta  $C_o$  za različite oblike cevi ([12], [20]). Njihova vrednost je dobijena računski za neke prostije profile, a za većinu složenijih profila eksperimentalno, merenjima na instalaciji. U tabeli 6.1, date su vrednosti za cevi pravougaonog poprečnog preseka, sa različitim odnosom stranica.

U turbulentnom režimu se za određivanje koeficijenta trenja  $\lambda$  može koristiti dijagram 6.13 (strana 236), i svi približni izrazi za pojedine režime tečenja. Reynoldsov broj, kao i relativna hrapavost cevi treba da se odrede korišćenjem ekvivalentnog hidrauličkog prečnika cevi  $D_{\diamond}$ . Ako se ne vrše dodatne korekcije dobijenih rezultata, može se očekivati tačnost za koeficijent trenja od oko 15% [20]. Za veće tačnosti neophodno je koristiti rezultate eksperimentalnih merenja na instalaciji koja koristi isti poprečni presek cevi.

**Primer 6.1.6**

Kroz kružnu idealno glatku cev prečnika  $D_o = 50$  mm teče voda ( $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$ ) protokom  $Q = 2$  L/s. Odrediti presek kvadratne cevi tako da pri istom protoku vode gubitak energije na trenje bude isti kao i u kružnoj cevi?

Za date uslove, brzina u kružnoj cevi je  $V_o = Q/A_o = 1,019$  m/s a Reynoldsov broj je  $Re_o = V_o D_o / \nu = 50\,929$ . Koeficijent trenja za turbulentno tečenje u glatkoj cevi je:

$$\lambda_o = \frac{0,316}{Re_o^{0,25}} = 0,02104$$

pa je gubitak energije na trenje, po metru dužine cevi:

$$\frac{\Delta E_o}{L} = \lambda_o \frac{1}{D_o} \frac{V_o^2}{2g} = 0,02104 \frac{1}{0,05} \frac{1,019^2}{2 \times 9,81} = 0,02225$$



Za kvadratnu cev dimenzija  $a \times a$  ekvivalentan hidraulički prečnik  $D_\diamond$  i hidraulički radijus  $R_\diamond$  su:

$$D_\diamond = 4R_\diamond = 4 \frac{A_\diamond}{O_\diamond} = 4 \frac{a^2}{4a} = a$$

$$R_\diamond = \frac{A_\diamond}{O_\diamond} = \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4}$$

pa je Rejnoldsov broj  $Re_\diamond$ :

$$Re_\diamond = \frac{V_\diamond D_\diamond}{\nu} = \frac{Q a}{a^2 \nu} = \frac{Q}{a \nu}$$

Koeficijent trenja za kvadratnu cev se računa na isti način kao i za kružnu:

$$\lambda_\diamond = \frac{0,316}{Re_\diamond^{0,25}} = \frac{0,316 a^{0,25} \nu^{0,25}}{Q^{0,25}}$$

Presek kvadratne cevi se određuje iz postavljenog uslova:

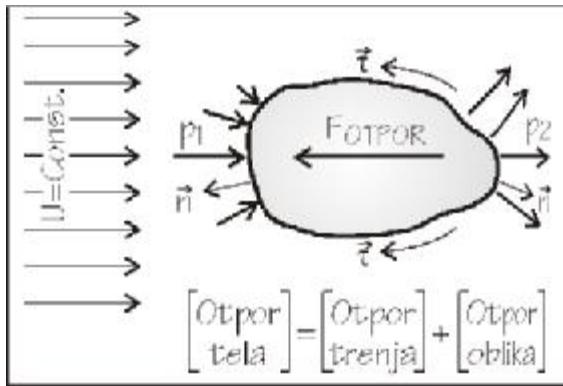
$$I_E = \Delta E_\diamond / L = \Delta E_\circ / L$$

$$I_E = \frac{\Delta E_\diamond}{L} = C_\tau \frac{V_\diamond^2}{2gR_\diamond} = \frac{\lambda_\diamond}{4} \frac{V_\diamond^2}{2g \frac{a}{4}} = \lambda_\diamond \frac{1}{a} \frac{V_\diamond^2}{2g} = 0,02225$$

$$\frac{0,316 a^{0,25} \nu^{0,25} Q^2}{Q^{0,25} 2 g a^5} = \frac{0,316 \nu^{0,25} Q^{1,75}}{2 g a^{4,75}} = 0,02225$$

Rešavanjem po nepoznatoj dužini ivice kvadratne cevi  $a$ , dobija se  $a = 45,7$  mm. Ako se uporede dobijeni rezultati, vidi se da je odnos površina kvadratnog i kružnog preseka  $A_\diamond/A_\circ = 1,066$  a odnos obima  $O_\diamond/O_\circ = 1,165$  što pokazuje da je kružna cev optimalna sa stanovišta gubitaka, odnosno da kvadratna cev iste propusne moći ima za 7% veći presek, odnosno da je potrebno za 17% više materijala.

## 6.2 Ukupni otpori tela



Slika 6.15: Ukupan otpor tela se razdvaja na otpor trenja i otpor oblika

Analiziraju se otpori nastali usled relativnih brzina između tela proizvoljnog oblika koje je u potpunosti potopljeno u homogeni fluid i tog fluida. Moguća su dva krajnja slučaja kretanja: telo se kreće kroz homogeni fluid koji miruje, ili telo miruje, a fluid u kome se nalazi se kreće. U oba slučaja se javlja ista **sila otpora**, koja se može razdvojiti na dve komponente: na otpore usled trenja i otpore nastale usled promene pritiska oko tela kao rezultat promene rasporeda brzina (slika 6.15).

$$\begin{bmatrix} \text{Otpor} \\ \text{tela} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Otpor} \\ \text{trenja} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Otpor} \\ \text{oblika} \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

- **Otpor trenja  $F_{OT}$**  Usled viskoznosti dolazi do promene brzine fluida u sloju neposredno uz telo, od nula (na konturi tela) do neporemećene brzine  $U$ . Rezultat te promene je postojanje tangencijalnog napona po celoj konturi tela, pa je sila otpora trenja:

$$\vec{F}_{OT} = \int_A \vec{\tau} dA \quad (6.47)$$

Otpori trenja će se u nastavku izučavati razmatranjem idealizovane situacije po kojoj je telo toliko tanko da svojim prisustvom ne remeti fluidnu struju. U tom slučaju ne postoje otpori oblika, već je celokupan otpor tela jednak otporu trenja.


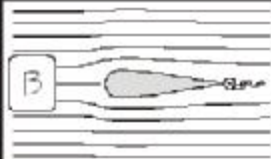
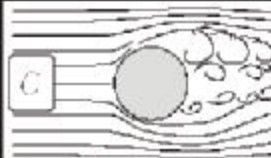
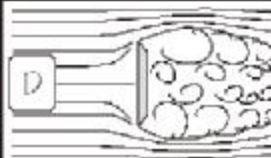
- **Otpor oblika  $F_{OO}$**  Na prednji deo tela ("čelo") deluju povećani pritisci  $p_1$  usled smanjenja brzina dok na zadnji deo tela deluju sniženi pritisci  $p_2$ . Povećanje i sniženje pritiska zavise od stepena poremećaja fluidne struje, odnosno, od oblika tela. Sila otpora je suma (integral) sila na sve elementarne površine tela  $dA$ :

$$\vec{F}_{OO} = \int_A (-\vec{n})p dA \quad (6.48)$$

Otpor oblika će se u nastavku izučavati pretpostavljajući idealan slučaj kada ne postoje otpori trenja.

### 6.3. TRENJE UZ RAVNU (USAMLJENU) PLOČU

Na slici 6.16, prikazano je učešće otpora trenja i otpora oblika u ukupnom otporu, za različite oblike tela. Kod strujolikih tela (A i B) najveći deo otpora čini trenje. Kod tela koja značajnije remete strujnu sliku (C i D) doprinos trenja je u većini slučajeva zanemarljiv u odnosu na otpore oblika pa, na primer, nema mnogo svrhe praviti glatke teniske ili golf lopte<sup>22</sup>.

Oblik tela	Učešće otpora trenja	Učešće otpora oblika
	100%	0%
	≈ 90%	≈ 10%
	≈ 10%	≈ 90%
	0%	100%

Slika 6.16: Učešće otpora trenja i otpora oblika u ukupnom otporu tela

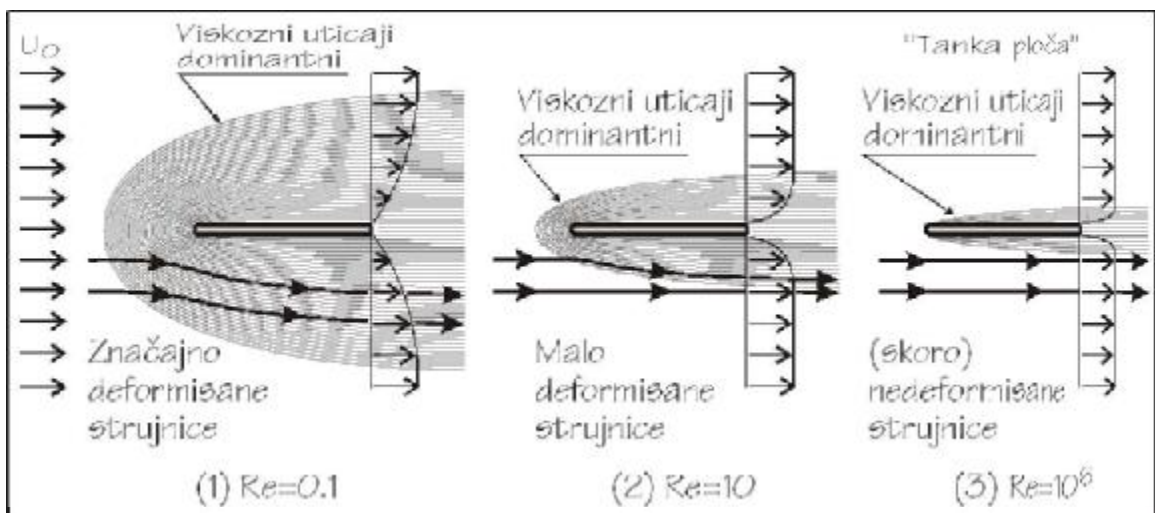
### 6.3 Trenje uz ravnu (usamljenu) ploču

Posmatra se ravna, tanka ploča koja se nalazi u beskonačnom fluidnom prostoru. Pretpostavlja se da ploča miruje a da se fluid kreće konstantnom brzinom  $U_0$ . Dominantni uticaji na raspored brzina oko ploče i na silu otpora su inercijalni i viskozni, izraženi kroz Reynoldsov broj (karakteristična dužina je ukupna dužina ploče  $L$ ):

$$Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu} \tag{6.49}$$

Strujna slika oko tanke ploče zavisi od vrednosti Reynoldsovog broja. Na slici 6.17, prikazana su tri karakteristična slučaja: (1) za veoma male vrednosti  $Re$  kod izuzetno viskoznih fluida i pri malim brzinama, (2) za srednje vrednosti  $Re$  i (3) za velike vrednosti  $Re$  gde su dominantni inercijalni uticaji.

<sup>22</sup>Videće se kasnije da je čak povoljnije da lopte budu hrapave. Mada se povećava otpor trenja, time se smanjuje otpor oblika i povećava stabilnost leta lopte.



Slika 6.17: Opstrujavanje ravne ploče zavisi od odnosa inercijalnih i viskoznih uticaja (Rejnoldsovog broja)

U prvom slučaju, za  $Re < 1$ , viskoznost je toliko velika da ploča utiče i na fluidne deliće ispred sebe, izazivajući znatnu deformaciju strujne slike. Iako je ploča tanka, sa stanovišta otpora ona se ponaša kao telo konstantne debljine i formira značajan otpor oblika.

U drugom slučaju je  $Re \approx 10$ , i tu se uticaj ploče na okolni fluid postepeno smanjuje. Tek sa znatnim povećanjem inercijalnih uticaja, gde je  $Re > 10^5$  (treći slučaj), ploča postaje "tanka" jer svojom debljinom ne izaziva povećanje brzina iznad ploče ni smanjenje (ili zaustavljenje) ispred. Jedina promena brzina u strujnom polju se odigrava neposredno uz ploču, gde brzina fluida raste od nule (uz ploču) do neporemećene brzine  $U_0$ .

U nastavku poglavlja će se uvesti novi pojam, *granični sloj*, koji određuje oblast u okviru koje su viskozni uticaji dominantni, odnosno, u kojoj je fluid realan. Daće se obrasci za proračun debljine graničnog sloja, kao i kriterijumi za određivanje da li je sloj laminaran ili turbulentan. Nakon toga će se odrediti tangencijalni naponi duž ploče, a na kraju i ukupna sila trenja.

### 6.3.1 Osnovne pretpostavke

Na osnovu uticaja viskoznosti na oblik strujne slike (slika 6.17), jasno je da je prva i osnovna pretpostavka da se *izučavaju samo strujanja sa relativno velikim Rejnoldsovim brojem*, gde je dominantan inercijalni uticaj. Pored toga, potrebno je uvesti i sledeće pretpostavke:

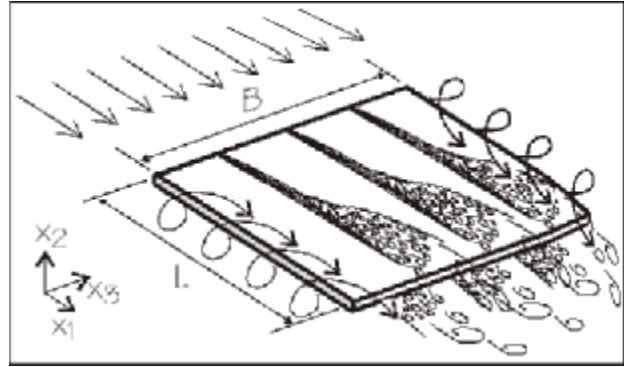
- Izučava se samo ravanski problem - ploča se nalazi u beskonačnoj ravanskoj fluidnoj struji i posmatra se strujanje samo u  $x_1$  (duž ploče) i

## 6.3. TRENJE UZ RAVNU (USAMLJENU) PLOČU

249

$x_2$  (upravno na ploču) pravcima. Širina ploče (pravac  $x_3$ ) je beskonačna, a sile se računaju na 1 metar.

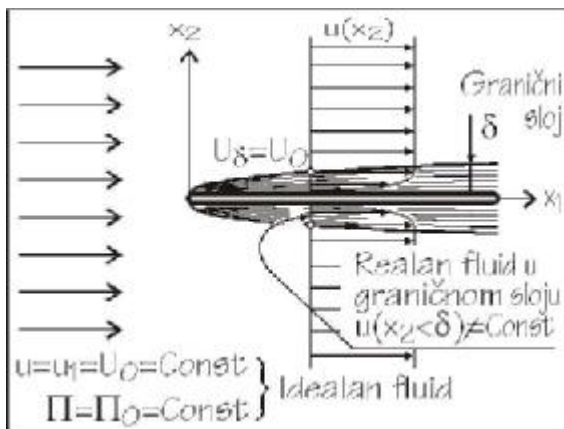
Jasno je da je učinjena pretpostavka gruba i često upravo konačna dimenzija širine ploče dosta utiče na silu otpora (slika 6.18). Tačne rezultate je jedino moguće dobiti modelskim ispitivanjima, pri čemu je čak i na modelu često teško obezbediti verodostojne granične uslove.



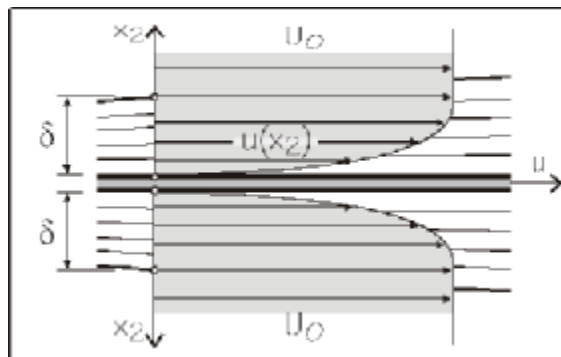
Slika 6.18: Kod opstrujavanja ploče konačne širine  $B$  efekti na krajevima ploče nisu zanemarljivi

- Fluid je nestišljiv  $\rho = \text{Const.}$  Ukoliko je fluid tečnost, ova pretpostavka je prihvatljiva. Često se, međutim, izučava otpor tela u vazdušnoj struji. Kako je vazduh stišljiv, potrebno je ograničiti brzine  $U_0$  na vrednosti manje od jednog Mahovog broja, u okviru kojih efekat stišljivosti nije izražen. Za praktične zadatke otpora tela u vazduhu, pri brzinama od 200 do 300 km/h, još uvek se može smatrati da je vazduh nestišljiv.
- Strujanje je jednoliko, pravolinijsko i paralelno u pravcu  $x_1$  sa brzinom  $u = U_0 = \text{Const.}$  Jedino su u tankom sloju uz samu ploču brzine manje:  $0 < u < U_0$ .
- Srednja vrednost brzine fluida je ustaljena  $\frac{\partial \bar{U}_0}{\partial t} = 0$ , ali postoje fluktuacije brzina u dolaznoj struji (slika 4.3 na strani 89)  $U' = U_0 - \bar{U}_0$  koje značajno utiču na mesto pojave turbulentnog graničnog sloja.
- Nema gubitaka energije  $E_0 = \text{Const.}$  odnosno posmatra se idealan fluid. Kako je brzina konstantna i piježometarska kota je  $\Pi_0 = \text{Const.}$

Međutim, pretpostavka o idealnom fluidu, ne važi za sloj uz samu ploču, jer je upravo viskoznost odgovorna za promenu brzine od nula (na samoj ploči) do  $U_0$ . Zbog promene brzine na maloj debljini  $\delta$  (slika 6.19), postoji tangencijalni napon duž ploče  $\tau$ , pa se njegovim integrisanjem po celoj površini ploče dobija sila otpora trenja.



Slika 6.19: Tanka ploča u neograničenoj paralelnoj vazdušnoj struji



Slika 6.20: Raspored brzina uz tanku ploču u neograničenoj paralelnoj vazdušnoj struji - promena brzine sa  $u = 0$  do  $u = U_0$  se odigrava u tankom sloju debljine  $\delta$

### 6.3.2 Raspored brzina i granični sloj oko tanke ploče

Prema datim uslovima, brzina fluida u celom polju je  $U_0$  osim u tankom sloju uz ploču, gde se fluidni delići usporavaju usled delovanja viskoznosti. U tom sloju neporemećena brzina  $u(x_2) = U_0$  pada na brzinu  $u(x_2 = 0) = 0$  (na samoj površini ploče). Na slici 6.19, prikazana je tanka ploča u strujnom polju i promena brzine uz samu ploču, dok je na slici 6.20 dat detalj na sredini ploče.

Pomirenje naizgled oprečne pretpostavke da se posmatra strujanje idealnog fluida koji je "realan" samo uz ploču, dao je Ludvig Prantl<sup>23</sup>, nemački inženjer. On je 1904. godine razvio koncept graničnog sloja po kome: "... za fluide sa relativno malom viskoznošću, efekti unutrašnjeg trenja se primenjuju samo na maloj oblasti oko granice tela ...". Tanak sloj u kome se ne zanemaruje viskoznost fluida, Prantl je nazvao granični sloj a njegovu debljinu je označio slovom  $\delta$ .

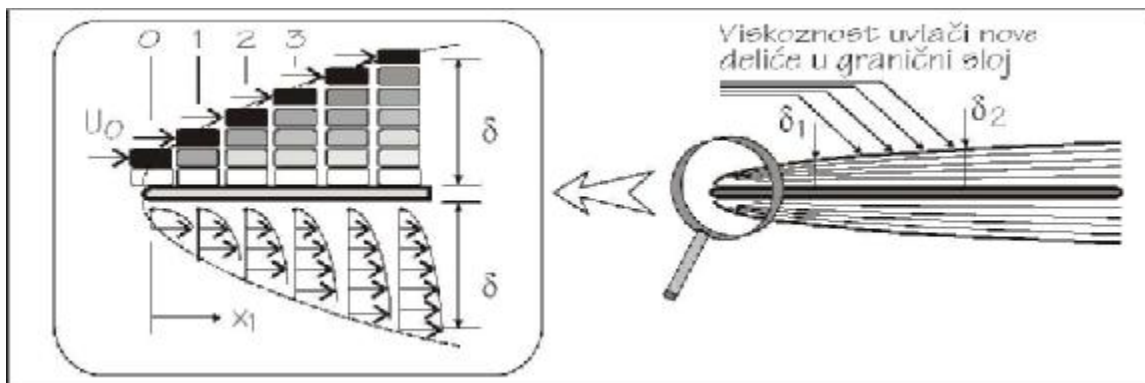
Debljina graničnog sloja je najčešće mala u odnosu na dužinu ploče, pa iako je u graničnom sloju dominantna viskoznost, može se zanemariti gubitak energije. Kako je na kraju graničnog sloja  $x_2 = \delta$  brzina  $U_0$  konstantna (slika 6.20), promena pijeometarske kote unutar graničnog sloja  $\Pi_\delta$  duž ploče je nula:

$$\frac{\partial \Pi_\delta}{\partial x_1} = 0 \tag{6.50}$$

<sup>23</sup>Osnovni biografski podaci o Prantlu su već dati u fusnoti 31 na strani 139 u okviru poglavlja o Pito-Prantlovoj cevi.

odnosno<sup>24</sup>  $\Pi_\delta = \Pi_0$  gde je  $\Pi_0$  piježometarska kota fluida izvan graničnog sloja i prema pretpostavkama je konstantna.

Granični sloj se formira uz svako telo, koje se nalazi u fluidnoj struji. Tanka ploča je samo ekstremni primer, jer je jedino granični sloj poremećaj u fluidnoj struji i rezultujuće sile su posledica samo trenja u tom graničnom sloju.



Slika 6.21: Granični sloj niz tanku ploču postepeno raste jer se novi delići uvlače delovanjem viskoznosti (na uveličanom prednjem delu ploče prikazani su sa gornje strane nedeformisani delići a sa donje strane njihove brzine)

U nizu eksperimenata je primećeno da debljina graničnog sloja raste duž ploče. Jednostavno objašnjenje se može videti na slici 6.21: na samom početku ploče, u preseku 0 ( $x_1 = 0$ ), samo je jedan fluidni delić “uhvaćen” pločom i njegova brzina je nula (beli delić na slici), a prvi delić do njega prolazi sa neporemećenom brzinom  $U_0$  (crni delić). U sledećem preseku 1, crni delić biva usporen delovanjem viskoznosti (sada je na slici prikazan sivom bojom) a iznad njega prolazi drugi delić neporemećenom brzinom  $U_0$ . Od preseka do preseka duž ploče, broj “uhvaćenih” delića raste po visini, pa raste i debljina graničnog sloja.

Debljina graničnog sloja  $\delta$  u kome su brzine manje od neporemećene brzine  $U_0$ , najčešće se definiše na jedan od ova dva načina:

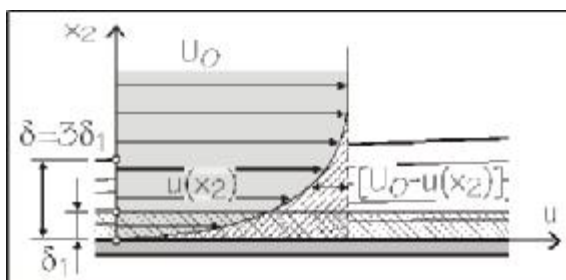
1. Kao odstojanje od ploče na kojem je brzina dostigla 99% vrednosti neporemećene brzine  $U_0$ .
2. Preko debljine istisnuća  $\delta_1$ , gde se ne izučava tanka ploča debljine  $d = 0$  već konačne debljine  $\delta_1$ , a pretpostavlja se da je na površini ploče

<sup>24</sup>Relacija (6.50) neće važiti kod otpora oblika tela  $F_{00}$  gde dolazi do promene brzine na kraju graničnog sloja usled debljine tela i njegovog opstrujavanja (slika 6.29).

odmah neporemećena brzina  $U$  (slika 6.22):

$$\delta_1 = \frac{\int_0^\delta (U - u) dx_2}{U}$$

Ukupna debljina graničnog sloja  $\delta$  se uzima kao trostruka debljina istisnuća:  $\delta = 3 \delta_1$ .



Slika 6.22: Debljina graničnog sloja se često definiše i kao trostruka vrednost debljine istisnuća  $\delta_1$

kod cevi. Razlika je jedino u definiciji Rejnoldsovog broja, bezdimenzionalne viskoznosti. Kod cevi se režim tečenja vezuje za celu cev i smatra se da je svuda isti, zanemarujući prelazne pojave na samom početku cevi. Zbog toga je zgodno da Rejnoldsov broj ne zavisi od mesta duž cevi gde se računa, pa se kao karakteristična dužina koristi prečnik  $D$ , koji je konstantan za jednu cev.

Na ravnoj ploči se pri istoj brzini fluida promena režima događa duž ploče, pa je pravilnije uzeti da se i Rejnoldsov broj menja duž ploče<sup>25</sup>. Rejnoldsov broj bi mogao da se izrazi preko debljine graničnog sloja  $\delta$ , ali to nije praktično jer debljina graničnog sloja nije konstantna, već zavisi od mesta  $x_1$  duž ploče, od brzine dolazne struje  $U_0$  i od viskoznosti. Zbog toga je dogovoreno da se kao karakteristična dužina koristi dužina  $x_1$ , rastojanje od početka ploče do određenog mesta gde se želi izračunati Rejnoldsov broj:

$$Re_x = \frac{\rho U_0 x_1}{\mu} = \frac{U_0 x_1}{\nu} \tag{6.51}$$

Za konstantnu brzinu fluida  $U_0$ , vrednost  $Re_x$  zavisi od mesta na ploči<sup>26</sup>, odnosno, od udaljenja od početka ploče. U literaturi se  $Re_x$  često naziva i lokalni Rejnoldsov broj.

<sup>25</sup>Ako se ne izučava detaljno strujna slika već se samo gledaju ukupni efekti ploče na strujnu sliku, može se koristiti konstantna vrednost Rejnoldsovog broja. Tada se najčešće uzima ukupna dužina ploče  $L$ , kao što je to i urađeno u (6.49).

<sup>26</sup>Pošto  $Re$  zavisi od mesta gde se računa, u indeksu je dobio  $x$  pa se piše  $Re_x$ .

Dok je granični sloj relativno tanak, viskoznost je u stanju da održi slojevito kretanje delića. Kao i kod tečenja u cevi, kaže se da je takav granični sloj laminaran. Sa porastom debljine graničnog sloja niz ploču, on postaje sve nestabilniji i, u zavisnosti od jačine viskoznosti, može preći u turbulentan granični sloj.

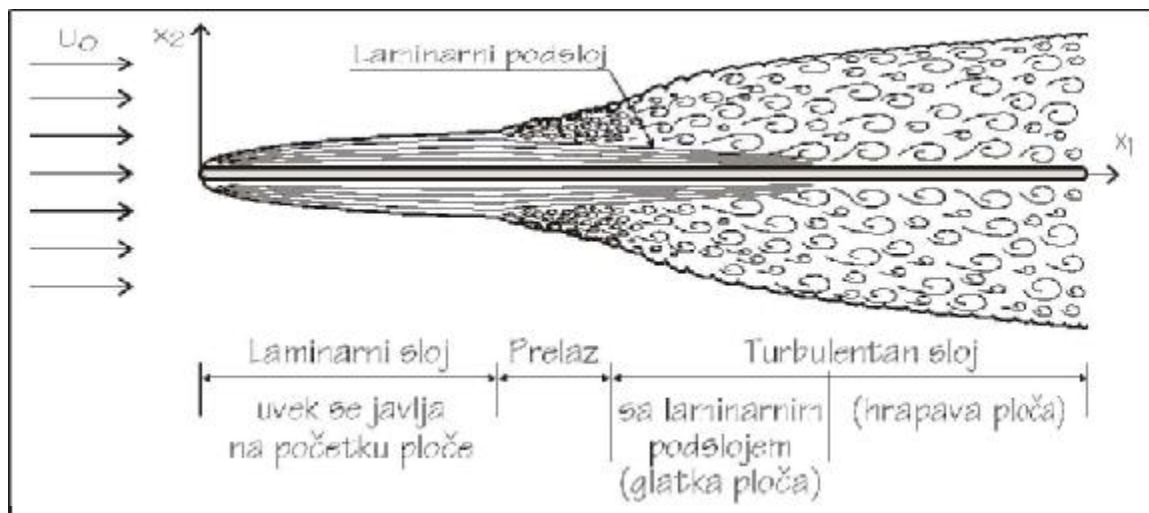
Mehanizam razvoja turbulencije u graničnom sloju ploče je isti kao i



Kao i kod cevi, i kod graničnog sloja postoji određena kritična vrednost Rejnoldsovog broja, pri kojoj sloj prelazi iz laminarnog u turbulentan. Prema nizu obavljenih ispitivanja, ta vrednost se nalazi u prilično širokim granicama<sup>27</sup>:

$$Re_{cr} = 500\,000 \sim 3\,000\,000 \tag{6.52}$$

zbog velikog uticaja drugih faktora, pre svega vibracija ploče i intenziteta turbulencije u dolaznoj fluidnoj struji.



Slika 6.23: Na početku ploče granični sloj je uvek laminaran - niz ploču postepeno raste, postaje nestabilan i može preći u turbulentan

Iz definicije Rejnoldsovog broja (6.51) za ploču, sledi da je na početku ploče uvek nula  $Re_0 = 0$  i da duž ploče linearno raste do  $Re_L$  (gde je  $L$  ukupna dužina ploče). Odavde sledi da je *na početku ploče granični sloj uvek laminaran*. Da li će se negde na ploči pojaviti prelaz iz laminarnog u turbulentan ili ne, zavisi od brzine  $U_0$ , viskoznosti  $\nu$  i ukupne dužine ploče. Ako je  $Re_L > Re_{cr}$ , na nizvodnom delu ploče će se pojaviti turbulentni granični sloj (kao na slici 6.23). U suprotnom, za  $Re_L < Re_{cr}$  ceo granični sloj duž ploče će biti laminaran.

### 6.3.3 Proračun debljine graničnog sloja

Debljina graničnog sloja se računa u zavisnosti od režima u sloju. Kod laminarnog sloja, uz pretpostavku da je debljina graničnog sloja propor-

<sup>27</sup>Kritična vrednost Rejnoldsovog broja za granični sloj kod ploče je znatno veća nego kod cevi. Razlog za to je korišćenje dužine  $x_1$  kao karakteristične dužine. Kada bi se umesto  $x_1$  za karakterističnu dužinu koristila veličina  $\delta$ , kritična vrednost Rejnoldsovog broja bi bila slična kao kod tečenja u cevi.

cionalna korenu iz dužine do mesta gde se računa i obrnuto proporcionalna korenu iz neporemećene brzine:

$$\delta_x \propto \sqrt{\frac{\nu x_1}{U_0}}$$

i uz uslov da je postignuta brzina  $u(x_2) = 0,99 U_0$ , Blazijus<sup>28</sup> je izveo obrazac za debljinu graničnog sloja duž ploče  $x_1$ :

Laminarni sloj (Blazijus): 
$$\delta(x_1) = 4,91 \frac{x_1}{\sqrt{Re_x}} \tag{6.53}$$

Na početku ploče  $x_1 = 0$  Rejnoldsov broj je  $Re_x = 0$ , pa se dobija izraz  $0/\sqrt{0}$ . Kako brojilac brže teži nuli nego imenilac, izraz daje korektno rešenje debljine graničnog sloja na početku ploče  $\delta = 0$ .

U literaturi se mogu naći i druga rešenja za debljinu laminarnog graničnog sloja. Ona su dobijena sa različitim pretpostavkama ili o obliku graničnog sloja ili o rasporedu brzina unutar graničnog sloja. Ako se, na primer, pretpostavi da je raspored brzina unutar sloja kvadratna parabola oblika  $u/U_0 = 2 x_2/\delta - (x_2/\delta)^2$ , dobiće se rešenje za debljinu graničnog sloja:

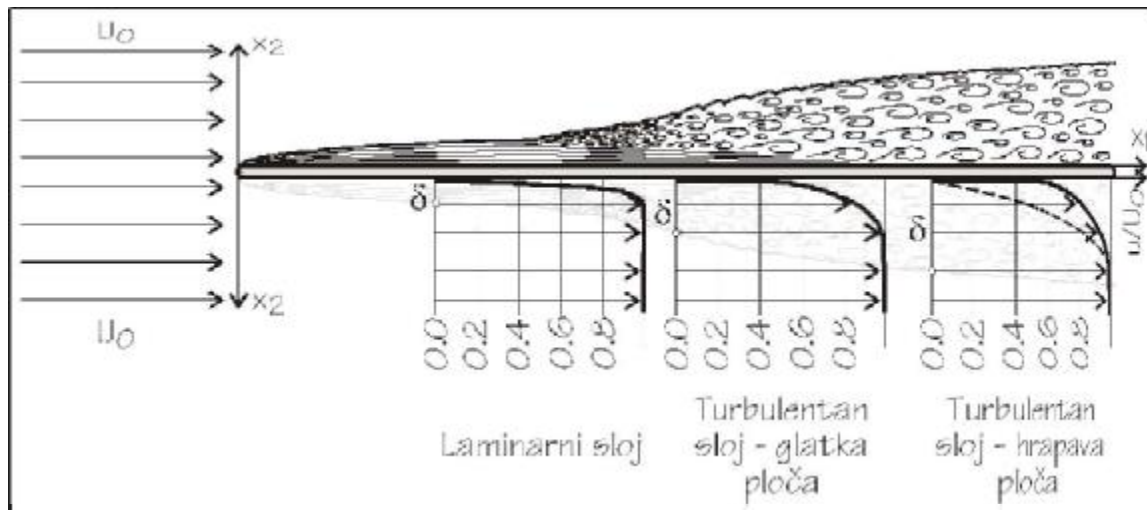
Laminarni sloj (kvadratna parabola): 
$$\delta(x_1) = 5,48 \frac{x_1}{\sqrt{Re_x}}$$



Slika 6.24: Tranzicija laminarnog u turbulentni sloj (tok je sa leva na desno) - snimak B. Cantwell, Stanford University

Na mestu gde Rejnoldsov broj na ploči ima veću vrednost od kritične  $Re_x > Re_{cr}$ , granični sloj postepeno prelazi u turbulentan. Na slici 6.24, data je fotografija na kojoj se vidi postepeno formiranje “paketa vrtloga”. Nakon te nestabilne zone, ako je ploča dovoljno dugačka, u nizvodnom pravcu (desno od fotografisanog dela, slika 6.24) će se razviti turbulentan sloj.

Turbulencija na ploči će izazvati “osrednjavanje” brzina i nagli porast debljine graničnog sloja. Na slici 6.25, prikazan je raspored brzina unutar graničnog sloja. Da bi se bolje video efekat turbulencije na osrednjavanje brzina, na trećem, “najnižvodnijem” dijagramu, gde je sloj turbulentan, nacrtan



Slika 6.25: Granični sloj (gornja strana ploče i raspored brzina u graničnom sloju (donja strana ploče) - u preseku gde je turbulentan sloj nacrtan je isprekidanom linijom i raspored brzina koji bi se ostvario u laminarnom sloju iste debljine  $\delta$  kao i turbulentni sloj

je i isprekidanom linijom raspored brzina, koji bi se ostvario u laminarnom sloju iste debljine.

Analitičko rešavanje opštih jednačina u turbulentnom sloju nije moguće čak ni ako se pretpostavi određeni raspored brzina, tako da se izrazi za debljinu graničnog sloja dobijaju na osnovu laboratorijskih merenja i analogije sa tečenjem u cevima. Jedan od često korišćenih obrazaca koji pretpostavlja eksponencijalni zakon raspodele brzina, je:

$$\text{Turbulentan sloj: } \delta(x_1) = 0,377 \frac{x_1}{Re_x^{1/5}} \quad (6.54)$$

U prelaznoj oblasti, gde je Reynoldsov broj  $500\,000 < Re < 3\,000\,000$ , granični sloj može biti laminaran ili turbulentan. Kako je to nestabilna oblast, u praksi se gleda da se ta oblast smanji i fiksira namernim pravljjenjem hrapave površine čime se pomaže formiranje turbulentnog sloja.

### Primer 6.3.1

Kolika je debljina graničnog sloja na podmornici, na rastojanju  $x = 0,5$  m od vrha? Podmornica se kreće kroz vodu ( $\mu = 10^{-3}$  Pa s,  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>) brzinom  $U_0 = 3,0$  m/s.

<sup>28</sup>Na strani 237 u fusnoti 17 su već dati osnovni podaci o Blazijusu. Ovde je interesantno dodati još i to da je Blazijus bio Prantlov student, i da je 1908. godine prilikom izvođenja obrasca za raspored brzina na ravnoj ploči, iskoristio njegovu teoriju graničnog sloja čime je uprostio osnovne jednačine tako da budu rešive.

Podmornica se posmatra kao da je tanka ploča<sup>29</sup>. Na rastojanju  $x = 0,5$  m Rejnoldsov broj je:

$$Re_x = \frac{\rho U_0 x}{\mu} = \frac{1000 \times 3,0 \times 0,5}{10^{-3}} = 1,5 \cdot 10^6$$

Vrednost  $Re$  broja je manja od  $Re_{cr}$ , pa se debljina graničnog sloja računa po formuli za laminarni režim:

$$\delta(x = 0,5) = 4,9 \frac{x_1}{\sqrt{Re_x}} = 4,9 \frac{0,5}{\sqrt{1,5 \cdot 10^6}} = 2,0 \text{ mm}$$

U poređenju sa dimenzijama podmornice dobijen je vrlo tanak sloj. Ako je brzina podmornice  $U_0 = 10$  m/s ( $\sim 20$  čvorova), na rastojanju  $x = 10,0$  m,  $Re$  broj je:

$$Re_x = \frac{1000 \times 10,0 \times 10,0}{10^{-3}} = 100 \cdot 10^6 > Re_{cr}$$

Granični sloj na tom mestu je turbulentan, pa je njegova debljina:

$$\delta(x = 10,0) = 0,38 \frac{x_1}{Re_x^{1/5}} = 0,38 \frac{10,0}{(100 \cdot 10^6)^{1/5}} = 0,1 \text{ m}$$

što je još uvek zanemarljivo malo u odnosu na dimenzije podmornice!

### 6.3.4 Tangencijalni napon i sila trenja

Kao rezultat promene brzine viskoznog fluida u graničnom sloju, uz ploču se javlja tangencijalni napon  $\tau(x_2)$  (jednačina (2.6), na strani 16):

$$\tau(x_2) = \mu \frac{du}{dx_2} \quad \text{za} \quad x_1 = \text{Const.}$$

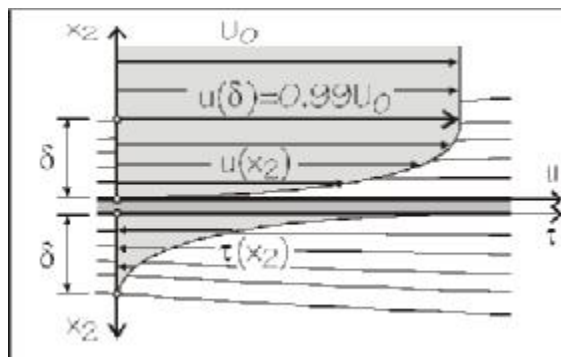
U jednom preseku graničnog sloja ( $x_1 = \text{Const.}$ ), taj napon se menja po visini  $x_2$ , od maksimalne vrednosti uz samu ploču, pa do nule na kraju graničnog sloja (slika 6.26). Kako je debljina graničnog sloja mala, za rešavanje praktičnih zadataka je moguće posmatrati *prosečni tangencijalni napon po preseku* (jednačina (2.5), na strani 15). Tada se tangencijalni napon *duž ploče* računa preko debljine graničnog sloja  $\delta(x_1)$ :

$$\tau(x_1) = \mu \frac{(U_0 - 0)}{\delta(x_1)}$$

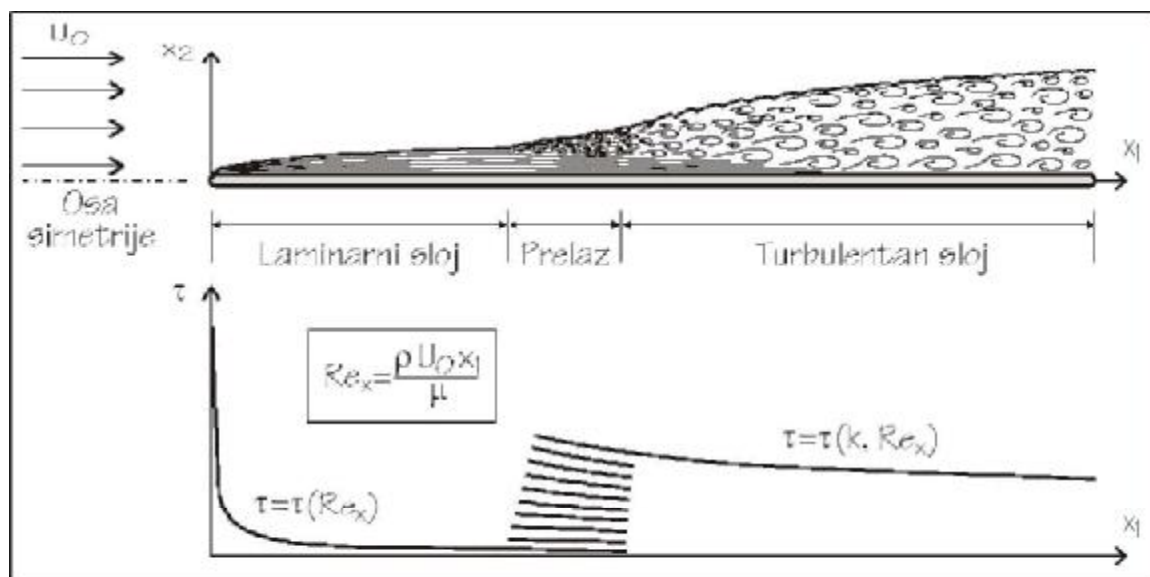
<sup>29</sup>Naravno, podmornica u datom primeru nije isto što i ravna ploča. Ovde se izučava samo deo usled trenja. Postoji i drugi deo, otpor oblika, koji će se kasnije izučiti, pa je ukupan otpor zbir ova dva.

### 6.3. TRENJE UZ RAVNU (USAMLJENU) PLOČU

Na samom početku ploče, debljina graničnog sloja  $\delta(x_1 = 0)$  je uvek nula, pa postoji nagli prelazak sa brzine  $u = 0$  na  $u = U_0$ . Tangencijalni napon  $\tau(x_1)$  je obrnuto proporcionalan debljini graničnog sloja pa sledi da je na početku ploče prosečni tangencijalni napon uvek beskonačno veliki, odnosno  $\tau(x_1 = 0) \approx \infty$ . Niz ploču, sa porastom debljine graničnog sloja, prosečni tangencijalni napon postepeno opada, što je i prikazano na slici 6.27.



Slika 6.26: Raspored brzina u jednom preseku i rezultujući tangencijalni napon  $\tau$



Slika 6.27: Kako raste debljina graničnog sloja tako opada tangencijalni napon pri čemu je napon veći u turbulentnom sloju nego u laminarnom

U turbulentnom graničnom sloju raspored brzina po visini sloja je takav da se uz samu ploču brzina naglo poveća, a kasnije znatno manje (vidi se u turbulenom sloju na slici 6.25). Kao merodavan tangencijalni napon više nije moguće koristiti prosečni napon, već pravi napon na zidu. Zbog promene prvog izvoda brzine na samoj ploči, pri prelasku iz laminarnog u turbulentan granični sloj tangencijalni napon naglo poraste, da bi niz ploču opet postepeno opadao (slika 6.27).

Vrednost tangencijalnog napona na određenom mestu na ploči ( $x_1$ ) se obično iskazuje preko koeficijenta tangencijalnog napona (jednačina (5.7), na strani 185) i zaustavnog pritiska (jednačina (4.66), na strani 138):

$$\tau(x_1) = C_\tau(x_1) \frac{1}{2} \rho U_0^2$$

Za deo ploče, na kome je granični sloj laminaran, ako se iskoristi Blazijusovo rešenje za debljinu sloja (6.53) i raspored brzina, koeficijent tangencijalnog napona je:

$$\text{Laminarni sloj (Blazijus):} \quad C_\tau(x_1) = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \quad (6.55)$$

Na početku ploče  $x_1 = 0$  pa je Rejnoldsov broj  $Re_x = 0$ . Odatle sledi da koeficijent  $C_\tau$  i tangencijalni napon  $\tau$ , kao što se i očekivalo, teže beskonačnosti.

U delu ploče, gde je sloj prešao iz laminarnog u turbulentan, a Rejnoldsov broj je još uvek relativno mali ( $500\,000 < Re < 10^7$ ), ploča se može smatrati "glatkom", a koeficijent tangencijalnog napona se može dobiti iz jednačine(6.54):

$$\text{Turbulentan sloj (glatka ploča):} \quad C_\tau(x_1) = \frac{0,0587}{Re_x^{1/5}} \quad (6.56)$$

Kod većih Rejnoldsovih brojeva apsolutna hrapavost ploče  $k$  postaje dominantna u pravljenju graničnog sloja. Takva ploča se naziva "hrapava ploča" i u literaturi se najčešće koristi obrazac koji obuhvata i prelazni sloj:

$$\text{Turbulentan sloj (hrapava ploča):} \quad C_\tau(x_1) = 0,026 \left( \frac{k}{x_1} + \frac{50}{Re_x} \right)^{1/5} \quad (6.57)$$

Za poznati raspored tangencijalnih napona oko ploče, njegovim integraljenjem se dobija ukupna sila trenja (6.47). Kako se izučava samo ravanski slučaj, postoji samo komponenta sile u pravcu  $x_1$ . Sila trenja se najčešće iskazuje preko koeficijenta sile trenja  $C_F$ :

$$F_{OT} = C_F \frac{1}{2} \rho U_0^2 A$$

gde je  $A$  ukupna površina ploče, koja je u kontaktu sa fluidom. Kako se uglavnom izučava simetrično strujno polje, površina je:

$$A = 2 \times B \times L$$

gde su  $B$  širina (obično 1 m), a  $L$  dužina ploče.

## 6.3. TRENJE UZ RAVNU (USAMLJENU) PLOČU

259

Koeficijent sile trenja za slučaj kada je *cela ploča u laminarnom sloju se dobija integraljenjem izraza (6.55):*

$$\begin{array}{l} \text{Laminarni sloj} \\ \text{(Blazijus):} \end{array} \quad C_F = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}} \quad (6.58)$$

gde je  $Re_L$  Reynoldsov broj na kraju ploče ( $x_1 = L$ ).

Ako se na ploči pojavi turbulentan sloj, nije korektno odrediti silu kao **integral tangencijalnog napona za turbulentan sloj, jer se na prvom delu ploče uvek javlja i laminaran sloj.** Zbog toga je potrebno uvesti ograničenje **da je neophodno da se turbulentan sloj ostvaruje na više od 90% površine ploče,** pa se sila može približno odrediti preko jednačina (6.56) ili (6.57). U tom slučaju je koeficijent sile za glatku i hrapavu ploču (sa uključenim i prelaznim slojem):

$$\begin{array}{l} \text{Turbulentan sloj} \\ \text{(glatka ploča):} \end{array} \quad C_F = \frac{0,0735}{Re_L^{1/5}} \quad (6.59)$$

$$\begin{array}{l} \text{Turbulentan sloj} \\ \text{(hrapava ploča):} \end{array} \quad C_F = 0,032 \left( \frac{k}{L} + \frac{50}{Re_L} \right)^{1/5} \quad (6.60)$$

Pri određivanju sile trenja neophodno je proveriti da li je granični sloj laminaran ili postoji i turbulentan deo, da bi se primenio korektan obrazac. Sažeto uputstvo za proračun sile je:

1. Izračunati vrednost Reynoldsovog broja na kraju ploče  $Re_L$ .
2. Ako je  $Re_L < Re_{cr}$  duž cele ploče je laminaran sloj. Silu odrediti koristeći obrazac (6.58).
3. Ako je  $Re_L > Re_{cr}$  na kraju ploče postoji turbulentan sloj. Proveriti da li je turbulentan sloj na više od 90% ploče, odnosno, proveriti da li se već na prvih 10% dužine razvio turbulentan sloj. Izračunati  $Re_{0,1L}$  broj (za  $x = 0,1L$ ).
4. Ako je  $Re_{0,1L} > Re_{cr}$  zadatak treba raditi kao da je na celoj ploči turbulentan sloj i silu odrediti pomoću (6.59) ili (6.60).
5. Ako je  $Re_{0,1L} < Re_{cr}$ , nije moguće koristiti date obrasce, već treba naći u literaturi odgovarajuće rezultate ispitivanja.
6. Voditi računa da je (u većini slučajeva) površina duž koje se računa sila sa obe strane ploče  $A = 2BL$ .

**Primer 6.3.2**

Vetar duva brzinom od 120 km/h. Odrediti silu na saobraćajni znak - tablu, čija je dužina 5 m a širina 3 m, ako vetar duva paralelno sa znakom. Gustina vazduha je  $1,2 \text{ kg/m}^3$  a viskoznost  $1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$ .

Prema datim uslovima, sila na znak se računa kao sila trenja uz tanku ploču dužine 5 m. Brzina vetra je  $U = 120/3,6 = 33,3 \text{ m/s}$  pa je Rejnoldsov broj na kraju ploče:

$$Re_L = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{1,2 \times 33,3 \times 5}{1,8 \cdot 10^{-5}} = 11,1 \cdot 10^6$$

Na kraju ploče je sloj turbulentan, pa treba proveriti koliki je Rejnoldsov broj na prvih 10% dužine ploče:

$$Re_{0,1L} = \frac{\rho U 0,1 L}{\mu} = \frac{1,2 \times 33,3 \times 0,5}{1,8 \cdot 10^{-5}} = 1,11 \cdot 10^6 > Re_{cr}$$

Za proračun sile se uzima obrazac za turbulentan sloj na glatkoj ploči (6.59), pa je koeficijent sile:

$$C_F = \frac{0,0735}{Re_L^{1/5}} = \frac{0,0735}{(11,1 \cdot 10^6)^{1/5}} = 0,00286$$

Ukupna sila trenja na ploču je:

$$F = C_F \frac{1}{2} \rho U_0^2 A = 0,00286 \frac{1}{2} 1,2 \times 33,3^2 \times 3 \times 5 \times 2 = 57,1 \text{ N}$$

Dobijena sila je veoma mala, jer je samo težina limova od kojih je napravljena tabla oko 3500 N, odnosno, 60 puta veća.

**6.4 Otpori oblika**

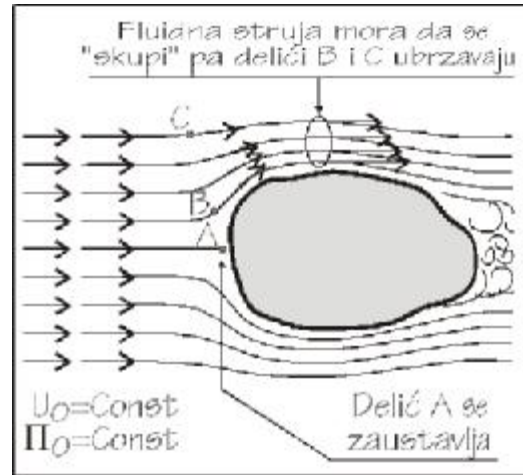
Svako telo (osim "tanke" ploče), kada se nađe u fluidnoj struji, svojim prisustvom značajno remeti postojeću strujnu sliku. Usled opstrujavanja tela javlja se sila otpora, koja je veća ukoliko telo izaziva veće poremećaje.

Na slici 6.28, prikazane su trajektorije fluidnih delića, koji opstrujavaju telo. Delići, koji se nalaze neposredno ispred tela se usporavaju (delić **A** mora da se zaustavi), a delići koji prolaze oko tela se ubrzavaju, jer treba da pređu duži put. Zbog promene brzina po konturi tela, javlja se i promena pritiska. Integral promene pritiska po konturi daje ukupnu silu otpora oblika.



Kao i kod ravne tanke ploče, uz samo telo formira se granični sloj, pa samim tim, postoji i sila trenja. Međutim, kod opstrujavanja tela granični sloj nije toliko značajan zbog te sile trenja, jer je ona po pravilu znatno manja od otpora oblika, već je granični sloj bitan, jer utiče na strujnu sliku oko tela, pa time posredno i na ukupan otpor oblika.

U nastavku će se prvo analizirati raspored pritisaka za idealan neviskozni fluid i pokazati da u tom slučaju ne postoji sila otpora oblika. Kod realnog fluida granični sloj je "krivac" zbog koga se javlja sila otpora oblika, pa je samim tim bitan i Reynoldsov broj, odnosno da li je granični sloj laminaran ili turbulentan. Na kraju poglavlja će se dati konkretan primer proračuna sile otpora oblika.



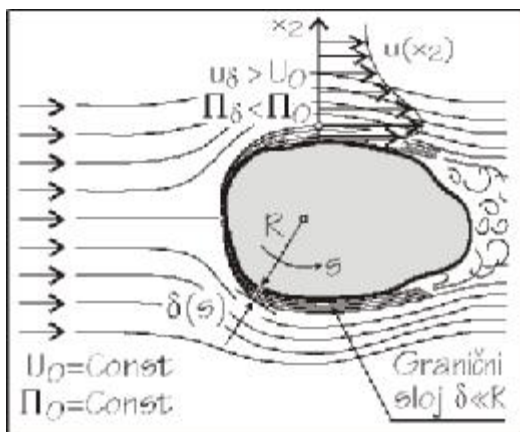
Slika 6.28: Zbog prisustva tela menjaju se putanje delića u fluidnoj struji pa dolazi i do promene njihove brzine

### 6.4.1 Osnovne pretpostavke

Pretpostavke koje se uvode prilikom izučavanja otpora oblika su uglavnom iste kao i pretpostavke koje su važile kod analize sile otpora trenja uz ravnu ploču, poglavlje 6.3.1. Međutim, pored postojećih uvodi se i pretpostavka o konstantnoj  $\Pi$  koti po visini graničnog sloja:

- Zadatak je ravanski, posmatra se beskonačna fluidna struja.
- Fluid je nestišljiv  $\rho = \text{Const}$ .
- Strujanje je jednoliko, pravolinijsko i paralelno u pravcu  $x_1$  sa brzinom  $u = U_0 = \text{Const}$ .
- Srednja vrednost brzine fluida je ustaljena  $\frac{\partial \bar{U}_0}{\partial t} = 0$
- U neporemećenoj zoni, daleko od tela, fluid je idealan  $E_0 = \text{Const}$ . i  $\Pi_0 = \text{Const}$ . jer je brzina  $U_0 = \text{Const}$ . U zoni gde su poremećene brzine, ali izvan graničnog sloja, fluid je i dalje idealan pa je  $\Pi_0 + \frac{U_0^2}{2g} = \text{Const}$ .

- Za razliku od trenja uz ravnu ploču, gde je  $\Pi$  kota bila konstantna duž ploče (pravac  $x_1$ ), pa samim tim i unutar graničnog sloja, kod opstrujavanja tela  $\Pi$  kota je promenljiva duž tela (pravac  $s$  na slici 6.29), ali se pretpostavlja da je konstantna po visini jednog preseka (odnosno, kroz granični sloj upravno na telo,  $\delta(s)$  na slici).



Uslov za  $\Pi = \text{Const.}$  po preseku se koristi kod pravolinijskog i paralelnog strujanja. Granični sloj oko tela je zakrivljen, ali ova pretpostavka se koristi jer je granični sloj jako tanak u odnosu na poluprečnik zakrivljenja ( $\delta \ll R$ ). Iz ovoga sledi da je piježometarska kota  $\Pi$  na spoljnoj strani graničnog sloja ista kao i unutar sloja u tom preseku.

Slika 6.29: Telo svojim prisustvom remeti raspored brzina izvan graničnog sloja, što izaziva promenu i piježometarske kote

### 6.4.2 Raspored pritisaka oko tela za idealan fluid

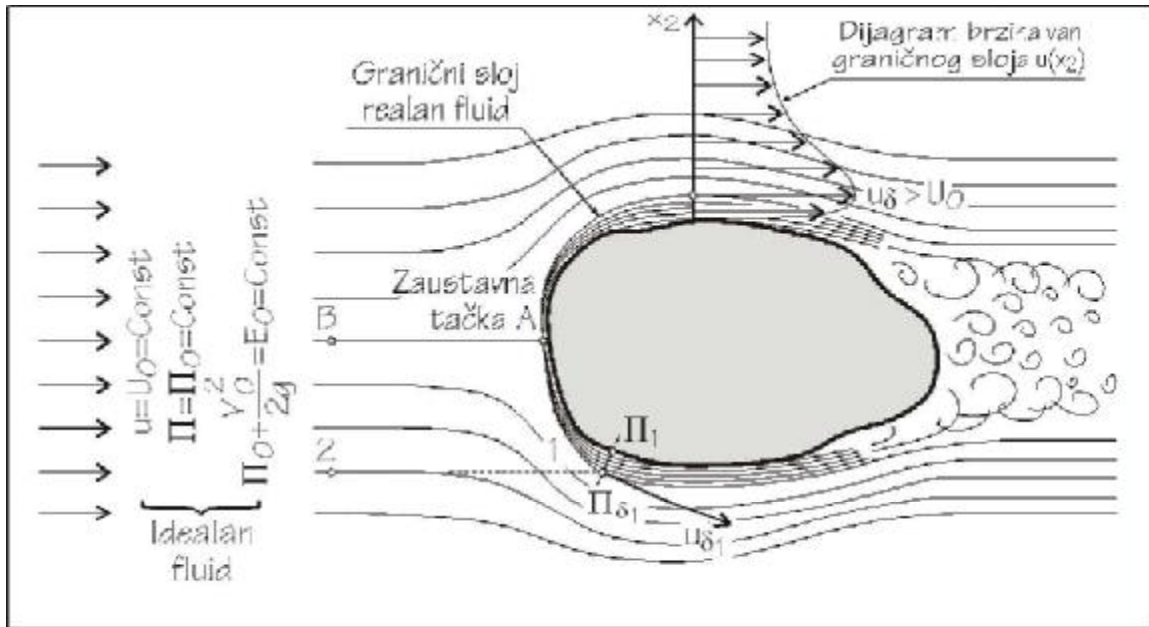
Posmatra se telo na slici 6.30, koje značajno remeti strujnu sliku. Korišćenjem energetske jednačine, uz uslov da je fluid izvan graničnog sloja idealan, treba odrediti raspored pritisaka oko tela.

Tačka  $A$  je tačno na sredini tela, pa fluidni delić, koji stigne iz tačke  $B$  do  $A$ , ne može da prođe ni sa gornje ni sa donje strane, već mora da stane, pa je  $V_A = 0$  (zbog toga se tačka  $A$  zove *zaustavna tačka*). Pritisak u zaustavnoj tački se dobija iz uslova:

$$E_B = E_A \quad \Rightarrow \quad z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} = z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g}$$

Ako se u izrazu skrate  $z_B$  i  $z_A$ , stavi da je  $V_B$  jednako neporemećenoj brzini  $V_0$ , pritisak  $p_B$  jednak neporemećenom pritisku  $p_0$  i brzina u tački  $A$  jednaka nuli, dobija se:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho U_0^2 = p_A \quad \Rightarrow \quad \frac{p_A - p_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 = C_{p,A}$$



Slika 6.30: Smatra se da je fluid izvan graničnog sloja idealan i da je za jedan presek kroz granični sloj (presek 1) pijeziometarska kota konstantna ( $\Pi_{\delta_1} = \Pi_1$ )

Izraz je napisan u formi promene pritiska u tački A kroz zaustavni pritisak, što daje koeficijent pritiska (jednačina (5.15), na strani 190). Vrednost  $C_{p,A} = 1$  pokazuje da je povećanje pritiska u zaustavnoj tački A jednako celokupnom zaustavnom pritisku<sup>30</sup>.

Na sličan način se računa i pritisak za sve ostale tačke na konturi tela. Za tačku 1 (slika 6.30) na spoljnoj strani graničnog sloja debljine  $\delta_1$  se može napisati:

$$E_2 = E_1 \quad \Rightarrow \quad \Pi_2 + \frac{V_2^2}{2g} = \Pi_{\delta_1} + \frac{u_{\delta_1}^2}{2g}$$

Na osnovu pretpostavke da je pijeziometarska kota konstantna za jedan presek može se staviti  $\Pi_{\delta_1} = \Pi_1$ . Uz zamenu  $\Pi_2 = \Pi_0$  i  $V_2 = U_0$  dobija se:

$$\Pi_0 + \frac{U_0^2}{2g} = \Pi_1 + \frac{u_{\delta_1}^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{U_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_{\delta_1}^2}{2g}$$

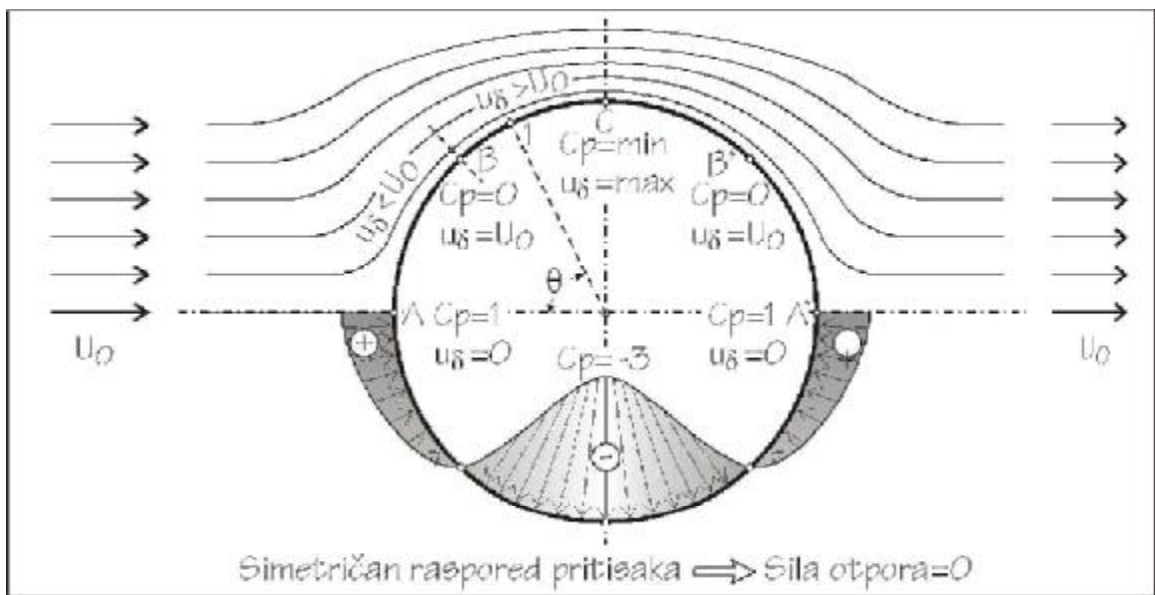
Kote  $z_0$  i  $z_1$  se mogu skratiti (jer  $\Pi_0$  važi za sve tačke fluida u neporemećenoj struji) i izraz podeliti sa  $(\rho g)$ , pa se dobija:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho U_0^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho u_{\delta_1}^2 \quad \Rightarrow \quad p_1 - p_0 = \frac{1}{2}\rho U_0^2 \left(1 - \frac{u_{\delta_1}^2}{U_0^2}\right) \quad (6.61)$$

<sup>30</sup>Isto rešenje je dobijeno i za Pito-Prantlovu cev (4.66) u poglavlju 4.5.3.2.

Ako se dobijena *promena pritiska na konturi tela* ( $p_1 - p_0$ ) podeli sa zaustavnim pritiskom, dobiće se koeficijent pritiska za tačku 1:

$$C_{p,1} = \frac{p_1 - p_0}{\frac{1}{2}\rho U_0^2} = 1 - \left(\frac{u_{\delta 1}}{U_0}\right)^2 \leq 1, 0 \tag{6.62}$$



Slika 6.31: Kad bi fluid bio idealan i u graničnom sloju, ne bi bilo odvajanja fluida od tela, pa bi raspored pritisaka bio potpuno simetričan a ukupna sila otpora bi bila nula

Koeficijent pritiska je uvek manji od jedan (samo u zaustavnoj tački *A* je  $C_{p,A} = 1$ ), jer je član  $\left(\frac{u_{\delta 1}}{U_0}\right)^2$  uvek pozitivan (osim u tački *A* kad je nula). Na prednjem delu konture su brzine  $u_{\delta} < U_0$ , pa je koeficijent pritiska pozitivan. Dalje niz telo brzine rastu  $u_{\delta} > U_0$ , a koeficijent pritiska je negativan (slika 6.31). U zavisnosti od stepena poremećaja fluidne struje, vrednost koeficijenta pritiska može biti i manja od -1. Na primer, kod opstrujavanja cilindra, raspored brzina oko cilindra je:

$$u_{\delta 1} = 2U_0 \sin \theta \tag{6.63}$$

pa se dobija da je najniža vrednost koeficijenta pritiska za ugao  $\theta_C = \pi/2$  (tačka *C*) i iznosi  $C_p = -3$ . Treba uočiti da na svakom telu postoji i tačka *B* gde je brzina  $u_{\delta B} = 0$ , pa je u toj tački  $C_p = 0$  (na kružnom cilindru je ta tačka na  $\theta_B = \pi/4$ ).

Sa “nizvodne” strane tela (slika 6.31), strujnice se polako vraćaju u neporemećeno stanje, brzina se smanjuje, a koeficijent pritiska se vraća od

negativne vrednosti do maksimalne pozitivne u tački  $A'$  (jer je u toj tački brzina nula). Za poznate koeficijente pritiska  $C_p$  mogu se izračunati i nacrtati pritisci, pozitivni od fluida ka konturi, a negativni od konture ka fluidu.

Ukoliko bi se za prikazani slučaj opstrujavanja cilindra idealnim fluidom (slika 6.31) izračunala sila otpora oblika za pravac strujanja fluida ili upravno na taj pravac, zbog simetričnog rasporeda pritisaka bi se dobile nule za obe sile. **Iako postoji promena pritiska po konturi, za idealan fluid je sila otpora oblika u pravcu strujanja nula**, dok kod nesimetričnih tela može postojati rezultujuća sila upravna na pravac strujanja.

### 6.4.3 Tačka odvajanja graničnog sloja

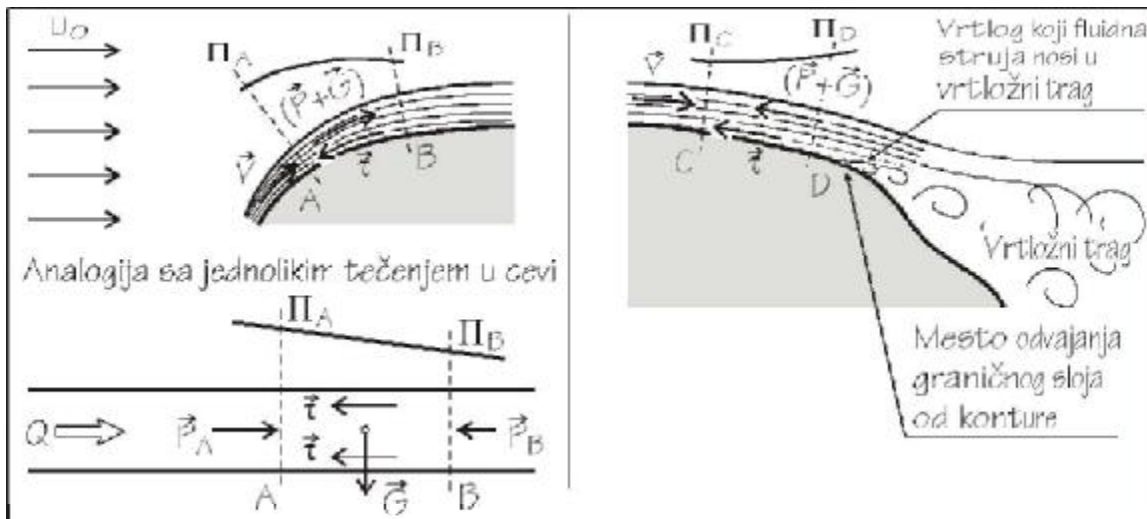
Činjenica da je otpor oblika nula kod idealnih fluida, očigledno se kosi sa svakodnevnim iskustvom o neizbežnosti sile otpora. Razlog postojanja sile otpora je što su realni fluidi viskozni, pa se javlja tangencijalni napon u graničnom sloju.

**Interesantno je, međutim, da intenzitet sile otpora oblika ne zavisi mnogo od vrednosti viskoznosti fluida.** Ako bi se napravio eksperiment u kome bi se merila sila otpora uz postepeno povećanje viskoznosti fluida, dobilo bi se da je sila nula za neviskozni fluid, a čim se viskoznost poveća za beskonačno malu vrednost, sila više nije nula već dobija skoro konstantnu vrednost nezavisnu od viskoznosti<sup>31</sup>.

Šta se događa u realnom fluidu, da postoji sila otpora oblika koja slabo zavisi od viskoznosti? Ako se pogleda jako uvećan detalj graničnog sloja na slici 6.32, vidi se kako na delu konture od tačke  $A$  do tačke  $B$  (levi deo slike) dolazi do postepenog povećanja brzine i opadanja piježometarske kote, odnosno  $\frac{\partial \Pi}{\partial s} < 0$ . Sile pritiska i težine deluju u suprotnom smeru od trenja (realan fluid u graničnom sloju) i one se uravnotežuju, pa je granični sloj **stabilan**. Sila  $(P+G)$  gura deliće napred "zalepljene" uz konturu. U donjem levom delu slike 6.32, prikazan je analogan slučaj tečenja viskoznog fluida kroz cev.

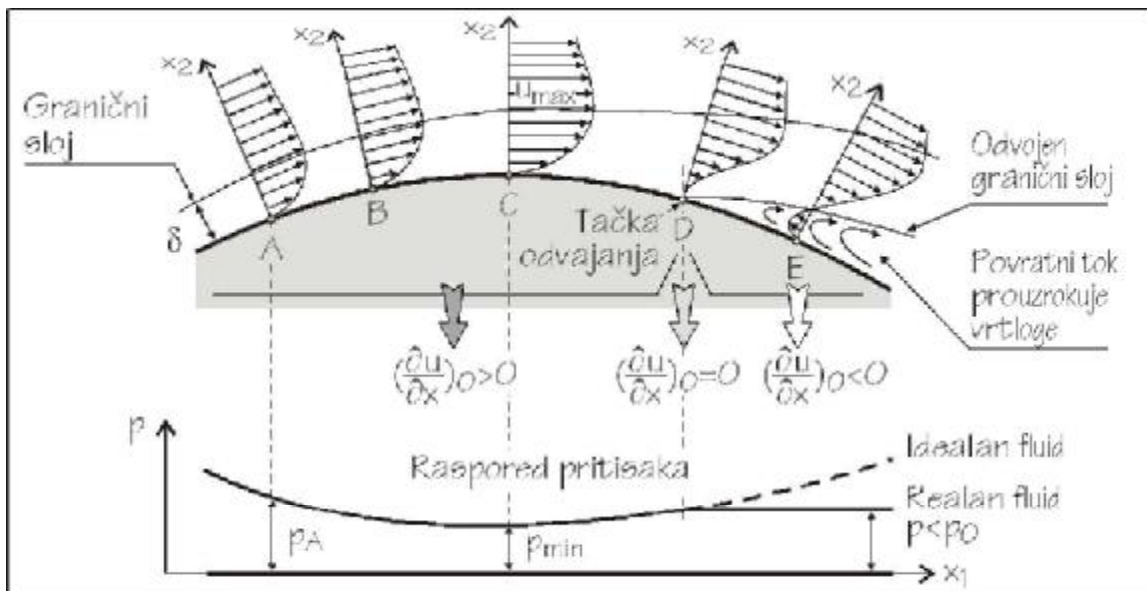
Na delu konture od tačke  $C$  do tačke  $D$  (desni deo slike 6.32) brzina počinje postepeno da opada, a piježometarska kota postepeno da raste, odnosno  $\frac{\partial \Pi}{\partial s} > 0$ . Sile pritiska i težine sada deluju u istom smeru kao i trenje. Sila  $(P+G)$  koči deliće, zaustavlja ih i nagoni na povratno strujanje. Na taj način se delići odvajaju od konture i formiraju vrtloge koji postepeno rastu, sve dok ne počnu da smetaju struji fluida. Tačka u kojoj je **začet vrtlog**

<sup>31</sup>Ova pojava se u literaturi često naziva Dalamberov paradoks.



Slika 6.32: U realnom fluidu granični sloj je sa uzvodne strane stabilno priljubljen uz telo (levi deo slike) dok se sa nizvodne strane lako odvajaja od tela (desni deo slike)

*naziva se tačka odvajanja* i nizvodno od nje fluidni delići više nisu zalepljeni za telo već se odvajaju i idu nizvodno u vrtložni trag.

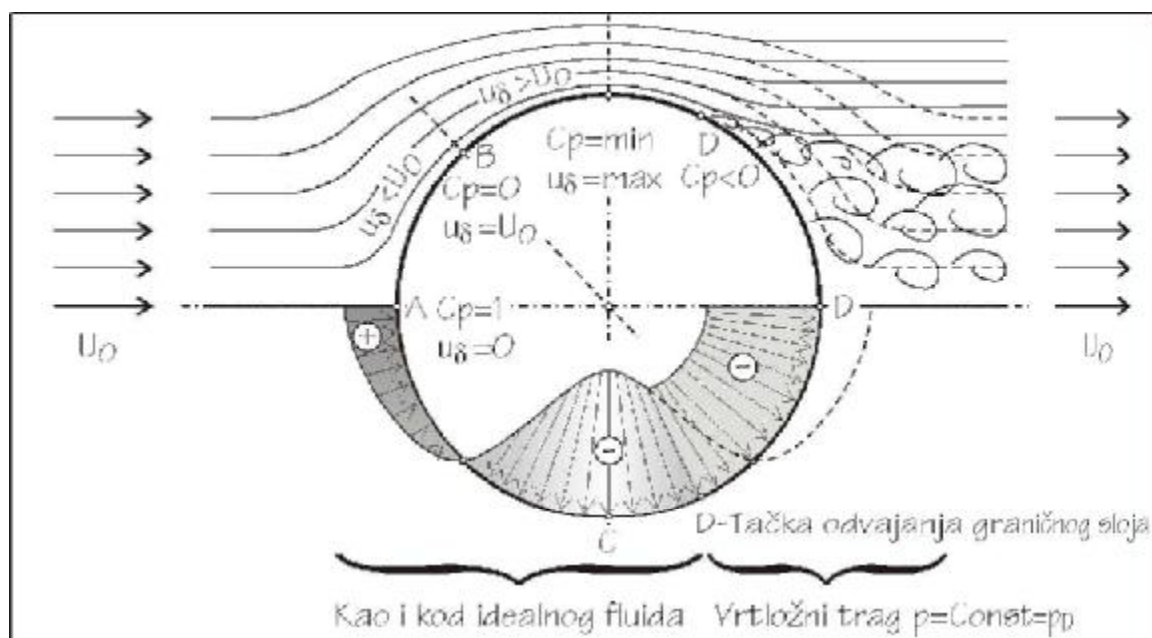


Slika 6.33: Raspored brzina u graničnom sloju sa prednje i stražnje strane tela (gore) i raspored pritisa na konturi (dole) za idealan i realan fluid

Na slici 6.33, prikazan je raspored brzina u graničnom sloju. Na uzvodnom delu tela (tačke *A*, *B* i *C*) brzine postepeno rastu i sloj je “zalepljen” uz telo. Na nizvodnom kraju tela (tačke *D* i *E*) brzine opadaju i formira se

povratan tok, jer u tački *E* dolazi do negativnog gradijenta brzine. Tačka odvajanja je tamo gde je gradijent brzine nula (tačka *D*).

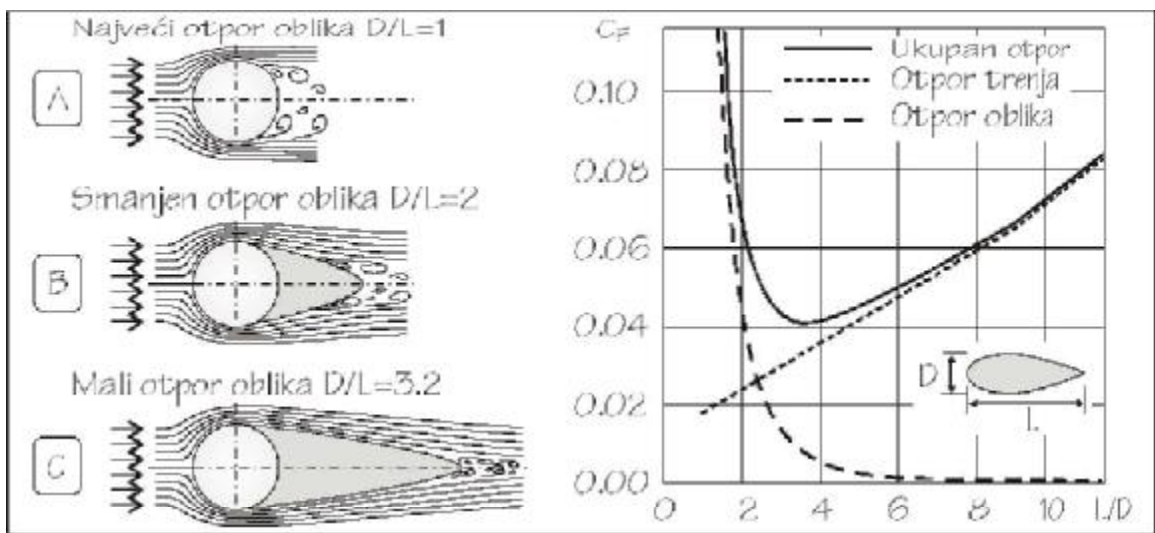
Formiranje vrtloga iza tela značajno menja raspored pritisaka u odnosu na raspored koji bi bio da je fluid idealan. Fluidni delići u vrtložni trag sa sobom ponesu potencijalnu energiju (pritisak) sa mesta otkidanja (donji deo slike 6.33), a to je po pravilu sniženi pritisak u odnosu na neporemećeni pritisak  $p_0$ . To znači da se posle tačke *D* na konturi tela zadržava pritisak koji je bio u tački *D*, odnosno, da se u vrtložnom tragu formiraju podpritisaci koji "uvlače" telo!



Slika 6.34: Opstrujavanje cilindra u realnom fluidu - kod tačke *D* dolazi do odvajanja graničnog sloja, pa pritisci ostaju isti (isprekidanom linijom su prikazani rezultati za idealan fluid - kao na slici 6.31)

Kako izgleda raspored koeficijenta pritiska pri opstrujavanju cilindra realnim fluidom prikazano je na slici 6.34. U odnosu na slučaj opstrujavanja idealnim fluidom (slika 6.31) vidi se da je prednji deo dijagrama potpuno isti, dok se u zadnjem delu koeficijent pritiska ne vraća iz velike negativne vrednosti do +1, već zadržava onu konstantnu negativnu vrednost, koja je bila u tački odvajanja graničnog sloja.

Rezultujuća sila otpora oblika je sada veća od nule, a što se granični sloj kasnije odvoji od tela, to je sila manja. Iz ove činjenice sledi i jasan zadatak svima onima koji žele da smanje silu otpora oblika: što duže zadržati granični sloj uz telo. Takođe, jako je značajno i fiksirati mesto gde se granični sloj odvađa od konture, kako bi sila otpora bila konstantna kroz vreme.



Slika 6.35: Levi deo slike: Smanjenje otpora oblika pomeranjem mesta odvajanja graničnog sloja. Desni deo slike: Ako se napravi jako izduženo telo, smanjuje se sila otpora oblika ali raste sila trenja

Rešenje problema smanjenja sile otpora su *strujolika tela* (slika 6.35). Izgled prednjeg dela tela nije bitan, jer se tu na pozitivan pritisak ne može uticati. Postepenim sužavanjem stražnjeg dela tela, međutim, smanjuje se brzina porasta pritiska i tačka odvajanja graničnog sloja se pomera ka nizvodnijem delu tela, u zonu gde su pritisci veći. U idealnom slučaju moglo bi se postići toliko postepeno sužavanje tela da granični sloj ostane zalepljen sve do kraja tela. Tada bi sila otpora oblika bila bliska nuli, ali bi se zbog dužine tela značajno povećala sila trenja. Na dijagramu (desni deo slike 6.35), vidi se pad sile otpora oblika, sa porastom dužine tela, dok sila trenja raste. Za datu geometriju je optimalan odnos dužine i visine tela<sup>32</sup>  $L/D = 3,6$ .

### Primer 6.4.1

Koliki je odnos ukupne sile otpora na cilindar prečnika  $D$  i na strujoliko telo dimenzija  $L/D = 3,6$  (oznake prema slici 6.35) ako su oba tela širine  $B$  i nalaze se u istoj fluidnoj struji?

U literaturi se mogu naći koeficijenti sile za cilindar  $C_{FC} = 1,2$  i za strujoliko telo  $C_{FST} = 0,04$  (za Rejnoldsov broj  $Re = 10^5$ ). Ukupna sila na telo je:

$$F = C_F \frac{1}{2} \rho U^2 A = C_F \frac{1}{2} \rho U^2 B D$$

<sup>32</sup>Najbolji primer strujolikog tela je kišna kap koja u toku padanja formira takav oblik da joj ukupna sila otpora bude minimalna.



Kako su sve veličine osim koeficijenta sile iste za cilindar i strujoliko telo, dobija se da je odnos sila jednak odnosu koeficijenta sila:

$$\frac{F_C}{F_{ST}} = \frac{C_{FC}}{C_{F_{ST}}} = \frac{1,2}{0,04} = 30$$

što znači da je sila na cilindar 30 puta veća!

Kolika je razlika u silama, može se još jasnije videti ako se postavi uslov da se uporede dimenzije cilindra i strujolikog tela uz uslov da je sila otpora ista. Tada se dobija da isti ukupni otpor ima cilindar (žica) prečnika  $d = 2$  mm i strujoliko telo širine  $D = 60$  mm.

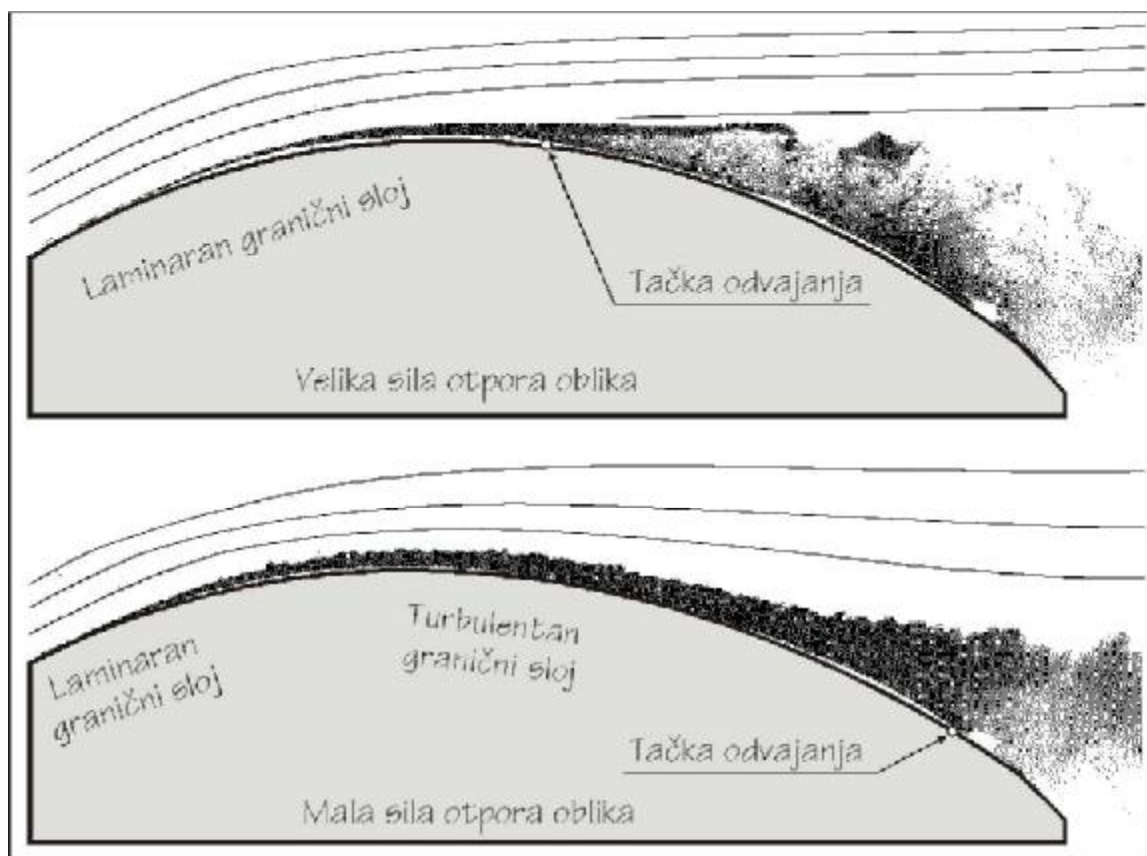
Kod opstrujavanja tela, kao i kod ravne ploče, granični sloj je u početku laminaran, a dalje, niz telo, može preći u turbulentan (slika 6.36). Sila otpora oblika je, suprotno od očekivanog, veća ako je granični sloj celom dužinom laminaran nego ako se razvije turbulentan sloj. Na slici 6.36 (strana 270), vidi se i razlog smanjenju sile: u turbulentnom sloju se tačka odvajanja pomera ka zadnjem delu tela, čime se povećava pritisak u vrtložnom tragu i smanjuje sila otpora.

U nizu eksperimenata je pokazano da je glavni razlog što je turbulentni sloj "lepljiviji" od laminarnog, postojanje značajne komponente poprečnog kretanja (u trećoj ravni). Ako se na prednjem delu tela razvije turbulentan sloj, profil brzina se uproseči (slika 6.25, poslednji presek na ploči) i smanji se brzina njegovog porasta na nizvodnoj strani tela. To omogućava sloju da ostane duže uz telo (slika 6.36).

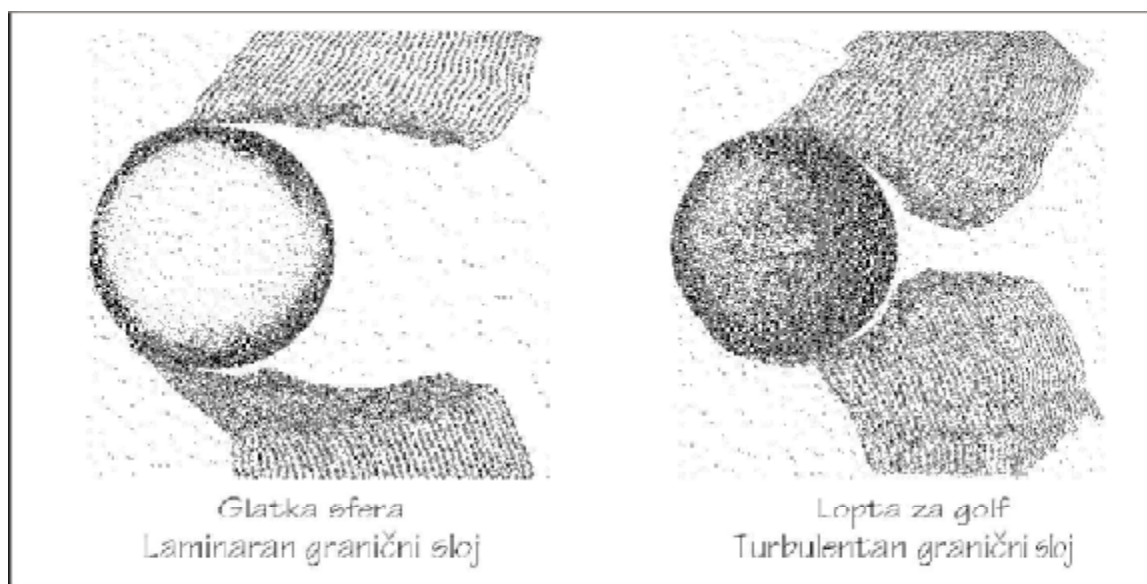
Interesantno je da su činjenicu da je sila otpora manja kod turbulentnog sloja, prvi primetili početkom 20. veka igrači golfa. U to doba su se loptice za golf pravile potpuno glatke. Igrači su uočili da sa novim i glatkim lopticama mogu manje da dobace nego ako koriste stare, izudarane i hrapave loptice. Takođe, sa starim lopticama je i putanja bila mnogo stabilnija, pa se mogu izvesti precizniji udarci.

Eksperimentima je potvrđeno da se kod standardnih udaraca u golfu granični sloj nalazi upravo na granici prelaska iz laminarnog u turbulentni (slika 6.37). Ako je loptica skroz glatka, granični sloj ostaje laminaran i odvaja se neposredno posle tačke sa najmanjim pritiskom, pa je sila otpora velika. Takođe, tačka odvajanja se blago pomera napred - nazad, što značajno utiče na intenzitet sile i na stabilnost leta loptice. Ako je loptica hrapava, granični sloj postaje turbulentan već na prednjem delu loptice, ostaje duže zalepljen za lopticu i tačka odvajanja je stabilnija<sup>33</sup>.

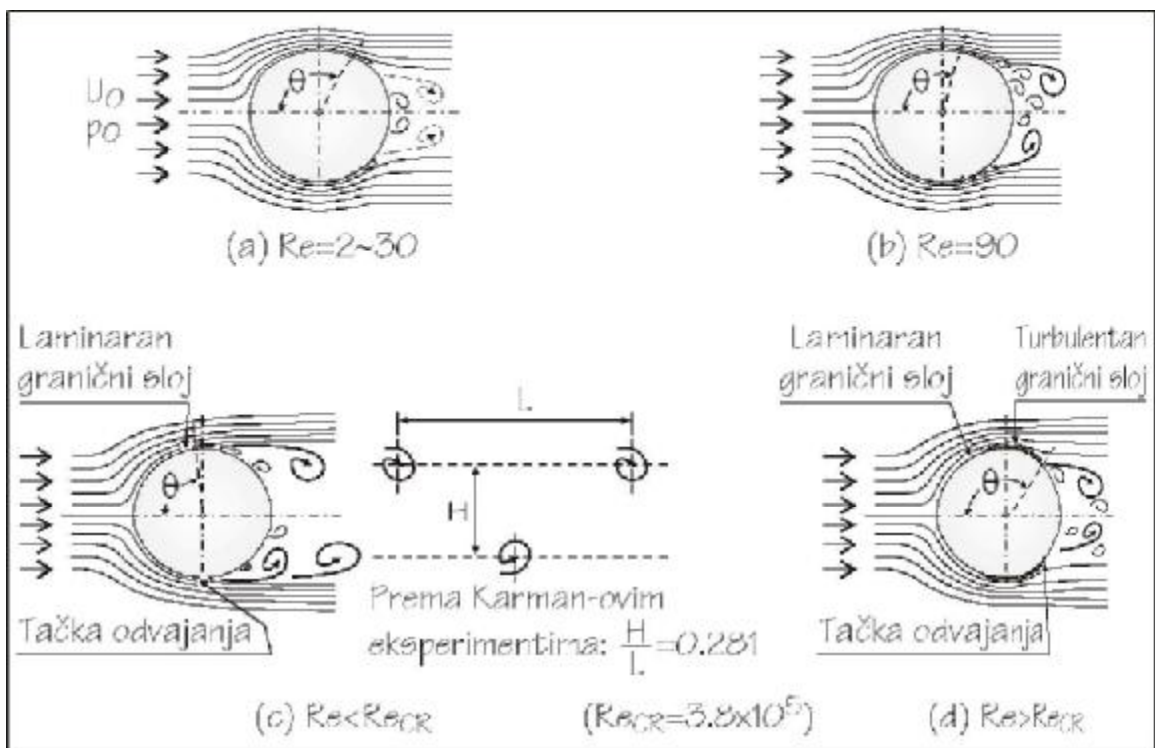
<sup>33</sup>Danas se upravo zbog ovog efekta prave ohrapavljene loptice za golf, kao i za tenis.



Slika 6.36: Laminaran (gornja slika) i turbulentan granični sloja (donja slika) sa datom tačkom odvajanja (*An Album of Fluid Motion*, M.V. Dyke, 1982)



Slika 6.37: Za isti  $Re$  broj na glatkoj sferi je laminaran sloj dok je kod hrapave sfere turbulentan sloj sa tačkom odvajanja pomerenom niz struju (*Introduction to Fluid Mechanics*, Y. Nakayama i R.F. Boucher, 1999)



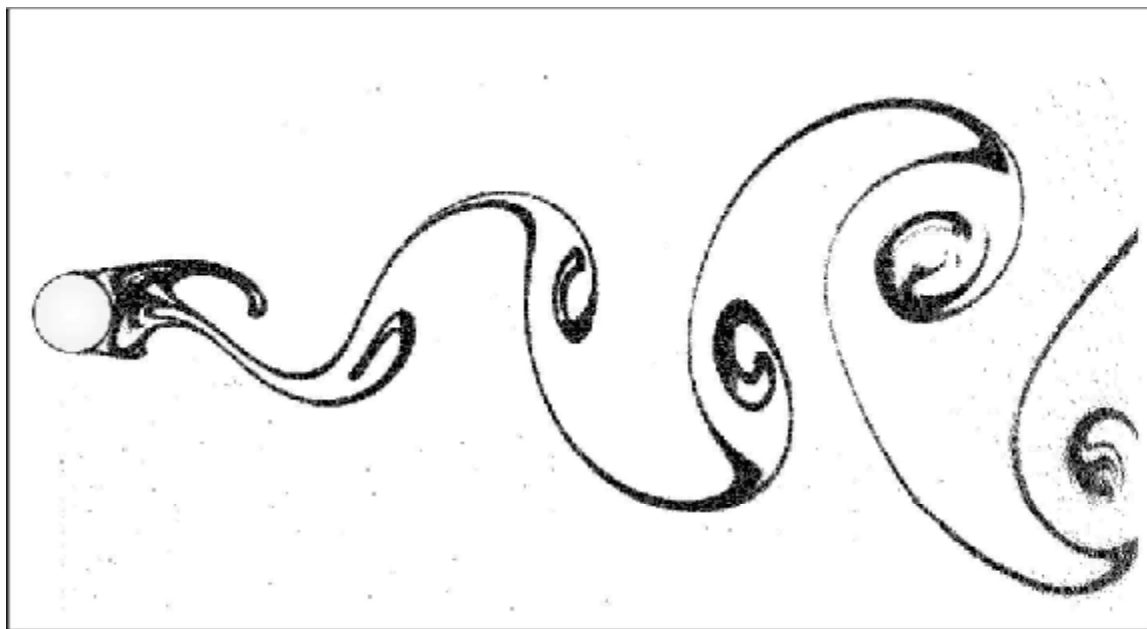
Slika 6.38: Mesto odvajanja graničnog sloja na cilindru u zavisnosti od Reynoldsovog broja

Uticaj Reynoldsovog<sup>34</sup> broja na mesto odvajanja graničnog sloja, prilikom opstrujavanja cilindra, prikazan je na slici 6.38. Pri relativno malim vrednosima Reynoldsovog broja (slučajevi *A* i *B*), tačka odvajanja je sa zadnje strane cilindra i postepeno se pomera ka prednjoj, praveći sve veći koeficijent sile  $C_F$ . Kod Reynoldsovog broja, koji je nešto manji od kritičnog, tačka odvajanja je pod uglom  $\theta = 80^\circ$  (slučaj *C*). Kada se razvije turbulentan sloj (za  $Re > Re_{CR}$ , slučaj *D*), tačka odvajanja se pomera sa prednje na zadnju stranu, što rezultuje naglim smanjenjem koeficijenta sile.

#### 6.4.4 Vrtložni trag

Još je davno Leonardo da Vinči u svojim skicama opstrujavanja rečnih stubova ukazao na nestabilnost vrtložnog traga i postojanje određene periodičnosti u vrtlozima [15]. Ta interesantna pojava da se u *ustaljenom strujnom polju i sa telom koje miruje, javlja neustaljen i oscilatoran vrtložni trag*, je detaljno izučavana početkom 20-og veka kroz niz eksperimentalnih istraživanja i uz upotrebu sistema za vizuelizaciju toka.

<sup>34</sup>Reynoldsov broj je definisan preko prečnika cilindra  $D$ .



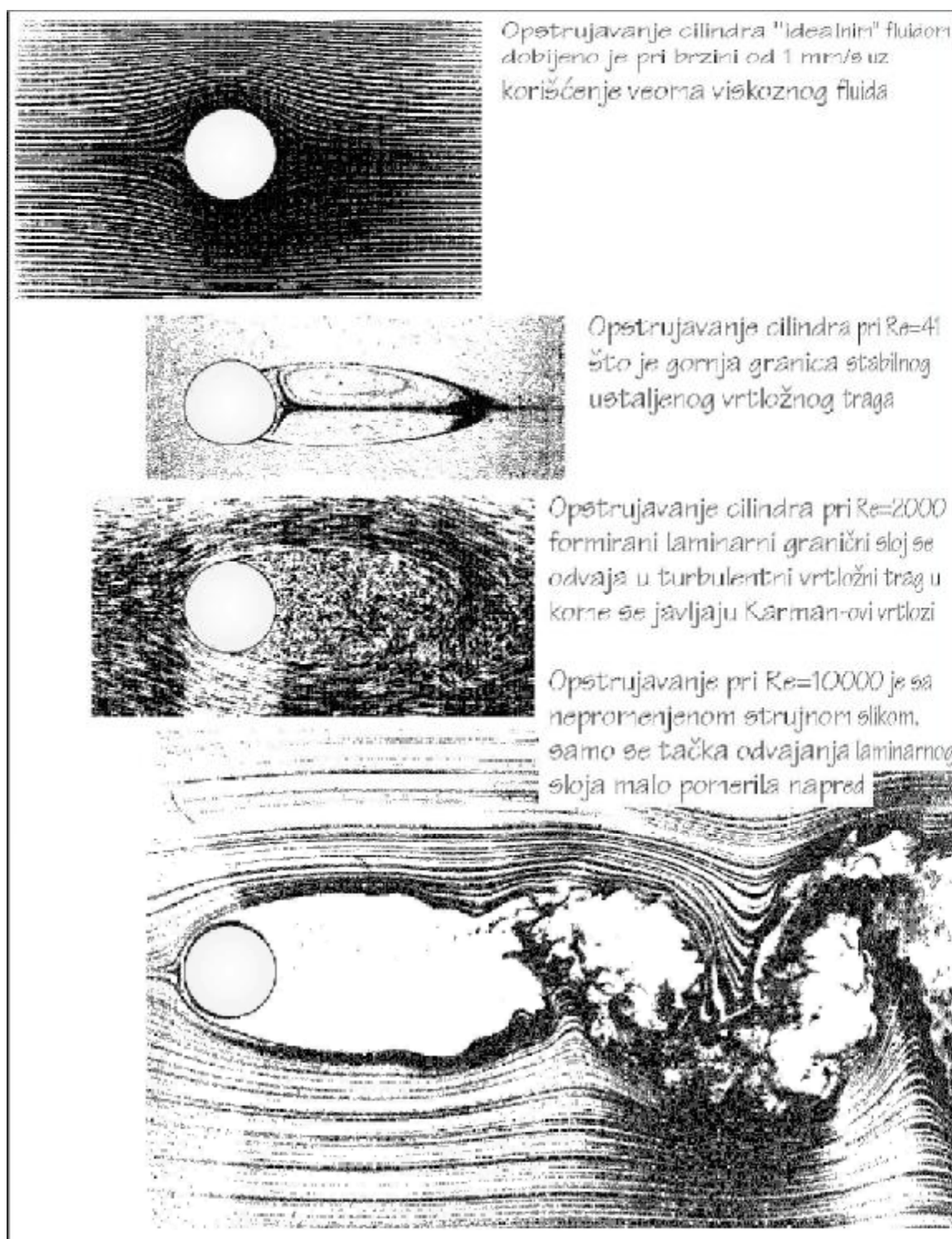
Slika 6.39: Vizuelizacija strujnog polja oko cilindra, pri  $Re = 140$  sa jasno izraženim Karman-ovim vrtlozima koji postepeno rastu niz fluidnu struju (slike preuzete iz knjige *An Album of Fluid Motion*, M.V. Dyke, 1982)

Osnovni uzrok neustaljenosti u vrtložnom tragu je *nestabilnost položaja tačke odvajanja* graničnog sloja. Dovoljna je mala razlika u pritiscima da se tačka odvajanja pomeri napred ili nazad duž tela. To pomeranje tačke odvajanja utiče na strujnu sliku i na formiranje vrtloga iza tela. Na slici 6.39, prikazan je snimak jednog takvog vrtložnog traga iza cilindra [5]. Snimak je napravljen u vodi brzine 1,4 cm/s, a cilindar je prečnika 1 cm. Vrtlozi koji se formiraju iza cilindra se obično nazivaju *Karmanovi*<sup>35</sup> vrtlozi.

Uticaj Rejnoldsovog broja na vrtložni trag je prikazan na slici 6.38, dok su, na slici 6.40, dati i snimci vizuelizacije toka. Na slici se vidi da kod idealnog fluida i pri jako malim Rejnoldsovim brojevima nema Karmanovih vrtloga. Sa pojavom turbulencije, oscilacije u pritisku pomeraju tačku odvajanja usled čega se formiraju vrtlozi. U nizu eksperimenata Karman je pokazao da je odnos rastojanja vrtloga i širine traga približno konstantan i jednak  $H/L = 0,281$  (slika 6.38).

U eksperimentima je dobijeno da je frekvencija oscilovanja vrtloga  $f$  konstantna za prilično veliki opseg Rejnoldsovih brojeva. Bezdimezionalna

<sup>35</sup>Biografija Theodor von Kármána je data u fusnoti 19, na strani 238.



Slika 6.40: Vizuelizacija strujnog polja oko cilindra pri različitim Rejnoldsovim brojevima (slike preuzete iz knjige *An Album of Fluid Motion*, M.V. Dyke, 1982)

frekvencija se izražava preko Struhalovog<sup>36</sup> broja:

$$St = \frac{fD}{V} \quad (6.64)$$

U nizu eksperimenata je dobijeno da je njegova vrednost  $St = 0,2$  i da zavisi od oblika tela i graničnih uslova. Nešto korigovan empirijski obrazac za frekvenciju vrtloga<sup>37</sup> koji se odvaja od cilindra beskonačne dužine u fluidnoj struji neporemećene brzine  $U_0$  je:

$$f = 0,198 \frac{U_0}{D} \left( 1 - \frac{19,7}{Re} \right) \quad (6.65)$$

i može se koristiti za Rejnoldsove brojeve u opsegu  $250 < Re < 2 \cdot 10^5$ .

#### Primer 6.4.2

Mostovski stub oblika cilindra, prečnika  $D = 1$  m se nalazi u reci čija je srednja brzina  $V = 2$  m/s. Kolika je frekvencija vrtloga nizvodno od stuba?

Za vodu je kinematska viskoznost  $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s pa je Rejnoldsov broj:

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{2 \times 1}{1 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^6$$

Frekvencija “otkidanja” vrtloga od stuba je (6.65):

$$f = 0,198 \frac{V}{D} \left( 1 - \frac{19,7}{Re} \right) = 0,198 \frac{2}{1} \left( 1 - \frac{19,7}{2 \cdot 10^6} \right) = 0,396 = 0,4 \text{ Hz}$$

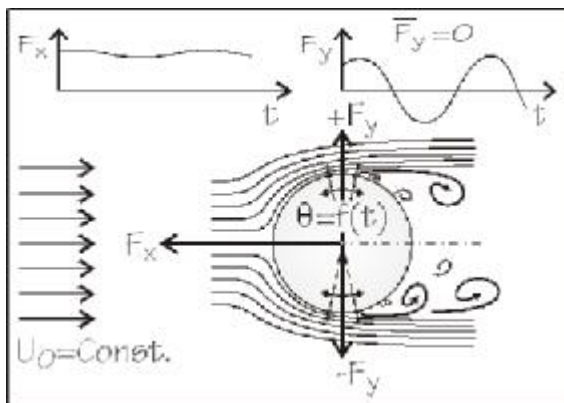
što daje period oscilovanja od  $T = 1/f = 2,5$  sekundi.

Posledica pojave Karmanovih vrtloga u vrtložnom tragu je postojanje bočne komponente sile i kod simetričnih tela. Prilikom opstrujavanja cilindra, kao na slici 6.41, trebalo bi da postoji samo komponenta sile u pravcu fluidne struje  $F_x$ . Međutim, zbog nesimetričnih vrtloga, naizmenično će se javljati i bočna komponenta sile  $F_y$ , čija je srednja vrednost nula. Intenzitet sile  $|F_y|_{max}$  je, po pravilu, znatno manji od sile  $F_x$  i često se u analizama opterećenja ona ne uzima u obzir. Na žalost, ta sila je “nezgodna” zbog svoje periodičnosti i, iako je male vrednosti, može lako da pobudi celu konstrukciju

<sup>36</sup>Vincenz Strouhal (1850 - 1922) češki fizičar koji je 1878. prvi izučavao “pevujuće” žice, sopstvenu frekvenciju oscilovanja žica u vazdušnoj struji.

<sup>37</sup>Kao i drugi empirijski obrasci u literaturi se mogu naći rezultati ispitivanja sa različitim vrednostima konstanti u obrascu. Generalno, opšti oblik obrasca je  $f = a \frac{V}{D} \left( 1 - \frac{b}{Re} \right)$  a vrednosti konstanti zavise od oblika prepreke i graničnih uslova.

na oscilovanje i izazove havariju. Primer za to su pucanja dalekovoda, gde se stubovi i nosači dalekovoda dimenzionišu na velike sile težine kabla, uvećane za naslage leda, dodatno opterećenje od ptica i slično, ali se često zaboravi i dinamička sila od vetra  $F_y$  koja je, iako mala, u stanju da pobudi ceo sistem na oscilovanje. Ako se slože sopstvene frekvencije sistema i pobudna frekvencija  $f$  (jednačina (6.65)), havarija dalekovoda je neizbežna.



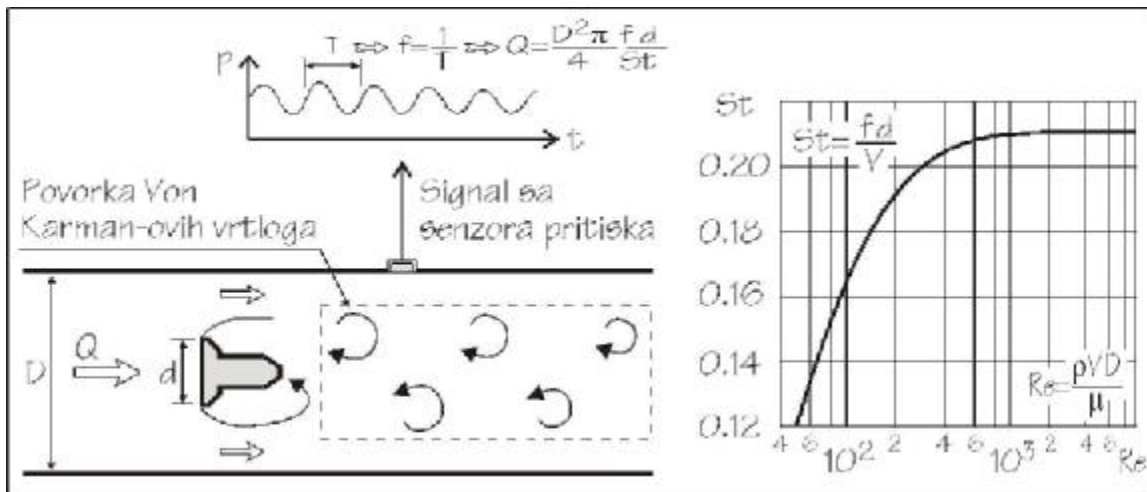
Slika 6.41: U strujnom polju oko cilindra tačka odvajanja graničnog sloja se nesimetrično pomera kroz vreme što izaziva oscilatornu bočnu komponentu sile otpora



Slika 6.42: Radio antena na kolima sa stabilnom tačkom odvajanja vrtloga

Kako je osnovni uzrok nastajanja neustaljenih vrtloga nestabilna tačka odvajanja, kada su u praksi ti vrtlozi nepoželjni oni se *sprečavaju fiksiranjem tačke odvajanja*. To se često radi čak i po cenu povećanja poprečnog preseka tela i samim tim povećanja ukupne sile otpora oblika. Na primer, spojleri kod automobila povećavaju ukupnu površinu automobila, ali imaju značajnu ulogu, jer smanjuju koeficijent sile  $C_F$  pomeranjem tačke odvajanja niz automobil, uz njeno fiksiranje na svom nizvodnom kraju, čime vrtložni trag postaje stabilan i ne pojavljuje se oscilatorna vertikalna komponenta sile na zadnje točkove. Takođe, često se na visokim dimnjacima prave dodatna "rebra" koja povećavaju poprečni presek ali smanjuju negativnu oscilatornu bočnu silu. Na slici 6.42, prikazano je interesantno rešenje za smanjenje oscilovanja radio antena na nekim automobilima: oko antene se spiralno obmota druga žica, koja fiksira položaj tačke odvajanja i time sprečava bočno oscilovanje.

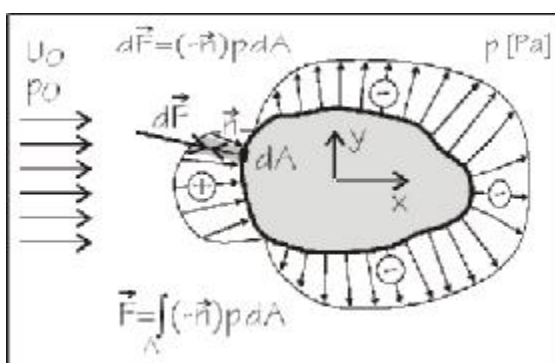
Karmanovi vrtlozi imaju i korisnih aspekata. Jedna od praktičnih primena vrtloga je za merenje protoka (slika 6.43): u cev se stavlja prepreka koja je tako profilisana da potencira pravljenje vrtloga u što širem dijapa-



Slika 6.43: Princip rada Vortex merila protoka: senzorom se meri frekvencija vrtloga, koja je preko Struhalovog broja povezana sa srednjom profilskom brzinom i karakterističnom veličinom prepreke

zonu Reynoldsovih brojeva. Vrtlozi izazivaju promenu opterećenja na prepreci i na pogodan način se meri frekvencija tih promena (sâm intenzitet tog opterećenja nije bitan). Ovakvi uređaji nemaju pokretnih delova i često se koriste za merenja protoka u teškim uslovima: gasovi visokih pritisaka i temperature, fluidi koji nose sa sobom razne nečistoće i slično.

### 6.4.5 Proračun sile otpora oblika



Slika 6.44: Sila otpora oblika je jednaka integralu (površini) dijagrama pritiska oko tela

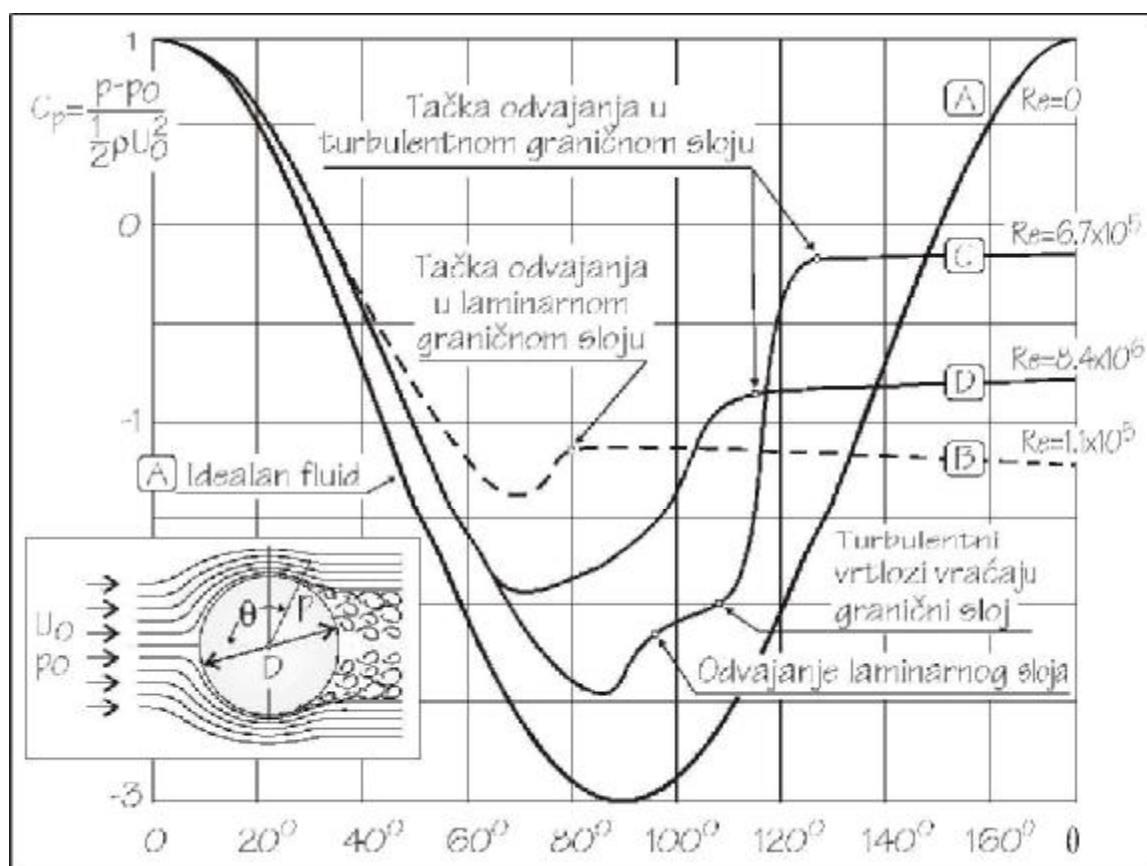
Da bi se odredila sila otpora oblika potrebno je poznavati raspored pritiska oko tela, slika 6.44. Sila na elementarnu površinu  $dA$  je  $d\vec{F}_{OO}$  jednaka je  $d\vec{F}_{OO} = (-\vec{n})p dA$  i deluje upravno na tu površinu. Pritisak  $p$  je razlika pritiska  $p = p_1 - p_0$  (6.61) na konturi usled poremećaja fluidne struje  $p_1$  i neporemećenog pritiska  $p_0$ . Sila je pozitivna ako pritiska površinu (deluje ka površini). Ukupna sila je suma svih elementarnih sila (6.48):

$$\vec{F}_{OO} = \int_A (-\vec{n})p dA$$

Uobičajeno je da se ukupna sila deli na dve komponente, na silu  $F_x$  koja



deluje u pravcu fluidne struje i pozitivan smer joj je isti kao i smer toka fluida i na silu  $F_y$ , koja deluje upravno na pravac fluidne struje.



Slika 6.45: Dijagram koeficijenta pritiska po konturi cilindra za različite Rejnoldsove brojeve [22]

Vrednosti promene pritisaka oko tela se za različite uslove opstrujavanja i različite oblike tela mogu naći u literaturi, najčešće bezdimenzionalno, u formi koeficijenta pritiska  $C_p$ . Kao primer, na slici 6.45, dat je dijagram koeficijenta pritiska po konturi cilindra u zavisnosti od Rejnoldsovog broja: (A) za idealan fluid, kada je sila otpora oblika nula, (B) za laminaran sloj sa Rejnoldsovim brojem blizu kritičnog (za date uslove je  $Re_{CR} = 3,8 \cdot 10^5$ ), (C) za slabo razvijeni turbulentan sloj i (D) potpuno razvijeni turbulentan sloj. Kako oblik strujne slike oko tela u mnogome zavisi od uslova opstrujavanja i oblika tela, podaci o koeficijentima pritiska koji se uzimaju iz literature moraju biti dati za geometrijski slične uslove (poglavlje 5.2, Sličnost i fizički modeli, na strani 201).

**Primer 6.4.3**

Odrediti silu na garažu za brzinu vetra  $U_0 = 20$  m/s (gustina vazduha je  $\rho = 1,2$  kg/m<sup>3</sup>).

Na slici su dati koeficijenti pritiska u pojedinim tačkama garaže. Za te tačke se računaju pritisci:

$$p_i = C_{pi} \frac{1}{2} \rho U_0^2 = 240 \times C_{pi} \text{ [Pa]}$$

$$\Rightarrow p_1 = 237,6 \text{ Pa} \quad p_2 = 216 \text{ Pa} \quad p_3 = -96 \text{ Pa} \quad p_4 = -72 \text{ Pa}$$

Sračunati pritisci se crtaju tako da budu upravni na konturu i da pozitivan pritisak deluje ka zidu a negativan od zida. Za svaku od ravnih površina se računa sila, kao površina dijagrama pritiska:

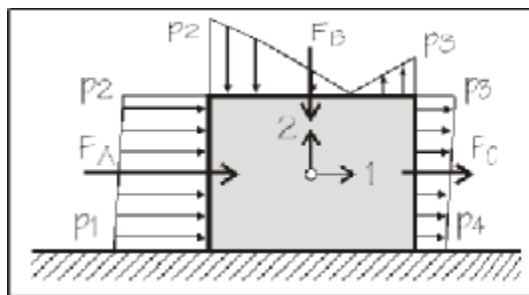
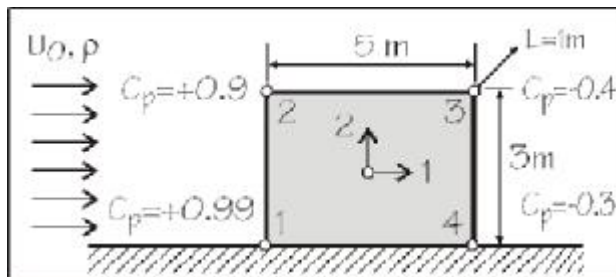
$$F_A = \frac{237,6 + 216}{2} 3 \times 1 = 680,4 \text{ N}$$

$$F_B = \frac{216 - 96}{2} 5 \times 1 = 300 \text{ N} \quad F_C = \frac{96 + 72}{2} 3 \times 1 = 252 \text{ N}$$

Sile se računaju prema usvojenim smerovima prikazanim na skici, pa je zbog toga vrednost sile  $F_C$  pozitivna, iako su pritisci negativni. Ukupne sile u pravcima 1 i 2 su:

$$F_1 = F_A + F_C = 680,4 + 252 = 932,4 \text{ N} \quad F_2 = -F_B = -300 \text{ N}$$

Sila  $F_2$  ima sada negativnu vrednost jer je pozitivna osa 2 okrenuta na gore a sila ima smer na dole, ka konturi.



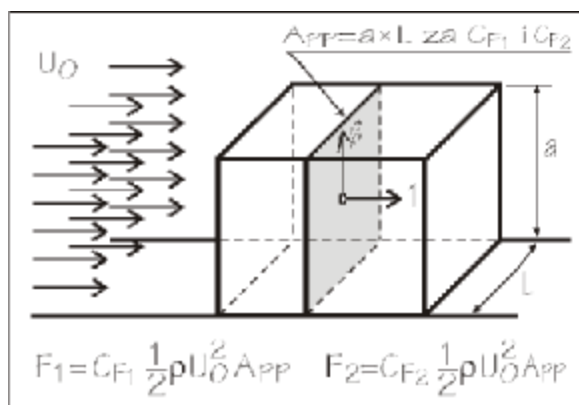
Zahvaljujući sličnosti strujnog polja i rasporeda pritiska za geometrijski slična tela, ako se ne zahteva poznavanje pritiska u svakoj tački konture, moguće je silu za pravac  $i$  odrediti preko bezdimenzionalne sile  $C_{Fi}$ :

$$F_{OOi} = C_{Fi} \frac{1}{2} \rho U_0^2 A_{pp}$$

gde je  $A_{pp}$  površina najvećeg preseka tela upravnog na fluidnu struju, odnosno, projekcija tela na ravan upravnu na fluidnu struju, (slika 6.46) i nezavisna je od izbora pravca  $i$ .

Vrednosti koeficijenta sile se mogu naći u literaturi, za različita tela i različite pravce fluidne struje<sup>38</sup>. Do tih vrednosti se došlo ili direktnim merenjem sile na fizičkom modelu ili merenjem rasporeda pritisaka uz integraciju i razlaganje ukupne sile na pravce  $i$ , a zatim proračunom koeficijenta sile za svaki od pravaca:

$$C_{Fi} = \frac{F_{OOi}}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 A_{pp}}$$



Slika 6.46: Za obračun koeficijenta sile za pravac fluidne struje (1) i upravno na taj pravac (2) koristi se isti presek  $A_{PP}$

**Primer 6.4.4**

Odrediti silu po jedinici širine na prag pravougaonog preseka, visine 1,2 m i dužine 2,0 m, koji se nalazi potpuno potopljen u vodi brzine  $V = 2,5$  m/s. Gustina vode je  $\rho_V = 1000$  kg/m<sup>3</sup>.

U primeru 6.4.3 su određene sile na garažu, pri čemu je njena visina bila 3 m i dužina 5 m. Kako se u ovom primeru traži sila na geometrijski sličan objekat (odnos dimenzija je isti  $1,2/2 = 3/5 = 0,6$ ) u sličnim uslovima opstrujavanja, može se na osnovu rezultata primera 6.4.3 odrediti koeficijenti sile  $C_{F1}$  i  $C_{F2}$  a zatim i sila na prag:

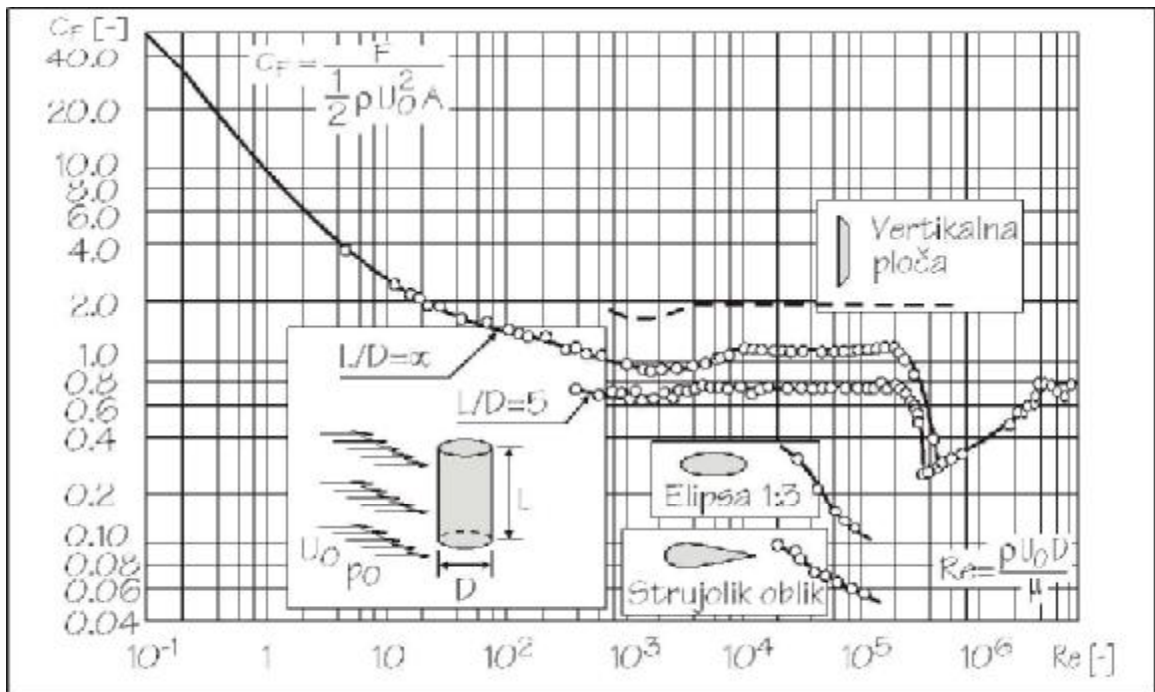
$$C_{F1} = \frac{932,4}{\frac{1}{2}1,2 \times 20^2 \times 3 \times 1} = 1,295 \quad C_{F2} = \frac{-300}{\frac{1}{2}1,2 \times 20^2 \times 3 \times 1} = -0,417$$

gde je površina  $A_{pp} = 3 \times 1$  (slika 6.46). Tražene sile na prag koji se nalazi u vodi su:

$$F_1 = C_{F1} \frac{1}{2} \rho_V V^2 A_{pp} = 1,295 \frac{1}{2} 1000 \times 2,5^2 \times 1,2 \times 1 = 4,86 \text{ kN}$$

$$F_2 = C_{F2} \frac{1}{2} \rho_V V^2 A_{pp} = -0,417 \frac{1}{2} 1000 \times 2,5^2 \times 1,2 \times 1 = -1,56 \text{ kN}$$

<sup>38</sup>Uz svaki koeficijent sile se po pravilu daje skica preseka i pravci za koje se daju koeficijenti.



Slika 6.47: Koeficijent sile za ravnu vertikalnu ploču, cilindar, elipsu i strujoliko telo, u funkciji Reynoldsovog broja

Strujna slika oko tela zavisi od Reynoldsovog broja. U literaturi se zbog toga obično daju koeficijenti sile koji su ograničeni na određeni dijapazon Reynoldsovih brojeva, tako da je u proračunu sile otpora oblika neophodno proveriti da li je ispunjen taj uslov. Koeficijenti sile se često daju i u formi dijagrama, kao što je to prikazano na slici 6.47, gde su dati podaci za ravnu vertikalnu ploču, cilindar, elipsu i strujoliko telo. Kod cilindričnih oblika se vidi uticaj turbulentnog graničnog sloja na naglo smanjenje koeficijenta sile kada Reynoldsov broj pređe kritičnu vrednost od  $Re_{CR} = 3,8 \cdot 10^5$  (slika 6.38), dok je kod strujolikog oblika taj prelaz postepen.

Na dijagramu se jasno može videti uticaj oblika tela na silu otpora oblika. Za isti Reynoldsov broj  $Re = 10^5$  i isti poprečni presek tela, sila otpora elipse je veća 2 puta od sile otpora strujolikog tela, kratkog cilindra 13 puta, dugačkog cilindra 20 puta, a vertikalne ravne ploče čak 33 puta. Upoređenja radi, savremeni automobili imaju koeficijent otpora oblika nešto veći od<sup>39</sup>  $C_F = 0,3$ , što je još uvek 5 puta lošije od strujolikog tela.

<sup>39</sup>Auto industrija ulaže velike napore u sniženje koeficijenta otpora oblika. Prvi automobili početkom 20-tog veka su imali  $C_F = 0,8$  da bi 70-tih godina taj koeficijent prepolovili na  $C_F = 0,4$ .

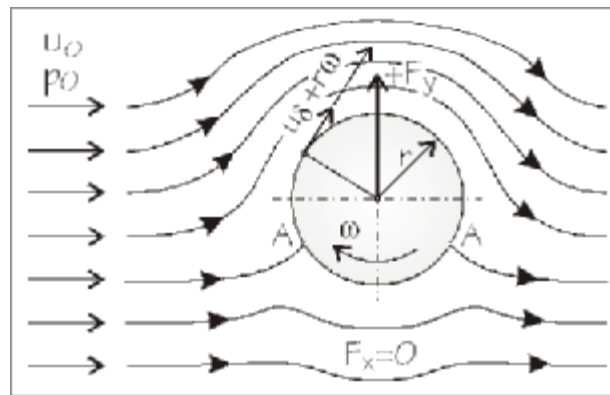
### 6.4.6 Sila uzgona

Komponenta sile otpora oblika  $F_{OO}$  koja je upravna na pravac strujanja fluida  $F_y$ , često se zove i *sila uzgona*  $F_U$ . Kod simetričnih tela srednja vrednost te sile je nula i pominjana je, uglavnom, kao štetna sila, koja unosi dinamičke poremećaje. Međutim, u nekim slučajevima je baš ta sila uzgona korisna sila i teži se tome da bude što veća.

U nastavku će se analizirati dva različita načina nastanka sile uzgona: kad simetrična tela (lopta ili cilindar) ne miruju već rotiraju u paralelnoj struji pa postoji sila upravna na struju fluida i kod nesimetričnih tela (avionskih krila), gde se oblikom tela postiže različit raspored pritisaka sa donje i gornje strane što rezultuje silom uzgona.

#### 6.4.6.1 Cilindar koji rotira u idealnom strujnom polju

Posmatra se opstrujavanje cilindra idealnim fluidom, dato na slici 6.31, na strani 264. Ako cilindar miruje, raspored brzina oko cilindra je  $u_{\delta_1} = 2U_0 \sin \theta$  (6.63) a ukupna sila otpora oblika kao i sila uzgona je nula. Ako se cilindar okreće ugaonom brzinom  $\omega$  (slika 6.48), idealan fluid će ostati "zalepljen" za cilindar i brzina fluida na granici sa cilindrom će biti veća za perifernu brzinu  $\omega r$ , tako da je sada raspored brzina:



Slika 6.48: Cilindar koji rotira u fluidnoj struji generiše silu uzgona  $F_y$

$$u_{\delta_1} = 2U_0 \sin \theta + \omega r$$

Zaustavna tačka  $A$  koja je ranije bila na osi simetrije, sada se pomera na dole i njen položaj zavisi od odnosa brzine fluida  $U_0$  i brzine rotacije  $\omega$ . Koeficijent pritiska izveden za konturu cilindra koji miruje (jednačina (6.62), na strani 264), za konturu koja rotira će imati oblik:

$$C_{p,1} = \frac{p_1 - p_0}{\frac{1}{2}\rho U_0^2} = 1 - \left( \frac{2U_0 \sin \theta + \omega r}{U_0} \right)^2 \quad (6.66)$$

Elementarna površina po jedinici dužine cilindra je  $r d\theta$ . Sila uzgona na tu površinu je  $dF_U$  i upravna je na pravac strujanja fluida:

$$dF_U = r d\theta \sin \theta (p_1 - p_0)$$

Ukupna sila uzgona po jedinici dužine cilindra ( $L = 1$  m) se dobija integracijom u rasponu ugla  $\theta$  od  $-\pi/2$  do  $\pi/2$ :

$$F_U = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -(p_1 - p_0) r \sin \theta d\theta = 2\pi r^2 \omega \rho U_0 = 2\pi r u \rho U_0 \quad (6.67)$$

Dobijeni obrazac se u literaturi naziva *jednačina Kuta-Jaukovskog* i daje silu uzgona koja je za 40 do 50% veća nego što se dobija u uslovima opstrujavanja cilindra realnim fluidom. Slično rešenje za silu uzgona pri rotiranju sfere (odnosno lopte; teniske, stonoteniske ili fudbalske) se uglavnom daje u formi dijagrama dobijenih na osnovu eksperimentalnih istraživanja.

### Primer 6.4.5

Horizontalni cilindar prečnika  $d = 10$  cm i dužine  $L = 1,3$  m rotira brzinom od  $n = 500$  obrtaja u minuti oko svoje ose. Cilindar se nalazi u horizontalnoj vazdušnoj struji upravnoj na osu cilindra, brzine  $U_0 = 15$  m/s i gustine  $\rho = 1,2$  kg/m<sup>3</sup>. Ako se pretpostavi da je fluid idealan, kolika je sila uzgona?

Ugaona brzina rotacije cilindra je:

$$\omega = 2\pi \frac{n}{60} = 2\pi \frac{500}{60} = 52,36 \text{ rad/s}$$

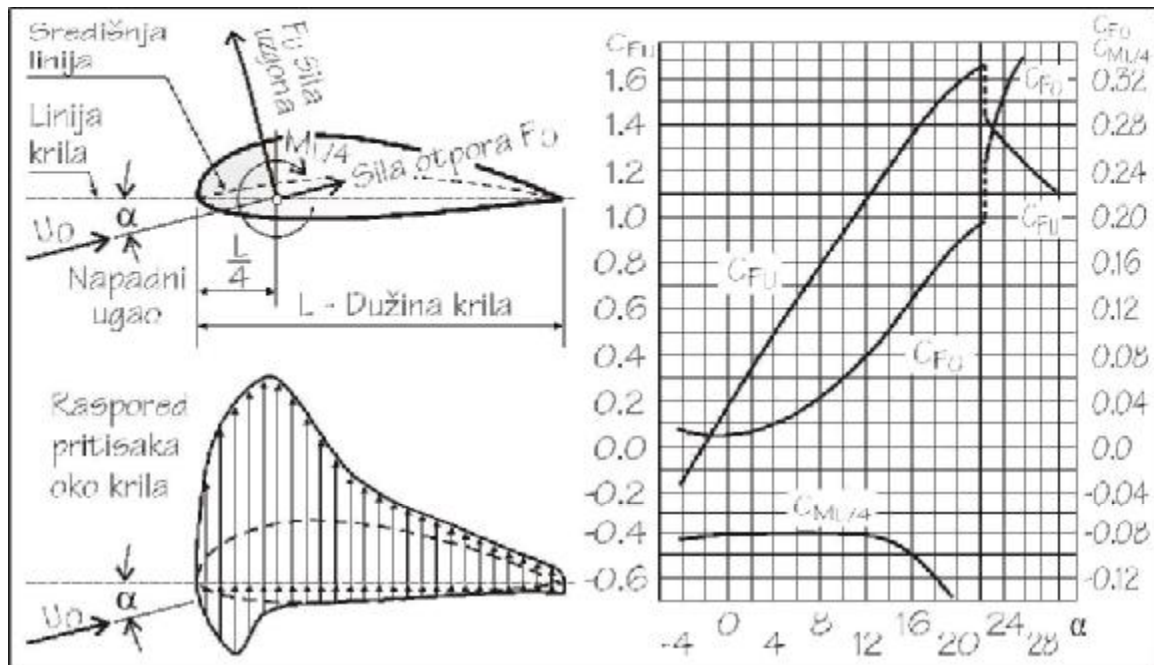
pa je iz (6.67) sila uzgona na cilindar dužine  $L$ :

$$F_U = 2\pi r^2 \omega \rho U_0 \times L = 2\pi \times 0,05^2 \times 52,36 \times 1,2 \times 15 \times 1,3 = 19,2 \text{ N}$$

U realnim uslovima sila uzgona bi bila duplo manja, oko 10 N.

### 6.4.6.2 Avionsko krilo

Kod simetričnih tela ukupna sila otpora  $F_O$  je jednaka samo komponenti sile u pravcu brzine fluida. Ako je telo nesimetrično i tako napravljeno da postoji sila uzgona  $F_U$ , koja je veća od sile otpora  $F_O$  u pravcu brzine, takvo telo se naziva *krilo* ili *avionsko krilo*. Proučavanje sile uzgona na krilo je posredno započeto još u srednjem veku posmatranjem leta ptica i oblika njihovih krila, da bi tek sa razvojem teorije graničnog sloja i vrtložnog traga, početkom 20. veka, fenomen uzgona bio u potpunosti razjašnjen. Danas se rezultati istraživanja efekta opstrujavanja krila koriste za dizajniranje i optimizaciju ne samo avionskih krila već i lopatica na turbinama i pumpama, propelera za helikoptere i vetrogeneratore, brodskih propelera, ventilatora i slično.



Slika 6.49: Sila uzgona na krilo aviona, u funkciji napadnog ugla

Na slici 6.49, prikazan je jedan od mogućih poprečnih preseka kroz krilo. U gornjem levom uglu, dati su termini koji su uobičajeni u ovoj oblasti. Kako krilo nije ravanski problem, sile se ne mogu izučavati po jednom metru širine, već se mora raditi sa pravom širinom  $B$ . Kao mera uticaja te treće dimenzije se često koristi pojam *relativna širina*<sup>40</sup>  $B^2/A = B/L$ , gde je  $A$  maksimalna površina krila<sup>41</sup>  $A = B L$ .

U donjem levom uglu slike 6.49, prikazani su rasporedi pritiska na gornju i donju površinu krila, za dati napadni ugao  $\alpha$ . Sila uzgona je rezultat velikog podpritiska, koji se javlja sa gornje strane krila, dok se blagom zakrivljenošću donje strane krila održava pozitivan nadpritisk. Konstrukcijom krila teži se da granični sloj ostane što duže uz krilo i da tačka odvajanja sloja bude u drugim  $L/2$  dužine.

Na dijagramu desno je data zavisnost koeficijenta sile od napadnog ugla, za korisnu silu uzgona i "štetnu" silu otpora. Brojne vrednosti na dijagramu odgovaraju samo za krilo datog poprečnog preseka i određene relativne širine. Sila uzgona se računa iz:

$$F_U = C_{FU} \frac{1}{2} \rho U^2 L B$$

<sup>40</sup>Engleski termin: Aspect ratio.

<sup>41</sup>Prema dogovoru, ista površina  $A$  se koristi i za definiciju koeficijenta sile  $C_F$ , što je različito od površine  $A_{PP}$  (slika 6.46).

Na dijagramu za uzgon se vidi da sa porastom napadnog ugla sila uzgona raste, jer raste i pozitivan pritisak sa donje strane krila, ali istovremeno raste i sila otpora. Pri određenom napadnom uglu, tačka odvajanja sloja se naglo pomeri ka prednjem delu krila što rezultuje naglim padom sile uzgona a porastom sile otpora. Ugao pri kome se to događa zavisi od konstrukcije krila i zove se *ugao sloma krila*<sup>42</sup> ili *ugao zastoja*. Kako se pri tom uglu naglo smanjuje uzgon, očigledno je da se prilikom projektovanja aviona izbegava rad krila u toj oblasti.

---

<sup>42</sup>Engleski termin: Stalling angle.



## Glava 7

# Tečenje fluida kroz cevi

Jednačine, kojima se opisuje kretanje fluida, izvedene u glavi 4, *Osnove dinamike fluida*, su, u opštem slučaju, nerešive. Uz određena uprošćenja, kao i za neke granične uslove, pokazano je kako se te jednačine mogu svesti na jednostavne i lako rešive izraze kojima je moguće rešiti i problem tečenja u cevima.

U ovoj glavi će se primeniti nešto drugačiji, pitkiji, pristup u izvođenju jednačina održanja. Jednačine će opisivati isključivo ustaljeno<sup>1</sup> tečenje nestišljivog<sup>2</sup> homogenog fluida (odnosno tečnosti) kroz unapred poznatu **proticajnu konturu (odnosno, kroz cevi)**. U izvođenju će se primeniti Ojlerov pristup (strana 101), po kome će se posmatrati samo promene na presecima kroz koje prolazi celokupna fluidna struja i primeniće se principi održanja mase, količine kretanja i mehaničke energije na masu između **tih preseka**. Kao rezultat, naravno, dobiće se jednačine istovetne uprošćenim jednačinama iz glave 4.

Za razumevanje materije iz ove glave nije neophodno poznavanje kompletne materije izložene u glavi 4. Sasvim je dovoljno da se prouči samo uvodni deo 4.1, u kome se objašnjavaju osnovni pojmovi nepходni za oblast tečenja fluida kroz cevi. Kako se u obe glave koriste u suštini isti osnovni principi, bilo je neizbežno da se određene slike i objašnjenja i ovde ponove.

---

<sup>1</sup>Neustaljeno tečenje u cevima će se izučavati u okviru grupacije predmeta Hidraulika, na hidro smeru.

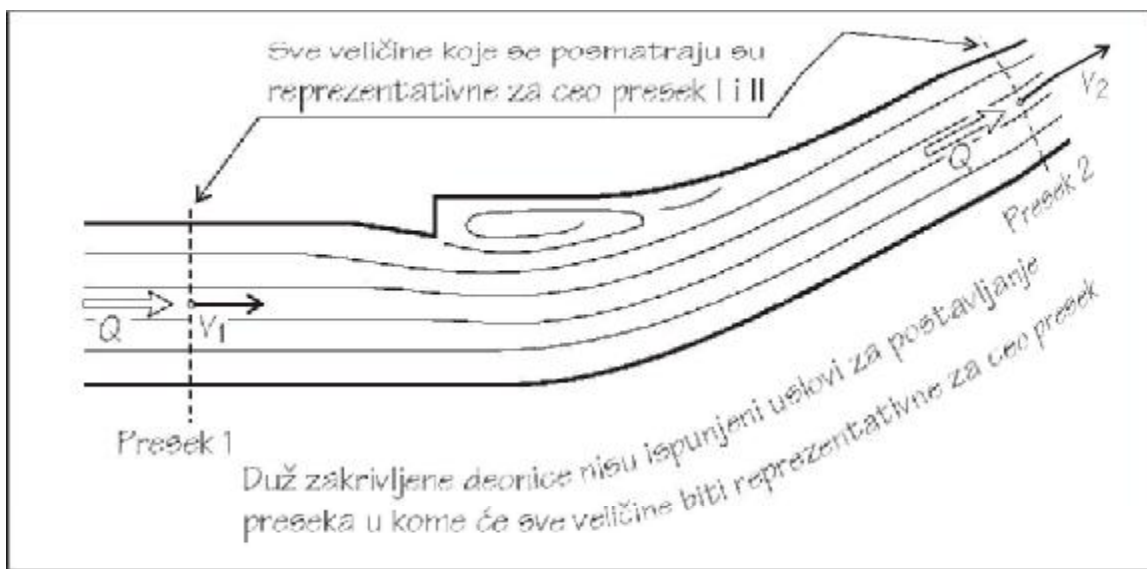
<sup>2</sup>Tečnosti će se u okviru ovog kursa smatrati nestišljivim, mada to one nisu. Postoji niz fenomena gde je njihova stišljivost bitna (pogledati poglavlje 2.5, na strani 23). Ti fenomeni se izučavaju u okviru grupacije predmeta Hidraulika.

## 7.1 Pretpostavke i uslovi za izvođenje jednačina

Jednačine održanja mase, količine kretanja i mehaničke energije će se izvesti uz sledeće pretpostavke:

- Celokupno strujanje prolazi kroz presečnu površinu, koja se može postaviti *normalno na pravac strujanja*. U preseku strujnice moraju biti *pravolinijske i međusobno paralelne*. Kontura, kroz koju protiče fluid, je *nepokretna*.

Ovo je najjednostavniji slučaj kretanja fluida, u kome se unapred znaju proticajna površina i pravac strujanja. Tok je upravan na proticajnu površinu i zove se *fluidna struja*. Fluidna struja se izučava tako što se uspostavlja dva preseka, u kojima su ispunjeni potrebni zahtevi: *paralelno i pravolinijsko strujanje, upravno na presek*.



Slika 7.1: Kontrolni presek se postavlja na mestu gde su strujnice međusobno paralelne i upravne na presek

Jednačine održanja se pišu za masu fluida između preseka 1 i 2 (slika 7.1), posmatranjem samo stanja u presecima. Jednačinama nije moguće detaljnije opisati stanje fluida između preseka, već će se sve promene globalno pripisati ili ukupnom gubitku energije ili delovanju konturne sile, u zavisnosti od fenomena koji se izučava.

- Posmatra se isključivo kontinualan, neprekidan i homogen fluid, koji je nestišljiv, tako da je gustina  $\rho = \text{Const}$ .

## 7.1. PRETPOSTAVKE I USLOVI ZA IZVOĐENJE JEDNAČINA 287

- Od sila koje deluju na zapreminu fluida, između preseka 1 i 2, uzimaće se u obzir:
  1. Zapreminske sile, od kojih se koristi samo *sila težina*  $\vec{G} = \rho g \vec{V}$ . Sila težine deluje u vertikalnom pravcu na dole.
  2. Površinske sile:
    - Normalne sile pritiska. Sile deluju na svim presecima fluidne struje  $\vec{P}_i = -\vec{n}_i p_i A_i$ .
    - Normalna sila usled normalnih napona (pritisaka) između fluida i zida cevi. Kod jednolikog tečenja (strana 91) u cevi bez promene poprečnog preseka, ukupna vrednost ove sile na masu fluida je nula.
    - Tangencijalna sila usled kretanja viskoznog fluida i koja pravi *trenje između fluida i zida cevi*. Kod idealnog fluida viskoznost se zanemaruje pa je **tangencijalna sila jednaka nuli**. Posledica nepostojanja tangencijalnih napona je i bezvrtložnost fluida: fluidni delići se tako deformišu da ne dolazi do njihove rotacije (strana 111), pa se kod idealnog fluida ne javljaju **ni lokalni gubici energije (strana 162), odnosno, ne postoji gubitak energije na trenje**.

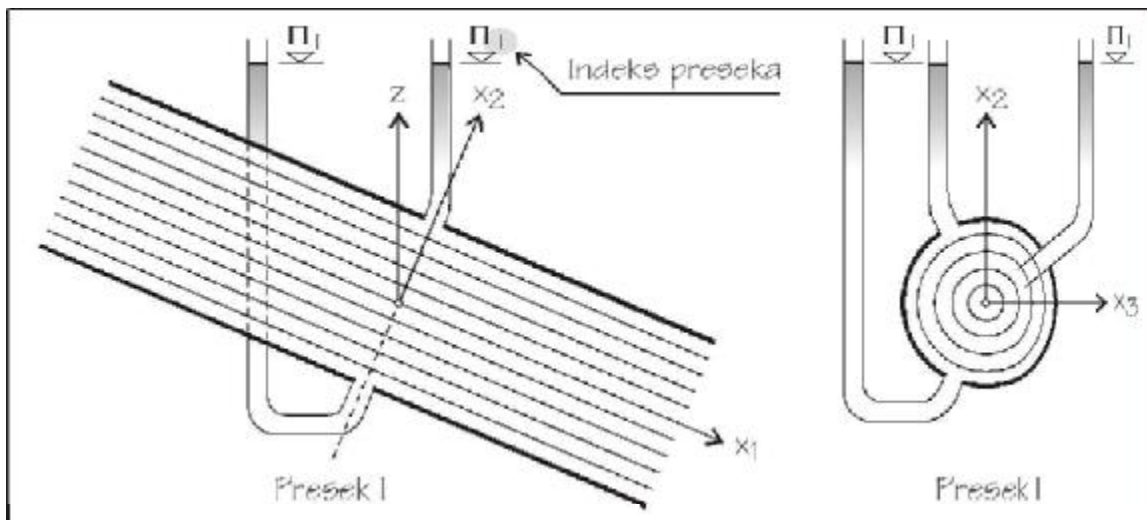
Poslednje dve površinske sile je teško razdvojiti bez detaljnijeg izučavanja rasporeda brzina i pritisaka unutar posmatrane mase fluida. U većini praktičnih zadataka se zbog toga te dve sile najčešće pišu zbirno, a sila se zove *konturna sila*  $\vec{K}$ .

- Proučavaju se samo ustaljena strujanja (strana 90), kod kojih je<sup>3</sup> parcijalni izvod bilo koje veličine po vremenu nula  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ . Iako se lokalne vrednosti (u jednom preseku) ne menjaju kroz vreme, to ne znači da se ne mogu menjati po prostoru (od preseka do preseka).
- Posmatra se razvijeno turbulentno tečenje u cevi (strana 87), u kome je hrapavost zida cevi dominantan faktor koji utiče na trenje, dok je **doprinos viskoznosti na trenje zanemarljiv**.

Kao rezultat navedenih pretpostavki mogu se uočiti dve veoma važne posledice, koje će se koristiti u daljem izvođenju jednačina: u jednom preseku

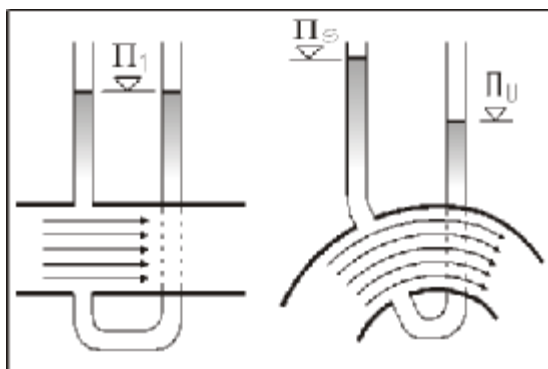
<sup>3</sup>U izrazu je namerno stavljen uslov nepromenljivosti srednje vrednosti veličine  $\varphi$  kroz vreme, a ne trenutne vrednosti. Pri turbulentnom tečenju u cevi, sve veličine fluktuiraju kroz vreme pa, strogo uzevši, nije moguće ustaljeno strujanje. Međutim, ako je osrednjena vrednost tih veličina nepromenljiva kroz vreme, onda se smatra da je tečenje ustaljeno.

vlada hidrostatička raspodela pritiska i neravnomernu brzinu po preseku cevi možemo zameniti jednom konstantnom vrednošću.



Slika 7.2: U kontrolnom preseku je hidrostatička raspodela pritiska

**Hidrostatička raspodela pritiska u preseku** Ako je u kontrolnom preseku strujanje paralelno i upravno na taj presek, onda u ravni preseka (odnosno, upravno na pravac strujanja) nema komponente brzine kao ni ubrzanja. Posledica toga je, da u ravni preseka, ne postoje ni dodatne sile, već deluju samo težina  $G$  i sila pritiska  $P$ , koja se računa po zakonima hidrostatičke. Pijezometarska kota  $\Pi_I$  važi za ceo presek<sup>4</sup> I.



Slika 7.3: Pijezometarska kota pri strujanju u pravoj cevi i u krivini

Ako je strujanje fluida u pravcu ose  $x_1$ , a osa  $x_2$  upravna na osu  $x_1$  (slika 7.2), tada se uslov konstantne  $\Pi$  kote u preseku može napisati:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = \frac{\partial \left( \frac{p}{\rho g} + z \right)}{\partial x_2} = 0$$

pri čemu je:

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} \neq 0$$

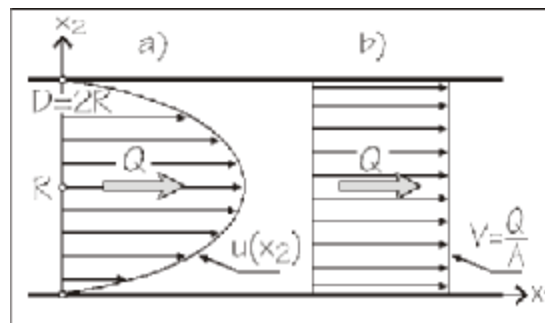
<sup>4</sup>Striktno posmatrajući, objašnjenje je tačno samo za laminarno strujanje. Kod turbulentnog strujanja (6.1.3), postoji komponenta brzine upravna na presek, pa  $\Pi_I$  kota nije konstantna za ceo presek.

Ukoliko se kontrolni presek postavi na mestu gde su strujnice zakrivljene, tako da presek bude upravan na njih (slika 7.3), iako ne postoji komponenta brzine u pravcu preseka, postoji ubrzanje jer brzina menja smer. Kao posledica tog ubrzanja javlja se različita pijeometarska kota po preseku. Sa unutrašnje strane je pijeometarska kota niža, a sa spoljašnje strane preseka je viša.

**Raspodela brzina po preseku cevi** Prema prvoj pretpostavci, posmatra se strujanje fluida kroz čvrstu nepokretnu konturu. Zbog delovanja viskoznosti, odnosno tangencijalnih napona  $\tau = \mu \frac{du}{dx_2}$ , brzina u poprečnom preseku nije konstantna, već zavisi od udaljenja od zida  $x_2$  (slika 7.4 pod a))  $u = u(x_2)$ . Uz sam zid brzina je nula  $u(0) = u(x_2 = D) = 0$ , dok je u sredini fluidne struje brzina maksimalna  $u(R) = u_{max}$ .

Prilikom izvođenja jednačina održanja, jednostavnije bi bilo raditi sa brzinom koja je konstantna po celom preseku. Zbog toga se uvodi pojam srednja profilna brzina  $V$ , koja daje isti protok kroz proticajni presek  $A$  kao i stvarne brzine  $u(x_2)$  (videti 4.1.8 Protok fluida i srednja brzina):

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\int_A u_i dA}{A}$$



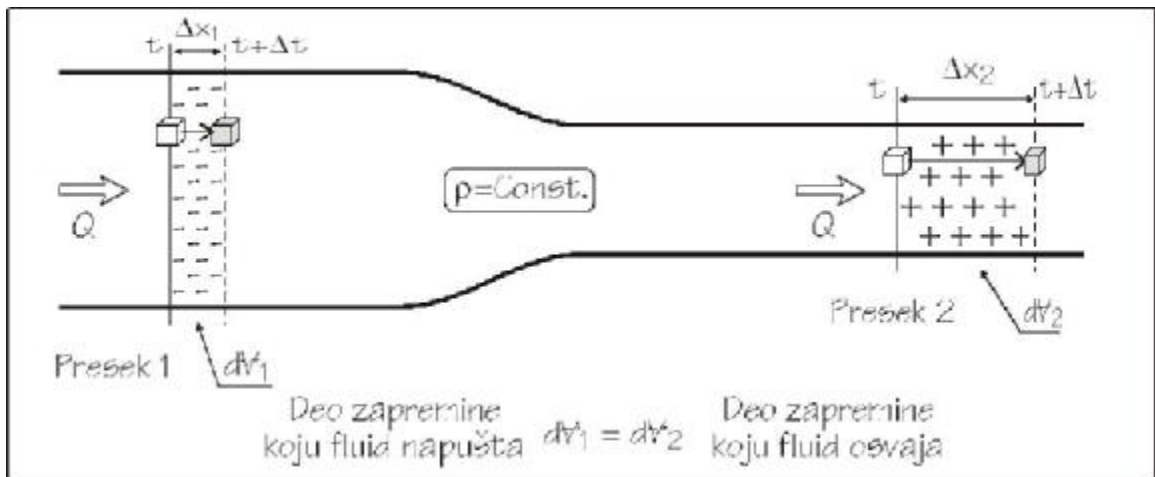
Slika 7.4: Umesto stvarne brzine (a) koristi se konstantna srednja profilna brzina  $V$  (b)

Za većinu praktičnih zadataka se umesto rasporeda brzine po preseku  $u(x_2)$  može koristiti srednja profilna brzina  $V$ . Međutim, ako je neophodno, u uslovima velike lokalne neravnomernosti brzina, obaviti tačniji proračun sila, u jednačinama se dodaje Businessov koeficijent  $\beta$  (jednačina (4.83), na strani 150), a za tačniji proračun energije toka Koriolisov koeficijent  $\alpha$  (jednačina (4.109), na strani 165).

## 7.2 Osnovne jednačine održanja

Kao što je već rečeno u uvodu ove glave, u glavi 4, *Osnove dinamike fluida*, izvedene su tri jednačine održanja u diferencijalnom obliku. Ovde će se dati nešto jednostavnije izvođenje istih jednačina u integralnom obliku, posmatranjem celokupne fluidne mase između kontrolnih preseka.

7.2.1 Jednačina kontinuiteta



Slika 7.5: Jednačina kontinuiteta: napuštena (presek 1) i osvojena (presek 2) masa fluida moraju biti iste

Posmatra se konačna masa  $m$ , odnosno zapremina  $V$  fluida konstantne gustine, između dva kontrolna preseka 1 i 2 (slika 7.5), u trenutku  $t$ . Fluid potpuno ispunjava prostor, odnosno, neprekidan je. U trenutku  $t + \Delta t$ , kada se fluidni delići pomere, zbog *principa održanja mase*, odnosno, *nepromenljivosti mase*, “napuštena”  $m_1$  i “osvojena”  $m_2$  masa fluida moraju biti iste:

$$m_1 = m_2 \tag{7.1}$$

Napuštena masa u preseku 1 je  $m_1 = \rho_1 \Delta V_1$ . Zapremina  $\Delta V_1$  se može odrediti na osnovu pomeranja preseka 1 za  $\Delta x_1$ , pa je:

$$m_1 = \rho_1 \Delta V_1 = \rho_1 A_1 \Delta x_1 = \rho_1 A_1 V_1 \Delta t = \rho_1 Q_1 \Delta t$$

gde je  $A_1$  površina poprečnog preseka cevi,  $V_1$  srednja brzina u preseku, a  $Q_1$  protok kroz presek 1. Na isti način može se dobiti osvojena masa u preseku 2  $m_2 = \rho_2 Q_2 \Delta t$ . Iz uslova (7.1), uz skraćivanje člana  $\Delta t$  sledi:

$$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2$$

Ako se primeni pretpostavka da je fluid homogen i konstantne gustine, odnosno da je  $\rho = \text{Const.}$  prethodna jednačina se svodi na:

$$Q_1 = Q_2 \tag{7.2}$$

Jednačina (7.2) se naziva *jednačina kontinuiteta*<sup>5</sup>. Iz nje sledi sledeća veza brzina i poprečnih preseka:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= V_1 A_1 \\ Q_2 &= V_2 A_2 \end{aligned} \right\} V_1 A_1 = V_2 A_2$$

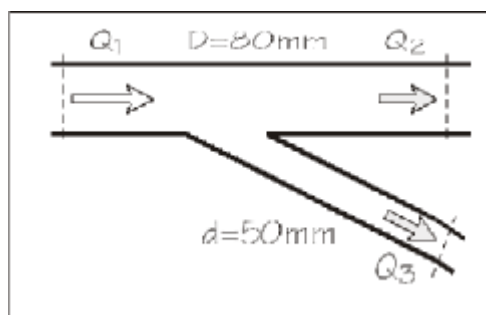
Ako se posmatra jedan delić koji putuje od preseka 1 do preseka 2, on menja brzinu kroz vreme, pa je sa tog stanovišta strujanje neustaljeno. Već je najavljeno u uvodu da se ova neustaljenost prevazilazi Ojlerovim pristupom, gde se posmatraju samo brzine u presecima, a tu je strujanje ustaljeno.

**Primer 7.2.1**

Za račvu prikazanu na slici, dolazni protok je  $Q_1 = 10 \text{ L/s}$  a protok kroz donju cev je  $Q_3 = 4 \text{ L/s}$ . Kolike su brzine u cevima?

Jednačina kontinuiteta (7.2) je izvedena za jedan ulazni presek i jedan izlazni presek. Ukoliko se ta jednačina uopšti na veći broj ulaznih i izlaznih preseka i ukoliko se svi protoci koji ulaze u presek označe kao pozitivni a oni koji izlaze iz preseka kao negativni, jednačina kontinuiteta se može napisati u obliku:

$$\sum_{i=1}^N Q_i = 0$$



Za dati slučaj, to bi značilo da su protoci:  $Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0$ , odnosno, da je:  $Q_2 = Q_1 - Q_3 = 10 - 4 = 6 \text{ L/s}$ .

Brzine se računaju za svaki presek ponaosob, jer za svaki presek mora biti ispunjena jednačina  $Q_i = V_i A_i$ . Za date prečnike cevovoda i protoke brzine su:

$$V_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{\frac{0,08^2 \pi}{4}} = 1,99 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{\frac{0,08^2 \pi}{4}} = 1,19 \text{ m/s} \quad \text{i} \quad V_3 = \frac{Q_3}{A_3} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{\frac{0,05^2 \pi}{4}} = 2,04 \text{ m/s}$$

<sup>5</sup>Ista jednačina održanja mase, odnosno jednačina kontinuiteta za homogeni nestišljivi fluid pri ustaljenom strujanju (4.40), izvedena je na strani 121 (odnosno jednačina (4.41) na strani 121).

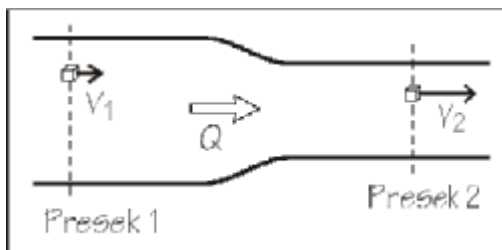
### 7.2.2 Dinamička jednačina

Pretpostavka da je tečenje u cevi ustaljeno podrazumeva da se u jednom preseku brzina kroz vreme ne menja. Ako se za posmatranu masu fluida površine ulaznog  $A_1$  i izlaznog preseka  $A_2$  razlikuju, primenom jednačine kontinuiteta (7.2), dobija se da će fluidni delići od ulaznog do izlaznog preseka promeniti brzinu (slika 7.6):

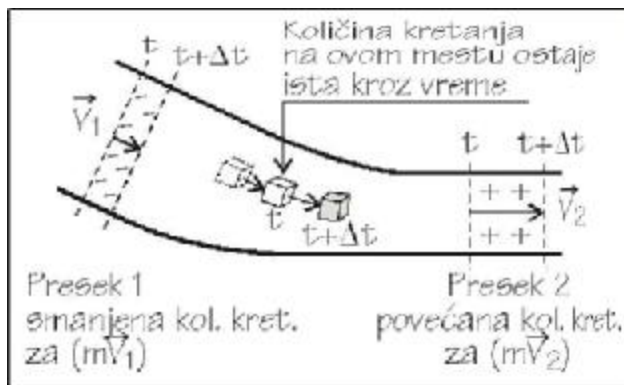
$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \Rightarrow V_1 \neq V_2$$

Kada postoji promena brzine u posmatranoj masi, moraju postojati i sile koje će tu promenu izvesti, odnosno, mora biti ispunjen *princip održanja količine kretanja*. Za sve realne sile, koje deluju na konačnu masu između preseka 1 i 2 u trenutku ( $t$ ) (slika 7.8), primenjuje se stav da je *promena količine kretanja posmatrane mase u vremenskom intervalu  $\Delta t$  jednaka impulsu sile*<sup>6</sup>. Ako je količina kretanja proizvod mase i brzine ( $m\vec{V}$ ), tada je promena količine kretanja jednaka razlici količina kretanja posmatrane mase za trenutke ( $t + \Delta t$ ) i ( $t$ ):

$$m\vec{V}_{(t+\Delta t)} - m\vec{V}_{(t)} = \sum \vec{F}_i \Delta t \tag{7.3}$$



Slika 7.6: Između preseka 1 i 2 fluidni delić menja brzinu - to se može uraditi samo ako deluje neka sila



Slika 7.7: Količina kretanja se menja sa delićem, ali je na jednom istom mestu nepromenljiva - promena se događa jedino u presecima 1 i 2

Za primenu jednačine potrebno je znati promenu brzine fluidnog delića konstantne mase. Na slici 7.7 delić bele boje u trenutku ( $t$ ) ima jednu brzinu a kada se u trenutku ( $t + \Delta t$ ) pomeri (sivi delić), ima nešto veću brzinu pa

<sup>6</sup>Princip održanja količine kretanja posmatrane mase može se primeniti i na priraštaj  $m\vec{V}$  u jedinici vremena  $m \frac{\vec{V}}{\Delta t} = m\vec{a}$  (gde je  $a$  ubrzanje posmatrane mase), koji mora biti jednak rezultanti sile  $\sum F$  koje deluju na tu masu.



i količinu kretanja (jer je nacrtano da se cev postepeno sužava). Međutim, kako se taj delić pomeri, zbog neprekidnosti fluida, na njegovo mesto će u trenutku  $(t + \Delta t)$  doći drugi delić (nacrtan isprekidanom linijom), koji će sada opet imati istu brzinu, pa i količinu kretanja, kao što je imao beli delić u trenutku  $(t)$ .

Na osnovu slike 7.7, može se zaključiti da nema promene količine kretanja u presecima unutar fluidne struje. Jedina promena količine kretanja se događa na krajevima mase, u presecima 1 i 2. Zbog toga je moguće promenu količine kretanja celokupne mase odrediti *samo na osnovu promena u ulaznom i izlaznom preseku*, a ne i na osnovu sume promena unutar celokupne mase fluida.

U kontrolnim presecima (slika 7.7), dešavaju se sledeće promene:

- U preseku 1 oduzima se deo mase  $m = \rho V = \rho Q \Delta t$ , odnosno, smanjuje se količina kretanja:

$$-m\vec{V}_1 = -\rho Q \Delta t \vec{V}_1$$

- U preseku 2 se dodaje ista masa  $m$ , odnosno, količina kretanja:

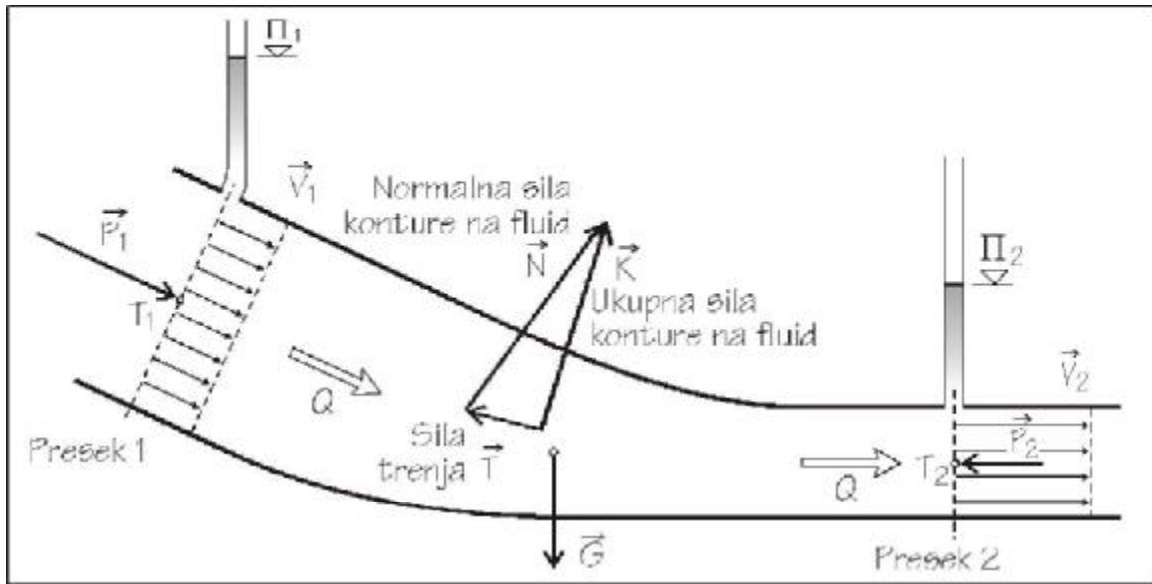
$$+m\vec{V}_2 = +\rho Q \Delta t \vec{V}_2$$

Promena količine kretanja u vremenskom intervalu  $\Delta t$ , može se napisati kao zbir promena na presecima:

$$-\rho Q \Delta t \vec{V}_1 + \rho Q \Delta t \vec{V}_2 = \rho Q \Delta t (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad (7.4)$$

Promena količine kretanja je, prema (7.3), jednaka impulsu sila koje deluju na tu masu. Na masu fluida između preseka 1 i 2 (slika 7.8) deluju sledeće sile:

- Zapreminska sila, odnosno težina fluida  $\vec{G} = \rho g \vec{V}$ , koja uvek deluje vertikalno na dole.
- Površinska sila  $P_i$ , upravna na poprečne preseke. Za dati slučaj na slici 7.8, to su dve sile pritiska  $\vec{P}_1 = -\vec{n} p_{T_1} A_1$  i  $\vec{P}_2 = -\vec{n} p_{T_2} A_2$ , koje se mogu računati prema načelima hidrostatike, jer je pijeziometarska kota konstantna po preseku. Sile deluju upravno na preseke, prema posmatranoj masi fluida ukoliko je pritisak pozitivan, a od mase fluida ako je pritisak negativan.



Slika 7.8: Sve realne sile koje deluju na posmatranu masu fluida, između preseka 1 i 2

- Površinska sila  $\vec{K}$  kojom čvrsta (nepokretna) kontura deluje na fluid. Sila obuhvata silu trenja  $\vec{T}$  i normalnu silu između zida cevi i fluida  $\vec{N}$  (odnosno uticaj promene geometrije cevi). Smer i intenzitet sile  $\vec{K}$  su u većini zadataka nepoznati.

Spajanjem jednačina (7.3) i (7.4) dobija se:

$$\rho Q \Delta t (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \sum F \Delta t$$

odnosno

$$\rho Q \Delta t (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \Delta t (\vec{G} + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{K}) \tag{7.5}$$

Ako se iz prethodne jednačine skloni vremenski interval  $\Delta t$ , dobija se *dinamička jednačina* u sličnom obliku kao i jednačina (4.81), izvedena na strani 148, napisana tako da se vidi da je promena količine kretanja u jedinici vremena jednaka sumi svih realnih sila na konačnu zapreminu, između preseka 1 i 2:

$$\rho Q (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \vec{G} + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{K} \tag{7.6}$$

Jednačina (7.6) je vektorska, pa se može napisati i u formi ravnoteže sila:

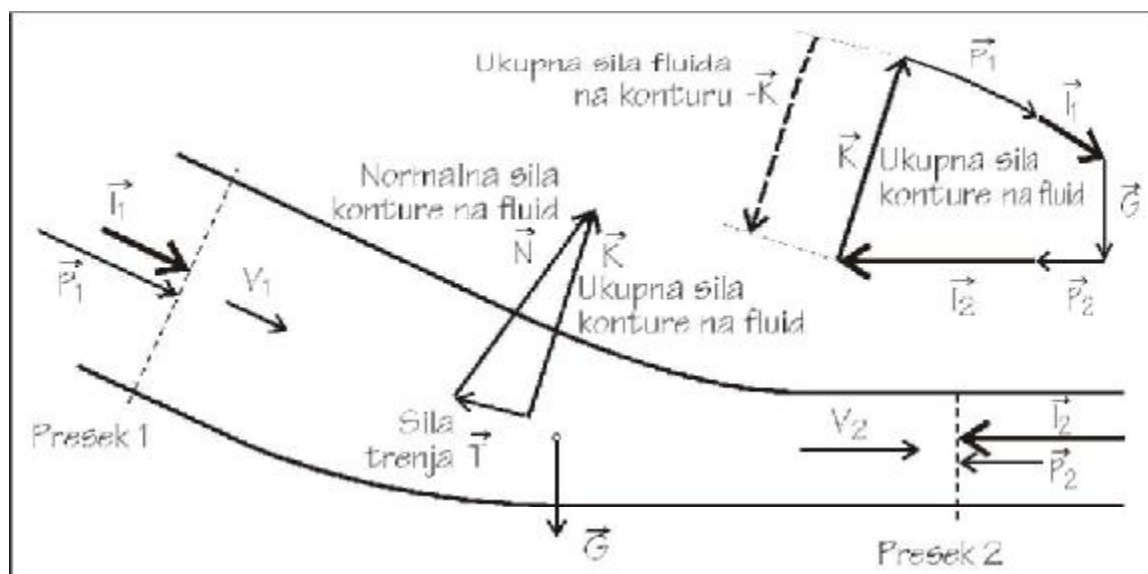
$$-\rho Q (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) + \vec{G} + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{K} = 0 \tag{7.7}$$

Prema Dalamberovom<sup>7</sup> principu, dinamički problem se svodi na statički problem, odnosno na ravnotežu sila, uvođenjem *fiktivne* sile, koja se obično zove *inercijalna sila*  $\vec{I}$ :

$$\vec{I} = -\rho Q (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \tag{7.8}$$

Fiktivna inercijalna sila  $\vec{I}$  može da se razdvoji na preseke 1 i 2, pri čemu će komponente sile delovati u težištu preseka, a smer će im uvek biti *ka posmatranoj masi*:

$$\vec{I}_1 = \rho Q \vec{V}_1 \quad \vec{I}_2 = \rho Q (-\vec{V}_2) \tag{7.9}$$



Slika 7.9: Sve realne sile (sile težine, prtiska i konturne sile) i fiktivne (inercijalne) sile koje deluju na posmatranu masu fluida između preseka 1 i 2, moraju biti u ravnoteži

Dinamička jednačina (7.6), odnosno (7.7), sada se može napisati u obliku zbira sila, kao što je to pokazano na slici 7.9, kroz nacrtan zatvoren poligon sile:

$$\vec{I}_1 + \vec{P}_1 + \vec{K} + \vec{G} + \vec{I}_2 + \vec{P}_2 = 0 \tag{7.10}$$

Kako je dinamička jednačina vektorska, može se po potrebi napisati kao tri skalarne jednačine za tri glavna pravca ( $x$ ,  $y$  i  $z$ ).

Dinamička jednačina (7.10) predstavlja *sumu svih sila koje deluju na masu fluida pa je i  $\vec{K}$  ukupna sila konture na fluid*. U praksi se dinamička

<sup>7</sup>Biografija Dalamberta je data u fusnoti 36, na strani 147.

jednačina najčešće koristi da bi se odredila obrnuta sila, sila kojom fluid deluje na konturu, a to je sila  $-\vec{K}$  (prikazana isprekidano na slici 7.9).

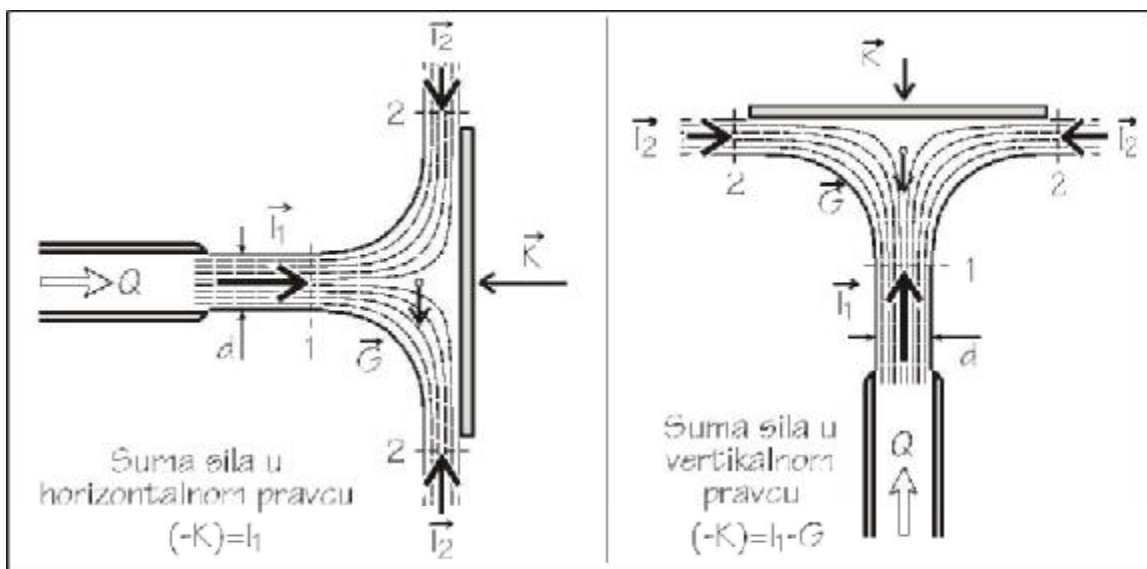
### 7.2.2.1 Primeri primene dinamičke jednačine

U poglavlju 4.5.6, *Primeri primene jednačine sile*, data su dva primera korišćenja dinamičke jednačine: jedan iz oblasti tečenja u cevi i drugi iz oblasti otvorenih tokova. U oba primera je bilo potrebno odrediti silu kojom fluid deluje na konstrukciju, ukoliko su poznati protok i pizometarske kote u presecima. Postavljanjem jednačine (7.10), gde je nepoznata *sila konture na fluid*  $\vec{K}$ , može se odrediti sila fluida na konturu  $-\vec{K}$ :

$$-\vec{K} = \vec{I}_1 + \vec{P}_1 + \vec{G} + \vec{I}_2 + \vec{P}_2 = 0 \tag{7.11}$$

U nastavku će se dati još dva primera, koja se često sreću u praksi: udar horizontalnog i vertikalnog mlaza vode u ploču, kao i uticaj dodatne inercijalne sile isticanja vode iz suda, na ukupnu težinu suda.

**Udar mlaza u ploču** Mlaz vode bez kontrakcije udara pod pravim uglom u ravnu ploču. Kolika je sila na ploču ako je mlaz horizontalan a kolika ako je mlaz vertikalan na gore?



Slika 7.10: Određivanje sile udara mlaza vode na vertikalnu ploču

Na slici 7.10, prikazana su oba slučaja. Potrebno je izdvojiti kontrolnu masu fluida (odnosno definisati preseke 1 i 2) i nacrtati sve sile koje na nju deluju.

U presecima 1 i 2 vlada atmosferski pritisak, pa su sile pritiska jednake nuli  $P_1 = P_2 = 0$ . Inercijalna sila u preseku 2 je raspodeljena po celom obodu mlaza. Za slučaj horizontalnog mlaza, trebalo bi postaviti uslov da je suma svih sila u horizontalnom pravcu jednaka nuli, tako da se dobija da je sila udara mlaza  $-K$  jednaka inercijalnoj sili u preseku 1:

$$(-K) = I_1$$

$$(-K) = \rho Q V_1 = \rho A_1 V_1^2 = \rho \frac{d^2 \pi}{4} V_1^2$$

U slučaju vertikalnog mlaza na gore, u ravnotežu vertikalnih sila sada ulazi i sopstvena težina fluida u kontrolnoj zapremini, pa je rezultujuća sila udara mlaza  $-K$  manja nego u slučaju horizontalnog mlaza:

$$(-K) = I_1 - G$$

Kako je teško odrediti težinu kontrolne zapremine, u praksi se zadatak najčešće rešava uvođenjem koeficijenta sile, kao odnosa realne sile (sile koju primi ploča) i inercijalne sile:

$$C_F = \frac{(-K)}{I_1}$$

Za slučaj horizontalnog mlaza, koeficijent sile je  $C_F = 1,0$  dok je za slučaj vertikalnog mlaza na gore, koeficijent manji  $C_F < 1,0$  i njegova vrednost se obično utvrđuje eksperimentalno.

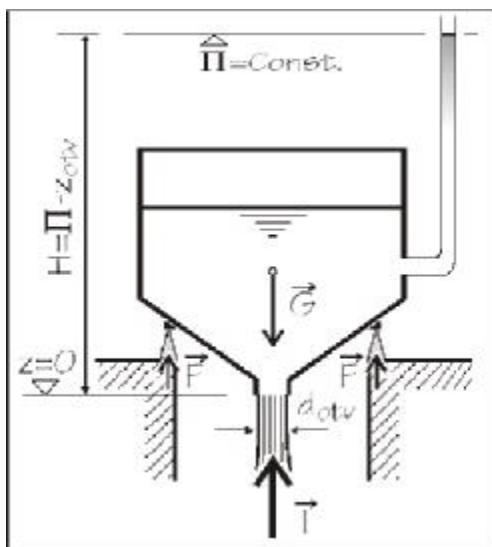
**Sud sa isticanjem na dole** Posmatra se zatvoren sud sa konstantnim nivoom vode<sup>8</sup> i sa datom pijezometarskom kotom. Sud je oslonjen na četiri nosača i na dnu ima otvor prečnika  $d_{otv}$ . Ako je zapremina suda  $V = 1 \text{ m}^3$  i ako je njegova težina 10% od težine vode, kolika treba da bude pijezometarska kota da bi ukupna sila u osloncima bila nula?

Sa slike 7.11, vidi se da je uslov da sila u osloncima bude jednaka nuli, ustvari uslov da je inercijalna sila mlaza, koji ističe jednaka ukupnoj težini suda i vode:

$$I = \rho g V + G_{sud}$$

$$I = 1,1 \times (\rho \times 9,81 \times 1)$$

$$I = 10,79\rho \text{ KN}$$



Slika 7.11: Zatvoren sud iz koga voda ističe na dole

Brzina vode koja ističe, za idealan fluid, se može dobiti iz poznatog Toričeljevog principa, relacije koja se uči još u okviru fizike za osnovne i srednje škole. Ovde je ona već izvedena u poglavlju 4.5.3.1 *Isticanje kroz oštroični otvor*, u primeru primene Bernulijeve jednačine na isticanje kroz oštroični otvor - jednačina (4.63), na strani 135:

$$V = \sqrt{2gH}$$

gde je  $H = \Pi - z_{otv}$ . Sa slike 7.11 se vidi da je kota otvora  $z_{otv} = 0$ , tako da je inercijalna sila jednaka:

$$I = \rho QV = \rho V^2 A = \rho (\sqrt{2g\Pi})^2 \frac{D^2 \pi}{4} = \frac{g\pi}{2} \rho D^2 \Pi = 15,41 \rho D^2 \Pi$$

Iz uslova jednakosti dve sile, sledi:

$$15,41 \rho D^2 \Pi = 10,79 \rho \Rightarrow D^2 \Pi = \frac{10,79}{15,41} = 0,7 \Rightarrow \Pi = \frac{0,7}{D^2}$$

čime je dobijeno rešenje u formi veze između pijezometarske kote i prečnika mlaza vode. Ako je, na primer, prečnik mlaza  $D = 100$  mm, potrebna je pijezometarska kota od  $\Pi = 70$  m.

### 7.2.2.2 Uticaj profila brzina na dinamičku jednačinu

Kao jedna od posledica pretpostavki za izvođenje jednačina održanja (strana 289), uvedena je srednja profilska brzina  $V$ . Kod jednačine kontinuiteta je svejedno da li se koristi srednja brzina  $V$  ili promenljiva brzina po preseku  $u_i$  pa je  $V = \frac{1}{A} \int_A u_i dA$  (slika 7.4). Pri proračunu inercijalne sile je, međutim, potrebno izračunati član  $I = \rho QV = \rho AV^2$ , ali sada  $V^2$  nije isto što i  $\frac{1}{A} \int_A u_i^2 dA$ .

Razlika između dva izraza postaje sve veća što je veće odstupanje maksimalne brzine po poprečnom preseku  $u_{max}$  od srednje profilske brzine  $V$ .

<sup>8</sup>Posmatraju se samo ustaljeni procesi. Jasno je da će nivo vode u sudu da se sa vremenom smanjuje, ali će se ovde zbog jednostavnosti pretpostaviti da je nivo konstantan.

Za slučajeve gde je potrebno tačnije obračunati sile, uvodi se kao korekcija Businessov koeficijent  $\beta$ :

$$I = \beta \rho Q V$$

gde se koeficijent  $\beta$  računa prema (jednačina (4.83), na strani 150):

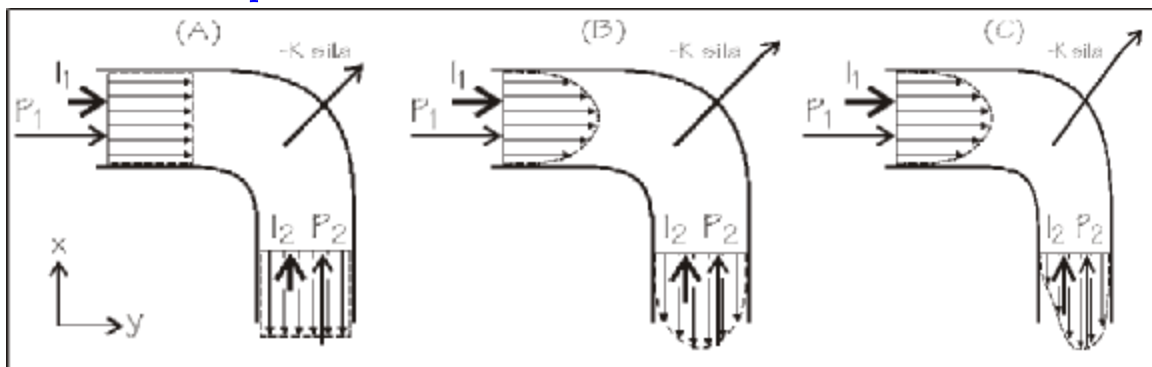
$$\beta = \frac{\int_A u_i^2 dA}{V^2 A}$$

Koeficijent  $\beta$  može imati sledeće vrednosti:

- Za laminarni tok, gde je odnos srednje profilske brzine i stvarne maksimalne  $V = 2u_{max}$ , koeficijent je  $\beta = 4/3 = 1,33$
- Za turbulentni tok koeficijent zavisi od stepena razvijenosti turbulencije i kreće se u rasponu od  $\beta = 1,10$  za turbulentno tečenje u glatkoj cevi, do  $\beta = 1,01$  za razvijeno turbulentno tečenje.

**Primer 7.2.2**

Kroz horizontalno postavljenu cev prečnika  $D = 200$  mm teče voda ( $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>) protokom  $Q = 80$  L/s. Ispred kolena (ugao kolena je 90°) je postavljen manometar koji pokazuje pritisak  $p = 2$  Bar. Ako se pretpostavi da je fluid idealan, odrediti horizontalnu komponentu sile na koleno.



Za date podatke, brzina vode je:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{D^2 \pi} = \frac{4 \times 0,08}{0,2^2 \pi} = 2,55 \text{ m/s}$$

Pritisci ispred i iza kolena su isti, jer su iste brzine i jer se pretpostavlja da je fluid idealan:  $p = 2$  Bar = 200 KPa, pa je sila pritiska u oba preseka jednaka:

$$P_1 = P_2 = pA = 200 \cdot 10^3 \times 0,2^2 \pi / 4 = 6,283 \text{ KN}$$

Inercijalna sila u presecima, bez korekcije usled neravnomernosti profila brzina (slučaj (A) na skici), je:

$$I_1 = I_2 = \rho Q V = 1000 \times 0,08 \times 2,55 = 0,204 \text{ KN}$$

Od ostalih sila na koleno, deluje još i težina, u pravcu  $-z$ , pa se za proračun horizontalne komponente ukupne sile na koleno neće računati. Intenzitet sile  $-K$  prema jednačini (7.11) je:

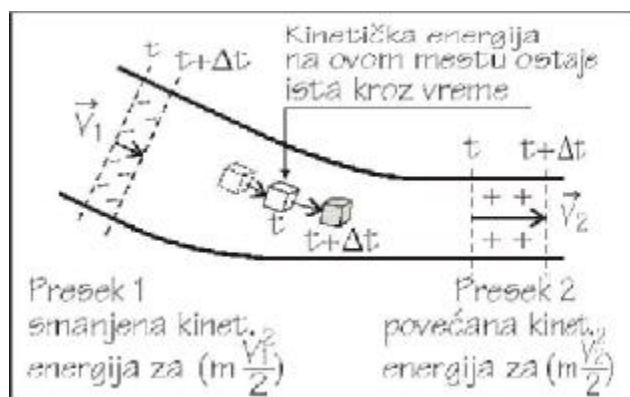
$$-K^{(A)} = \sqrt{(P_1 + I_1)^2 + (P_2 + I_2)^2} = \sqrt{2 \times (6,283 + 0,204)^2} = 9,174 \text{ KN}$$

Kako inercijalna sila zavisi od rasporeda brzina, za tačniji proračun potrebno je uzeti u obzir i Businessov koeficijent. Za osnosimetričan raspored brzine (slučaj (B) na skici) može se uzeti  $\beta = 1,05$  pa je inercijalna sila na ulazu i izlazu iz kolena  $I_1 = I_2 = \beta \rho Q V = 1,05 \times 0,204 = 0,214 \text{ KN}$ . Horizontalna komponenta je tada  $-K^{(B)} = 9,188 \text{ KN}$ .

Pravi raspored brzina na izlaznom profilu nije osnosimetričan, već je pod znatnim uticajem krivine. Usled izraženije neravnomernosti brzine u izlaznom preseku, Businessov koeficijent će biti nešto veći. Ako se pretpostavi da je<sup>9</sup>  $\beta_2 = 1,1$ , tada je inercijalna sila na izlaznom preseku  $I_2 = \beta_2 \rho Q V = 1,1 \times 0,204 = 0,224 \text{ KN}$  (sila  $I_1$  ostaje nepromenjena  $I_1 = 0,214 \text{ KN}$ ). U tom slučaju, horizontalna komponenta sile na koleno je  $-K^{(B)} = 9,196 \text{ KN}$ .

### 7.2.3 Energetska jednačina

Proučavanje ukupne energije fluidnog delića i postavljanje uslova o održanju te energije, po pravilu se vezuje za termodinamiku. Iz tih uslova su u poglavlju 4.6, *Održanje energije sistema*, izvedene diferencijalne jednačine.



Slika 7.12: Promena kinetičke energije se odigrava samo u presecima 1 i 2

Međutim, za potrebe rešavanja praktičnih zadataka tečenja nestišljivih fluida praćenje toplotne energije nije neophodno. Dovoljno je izvesti integralnu jednačinu koja prati mehaničku energiju celokupne mase, a ne jednog delića, a sve ono što je prešlo iz mehaničke u toplotnu energiju, otpisati kao gubitak.

<sup>9</sup>Za određivanje tačne vrednosti Businessovog koeficijenta potrebno je poznavati stvarni raspored brzina. On se može dobiti ili merenjima ili približnim rešavanjem jednačina strujanja, primenom CFD (Computational Fluid Dynamic) programa uz pretpostavljene granične uslove i model turbulencije.



Na masu koja u jednom trenutku  $t$  zauzima prostor između preseka 1 i 2 (slika 7.12), može se primeniti stav da je *priraštaj kinetičke energije posmatrane mase u vremenskom intervalu  $\Delta t$ , jednak radu svih realnih sila na toj masi, umanjen za energiju koja iz mehaničke pređe u neku drugu vrstu energije*. Kinetička energija posmatrane mase je  $mV^2/2$ , pa je priraštaj kinetičke energije za trenutke  $(t + \Delta t)$  i  $(t)$  jednak:

$$m \frac{V^2}{2} (t+\Delta t) - m \frac{V^2}{2} (t) = \sum F_i x_i - \Delta E \quad (7.12)$$

gde su  $F_i$  sve realne sile koje deluju na masu: zapreminska (težina) i površinske (pritisak, trenje i normalna sila konture), a  $x_i$  pomeranja pod dejstvom tih sila.

Ako se analizira ukupna promena kinetičke energije posmatrane mase na osnovu fluidnog delića (slika 7.12), shodno razmatranjima koja su korišćena i kod izvođenja dinamičke jednačine (strana 292) dobiće se da je potrebno poznavati samo promene na presecima 1 i 2. U preseku 1 se gubi kinetička energija:

$$E_1 = -\frac{mV_1^2}{2} = -\frac{\rho A_1 V_1 \Delta t V_1^2}{2} = -\rho Q \Delta t \frac{V_1^2}{2}$$

a u preseku 2 se dobija:

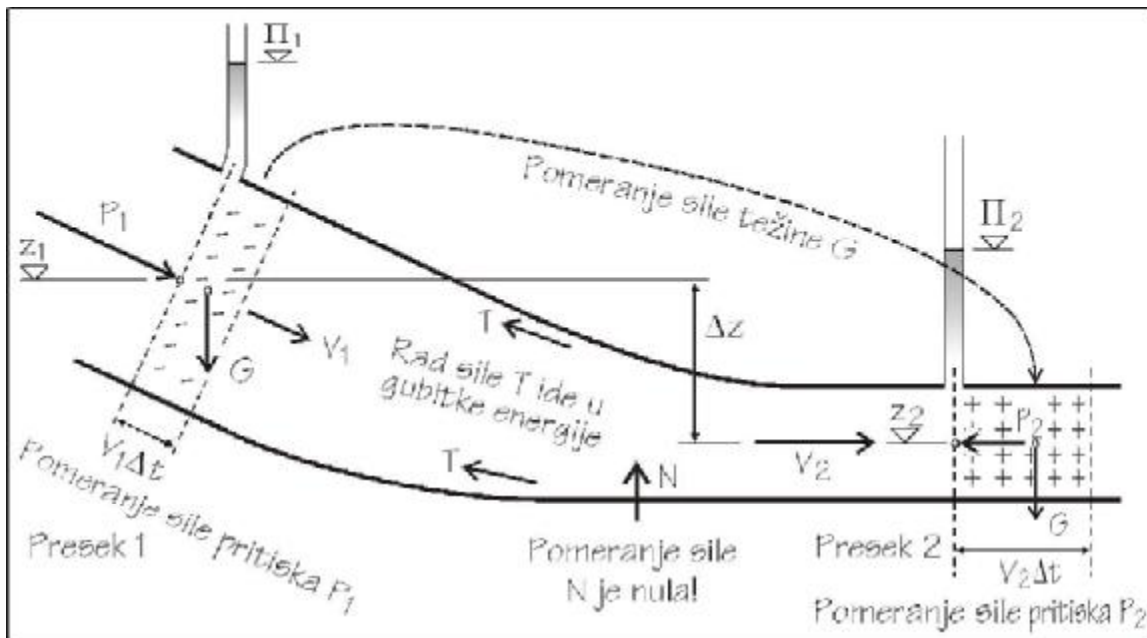
$$E_2 = +\frac{mV_2^2}{2} = +\frac{\rho A_2 V_2 \Delta t V_2^2}{2} = +\rho Q \Delta t \frac{V_2^2}{2}$$

Ukupni priraštaj kinetičke energije za celokupnu masu fluida je:

$$\rho Q \Delta t \left( \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right) \quad (7.13)$$

uz prihvatanje pretpostavke da je kontura nepokretna, odnosno, da sa konturom nema razmene energije. Ova pretpostavka nije ispunjena jedino kod hidrauličkih mašina, pumpi i turbina. Hidrauličke mašine će se posebno izučavati u poglavlju 7.4, na strani 326.

Priraštaj kinetičke energije, dat jednačinom (7.13), jednak je radu svih realnih sila umanjen za izgubljenu energiju, energiju koja iz mehaničke pređe u neku drugu vrstu (najčešće toplotnu). Rad je skalarni proizvod sile i pomeranja pod dejstvom te sile. Za posmatranu masu fluida između preseka 1 i 2 (slika 7.13), radovi pojedinih sila su:



Slika 7.13: Rad svih realnih sila na konačnoj masi fluida

- Rad sile težine se svodi na rad potreban da se premesti “napuštena” u “osvojenu” zapreminu:  $G = mg = \rho Q \Delta t g = \rho g Q \Delta t$ , pri čemu se rad vrši samo u  $z$  pravcu:

$$G(z_1 - z_2) = \rho g Q \Delta t (z_1 - z_2)$$

- Rad sile pritiska na preseccima 1 i 2 je proizvod sile pritiska  $P_1 = p_1 A_1$  i  $P_2 = p_2 A_2$ , na pomeranjima usled dejstva tih sila  $x_1 = +V_1 \Delta t$  i  $x_2 = -V_2 \Delta t$ , gde je pomeranje u pravcu sile  $P_1$  pozitivno jer je u smeru delovanja sile, a pomeranje u pravcu sile  $P_2$  negativno jer je u suprotnom smeru od smera sile. Ukupan rad sile pritiska je:

$$p_1 A_1 V_1 \Delta t - p_2 A_2 V_2 \Delta t = Q \Delta t (p_1 - p_2)$$

- Rad konturne sile se razdvaja na deo usled normalne sile  $N$  i sile tangencijalnih napona (trenja)  $T$ . Rad konturne sile od normalnih napona  $N$  je nula jer je pretpostavljeno da nema pomeranja konture. Radom sile trenja  $T$  nastaje “gubitak” energije, odnosno energija se “troši” na prelazak korisne mehaničke energije u toplotnu<sup>10</sup>:

$$-\Delta E_{1-2} G$$

<sup>10</sup> $\Delta E$  je gubitak energije po jedinici težine sa dimenzijom [m], pa je potrebno  $\Delta E$  pomnožiti sa težinom fluida  $G$  da bi se dobio rad.

Izjednačavanjem jednačine (7.13) sa sumom svih radova, dobija se jednačina mehaničke energije:

$$\rho Q \Delta t \left( \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right) = \rho g Q \Delta t (z_1 - z_2) + Q \Delta t (p_1 - p_2) - \Delta E_{1-2} G$$

Prethodna jednačina ima dimenziju energije [N m]=[J] (Joule). Ako se jednačina podeli sa težinom fluida  $G = \rho g Q \Delta t$ , odnosno sa silom, dobija se izraz koji ima dimenziju dužine:

$$\underbrace{\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}}_{\text{Priraštaj kinetičke energije}} = \underbrace{(z_1 - z_2)}_{\text{Rad sile težine}} + \underbrace{\left( \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} \right)}_{\text{Rad sile pritiska}} - \underbrace{\Delta E_{1-2}}_{\text{Izgubljena energija}} \quad (7.14)$$

po jedinici težine

Daljim sređivanjem izraza, mogu se članovi rada sile težine i sile pritiska grupisati po presecima:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \Pi_1 \quad z_2 + \frac{p_2}{\rho g} = \Pi_2 \quad (7.15)$$

čime se dobija izraz za pijezometarsku kotu u preseku 1 odnosno 2. Izraz je u istom obliku kao što je dobijeno u glavi 3. Hidrostatika, u jednačini (3.11), (strana 38), s tom razlikom što je ovde korišćen uslov održanja energije, a tamo je postavljen uslov ravnoteže sila na delić u mirovanju.

Na osnovu dobijene jednačine (7.15) može se dati jasnije fizičko objašnjenje **pijezometarske kote**: ona predstavlja *potencijalnu energiju fluida po jedinici težine*, odnosno, sposobnost fluidnog delića da obavi rad. Potencijalna energija se može podeliti na dva dela:

- energija usled visinskog položaja delića  $z$ , i
- energija usled delovanja pritiska  $\frac{p}{\rho g}$ .

Ako se izraz (7.15) ubaci u jednačinu (7.14) i sredi tako da svi članovi vezani uz presek 1 budu sa leve strane a uz presek 2 sa desne, dobija se:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \Pi_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \Pi_2 + \Delta E_{1-2} \quad (7.16)$$

odnosno, napisano u kraćem obliku:

$$E_1 = E_2 + \Delta E_{1-2} \quad (7.17)$$

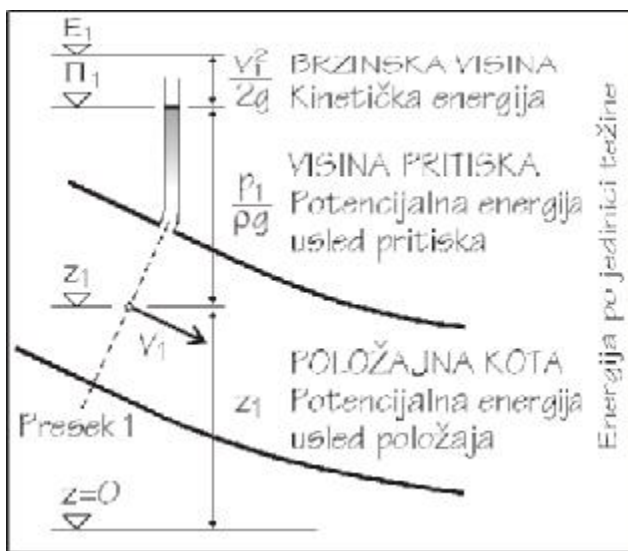
Napisana jednačina pokazuje da je ukupna energija (po jedinici težine<sup>11</sup>) u uzvodnom preseku (zbir potencijalne energije  $\Pi_1$  i kinetičke energije  $\frac{V_1^2}{2g}$ ) jednaka ukupnoj energiji u nizvodnom preseku uvećanoj za izgubljenu energiju<sup>12</sup>.

### 7.2.3.1 Brzinska visina, zaustavni pritisak

Član  $\frac{V_1^2}{2g}$ , iz jednačine (7.16), ima dimenziju [m] i naziva se *brzinska visina*. Na slici 7.14 je prikazana ukupna energija u preseku 1,  $E_1$  tako da se jasno vidi visina pritiska (odnosno, pritisak u težištu preseka izražen dužinom) i brzinska visina (odnosno brzina izražena dužinom).

U poglavlju 4.5.3.2 *Pito i Pito-Prantlova cev*, na strani 137, je uspostavljena veza između brzine fluidnog delića  $u(x_2)$  i dodatnog pritiska koji je rezultat naglog zaustavljanja fluidnog delića:

$$\Delta p(x_2) = p_u(x_2) = \frac{1}{2} \rho u^2$$



Slika 7.14: Ukupna energija u jednom preseku je zbir potencijalne i kinetičke energije

Dodatni pritisak se zove *zaustavni pritisak*. Pomoću Pito-Prantlove cevi je moguće preko zaustavnog pritiska izmeriti brzinu fluidnog delića, odnosno pomeranjem cevi kroz ceo presek, odrediti stvarni raspored brzina u fluidnoj struji (slika 4.24).

Jedna od pretpostavki prilikom izvođenja jednačina je bila da se u preseku ne posmatraju brzine pojedinih delića  $u(x_2)$ , već samo srednja brzina  $V$ . Za tu srednju brzinu  $V$  je, takođe moguće definisati zaustavni pritisak  $\Delta p$  kao:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (7.18)$$

Jasno je da ovako definisan zaustavni pritisak nema direktne veze sa zaustavljanjem jednog fluidnog delića i pretvaranjem njegove kinetičke energije u potencijalnu, već je samo mera prosečne brzine fluida u cevi. U

<sup>11</sup>Uobičajeno je da se u Mehanici fluida posmatra energija po jedinici težine, tako da se najčešće to i ne naglašava. U daljem tekstu ove knjige će se koristiti ta praksa: kad se kaže "energija" fluida, misliće se na energiju po jedinici težine.

<sup>12</sup>Energija nije zaista izgubljena, već je pretvorena u drugi oblik koji se ne može iskoristiti u glavnom strujanju.

Mehanici fluida se relativno često koristi *zaustavni pritisak kao mera maksimalno mogućeg pritiska koji može da napravi fluidna struja*. U narednim poglavljima zaustavni pritisak će se iskoristiti i kao mera trenja, jer je tangencijalni napon koji pravi trenje istih dimenzija kao i zaustavni pritisak, a obe veličine direktno zavise od brzine fluida.

### 7.2.3.2 Energetska jednačina za idealan i realan fluid

Poslednji član u energetske jednačini (7.17),  $\Delta E_{1-2}$ , obuhvata sve gubitke energije koji su se dogodili između dva preseka. Samo u malom broju slučajeva taj gubitak se može odrediti analitički, postavljanjem dinamičke jednačine tamo gde se znaju sve sile osim konturne sile  $\vec{K}$ . U opštem slučaju gubitak energije se određuje posredno, eksperimentalno. Pri tome se član  $\Delta E_{1-2}$  obično razdvaja na dva dela:

- Linijski gubitak koji je rezultat trenja u cevi (jednačina (6.11) na strani 220):

$$\Delta E_{LIN} = \lambda \frac{L V^2}{D 2g} \quad (7.19)$$

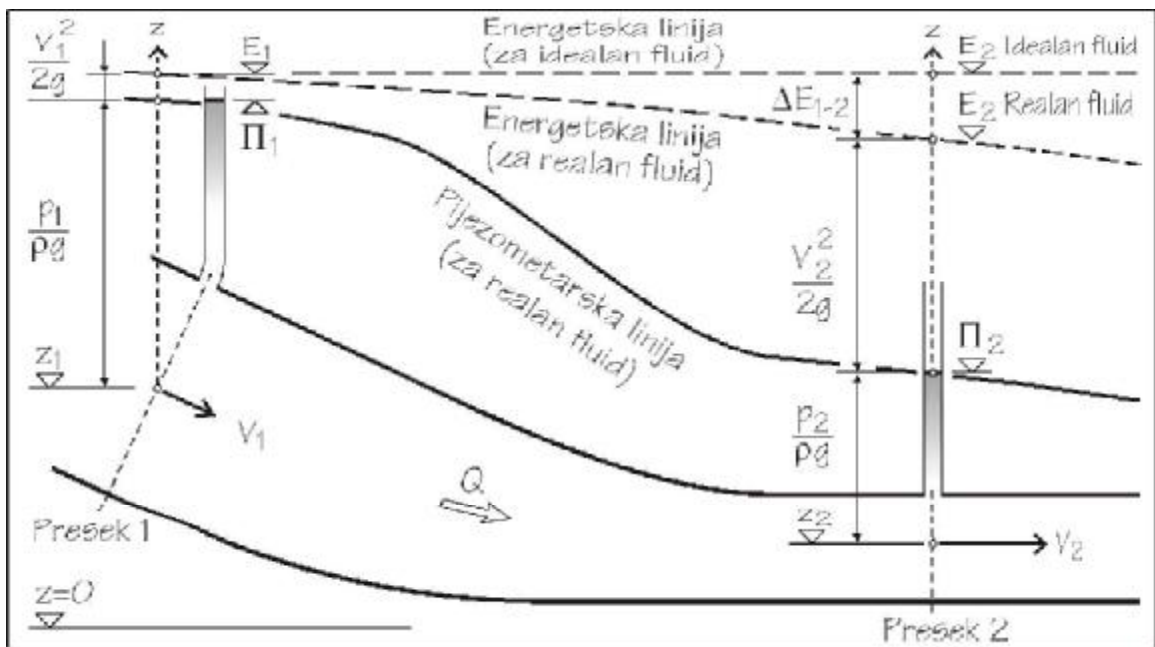
gde je  $\lambda$  "koeficijent"<sup>13</sup> linijskog gubitka (ili trenja). Ovaj izraz je u literaturi poznat i kao Darsi-Vajsbahova jednačina za proračun gubitka energije na trenje. U knjizi je, u poglavlju 6.1.1 detaljno izveden ovaj obrazac. Tu je i pokazano da koeficijent trenja nije konstanta, već da zavisi od režimima tečenja i da je funkcija hrapavosti cevi, prečnika i trenutne brzine. U većini praktičnih zadataka se, međutim, prećutno pretpostavlja da se ostvaruje razvijeno turbulentno tečenje u hidraulički hrapavoj cevi (*oblast V*, strana 240), te da je koeficijent trenja konstanta koja zavisi samo od relativne hrapavosti cevi.

- Lokalni gubitak koji se događa pri svakoj nagloj promeni brzine u fluidnoj struji:

$$\Delta E_{LOK} = \xi \frac{V^2}{2g} \quad (7.20)$$

<sup>13</sup>Ako je neki parametar koeficijent, znači da ne zavisi od drugih veličina i da ima konstantnu vrednost. Pošto to ovde nije slučaj, reč koeficijent je napisana pod znacima navoda.

gde se koeficijent lokalnog gubitka energije  $\xi$ , određuje uglavnom eksperimentalno<sup>14</sup> i uobičajeno je da se obračunava sa nizvodnom brzinom<sup>15</sup>.



Slika 7.15: Dijagrami za idealan i realan fluid

Jedna od pretpostavki iznetih u poglavlju 7.1 je da se kod *idealnog fluida* viskoznost zanemaruje, pa je tangencijalna sila jednaka nuli. To znači da kod idealnog fluida ne postoje ni linijski ni lokalni gubici energije, odnosno, da je ukupan gubitak energije nula,  $\Delta E_{1-2} = 0$ , pa je<sup>16</sup>  $E_1 = E_2$ . U primeru na slici 7.15 je to predstavljeno horizontalnom energetskom linijom.

Kod *realnog fluida* postoji gubitak energije, pa je  $\Delta E_{1-2} > 0$ , odnosno, energetska linija niz fluidnu struju *uvek postepeno opada*.

Iz energetske jednačine treba uočiti da je zbir pijezometarske kote i brzinske visine (slika 7.14), za idealan fluid, konstantan. To znači da, ako se poveća brzina zbog smanjenja proticajnog preseka, dolazi do pada pijezometarske kote, odnosno do smanjenja pritiska (slika 7.15). U zavisnosti

<sup>14</sup>Postoji svega par slučajeva kada je moguće  $\xi$  odrediti teorijski: kod potpuno uvučene cevi u rezervoar i kod naglog proširenja cevi.

<sup>15</sup>Jedino odstupanje od ovog pravila je za slučaj potopljenog ulaska cevi u rezervoar, kada je nizvodna brzina nula, pa se  $\xi = 1,0$  obračunava sa uzvodnom brzinom.

<sup>16</sup>U literaturi i u praksi se često energetska jednačina naziva Bernulijeva jednačina. U poglavlju 4.6.5, *Poređenje energetske sa Bernulijevom jednačinom*, objašnjeno je da to nije korektno, jer je Bernulijeva jednačina izvedena iz dinamičke jednačine pod uslovom ustaljenog strujanja idealnog fluida. Malo "manje nije korektno" ako se za ovu jednačinu,  $E_1 = E_2$ , kaže da je Bernulijeva.

od uslova, piježometarska kota može da padne i ispod ose cevi pa se u preseku može javiti i negativan pritisak. Pritisak, međutim, ne može biti manji od  $-p_{atm}$ , odnosno, apsolutni pritisak  $p_{abs}$  ne može biti negativan (jednačina (2.16) na strani 28). Matematički je moguće rešavanjem energetske jednačine dobiti  $p_{abs} < 0$ , ali fizički to nije ostvarivo strujanje, jer će usled kavitacije<sup>17</sup> doći do kidanja fluidne struje i prestanka tečenja.

### 7.2.3.3 Lokalni gubici energije

Lokalni gubici energije se javljaju na mestima gde dolazi do naglih promena u fluidnoj struji (slika 7.16) poput skretanja (kolena), račvi, ventila i slično. Obračunava se u odnosu na brzinsku visinu (7.20):

$$\Delta E = \xi \frac{V^2}{2g}$$

Bezdimezionalni koeficijent  $\xi$  se obično obračunava uz nizvodnu brzinu, osim u slučaju ulaska cevi u rezervoar, gde je nizvodna brzina nula pa se gubitak energije izražava u odnosu na uzvodnu brzinu (poslednji primer na slici 7.16).

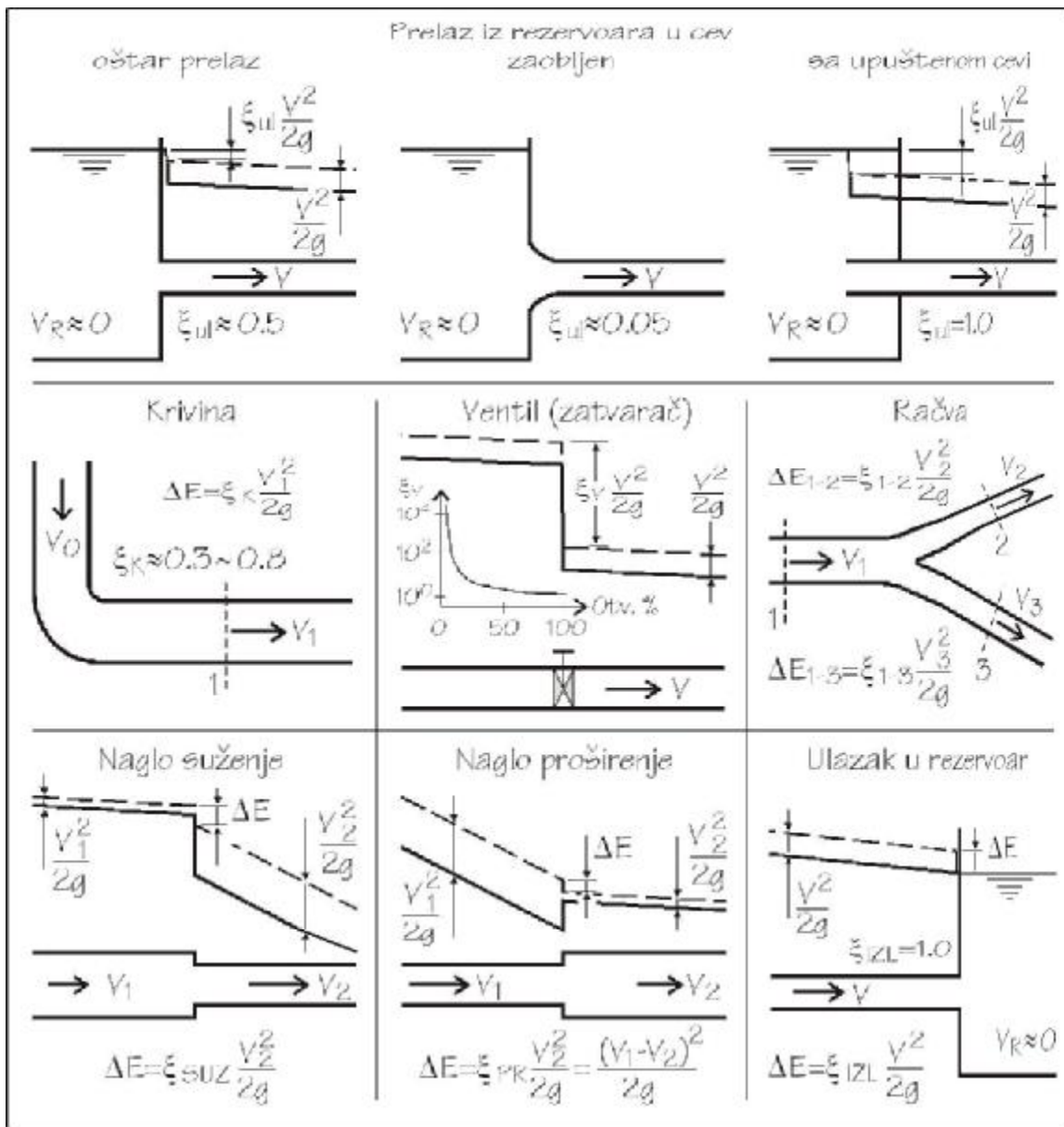
Koeficijent lokalnog gubitka energije se uglavnom određuje eksperimentalno, merenjem pada pritiska ispred i iza poremećaja. U literaturi [12] se mogu naći podaci o vrednostima koeficijenta gubitka  $\xi$  za različite poremećaje u fluidnom toku.

Na slici 7.16, dati su primeri nekih lokalnih gubitaka sa približnim vrednostima. Kod standardnog ulaska vode iz rezervoara u cev, gubitak energije je pola brzinske visine ( $\xi_{ul} = 0,5$ ). Pažljivom izradom ulaza, sa postepenim suženjem, taj gubitak može da se smanji na nekih 5% od brzinske visine. Ako se postavi cev tako da ulazi u rezervoar, tada se pravi gubitak od jedne cele brzinske visine (ujedno, u ovom slučaju koeficijent gubitka se može odrediti i analitički, koristeći dinamičku jednačinu<sup>18</sup>).

Gubici energije na kolenima i račvama u mnogome zavise od same geometrije (poluprečnika krivine kolena, načina spajanja račvi, odnosa prečnika cevi u račvi), ali i uslova tečenja (da li se odvaja mlaz fluida sa unutrašnje strane kolena, odnosa protoka u račvi i slično). Na srednjoj slici, gde je dat ventil (odnosno zatvarač), pokazano je da koeficijent gubitka energije zav-

<sup>17</sup>Kavitacija je pojava kada usled naglog lokalnog pada pritiska dođe do stvaranja pare usled ključanja vode. Ukoliko se apsolutni pritisak približi nuli, dolazi do prekidanja fluidne struje.

<sup>18</sup>Detaljno izvođenje se može naći u literaturi [10]



Slika 7.16: Primeri nekih lokalnih koeficijenta gubitka energije

isi od vrste ventila, ali i od otvorenosti ventila: za potpuno zatvoren ventil gubitak energije je beskonačno veliki.

Gubitak energije pri naglom proširenju cevi takođe spada u grupu gubitaka koji se mogu odrediti analitički. U poglavlju 7.3.2.2, na strani 323, kao primer korišćenja dinamičke jednačine, biće izveden Bordin obrazac za izgublenu energiju u proširenju:

$$\Delta E = \xi_{pr} \frac{V_2^2}{2g} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$$

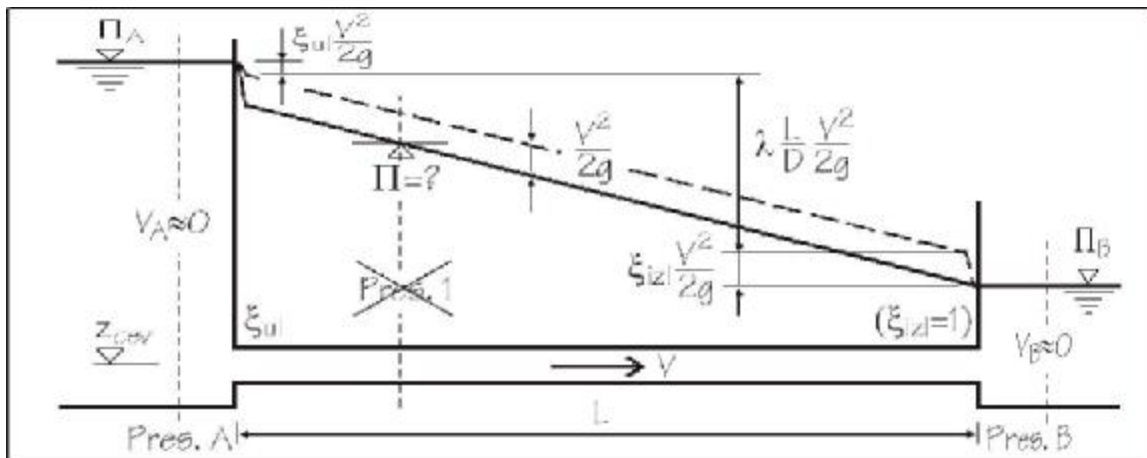


Ovo je maksimalno mogući gubitak energije, dok bi se sa postepenim proširenjem taj gubitak znatno smanjio.

7.2.3.4 Primeri pisanja energetske jednačine

U nastavku se daju tri jednostavna primera korišćenja energetske jednačine sa objašnjenjima kako se crtaju energetska i pijeziometarska linija. Takođe, u glavi, *Osnove dinamike fluida*, se mogu naći dva primera: račvanje fluidne struje (strana 174) i isticanje iz suda kroz oštroični otvor i kroz naglavak (strana 177). Nakon što se detaljnije objasni način proračuna linijskih i lokalnih gubitaka, u poglavlju 7.3, na strani 315 će biti dati i složeniji primeri.

**Potopljena cev koja spaja dva rezervoara** Cev konstantnog prečnika  $d$  i dužine  $L$  spaja dva rezervoara, tako da je nivo vode u nizvodnom rezervoaru viši od kote cevi  $z_{cev}$  (slika 7.17).



Slika 7.17: Isticanje iz rezervoara sa potopljenim izlazom

Energetska jednačina (7.17) se može postaviti između bilo koja dva preseka koja zadovoljavaju uslove o paralelnosti strujnica u preseku i njihovoj upravnosti na presek. Naravno, nema svrhe odabrati takve preseke gde se ne zna ni pijeziometarska kota ni brzina (na primer, na sredini cevi, kao što je to presek *Pres,1* na slici 7.17). Uobičajeno je da se preseci postave kroz rezervoar, gde se može zanemariti brzinska visina pa je ukupna energija u preseku jednaka pijeziometarskoj koti.

Za primer sa slike 7.17 može se napisati energetska jednačina između preseka u rezervoarima A i B:

$$E_A = E_B + \Delta E_{A-B} \Rightarrow \Pi_A + \frac{V_A^2}{2g} = \Pi_B + \frac{V_B^2}{2g} + \xi_{ul} \frac{V^2}{2g} + \lambda \frac{L}{d} \frac{V^2}{2g} + \xi_{izl} \frac{V^2}{2g}$$

gde je  $V$  brzina u cevi prečnika  $D$ ,  $\lambda$  linijski koeficijent gubitka energije (poglavlje 7.2.3.2) duž cevi dužine  $L$  a  $\xi_{ul}$  i  $\xi_{izl}$  su koeficijenti gubitka energije na ulazu u cev i izlazu. Stavljajući da su  $V_A$  i  $V_B$  nule, uz prebacivanje poznatih pijezometarskih kota sa leve strane, dobija se jednačina u kojoj je samo brzina  $V$  nepoznata:

$$\Pi_A - \Pi_B = \left( \xi_{ul} + \lambda \frac{L}{d} + \xi_{izl} \right) \frac{V^2}{2g} \Rightarrow V = \frac{1}{\sqrt{\xi_{ul} + \lambda \frac{L}{d} + \xi_{izl}}} \sqrt{2g(\Pi_A - \Pi_B)}$$

Kada se odredi brzina, protok je  $Q = VA = Vd^2\pi/4$ . Ako su sve jedinice u SI sistemu, protok se dobija u  $[m^3/s]$ , mada se u praktičnim zadacima češće koristi hiljadu puta manja jedinica  $[L/s]$ .

Da bi se nacrtala energetska linija potrebno je izračunati sve pojedine članove u energetske jednačini: brzinske visine i gubitke energije. U usvojenoj razmeri za visine (koja će biti obično krupnija od razmera za dužine) treba nacrtati sve gubitke vertikalno iznad mesta gde se oni i ostvaruju.

Iz dobijenog rešenja se vidi da u slučaju potopljenog izlaza na protok ne utiče položajna kota cevi  $z_{cev}$ , kao ni apsolutne pijezometarske kote u rezervoarima, već samo njihova razlika i gubici u cevi. Zbog toga nije neophodno crtati  $z_{cev}$  u usvojenoj visinskoj razmeri, već ju je dovoljno nacrtati ispod kote  $\Pi_B$ .

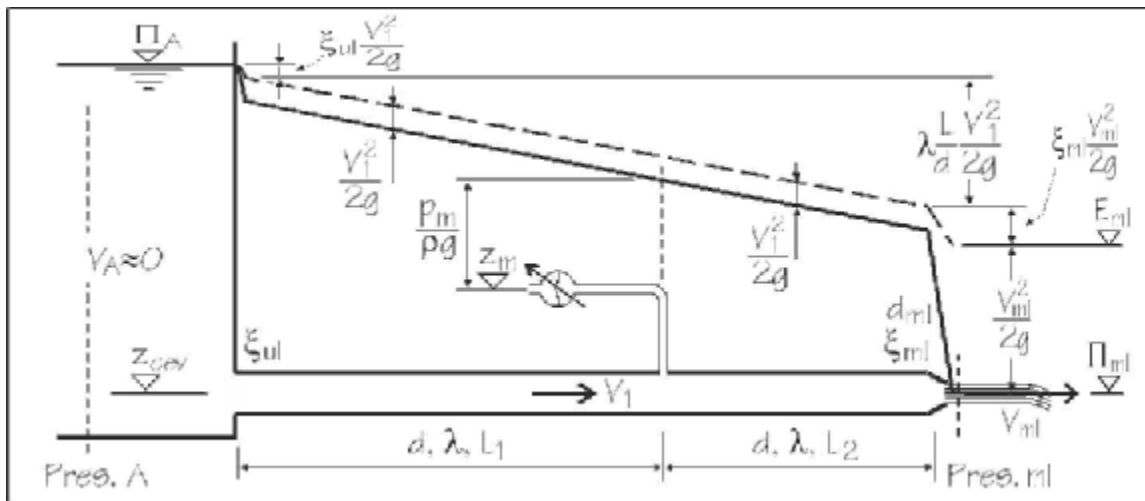
Pijezometarska linija se crta ispod energetske na rastojanju koje je jednako brzinskoj visini  $V^2/2g$ . U primeru sa potopljenim isticanjem, ako je poštovana razmera pri crtanju linija, pijezometarska linija mora da završi na koti rezervoara B.

Posebnu pažnju u crtanju treba obratiti na odnose lokalnih gubitaka i brzinske visine. Na primer, kod ulaza u cev gubitak energije je  $\xi_{ul}$  puta brzinska visina, a rastojanje između  $E$  i  $\Pi$  linije je jednako brzinskoj visini. Ako je  $\xi_{ul} = 0,5$  (kao što je i nacrtano na slici 7.17) tada treba da se vidi na slici da je gubitak energije duplo manji od rastojanja između dve linije.

**Nepotopljeno isticanje kroz mlaznik** Cev konstantnog prečnika  $d$  se završava mlaznikom (naglo suženje sa prečnika  $d$  na prečnik  $d_{ml}$ ) (slika 7.18).

Energetska jednačina se postavlja za preseke u rezervoaru (gde je brzina  $V_A \approx 0$ ) i na izlazu iz mlaznika gde vode dolazi u kontakt sa atmosferom i gde je nepoznata brzina  $V_{ml}$  ali je poznata pijezometarska kota: pošto mlaz izlazi slobodno u atmosferu, pritisak u preseku je nula, pa je  $\Pi_{ml} = z_{ml}$ .

$$\Pi_A + \frac{V_A^2}{2g} = \Pi_{ml} + \frac{V_{ml}^2}{2g} + \Delta E$$



Slika 7.18: Isticanje iz rezervoara sa nepotopljenim izlazom kroz mlaznik

$$\Delta E = \xi_{ul} \frac{V_1^2}{2g} + \lambda \frac{L_1 + L_2}{d} \frac{V_1^2}{2g} + \xi_{ml} \frac{V_{ml}^2}{2g}$$

Koeficijent gubitka energije na mlazniku  $\xi_{ml}$  je rezultat nagle promene prečnika cevi, dok se dužina mlaznika zanemaruje pa se ne računa trenje duž mlaznika. Pošto su deonice  $L_1$  i  $L_2$  istih prečnika i sa istim koeficijentom trenja, uz zanemarenje brzine u rezervoaru i stavljanjem da je  $\Pi_{ml} = z_{ml}$ , dobija se:

$$\Pi_A - z_{ml} = \left( \xi_{ul} + \lambda \frac{L_1 + L_2}{d} \right) \frac{V_1^2}{2g} + (1 + \xi_{ml}) \frac{V_{ml}^2}{2g}$$

U jednačini su nepoznate dve brzine  $V_1$  i  $V_{ml}$ . Vezu između tih brzina daje jednačina kontinuiteta (7.2):

$$Q_1 = Q_{ml} \Rightarrow V_1 A_1 = V_{ml} A_{ml} \Rightarrow V_{ml} = V_1 \frac{A_1}{A_{ml}} = \left( \frac{d}{d_{ml}} \right)^2$$

gde je  $d_{ml} < d_1$ , pa je  $V_{ml} > V_1$ . Prethodna jednačina se rešava po  $V_{ml}$ <sup>19</sup> pa se na kraju može izračunati i protok  $Q$ .

Za crtanje  $E$  i  $\Pi$  linija treba prvo izračunati sve pojedine članove iz energetske jednačine. Nakon toga, treba usvojiti odgovarajuću razmeru za visine. Dijagrami će biti u okviru visinskog intervala  $\Delta H = \Pi_A - z_{ml}$  [m]. Prilikom crtanja treba voditi računa o sledećem (slika 7.18):

<sup>19</sup>U rešavanju jednačina treba prvo računati veće brzine, kao što je to ovde  $V_{ml}$ , a posle na osnovu te brzine odrediti ostale. Time se greške usled zaokruživanja smanjuju umesto da se povećavaju.

- Prvo se crta  $E$  linija. Lokalni gubici se nanose vertikalno iznad mesta gde se ostvaruju.  $\Pi$  linija se crta ispod  $E$  linije za odgovarajuću brzinsku visinu, mereno vertikalno (a ne upravno na liniju).
- Nagib  $E$  linije predstavlja trenje. Za dve cevi istog prečnika i koeficijenta  $\lambda$ , kroz koje teku isti protoci, energetske linije moraju biti paralelne.
- U delu mlaznika, zbog povećanja brzine dolazi do bržeg pada  $\Pi$  linije. Na kraju  $\Pi$  linija završava na koti mlaznika  $z_{ml}$ .  $E$  linija padne na mlazniku za izračunati gubitak i ostaje za brzinsku visinu mlaza iznad  $\Pi$  linije.
- Lokalni odnosi gubitaka energije i brzinske visine moraju biti zadovoljeni. Na primer, bez ikakvog znanja tačnih vrednosti gubitaka, kota i protoka, na osnovu slike 7.18 se može proceniti da je koeficijent gubitka energije na mlazniku  $\xi_{ml}$  malo veće od 0,25. Naime, ako se  $V_{ml}/2g$ , brzinska visina na izlazu iz mlaznika, uzme kao jedinica mere, može se lako proceniti da je “pad” energije na mlazniku oko 1/4 te brzinske visine.

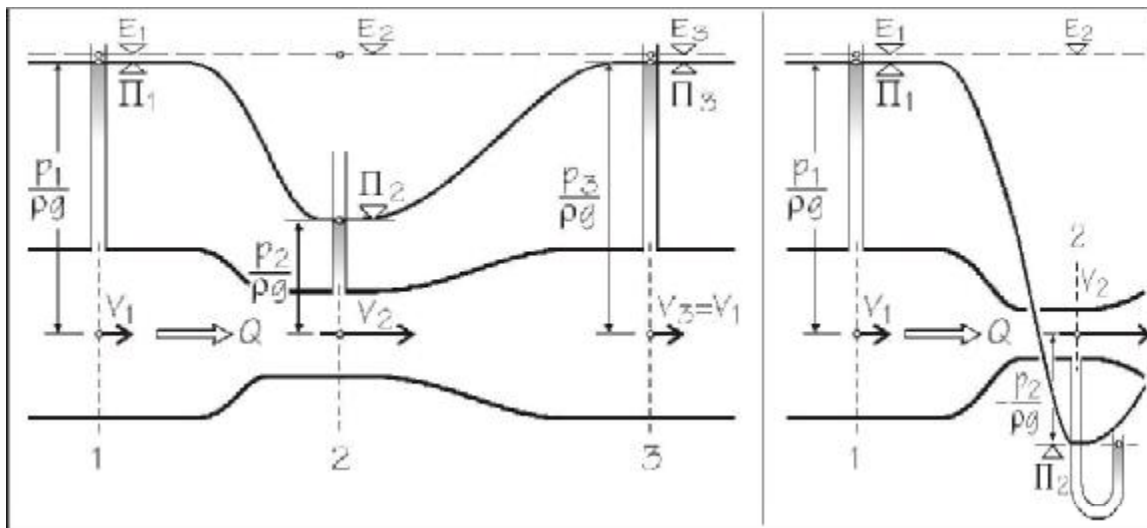
Na slici 7.18 je dat i manometar na drugom delu cevi. Čitanje na manometru se može odrediti na osnovu datih dužina i pijeometarske linije, pri čemu se pretpostavlja hidrostatičko stanje u preseku gde je manometar spojen na cev. Visina pritiska na manometru je rastojanje od manometra do  $\Pi$  linije, ali na mestu gde je manometar spojen, a ne na mestu gde se manometar nalazi.

**Venturijevo suženje** U praksi se relativno često koristi naglo suženje u cevi sa nizvodnim postepenim proširenjem. Takvo suženje se zove Venturijevo<sup>20</sup> suženje i koristi se za merenje protoka preko merenja pada pritiska između preseka ispred suženja i preseka u samom suženju.

Na slici 7.19, sa leve strane je prikazano Venturijevo suženje, sa ucrtanom energetskom i pijeometarskom linijom, uz pretpostavku da je fluid idealan. Energetska jednačina i jednačina kontinuiteta će dati:

$$E_1 = E_2 \quad \Rightarrow \quad \Pi_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \Pi_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad \Pi_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \Pi_2 + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 \frac{V_1^2}{2g}$$

<sup>20</sup>Giambattista Venturi (1746 - 1822) italijanski naučnik i sveštenik. Njegovo opredeljenje da se bavi naukom je najbolje sam izneo u sledećem priznanju: “Predan, kao što sam bio, mojim istraživanjima, uvideo sam da bi supruga, deca i porodične obaveze mi potrošile dosta vremena koje bi rađe potrošio na nauku; zbog toga sam odlučio da postanem svešteno lice.”.



Slika 7.19: Pijezometarska i energetska kota za idealan fluid pri naglom suženju i proširenju cevi

gde je  $d_1$  prečnik cevi u preseku 1, a  $d_2$  u suženom preseku 2. Sređivanjem izraza tako da ostaje razlika pijezometarskih kota sa leve strane, dobija se:

$$\Pi_1 - \Pi_2 = \left[ \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1 \right] \frac{V_1^2}{2g} \quad (7.21)$$

odakle sledi da je protok kroz idealan Venturimetar:

$$Q_{id} = V_1 A_1 = \frac{d^2 \pi}{4} \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1}} \sqrt{2g(\Pi_1 - \Pi_2)} \quad (7.22)$$

Iz dobijene jednačine se vidi da je dovoljno izmeriti razliku pijezometarskih kota ( $\Pi_1 - \Pi_2$ ) da bi se odredio protok. Uobičajeno je da se umesto pijezometara koristi diferencijalni manometar, na kome se očitava razlika pritiska  $\Delta p$ :

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g(\Pi_1 - z_m) - \rho g(\Pi_2 - z_m) = \rho g(\Pi_1 - \Pi_2)$$

U realnim situacijama fluid nije idealan, pa pretpostavka da je  $E$  kota konstantna nije dobra. Uobičajena je praksa da se, po izradi Venturimetra, obavi njegova provera upoređenjem sa nekom tačnijom metodom i da se odredi koeficijent protoka  $C_Q$ , kojim se dobijeni protok idealnog fluida smanjuje na realan:

$$Q = C_Q Q_{id}$$

Ako se u Venturimetru smanji prečnik  $d_2$ , postiže se veća razlika pritisaka pri istom protoku, čime se povećava tačnost merenja. Međutim, istovremeno raste i opasnost od stvaranja podpritiska u suženom preseku (prikazano je na desnom delu slike 7.19). Podpritisak je povezan sa pojavom kavitacije u suženom preseku, što dovodi do nestabilnosti u toku i povećava eroziju cevi.

Od preseka 2 do 3 suženi presek se postepeno proširuje, tako da fluidna struja postepeno vraća svoju kinetičku energiju u potencijalnu. Na slici 7.19 je to pokazano porastom pijeometarske linije i vraćanjem, za idealan fluid, u isto stanje kao što je to bilo i u preseku 1. Kod realnog fluida dolazi do ukupnog pada energije i pijeometarske kote u preseku 3, ali ako je proširenje tako napravljeno da je prilagođeno fluidnoj stuji, gubici ostaju relativno mali. Ukoliko bi se naglo proširio presek sa  $d_2$  na  $d_3 = d_1$ , fluidna struja bi se odvojila od konture, pojavili bi se vrtlozi i veliki dodatni gubici energije.

### 7.2.3.5 Uticaj profila brzina na energetska jednačinu

Kao i kod dinamičke jednačine (poglavlje 7.2.2.2), u nekim situacijama je i kod energetske jednačine potrebno voditi računa o razlici između srednje brzine  $V$  i pravog rasporeda brzine po preseku  $u(x_2)$ . Prilikom izvođenja energetske jednačine (7.13), kao priraštaj kinetičke energije, dobijen je izraz:

$$\rho Q \Delta t \left( \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right)$$

Ako se umesto protoka stavi  $Q = VA$ , dobija se izraz gde se srednja brzina pojavljuje na treći stepen.

Međutim, priraštaj kinetičke energije bi bilo korektnije odrediti kao sumu priraštaja za sve fluidne deliće, koji se kreću brzinama  $u(x_2)$ . Tada bi se umesto člana  $V^3$  pojavio član  $\frac{1}{A} \int_A u_i^3 dA$ . Zbog toga se kao korekcija energetske jednačine često koristi Koriolisov<sup>21</sup> koeficijent  $\alpha$  (jednačina (4.109) na strani 165):

$$\alpha = \frac{1}{QV^2} \int_A u^3 dA \quad (7.23)$$

a energetska jednačina se piše u obliku:

$$\Pi_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \Pi_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Delta E_{1-2}$$

<sup>21</sup>Biografija Koriolisa je data u fusnoti 50 na strani 164.

**Primer 7.2.3**

Odrediti Koriolisov koeficijent za slučaj osnosimetričnog laminarnog tečenja u kružnoj cevi.

Raspored brzina za laminarno tečenje u kružnoj cevi je dat parabolom (7.23):

$$u = u_{max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Koriolisov koeficijent se dobija rešavanjem izraza (7.23) za kružnu cev, pri čemu se koristi uslov osnosimetričnosti, pa je  $dA = 2r\pi dr$ :

$$\alpha = \frac{1}{QV^2} \int_A u^3 dA = \frac{2\pi u_{max}^3}{QV^2} \int_0^R \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]^3 r dr = \frac{2\pi R^2 u_{max}^3}{8QV^2} = \frac{1}{4} \frac{u_{max}^3}{V^3}$$

Veza između maksimalne i srednje brzine (6.22) je  $u_{max} = 2V$  pa se sređivanjem prethodnog izraza dobija vrednost za Koriolisov koeficijent  $\alpha = 2$ .

Vrednost Koriolisovog koeficijenta  $\alpha$  zavisi od rasporeda brzina po profilu. Za laminarni tok u kružnoj cevi je pokazano, u prethodnom primeru, da je koeficijent  $\alpha = 2$ . Za turbulentni tok u kružnoj cevi koeficijent zavisi od stepena razvijenosti turbulencije i kreće se u rasponu od  $\alpha = 1,15$  za turbulentno tečenje u glatkoj cevi, do  $\alpha = 1,05$  za razvijeno turbulentno tečenje. Kod otvorenih tokova Koriolisov koeficijent zavisi od uslova i kreće se od  $\alpha = 1,1$  za kanale pravilnog oblika, do  $\alpha = 2$  za prirodne tokove, gde se glavni tok deli na više manjih tokova.

## 7.3 Primeri primene jednačina održanja

U prethodnim poglavljima su izvedene tri jednačine održanja, koje se odnose na masu fluida u cevi, između dva preseka: jednačina kontinuiteta  $Q_1 = Q_2$ , dinamička jednačina  $\sum F_R + I = 0$  i energetska  $E_1 = E_2 + \Delta E$ . Međutim, ove tri jednačine nisu nezavisne. Energetska jednačina se može dobiti kao kombinacija prve dve, množenjem dinamičke jednačine brzinom, koja se dobija iz jednačine kontinuiteta<sup>22</sup>.

Prilikom rešavanja zadatka tečenja u cevima, uobičajeni postupak je da se prvo napiše onoliko energetskih jednačina, koliko ima mogućih puteva za fluidni delić i da se sa jednačinom kontinuiteta nađu odnosi brzina, ukoliko

<sup>22</sup>Činjenica da je količina kretanja pomnožena sa brzinom jednaka mehaničkoj energiji je iskorišćena u poglavlju 4.6.2 *Jednačine mehaničke i toplotne energije prilikom izvođenja jednačine* (4.104).

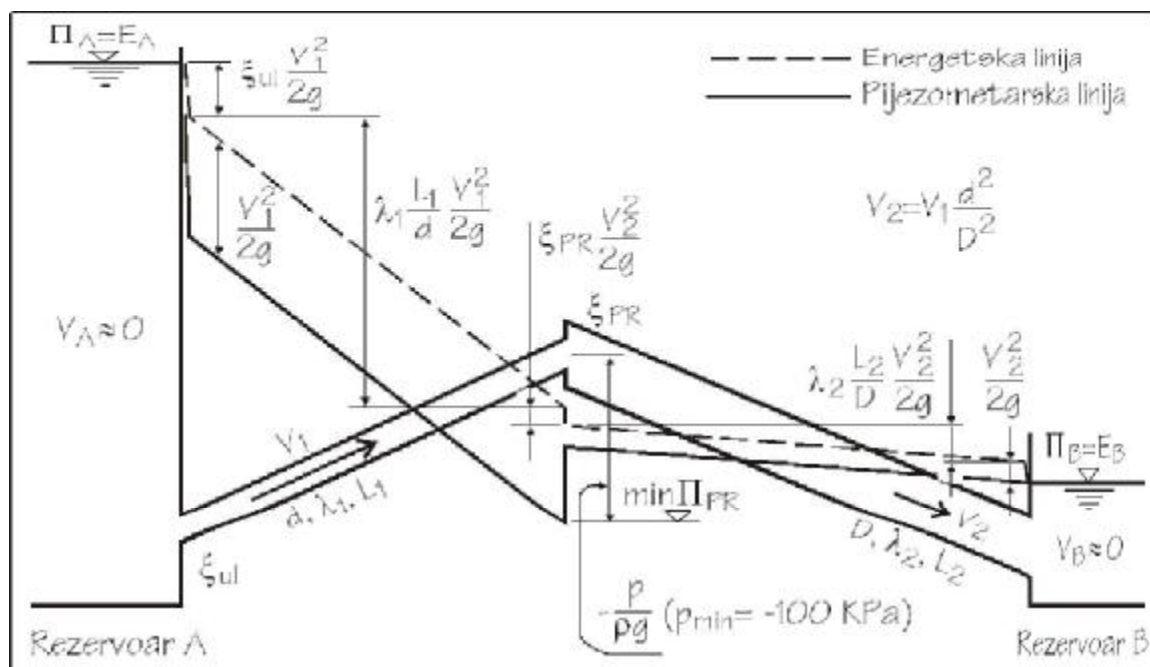
dolazi do promene preseka fluidne struje. Iz te dve jednačine se računaju brzine i protoci, a zatim se, ako to zadatak traži, primenom dinamičke jednačine, odrede sile na konturu.

Prilikom izvođenja jednačina održanja mase, količine kretanja i mehaničke energije, korišćeni su jednostavni ilustrativni primeri. U ovom poglavlju će se dati još nekoliko primera primene energetske i dinamičke jednačine, kao i primer koji je moguće rešiti i pomoću energetske i dinamičke jednačine, ali se dobijaju različita rešenja.

### 7.3.1 Primeri primene energetske jednačine

#### 7.3.1.1 Cevi sa različitim prečnicima

Dva rezervoara (A i B) su spojena pomoću cevi, koja je u prvom delu prečnika  $d$  a u drugom većeg prečnika  $D$ . Treba odrediti protok i brzine kroz cevi ako su dati sledeći podaci: dužine cevi  $L_1, L_2$ , prečnici cevi  $d, D$ , koeficijenti trenja  $\lambda_1, \lambda_2$ , koeficijenti gubitka energije  $\xi_{ul}, \xi_{PR}$  kao i pijezometarske kote  $\Pi_A, \Pi_B$ . Naći mesto u cevi gde se ostvaruje najniži pritisak i izračunati ga.



Slika 7.20: Dva rezervoara spojena cevima različitog prečnika - pijezometarska i energetska linija



**Određivanje protoka:** Na slici 7.20 su prikazani rezervoari i cev koja ih spaja. Postavlja se energetska jednačina za preseke kroz rezervoare A i B:

$$E_A = E_B + \Delta E_{A-B} \quad \Rightarrow \quad \Pi_A + \frac{V_A^2}{2g} = \Pi_B + \frac{V_B^2}{2g} + \Delta E_{A-B}$$

Kako su preseki A i B u rezervoarima, brzina vode se može zanemariti pa je  $V_A = 0$  i  $V_B = 0$ . Gubici energije se pišu prateći kretanje fluida od preseka A do preseka B:

$$\Delta E_{A-B} = \xi_{ul} \frac{V_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{L_1}{d} \frac{V_1^2}{2g} + \xi_{PR} \frac{V_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{L_2}{D} \frac{V_2^2}{2g} + \xi_{iz} \frac{V_2^2}{2g} \quad (7.24)$$

Kada je ulaz cevi u rezervoar potopljen, uvek se javlja gubitak energije od  $\xi_{iz} = 1,0$  (poslednji član u jednačini). Taj koeficijent se po pravilu ne piše pored slike.

Nepoznate veličine su brzine u cevima  $V_1$  i  $V_2$ . Iz uslova da je protok konstantan (jednačina kontinuiteta) dobija se odnos brzina:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad \Rightarrow \quad V_1 \frac{d^2 \pi}{4} = V_2 \frac{D^2 \pi}{4} \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_2 \frac{D^2}{d^2}$$

Kada se izraz za  $V_1$  iz jednačine kontinuiteta uvrsti u energetska jednačinu, rešavanjem se dobija brzina vode u cevi  $V_2$ . Na osnovu nje se dobija protok u cevi i brzina u drugoj cevi:

$$Q = V_2 A_2 \quad V_1 = V_2 \frac{D^2}{d^2}$$

Za crtanje energetske i pijeziometarske linije potrebno je prvo izračunati sve pojedine članove iz izraza (7.24). Za usvojenu razmeru treba nacrtati liniju energije, počev od rezervoara A do rezervoara B (slika 7.20, isprekidana linija). Pijeziometarska linija se crta ispod energetske za odgovarajuću brzinsku visinu. Kako je brzina  $V_1$  veća od brzine  $V_2$ , pijeziometarska kota će se povećati kod proširenja cevi.

**Određivanje minimalnog pritiska:** Visina pritiska je rastojanje između ose cevi i pijeziometarske kote. Ako je pijeziometarska kota ispod ose cevi, tada je pritisak negativan. Sa slike 7.20 se vidi da je minimalan pritisak u cevi na mestu pre proširenja, gde je  $\Pi_{PR}$ . Da bi se odredila kota  $\Pi_{PR}$ , treba postaviti energetska jednačinu od preseka A do PR:

$$E_A = E_{PR} + \Delta E_{A-PR} \quad \Rightarrow \quad \Pi_{PR} = \Pi_A - \left( \frac{V_1^2}{2g} + \xi_{ul} \frac{V_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{L_1}{d} \frac{V_1^2}{2g} \right)$$

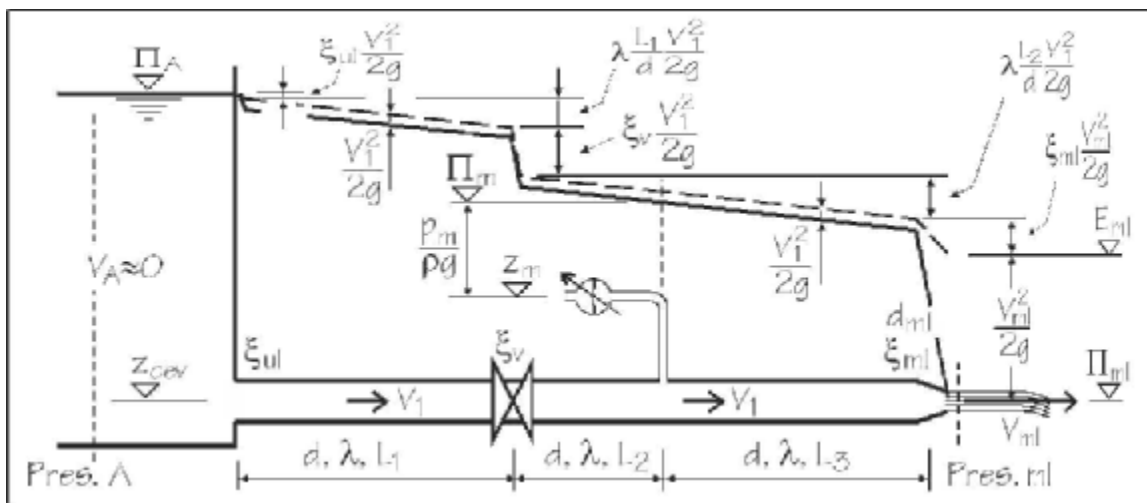
Na osnovu izračunate piježometarske kote  $\Pi_{PR}$  pritisak se računa upotrebom osnovne jednačine hidrostatike:

$$p_{PR} = \rho_v g (\Pi_{PR} - z_{PR})$$

Iz definicije pritiska  $p = p_{abs} - p_{atm}$  i ograničenja da je apsolutni pritisak uvek veći od nule, sledi da izračunati pritisak mora biti<sup>23</sup>  $p_{PR} > -p_{atm}$ .

### 7.3.1.2 Nepotopljeno isticanje kroz mlaznik za ventilom

Cev konstantnog prečnika  $d$  se završava mlaznikom (naglo suženje sa prečnika  $d$  na prečnik  $d_{ml}$ ), slično kao u primeru na slici 7.18, ali se sada na cevi nalazi i ventil kojim se reguliše protok (slika 7.21).



Slika 7.21: Isticanje iz rezervoara sa nepotopljenim izlazom kroz mlaznik i sa ventilom za kontrolu protoka

Data je piježometarska kota  $\Pi_A$ , kota cevi  $z_{cev}$ , prečnik cevi  $d$ , dužine  $L_1$  i  $L_2$ , kao i lokalni gubici energije na ulazu u cev  $\xi_{ul}$  i na mlazniku  $\xi_{ml}$ . Potrebno je odrediti gubitak energije na ventilu  $\xi_v$  tako da čitanje na manometru, koji se nalazi na kotoi  $z_m$ , bude  $p_m$ .

**Određivanje protoka:** Za datu kotu i pritisak na manometru, moguće je odrediti piježometarsku kotu manometra:

$$\Pi_m = \frac{p_m}{\rho g} + z_m$$

Ta piježometarska kota je ista kao i piježometarska kota tečnosti u cevi prečnika  $d$ , u preseku  $M$  gde je spojen manometar. Postavlja se energetska jednačina od preseka  $M$  (gde je nepoznata brzina u cevi  $V_1$ ) do izlaza

<sup>23</sup>Obično se uzima da je atmosferski pritisak  $p_{atm} = 100$  kPa.

iz mlaznika (gde je nepoznata brzina  $V_{ml}$ ) a piježometarska kota je jednaka položajnoj koti  $\Pi_{ml} = z_{ml}$  (pošto mlaz izlazi slobodno u atmosferu, pritisak u preseku je nula):

$$E_M = E_{ml} + \Delta E_{M-ml} \quad \Rightarrow \quad \Pi_M + \frac{V_1^2}{2g} = \Pi_{ml} + \frac{V_{ml}^2}{2g} + \Delta E_{M-ml}$$

Gubici energije između ova dva preseka su trenje na deonici  $L_3$  i gubitak na mlaznici:

$$\Delta E_{M-ml} = \lambda \frac{L_3}{d} \frac{V_1^2}{2g} + \xi_{ml} \frac{V_{ml}^2}{2g}$$

Vežu između dve nepoznate brzine  $V_1$  i  $V_{ml}$  daje jednačina kontinuiteta:

$$V_1 A_1 = V_{ml} A_{ml} \quad \Rightarrow \quad V_{ml} = V_1 \frac{A_1}{A_{ml}} = \left( \frac{d}{d_{ml}} \right)^2$$

pa se rešavanjem energetske jednačine dobija brzina  $V_{ml}$ , a iz jednačine kontinuiteta, brzina  $V_1$  i protok  $Q$ .

**Određivanje koeficijenta gubitka energije na ventilu:** Postavlja se energetska jednačina od preseka  $A$  u rezervoaru do preseka  $M$  gde je spojen manometar<sup>24</sup>:

$$E_A = E_M + \Delta E_{A-M} \quad \Rightarrow \quad \Pi_A + \frac{V_A^2}{2g} = \Pi_M + \frac{V_{ml}^2}{2g} + \Delta E_{A-M}$$

Uz pretpostavku da je brzina u preseku  $A$  zanemarljiva, ukupna energija u preseku  $A$  je jednaka samo piježometarskoj koti  $\Pi_A$ . Gubici energije između preseka  $A$  i  $M$  su gubitak na ulazu u cev, trenje na deonici  $L_1$ , gubitak na ventilu i trenje na deonici  $L_2$ :

$$\Delta E_{A-M} = \xi_{ul} \frac{V_{ml}^2}{2g} + \lambda \frac{L_1 + L_2}{d} \frac{V_1^2}{2g} + \xi_v \frac{V_1^2}{2g}$$

gde su gubici na trenje u cevima 1 i 2 odmah sabrani jer su isti prečnici i koeficijenti linijskog trenja.

Kada se sredi energetska jednačina, ostaje nepoznat samo traženi koeficijent gubitka energije na ventilu  $\xi_v$ <sup>25</sup>.

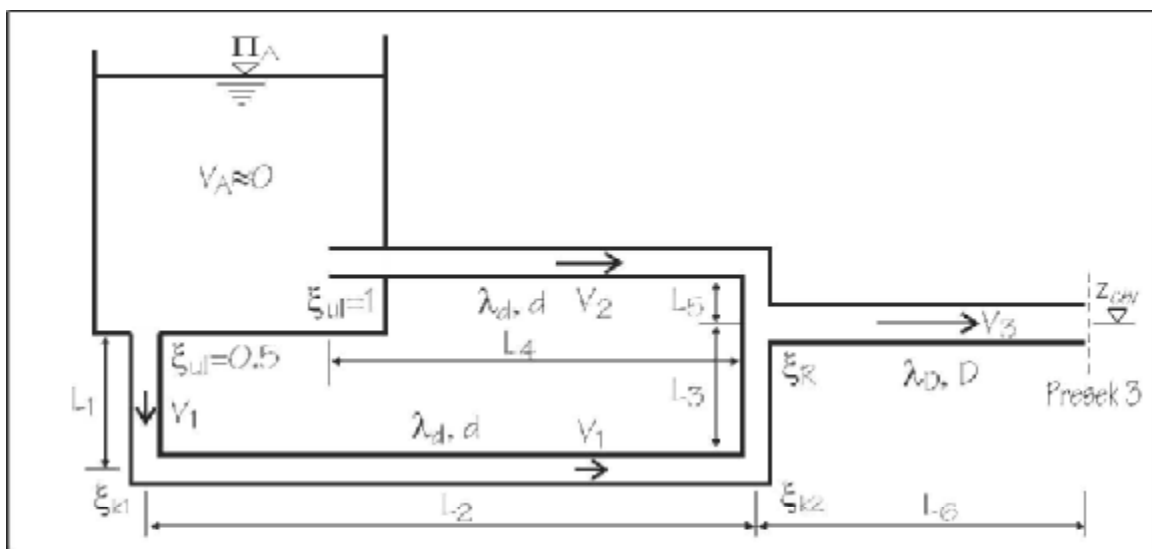
<sup>24</sup>Moguće je postaviti i energetska jednačinu od rezervoara do mlaznika, jer su poznate piježometarska kota izlaza i protok.

<sup>25</sup>Vrednost koeficijenta  $\xi_v$  zavisi od stepena otvorenosti ventila i njegove konstrukcije. Za potpuno otvoren ventil  $\xi_v$  ima vrednost između 0,5 i 5, dok sa zatvaranjem ventila  $\xi_v$  naglo raste. Kada je ventil skroz zatvoren, protok je nula, pa je  $\xi_v$  beskonačno veliko.

Pri crtanju  $E$  i  $\Pi$  linija, treba voditi računa da nagib  $E$  linije predstavlja trenje. Za cevi  $L_1$  i  $L_2$  koje su istog prečnika i koeficijenta  $\lambda$ , energetske linije moraju biti paralelne. Takođe, na crtežu moraju lokalni gubici energije i brzinske visine biti u razmeri. Na primer, samo posmatrajući sliku 7.21, može se proceniti koliki je koeficijent gubitka energije na ventilu  $\xi_v$ : ako se razmak između  $E$  i  $\Pi$  linije kod ventila uzme kao jedinica mere, i ako se proceni da je "pad" energije na ventilu 4,5 puta veći od tog razmaka, dobija se da je  $\xi_v = 4,5$ .

### 7.3.1.3 Račvanje fluidne struje

Iz rezervoara A izlaze dve cevi istog prečnika  $d$  i datih dužina. Cevi se spajaju u treću cev većeg prečnika  $D$  i dužine  $L_6$ . Mlaz iz treće cevi izlazi slobodno u atmosferu. Odrediti protoke i brzine za sve cevi.



Slika 7.22: PrIMER isticanja kroz dve cevi koje se nizvodno spajaju u jednu

Na slici 7.22 je prikazan sistem, sa poznatim podacima. Sličan primer je već rađen u poglavlju 4.6.6.1, na strani 174. Tamo je zaključeno da u slučaju račvanja fluidne struje treba pisati *onoliko energetskih jednačina koliko ima mogućih puteva* za fluidni delić<sup>26</sup>.

Energetska jednačina za donju cev (u kojoj je brzina  $V_1$ ), od rezervoara A

<sup>26</sup>Prilikom pisanja jednačine, međutim, moraju se unapred znati pravci tečenja. U nekim zadacima nije moguće unapred znati tačan pravac pa se može desiti da se dobije kao rešenje negativna brzina (ili protok). U tom slučaju treba ponoviti proračun sa korigovanim, ispravnim smerom tečenja.

do izlaznog preseka 3 je:

$$\Pi_A + \frac{V_A^2}{2g} = \Pi_3 + \frac{V_3^2}{2g} + \Delta E_{A-3}^{dole} \Rightarrow \Pi_A = z_{cev} + \frac{V_3^2}{2g} + \Delta E_{A-3}^{dole}$$

gde je stavljeno da je brzina u rezervoaru A nula, a pjezometarska kota u izlaznom preseku 3 jednaka položajnoj koti cevi  $z_{cev}$ . Gubici duž donje i zajedničke cevi su:

$$\Delta E_{A-3}^{dole} = \left( \xi_{ul} + \lambda_d \frac{L_1}{d} + \xi_{k1} + \lambda_d \frac{L_2}{d} + \xi_{k2} + \lambda_d \frac{L_3}{d} \right) \frac{V_1^2}{2g} + \left( \xi_R + \lambda_D \frac{L_6}{D} \right) \frac{V_3^2}{2g}$$

Za tok fluida kroz gornju cev (u kojoj je brzina  $V_2$ ) piše se druga energetska jednačina:

$$\Pi_A + \frac{V_A^2}{2g} = \Pi_3 + \frac{V_3^2}{2g} + \Delta E_{A-3}^{gore} \Rightarrow \Pi_A = z_{cev} + \frac{V_3^2}{2g} + \Delta E_{A-3}^{gore}$$

$$\Delta E_{A-3}^{gore} = \left( \xi_{ul} + \lambda_d \frac{L_4}{d} + \xi_{k3} + \lambda_d \frac{L_5}{d} \right) \frac{V_2^2}{2g} + \left( \xi_R + \lambda_D \frac{L_6}{D} \right) \frac{V_3^2}{2g}$$

U napisanim dvema energetske jednačinama, nepoznate su tri brzine  $V_1$ ,  $V_2$  i  $V_3$ . Jednačina kontinuiteta je treća jednačina koja će povezati ove brzine:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \Rightarrow V_1 \frac{d^2 \pi}{4} + V_2 \frac{d^2 \pi}{4} = V_3 \frac{D^2 \pi}{4}$$

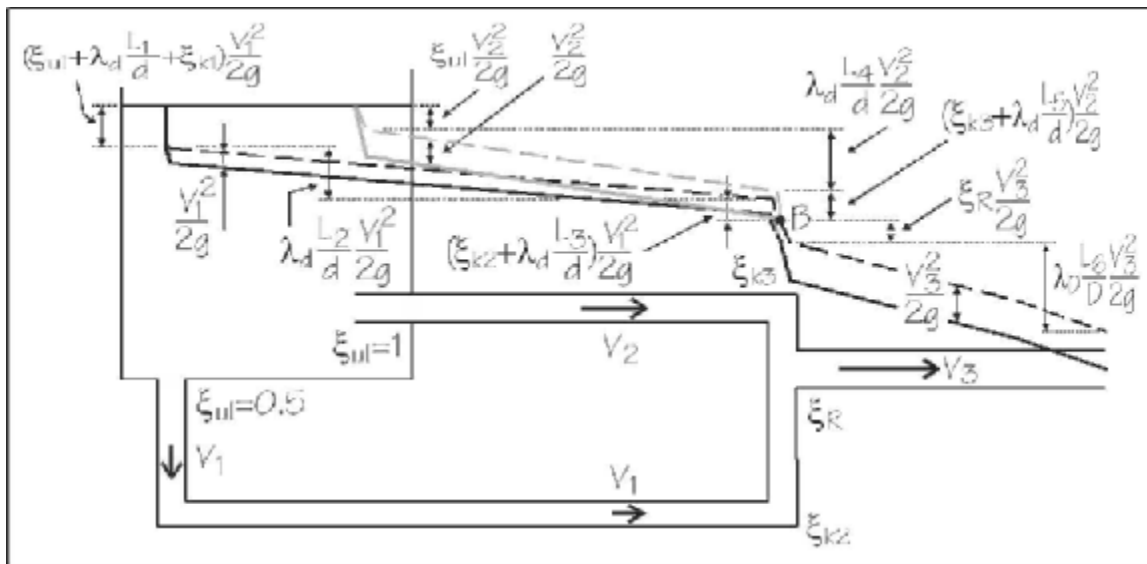
Sistem od tri jednačine se najlakše rešava oduzimanjem dve energetske jednačine, čime se eliminiše brzina  $V_3$ , odnosno, posredno se postavlja uslov da je ukupan gubitak energije od rezervoara do račve isti za obe cevi.

Prilikom crtanja dijagrama (slika 7.22) treba odvojeno nacrtati linije za donju i gornju cev. Energetske linije dve cevi treba da se spoje u zajedničkoj tački B i odatle se crta energetska linija za treću cev. U preseku 3 energetska linija ostaje za brzinsku visinu iznad ose cevi.

### 7.3.2 Primer sa dinamičkom jednačinom

#### 7.3.2.1 Određivanje sile na zatvarač

U cevi prečnika  $D = 250$  mm postavljen je leptirasti zatvarač. Pri protoku  $Q = 100$  L/s i otvorenom zatvaraču, nivoi u pjezometarskim cevima u presecima 1, 2 i 3 su  $\Pi_1 = 10,2$  m,  $\Pi_2 = 10,0$  m i  $\Pi_3 = 9,5$  m. Kolika je sila kojom fluid gustine  $\rho = 1$  kg/dm<sup>3</sup> deluje na zatvarač u njegovom otvorenom položaju? Koliki je koeficijent gubitka energije na zatvaraču  $\xi_Z$ ?



Slika 7.23: Primer isticanja kroz dve cevi koje se nizvodno spajaju u jednu

Na slici 7.24 levo je izdvojen deo cevi između preseka 2 i 3, sa ucrtanim silama koje deluju na masu fluida između ta dva preseka. Postavljanjem dinamičke jednačine za konačnu zapreminu između tih preseka može se sračunati sila  $F$ , sila kojom fluid deluje na zatvarač:

$$\sum \vec{P} + \sum \vec{I} + \vec{T} + \vec{K} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = -\vec{K} = \sum \vec{P} + \sum \vec{I} + \vec{T}$$

S obzirom da je cev konstantnog preseka i bez usputne promene protoka, inercijalne sile  $I_2$  i  $I_3$  su istog intenziteta i pravca, a suprotnog smera pa se međusobno potiru. Na osnovu datih pijeziometarskih kota u presecima 2 i 3 moguće je sračunati sile pritiska:

$$P_2 = p_2^T A = \rho g (\Pi_2 - Z_2^T) A = 2,408 \text{ kN} \quad (Z_2^T = 5 \text{ m})$$

$$P_3 = p_3^T A = \rho g (\Pi_3 - Z_3^T) A = 2,167 \text{ kN} \quad (Z_3^T = 5 \text{ m})$$

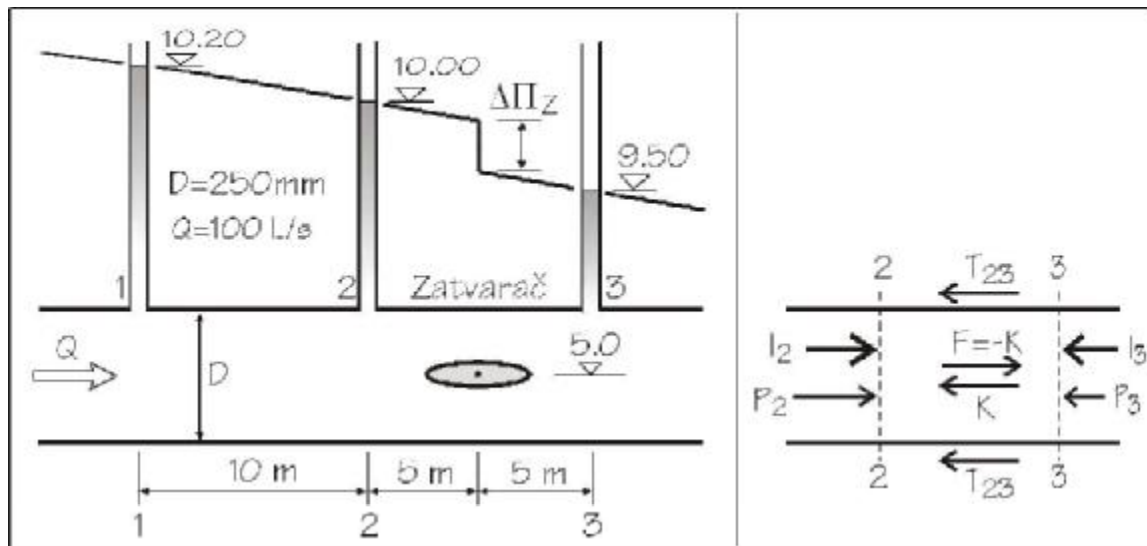
Sila trenja za istu dužinu cevi od 10 m, može se odrediti iz datih podataka za preseke 1 i 2, postavljanjem dinamičke jednačine za ova dva preseka:

$$T_{12} = T_{23} = (P_1 - P_2) = \rho g (\Pi_1 - \Pi_2) A = 96,31 \text{ N}$$

Ukupna sila na zatvarač je:

$$F = P_2 - P_3 - T_{23} = 0,144 \text{ kN}$$

Do istog rezultata se može doći ako se uoči da je za pad pijeziometarske kote od preseka 1 do 2  $\Delta \Pi_{1-2} = 0,2 \text{ m}$  odgovorno trenje a za pad od preseka 2



Slika 7.24: Proračun sile na zatvarač - korišćenjem dinamičke jednačine

do 3  $\Delta\Pi_{2-3} = 0,5$  m su odgovorni trenje i gubitak energije na zatvaraču. Na osnovu toga, sledi da je pad pijeometarske kote samo usled zatvarača  $\Delta\Pi_Z = 0,5 - 0,2 = 0,3$  m pa je sila na zatvarač:

$$F = \rho g \Delta\Pi_Z A = 0,144 \text{ kN}$$

gde je  $A$  površina poprečnog preseka cevi. Ako se dobijena sila podeli sa zaustavnim pritiskom (7.18) i površinom poprečnog preseka, dobija se koeficijent sile (5.12):

$$C_F = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} = \frac{\rho g \Delta\Pi_Z A}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} = 2g \frac{\Delta\Pi_Z}{V^2} = 1,42$$

Pad energije na zatvaraču se može napisati u obliku proizvoda brzinske visine i koeficijenta lokalnog gubitka energije, pa se dobija:

$$\Delta E_Z = \Delta\Pi_Z = \xi_Z \frac{V^2}{2g} \Rightarrow \xi_Z = 2g \frac{\Delta\Pi_Z}{V^2} = C_F = 1,42$$

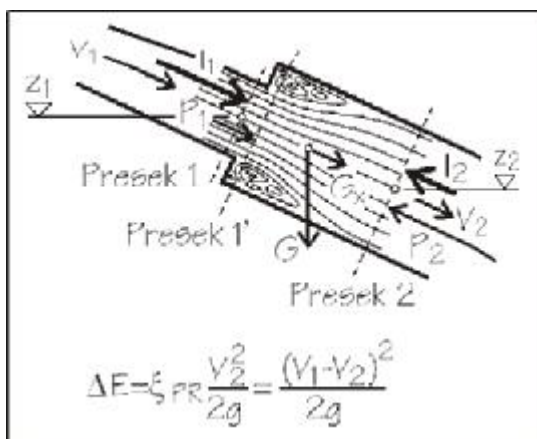
da je koeficijent lokalnog gubitka energije na zatvaraču u stvari koeficijent sile koju zatvarač prima od fluida.

### 7.3.2.2 Naglo proširenje cevi - Bordina teorema

Prema Bordinoj<sup>27</sup> teoremi, prilikom naglog proširenja fluidna struja se u potpunosti odlepi od proširenog preseka 1' (slika 7.25) i vrtlozi kod proširenja

<sup>27</sup>Jean Charles Borda (1733 - 1799), francuski matematičar, kao vojnik učestvovao je u naučnim i istraživačkim pohodima, a u američkom ratu za nezavisnost je imao zapaženu

prenose niski pritisak koji je vladao u suženom preseku 1.



Slika 7.25: Sila usled naglog proširenja cevi

Na osnovu pretpostavke, u preseku 1 sila pritiska se može izračunati kao pritisak iz preseka 1 pomnožen sa presekom 1' (odnosno, sa presekom 2)  $P_1 = p_1 A_2$ . Ostale sile na masu fluida između preseka 1 i 2 se računaju na klasičan način: sila pritiska u preseku 2 je  $P_2 = p_2 A_2$ , inercijalne sile u presecima su  $I_1 = \rho Q V_1$  i  $I_2 = \rho Q V_2$  a komponenta sile težine u pravcu toka je  $G_x = \rho g A_2 (z_1 - z_2)$  (prema jednačini (6.2)). Uz uslov da na delu od 1 do 2 ne deluje sila trenja, dinamička jednačina daje ravnotežu sila u pravcu toka:

$$A_2(p_1 - p_2) + \rho g A_2(z_1 - z_2) + \rho Q(V_1 - V_2) = 0$$

Zamenom  $Q = V_2 A_2$ , deljenjem jednačine sa  $(\rho g A_2)$  i stavljanjem pijezometarskih kota umesto zbira visina pritisaka i položajnih kota, dobija se:

$$\Pi_1 - \Pi_2 = \frac{V_2^2}{g} - \frac{V_1 V_2}{g} \tag{7.25}$$

Ako se za preseke 1 i 2 postavi energetska jednačina, gde kompletan gubitak energije odlazi samo na loklani gubitak usled proširenja fluidne struje, dobija se:

$$\Pi_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \Pi_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta E \Rightarrow \Delta E = \Pi_1 - \Pi_2 + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g}$$

Stavljajući  $\Pi_1$  i  $\Pi_2$  iz dinamičke jednačine (7.25) u energetska, dobija se:

$$\Delta E = \frac{V_2^2}{g} - \frac{V_1 V_2}{g} + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \xi_{PR} \frac{V_2^2}{2g} \tag{7.26}$$

Sređivanjem je dobijen poznati izraz kojim se analitički određuje lokalni gubitak energije u naglom proširenju.

---

ulogu. Bavio se mehanikom fluida, proučavajući kretanje brodova, topovskih granata, rad pumpi i slično. Konstruisao je instrumente kojima je premerio dužinu meridijana i napravio je poznate trigonometrijske tablice. Bio je veliki zagovornik decimalnog računskog sistema.



7.3.3 Dinamička ili energetska jednačina?

Na slici 7.26, prikazana je račva koja se nalazi u horizontalnoj ( $X, Y$ ) ravni. Iz račve izlaze dva mlaza vode slobodno u atmosferu. Potrebno je naći silu fluida na kraju cevi (presek 4) ako se zanemare gubici energije (slika 7.26). Prečnici cevi su takvi da su odnosi proticajnih površina  $A_1 = A_4$ ,  $A_1 = A_2 + A_3$  i  $A_2 = A_3$ .

**Dinamička jednačina:** Iz jednačine kontinuiteta  $Q_1 = Q_2 + Q_3$  i datog odnosa površina poprečnih preseka dobijaju se brzine:

$$V_1 = V_2 = V_3 \text{ odnosno } Q_2 = Q_3$$

U presecima 2 i 3 je pritisak nula, jer mlaz slobodno izlazi u atmosferu, pa su sile pritiska u njima:

$$P_2 = P_3 = 0$$

Pošto se presek 1 nalazi blizu preseka 2 i 3, može se uzeti da je i u njemu pritisak nula, pa je:

$$p_1 = 0 \Rightarrow P_1 = 0$$

Na osnovu dinamičke jednačine, dobija se rešenje za silu fluida na kraju cevi:

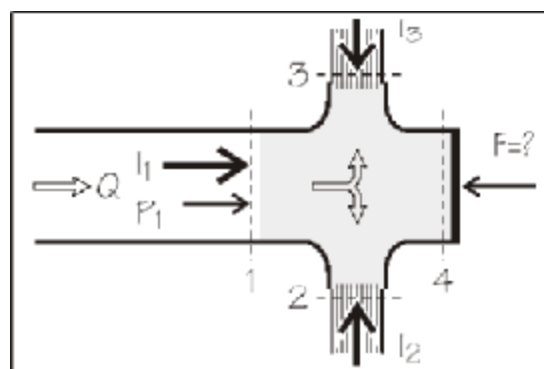
$$F = I_1 = \rho Q V_1 = \rho V_1^2 A_1$$

**Energetska jednačina:** Da bi se našao zaustavni pritisak u preseku 4 postavlja se energetska jednačina između preseka 1 i 4, uz zanemarivanje gubitaka energije:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \Pi_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_1^2}{2g} \\ E_4 &= \Pi_4 + \frac{V_4^2}{2g} = \frac{p_4}{\rho g} + z_4 \end{aligned} \right\} \frac{p_4}{\rho g} = \frac{V_1^2}{2g} \text{ jer su } \Pi_1 = \frac{V_4^2}{2g} = z_4 = 0$$

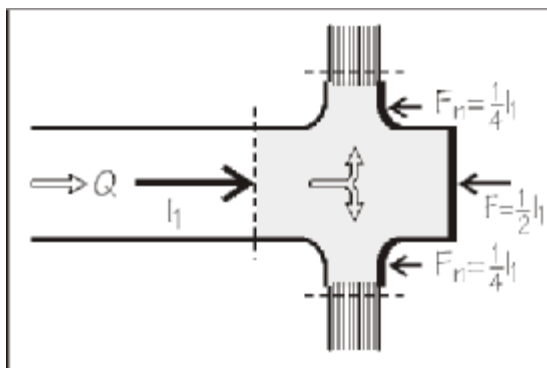
Na osnovu energetske jednačine, dobija se rešenje za silu fluida na kraju cevi:

$$F = p_4 A_1 = \frac{1}{2} \rho V_1^2 A_1$$



Slika 7.26: Da li se zadatak rešava primenom dinamičke ili energetske jednačine?

**Komentar dobijenih rešenja:** Izračunata sila na osnovu energetske jednačine je duplo manja u odnosu na vrednost dobijenu upotrebom dinamičke jednačine. Koje rešenje je tačno?

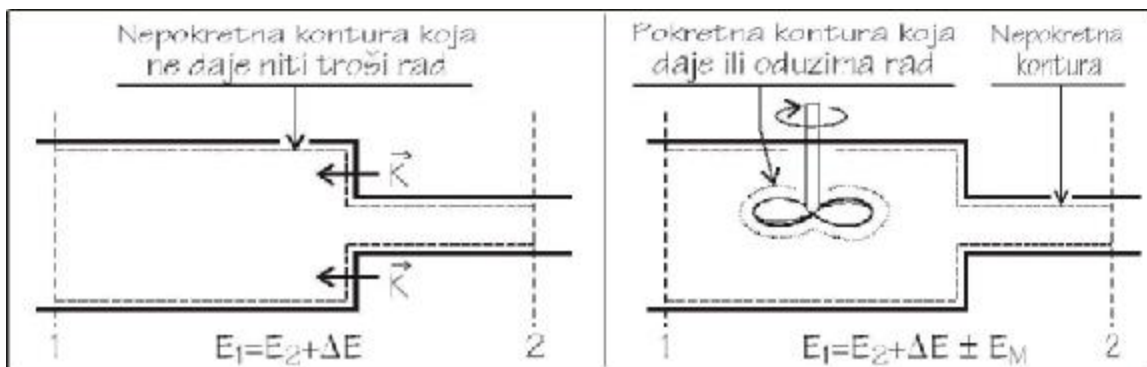


Tačno rešenje daje energetska jednačina. Greška kod dinamičke jednačine je što *nije uzeta u obzir i konturna sila* kojom voda deluje na naglavke (dve sile  $F_n$  na slici 7.27). Pošto tu dolazi do skretanja struje, mora postojati i odgovarajuća konturna sila.

Slika 7.27: Da bi se zadatak rešio primenom dinamičke jednačine treba uzeti u obzir sve sile

### 7.4 Hidrauličke mašine

U dosadašnjim razmatranjima bilansa mehaničke energije između dva preseka, poštovana je pretpostavka da je granica strujnog polja nepokretna. Normalna konturna sila  $\vec{N}$  koja postoji pri svakom poremećaju fluidnog toka (slika 7.28 levi deo) zbog nepokretnosti konture ne daje rad, pa i ne ulazi u energetski bilans, odnosno, ne postoji razmena energije između konture i fluida.



Slika 7.28: Kod nepokretne konture nema razmene rada (levo); da bi se povećala ili smanjila energija toka potrebno je da se deo konture pokreće (propeler na desnoj slici)

Da bi se predala ili oduzela mehanička energija fluidnoj struji, mora postojati deo konture koji se pokreće. Na desnom delu slike 7.28, pokretna kontura je predstavljena kao propeler: ako se sa spoljne strane dovodi rad, povećavaće se ukupna mehanička energija fluida, a ako fluidna struja okreće propeler i obavlja neki rad (na primer, proizvodi struju ili melje žito), smanjivaće se ukupna mehanička energija. U energetske jednačini (7.17) (datoj na strani 303), napisanoj za preseke 1 i 2, efekat povećanja ili smanjenja energije se može jednostavno obračunati kroz dodatni član<sup>28</sup>:

$$E_1 = E_2 + \Delta E_{1-2} \pm E_M$$

gde je  $E_M$  energija po jedinici težine fluida koju preda ili preuzme hidraulička mašina.

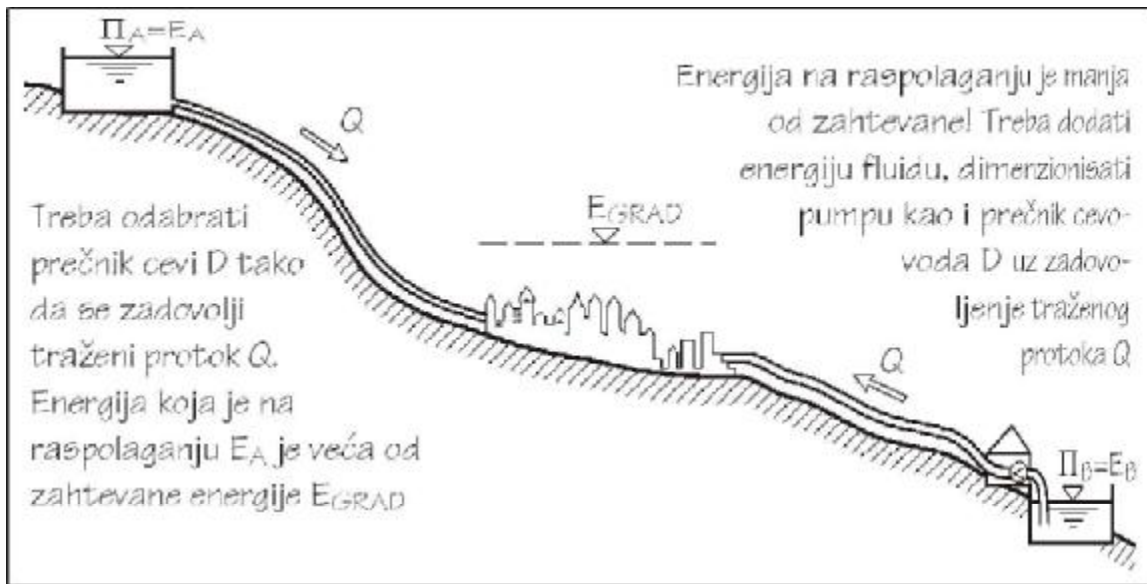
Sve hidrauličke mašine mogu se svrstati u dve velike grupe: *pumpe* (ili crpke), koje dodaju energiju fluidnoj struji ( $-E_M$ ) i *turbine*, koje oduzimaju energiju fluidnoj struji ( $+E_M$ ) i pretvaraju je u neki drugi vid energije. Hidrauličke mašine su veoma složene mašine i detaljno se izučavaju na Mašinskom fakultetu. U okviru kursa Mehanika fluida neće se ulaziti detaljno u proces razmene energije, već će se samo posmatrati ukupni uticaj mašina na fluidnu struju kroz član  $\pm E_M$ .

### 7.4.1 Pumpe (crpke)

Pumpe su hidrauličke mašine koje dodaju energiju fluidnoj struji. U najvećem broju slučajeva, pumpe koriste električnu energiju koju pretvaraju u mehaničku (rotacije ili pokretanja klipa) i tu mehaničku energiju predaju fluidnoj struji.

Pumpe se u vodovodnim sistemima najčešće koriste da “podignu” vodu sa nižih kota na više. Na slici 7.29, prikazan je jedan od čestih hidrotehničkih problema: kako dopremiti do naselja vodu sa zahtevanim pritiskom? Ako je izvor na višim kotama (rezervoar  $A$ ), problem se svodi na dimenzionisanje cevovoda tako da se sa izabranim prečnikom dovede traženi protok uz gubitke energije jednake  $E_A - E_{GRAD}$ . Ako se naselje snabdeva iz bunara ili sa izvorišta koje se nalazi na koti  $E_B$ , potrebno je pumpom dodati energiju  $E_{GRAD} - E_B$ , ali i deo energije, koji će se izgubiti na trenje (a taj deo zavisi od izbora prečnika i vrste cevovoda). Stavljanjem cevovoda manjeg prečnika, uštedeće se na cevovodu, ali će to zahtevati “jaču” pumpu i samim tim, veće troškove rada.

<sup>28</sup>U poglavlju 4.6.3 Rešenje integralne jednačine održanja energije za ustaljeno tečenje homogenog fluida u cevi se sličnim razmatranjem takođe došlo do jednačine (4.121) (strana 173) u kojoj se dodatni rad pumpe pripisuje kao energija po jedinici težine.



Slika 7.29: Kako dopremiti vodu u grad: a) iz rezervoara koji se nalazi iznad grada i b) iz rezervoara koji se nalazi ispod grada

Na slici 7.30, prikazan je uprošćen sistem, u kome pumpa dodaje taman onoliko energije koliko je potrebno da kroz cevovod teče traženi protok  $Q$ . Iz nacrtanih piježometarskih i energetske linije, mogu se definisati osnovni pojmovi:

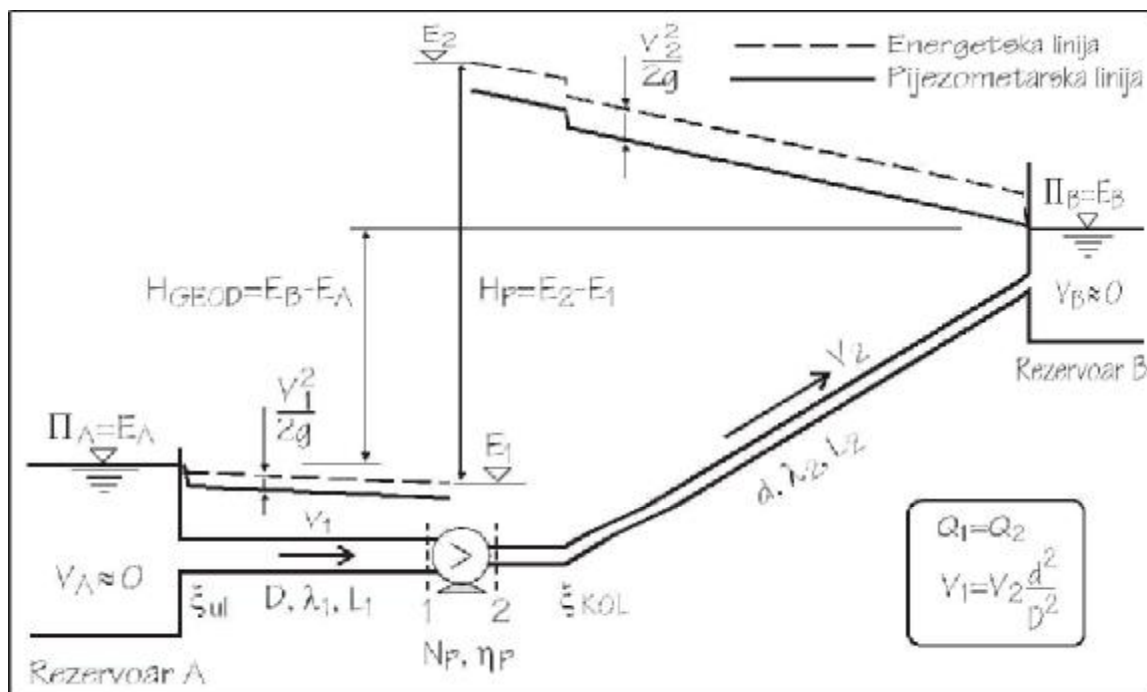
- $H_{GEO}$  - geodetska razlika između piježometarskih kota u rezervoarima A i B
- $H_p$  - energija po jedinici težine, koja se mora dodati fluidu da bi se zahtevani protok  $Q$  “prebacio” iz rezervoara A u rezervoar B. Ta visina se često naziva *visina dizanja pumpe*<sup>29</sup> i izražava se u metrima [m].

Visina dizanja pumpe je jednaka zbiru svih gubitaka energije  $\Delta E_{A-B}$  i geodetskoj razlici  $H_{GEO}$ . Ako su preseči 1 i 2 preseči ispred i iza pumpe, tada se može napisati<sup>30</sup>:

$$H_p = E_2 - E_1 = H_{GEO} + \Delta E_{A-B} = E_B - E_A + \Delta E_{A-B}$$

<sup>29</sup>Na Građevinskom fakultetu pumpa se izučava samo kao jedan u nizu elemenata koji čine vodovodni sistem, pa se učinak pumpe meri “visinom dizanja”, odnosno, onime što pumpa preda sistemu. Sa stanovišta pumpe, cevovod i voda u njemu su nešto što “je muči”, nešto što ona treba da savlada i podigne na određeni nivo. Zato se na Mašinskom fakultetu visina dizanja pumpe češće zove *napor pumpe*.

<sup>30</sup>Relativno česta greška je da se visina dizanja pumpe računa iz razlike piježometarskih kota  $\Pi_2 - \Pi_1$  a ne iz razlike energetske. Pumpa dodaje energiju, a na primeru 7.30 se lepo vidi da ne moraju biti isti prečnici cevi ispred i iza pumpe, pa ni brzinske visine.



Slika 7.30: Pijezometarska i energetska linija za slučaj kada se pumpom prebacuje voda iz rezervoara A u rezervoar B

pa je energetska jednačina od rezervoara A do rezervoara B:

$$E_A = E_B + \Delta E_{A-B} - H_p$$

Energija (u džulima) koju pumpa preda fluidu je jednaka visini dizanja pomnoženoj sa težinom “podignute” vode u periodu  $\Delta t$ :

$$E_p = H_p G = H_p Q \Delta t \rho g \quad [\text{J}]$$

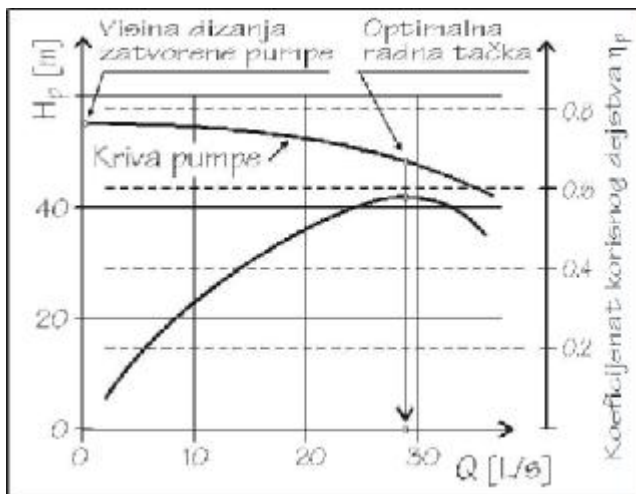
Snaga koju fluid primi od pumpe je:

$$N = \frac{E_p}{\Delta t} = \rho g Q H_p \quad [\text{W}] \tag{7.27}$$

Za izbor odgovarajuće pumpe treba izračunati njenu snagu, u jedinicama [W]. Zbog gubitaka energije u toku konverzije iz pogonske energije (obično električne) preko mehaničke u korisnu energiju, koju primi fluid (7.27), potrebna stvarna snaga pumpe  $N_p$ , veća je od snage koju primi fluid za *stepen iskorišćenja*  $\eta$ <sup>31</sup>:

$$N_p = \frac{1}{\eta_p} \rho g Q H_p \tag{7.28}$$

<sup>31</sup>Stepen iskorišćenja  $\eta$  se često zove i *koeficijent korisnog dejstva*, skraćeno KKD.



Slika 7.31: Proizvođači pumpe karakteristike daju u formi standardnog  $Q/H$  dijagrama, sa ucrtanim stepenom korisnog dejstva  $\eta_P$

Koeficijent korisnog dejstva  $\eta_p$  obuhvata ceo agregat (pumpu i motor) i uvek je manji od 1,0. Kod manjih pumpe vrednosti su oko  $\eta_p \approx 0,5 - 0,7$  a kod većih pumpe može biti i  $\eta_p \approx 0,8 - 0,85$ .

Pumpe su složene mašine čije karakteristike (snaga, visina dizanja i stepen iskorišćenja) zavise od radnih uslova  $H_p = f(Q)$ ,  $N_p = f(Q)$  i  $\eta_p = f(Q)$ . Proizvođači pumpe daju te karakteristike u formi dijagrama, kao  $Q-H$  krive (slika 7.31). Problem uklapanja pumpe u sistem, uklapanja više pumpe u zajednički rad i izbor optimalnih veličina

će se detaljnije obrađivati na predmetima koji se izučavaju na višim godinama smeru za Hidrotehniku.

### 7.4.2 Turbine

Turbina je hidraulička mašina koja oduzima energiju fluidnoj struji i pretvara je prvo u mehničku a najčešće zatim u električnu energiju. Na slici 7.32, prikazana je tipična situacija, u kojoj se voda iz visokog rezervoara dovodi do turbine, tako da se relativno malo energije potroši na linijske i lokalne gubitke, kako bi turbina iskoristila svu preostalu energiju.

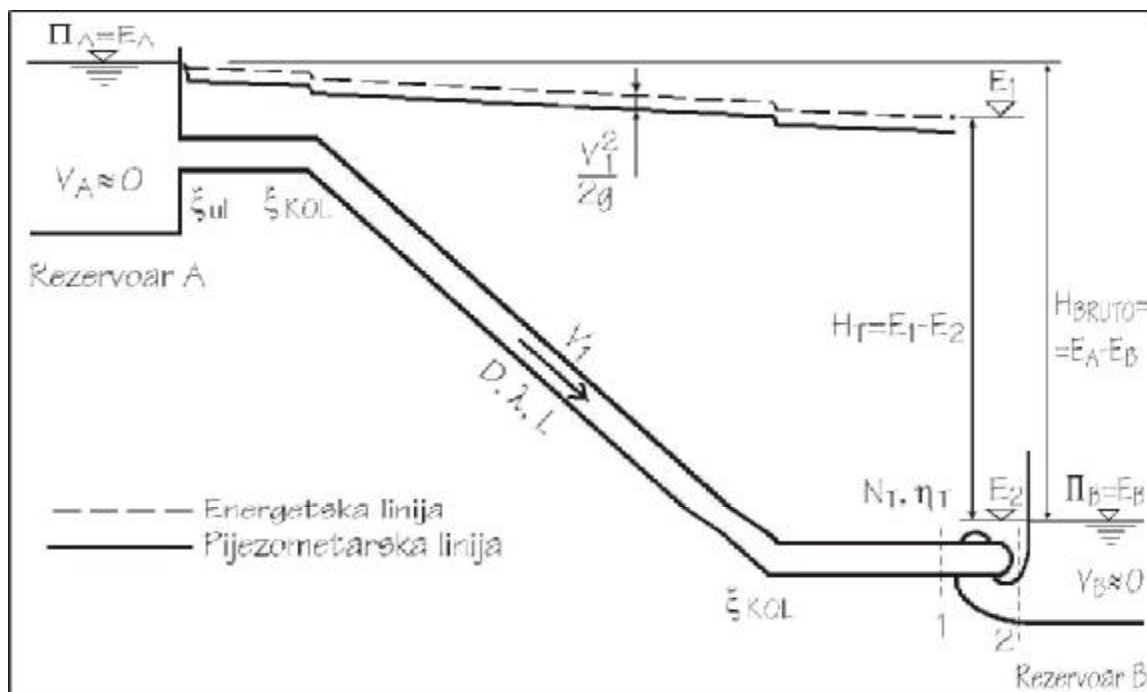
Veličina  $H_T$  sa slike 7.32 se naziva *pad turbine* i ona se računa iz jednačine:

$$H_T = E_1 - E_2 = E_A - E_B - \Delta E_{A-B}$$

Na slici 7.32, nacrtan je slučaj kada je nizvodni rezervoar (odnosno jezero) odmah pored turbine. Tada se obično kao nizvodni presek 2 uzima presek u rezervoaru  $B$ , a svi gubici energije od turbine do preseka  $B$  (uključujući i gubitak od jedne brzinske visine na ulazu u rezervoar) pripisuju se koeficijentu korisnog dejstva turbine. Na drugoj slici 7.33, prikazan je slučaj kada nizvodno od turbine postoji cevovod, pa su preseki ispred turbine 1 i iza 2 jasno razdvojeni od preseka kroz rezervoare  $A$  i  $B$ .

Energija (u džulima) koju voda preda turbini je:

$$E_T = H_T \rho g Q_T \Delta t \quad [J]$$



Slika 7.32: Pijezometarska i energetska linija za slučaj kada se na samom kraju cevovoda nalazi turbina, pa gubici od nizvodnog preseka 2 do rezervoara (jezera) B se pripisuju koeficijentu korisnog dejstva  $\eta_T$

pa je “oduzeta snaga” fluida iz fluidne struje:

$$N_T = \frac{E_T}{\Delta t} = \rho g Q H_T \quad [W] \quad (7.29)$$

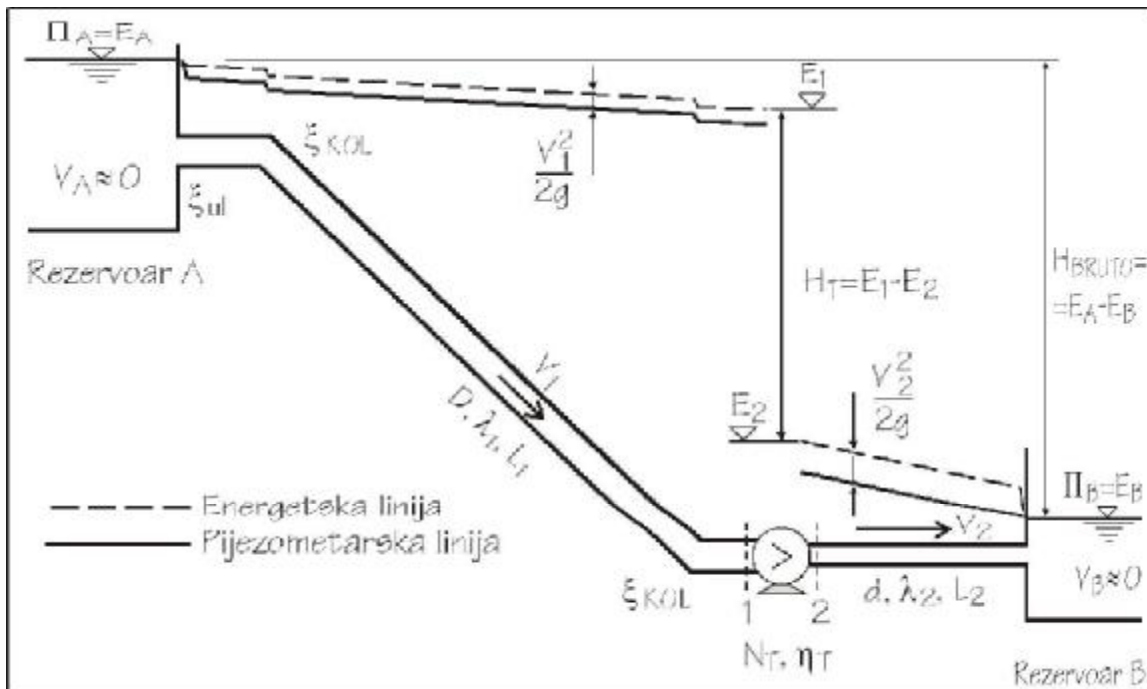
Turbina primi manju snagu za stepen iskorišćenja (ili koeficijent korisnog dejstva)  $\eta_T$ :

$$N_T = \frac{E_T}{\Delta t} \eta_T = \eta_T \rho g Q H_T \quad [W] \quad (7.30)$$

Koeficijent korisnog dejstva turbine  $\eta_T$  uvek je manji od 1,0 i ima vrednosti u opsegu  $\eta_T \approx 0,75 - 0,93$ . Po pravilu, što je veća turbina, to se više pažnje posvećuje pravljenju same mašine i njenom uklapanju u sistem, pa je veći i koeficijent  $\eta$ .

Snaga turbine direktno zavisi od pada turbine  $H_T$ . Sa slike 7.33, vidi se da je teorijski najveći mogući pad turbine jednak razlici kota uzvodnog i nizvodnog rezervoara (jezera). U realnim uslovima, pad turbine je manji i dobija se iz energetske jednačine:

$$E_A = E_B + \Delta E_{A-B} + H_T$$



Slika 7.33: Pijezometarska i energetska linija za slučaj kada se nizvodno od turbine nalazi cevovod

$$\Pi_A = \Pi_B + \xi_{ul} \frac{V_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g} + \xi_{izl} \frac{V_2^2}{2g} + H_T$$

odakle se vidi da pad turbine  $H_T$  zavisi i od linijskih i lokalnih gubitaka energije:

$$H_T = \Pi_A - \Pi_B - \frac{V_1^2}{2g} \left( \xi_{ul} + \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \right) - \frac{V_2^2}{2g} \left( \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} + \xi_{izl} \right)$$

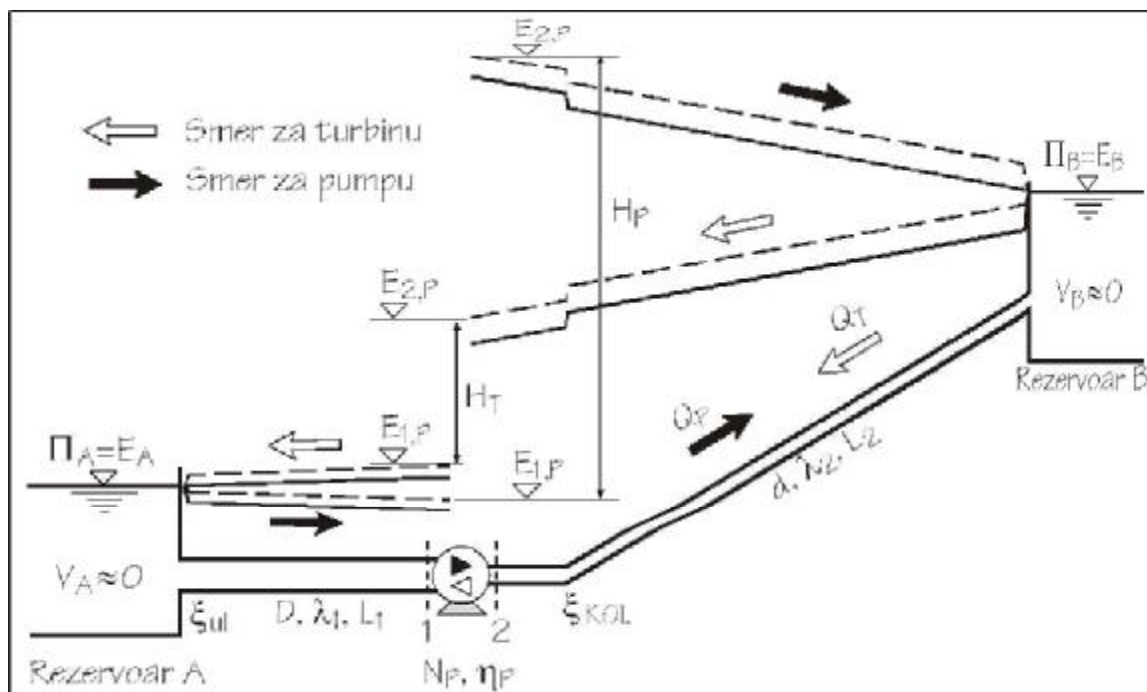
Iz dobijene jednačine sledi da, ukoliko su brzine  $V_1$  i  $V_2$  male, pad turbine se približava teorijskoj vrednosti  $\Pi_A - \Pi_B$ . Pri istom protoku pad turbine će biti veći, pa samim tim i dobijena snaga. Sa druge strane, da bi se postigle male brzine, neophodno je praviti cevovode (i često tunele) velikih prečnika, što znatno povećava troškove izgradnje. Dimenzionisanje sistema sa turbinom, stoga, po pravilu podrazumeva detaljnu tehno-ekonomsku analizu troškova izgradnje sistema i kasnijih dobiti u toku eksploatacije.

### 7.4.3 Reverzibilne mašine

Hidraulička mašina predaje ili oduzima energiju fluidu. Tehnički je moguće napraviti hidrauličku mašinu koja može da radi i kao pumpa (kada



je pokreće elektro motor) i kao turbina (kada voda pokreće elektromotor koji radi kao generator), pri čemu ostali delovi sistema ostaju isti.



Slika 7.34: Reverzibilne mašine mogu da rade kao pumpe i kao turbine

Na slici 7.34, prikazana je šematski reverzibilna hidraulička mašina sa dva rezervoara. Kada mašina radi kao pumpa, u sistem se ulažu visina dizanja  $H_p$  i snaga  $N_p$ :

$$H_p = E_B - E_A + \Delta E_{A-B} \quad N_p = \frac{1}{\eta_p} \rho g Q H_p$$

a kada radi kao turbina, sa istim protokom  $Q$  dobijaju se pad turbine  $H_T$  i snaga  $N_T$ :

$$H_T = E_B - E_A - \Delta E_{B-A} \quad N_T = \eta_T \rho g Q H_T$$

Odnos realizovanih snaga turbine i pumpe je, uz pretpostavku da se nivoi u rezervoarima kroz vreme ne menjaju:

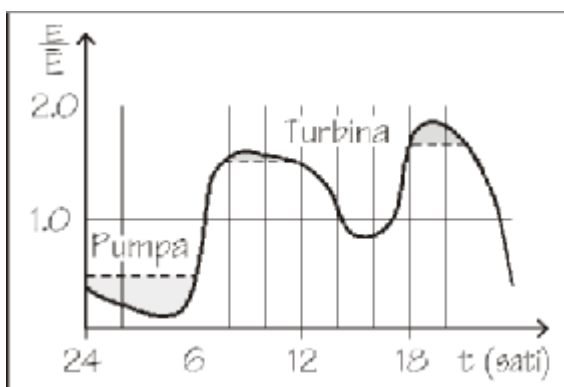
$$\frac{N_T}{N_p} = \frac{\eta_T \rho g Q H_T}{\frac{1}{\eta_p} \rho g Q H_p} = \eta_T \eta_p \frac{\Delta \Pi - \Delta E_{B-A}}{\Delta \Pi + \Delta E_{A-B}} \ll 1 \quad (7.31)$$

Član sa desne strane izraza je proizvod tri broja manja od 1: dva koeficijenta korisnog dejstva (uvek manji od 1) i razlomka čiji je imenilac uvek veći od brojioca. Iz jednačine (7.31) sledi da je snaga koja se dobija na turbini

uvek znatno manja od snage, koja se ulaže u podizanje iste količine vode pumpom.

Kako je rad reverzibilnog postrojenja uvek sa energetske gubitkom, pitanje je zašto se takva postrojenja prave? Ako se umesto energetskog bilansa (7.31) napravi finansijski bilans, dobija se odnos prihoda i rashoda:

$$\text{Prihod} = \frac{C_1 E_T}{C_2 E_P} = \frac{C_1 N_T T_T}{C_2 N_P T_P} \tag{7.32}$$



Slika 7.35: Tipičan dnevni dijagram zahteva za električnom energijom

gde su  $C_1$  i  $C_2$  cene struje u periodu kada postrojenje radi kao turbina i kao pumpa, a  $T_T$  i  $T_P$  vremena rada postrojenja. Cena električne energije je promenljiva kroz vreme, pri čemu se menja i u toku jednog dana (noću je jeftinija a danju skuplja, slika 7.35) a i sezonski (zimi kada energije nema dovoljno na tržištu cena je viša). Ako se u periodu niske cene struje pumpom podigne određena zapremina vode  $V$  u rezervoar  $B$ , a u periodu skupe struje se ta ista količina

vode iskoristi za proizvodnju znatno skuplje energije, može se postići da ukupan prihod postrojenja bude veći od 1.

Pored finansijskog efekta, reverzibilno postrojenje predstavlja i faktor sigurnosti za energetske sistem neke zemlje. U periodu kada ima više energije u mreži, prepumpavanjem vode na višu kotu vrši se “akumulisanje” električne energije. U periodu velike potrošnje, ta “sačuvana” energija može da se plasira u mrežu, čime se čuva energetske sistem od raspada.

## Glava 8

# Tečenje u otvorenim tokovima

Otvoreni tok je takvo kretanje tečnosti, pri kome je njena gornja površina u kontaktu sa gasom umesto sa čvrstom konturom, i u kome je dinamički uticaj tog gasa na tečnost zanemarljiv. Otvoreni tokovi su isključivo vezani za tečnosti, pa se umesto *strujanja fluida govori o tečenju*, a u najvećem broju slučajeva se posmatra tečenje vode, koja je u kontaktu sa atmosferom. Primeri otvorenih tokova su svuda oko nas: tečenje vode u reci, potocima, veštačkim kanalima i akvaduktima, koje su pravili još stari Rimljani, kišnim kolektorima, tunelima kod hidrocentrala, kanalima za navodnjavanje i odvodnjavanje i slično.

Osnovne jednačine kojima se rešavaju otvoreni tokovi su iste kao i jednačine korišćene za proučavanje tečenja u cevi: jednačina kontinuiteta, dinamička i energetska jednačina. Međutim, otvoreni tokovi su dosta komplikovaniji od tečenja u cevi, jer kod njih proticajni presek nije unapred poznat, pa je moguće da voda pri istom protoku teče sa manjom ili većom dubinom. Da bi se odredila dubina u nekom preseku, pored tri spomenute jednačine potrebno je poznavati još i uzvodne i nizvodne granične uslove kao i način kako ti uslovi utiču na traženi presek.

U nastavku ove glave, prvo će se dati uslovi pod kojima će važiti izvedene jednačine, pri čemu se izučava samo ustaljeno tečenje u prizmatičnim koritima<sup>1</sup>. Zatim će se definisati karakteristične dubine (normalna, kritična, spregnute dubine), koje određuju karakter toka i način njegovog reagovanja na granične uticaje. Pomoću tih dubina će se analizirati mogući oblici linije

---

<sup>1</sup>Neustaljeni režim kao i tečenje u prirodnim, neprizmatičnim koritima se izučava na kasnijim godinama hidro smeru.

nivoa duž kanala konstantnog nagiba (nejednoliko tečenje) i uticaj pojedinih kontrolnih preseka na tok.

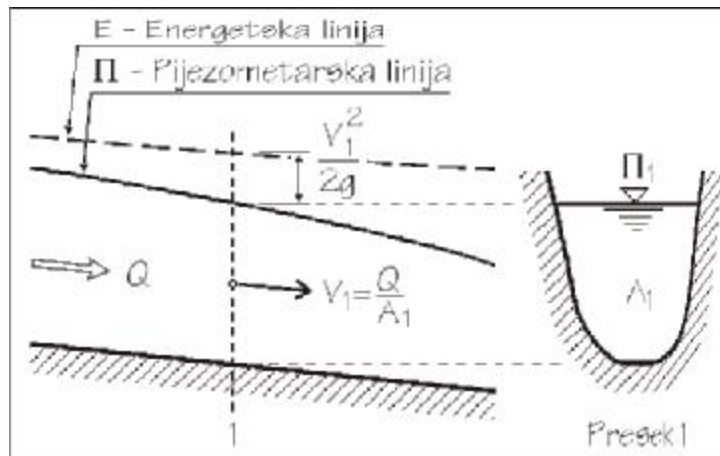
## 8.1 Pretpostavke i uslovi za izvođenje jednačina

U proučavanju otvorenih tokova važe sve pretpostavke koje su važile i za oblast tečenja u cevi (poglavlje 7.1, *Pretpostavke i uslovi za izvođenje jednačina*):

- Tok je linijski, u pravcu  $x_1$  i proučava se samo u kontrolnim presecima, u kojima tečenje mora biti paralelno i upravno na tok.
- Fluid je tečnost, koja je kontinualna i nestišljiva. Kontakt tečnosti i vazduha se zove *slobodna površina* i pretpostavlja se da je u jednom poprečnom preseku uvek horizontalna.
- Od sila, u obzir se uzimaju težina (zapreminska sila), sila pritiska, sila trenja i konturna sila, ako dolazi do nagle promene geometrije kanala (površinska sila).
- Razmatra se samo ustaljeno tečenje, tj. sve veličine su nepromenljive kroz vreme. Takođe, izučavaće se samo slučaj kada je protok duž kanala konstantan, dok se dubine (pa i brzine) duž kanala mogu menjati (*nejednoliko tečenje* gde je  $\partial h / \partial x_1 \neq 0$ ) ili biti konstantne (*jednoliko tečenje* sa  $h = \text{Const.}$  odnosno  $\partial h / \partial x_1 = 0$ ).
- Režim tečenja je razvijeni turbulentan, sa konstantnim koeficijentom trenja i sa kvadratnom zavisnošću gubitka energije od srednje brzine. Ova pretpostavka je u najvećem broju slučajeva ispunjena. Laminarno tečenje se retko ostvaruje kod otvorenih tokova i uglavnom je povezano sa kretanjem veoma viskoznih fluida u tankom sloju po nagutoj površini. Krična vrednost Rejnoldsovog broja je kao i kod tečenja kroz cevi  $Re_{CR} = 2000$ , samo se umesto prečnika cevi  $D$  koristi  $4R$  gde je  $R$  hidraulički radijus.

Pored ovih pretpostavki, prilikom izvođenja dinamičke jednačine pretpostaviće se da je *kanal prizmatičan: izgradjeni poprečni presek duž cele deonice kanala je isti*, nema usputne promene poprečnog preseka mada se dubina vode u kanalu može menjati (slika 8.1). Ovaj uslov kod tečenja u cevi nije korišćen, jer u cevi fluidna struja u potpunosti ispunjava poprečni presek. Ako se zna prečnik cevi, zna se i poprečni presek struje pa samim tim

8.1. **PRETPOSTAVKE I USLOVI ZA IZVOĐENJE JEDNAČINA** 337

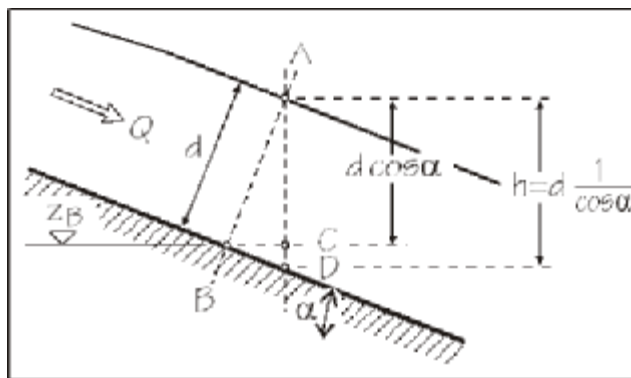


Slika 8.1: Slobodna površina kod otvorenih tokova je isto što i pijeziometarska linija

i veza između protoka i brzine. Kod tečenja u otvorenim tokovima, poprečni presek fluidne struje nije u napred poznat ( $A \neq \text{Const.}$ ).

Kao i kod tečenja u cevi i kod otvorenih tokova iz postavljenih pretpostavki sledi da se ostvaruje hidrostatička raspodela pritiska u preseku. Takođe, kako je fluid u kontaktu sa atmosferom, sledi da se slobodna površina poklapa sa pijeziometarskom  $\Pi$  kotom za presek (slika 8.1).

U otvorenim tokovima se često koristi pojam *dubina*: to je *vertikalno rastojanje od dna do površine tečnosti* i označava se sa  $h$ . Zbog nagiba dna kanala, dubina nije isto što i visina pritiska. Na slici 8.2, nacrtan je podužni presek kanala sa karikirano velikim nagibom<sup>2</sup>. Dubina u preseku je  $h = \overline{AD}$  dok je debljina fluidne struje upravna na strujnice  $d = \overline{AB}$  i iznosi  $d = h \cos \alpha$ . Visina pritiska za tačku  $B$  je ista kao i za tačku  $C$  pa je  $\frac{p_B}{\rho g} = \frac{p_C}{\rho g} = \overline{AC} = d \cos \alpha = h \cos^2 \alpha$ .



Slika 8.2: Dubina  $d$  merena normalno na dno se aproksimira vertikalom  $h$

<sup>2</sup>Ovo je standardna praksa u prikazivanju podužnih preseka kanala. Razmera za visine i razmera za dužine se obično razlikuju za red veličine, jer treba prikazati kanale dugačke nekoliko stotina ili hiljada metara, dok se kota dna promeni za par metara. Takva razmera se zove *distordovana razmera*. U distordovanoj razmeri se menjaju uglovi na slici.

Ukupna energija (po jedinici težine) u poprečnom preseku je:

$$E = \Pi + \frac{V^2}{2g} = Z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \Rightarrow E = Z_B + h \cos^2 \alpha + \frac{V^2}{2g} \quad (8.1)$$

Kada je nagib dna kanala mali, član  $\cos^2 \alpha$  se može u jednačini zameniti jedinicom. Na primer, za nagib dna veoma strmog kanala od  $I_D = 10\%$  (odnosno, ugao dna od  $\alpha < 5,7^\circ$ ) član  $\cos^2 \alpha$  je 0,99, što znači da se pravi greška od samo 1% u proračunu pijezometarske kote u energetskoj jednačini (8.1). U praksi se najčešće sreću kanali sa znatno manjim nagibom dna. Na primer, za nagib dna od  $I_D = 1\%$  ( $\tan \alpha = 0,01$ ), ugao  $\alpha = 0,57^\circ$  a član  $\cos^2 \alpha = 0,9999 \approx 1$ .

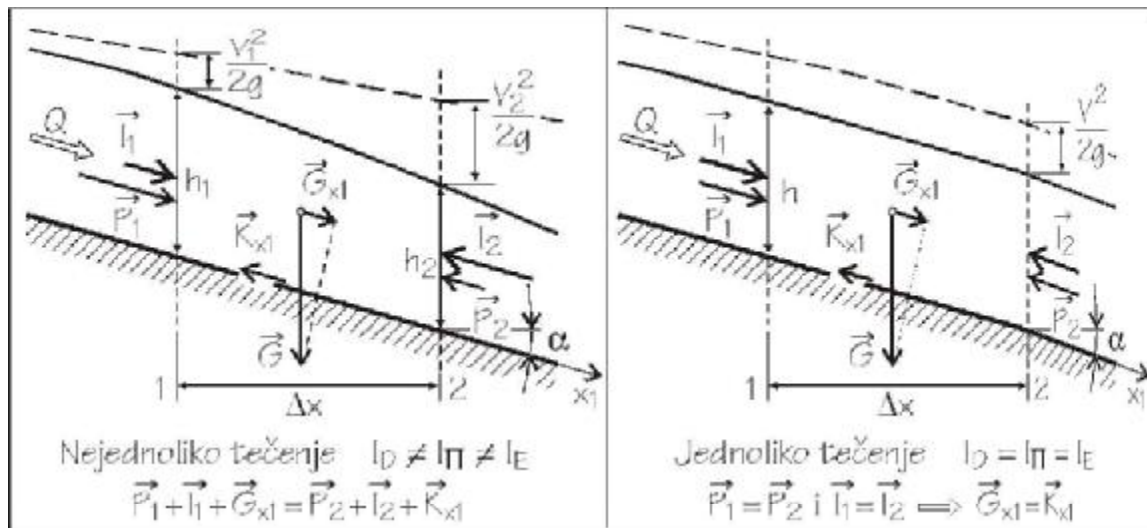
Ukoliko je nagib dna kanala  $I_D > 10\%$ , tada se ne može zanemariti član  $\cos^2 \alpha$ . To je veoma retko slučaj i sreće se uglavnom kod posebnih objekata, brzotoka. U nastavku knjige će prilikom izvođenja svih jednačina važiti pretpostavka da su kanali sa malim nagibom dna (mada će na skicama biti nacrtani sa mnogo većim nagibom zbog distordovane razmere) i koristiće se *dubine koje se mere i crtaju vertikalno* u odnosu na poprečni presek.

## 8.2 Jednoliko tečenje, normalna dubina

Posmatra se prizmatični kanal konstantnog i malog nagiba dna, kroz koji teče fluid konstantnim protokom. U kanalu se javlja *blago promenljivo tečenje* i niz fluidnu struju *dubina se postepeno menja*. Između dva relativno bliska preseka se može postaviti dinamička jednačina (7.10) (poglavlje 7.2.2, *Dinamička jednačina*, strana (7.10)): suma svih realnih sila (pritisk, težina i trenje) je jednaka promeni količine kretanja (inercijalnoj sili).

Na slici 8.3 sa leve strane je nacrtan kanal u kome se u smeru toka dubina postepeno smanjuje a brzina raste. Na konačnu masu fluida između preseka 1 i 2 deluju sledeće sile:

- Sile pritiska  $\vec{P}_1$  i  $\vec{P}_2$ . Intenzitet rezultujućeg vektora u pravcu toka  $x_1$  je približno jednak  $P_1 - P_2 = -\Delta h \rho g A$  gde je  $\Delta h = h_2 - h_1$ , a  $A$  srednja vrednost površine poprečnog preseka fluidne struje.
- Sila težine  $\vec{G} = \rho g A \Delta x$ , koja deluje vertikalno na dole. Njena komponenta u pravcu  $x_1$  je  $G_{x_1} = \rho g A \Delta x \sin \alpha$ . Za pretpostavljene male vrednosti nagiba dna, odnosno ugla  $\alpha$ , može se staviti da je  $\sin \alpha \approx \tan \alpha$  pa je komponenta sile težine u pravcu toka  $G_{x_1} = \rho g A \Delta x \tan \alpha = -\rho g A \Delta z$  gde je  $\Delta z = z_2 - z_1$ .



Slika 8.3: Sile na konačnu masu fluida između preseka 1 i 2, pri nejednolikom tečenju (leva slika) i jednolikom (desna slika)

- Sila trenja  $\vec{K}_{x1}$  koja deluje suprotno od smera toka i ima intenzitet  $K_{x1} = \tau O \Delta x$ .

Zbir tih sila je jednak promeni količine kretanja, odnosno negativnoj vrednosti inercijalnih sila (jednačina (7.6) na strani 294)  $-I = \rho Q(V_2 - V_1) = \rho Q \Delta V$ , pa se može napisati dinamička jednačina ravnoteže sila [11]:

$$-\Delta h \rho g A - \rho g A \Delta z - \tau O \Delta x = \rho Q \Delta V \quad (8.2)$$

Ako se u posmatranoj deonici kanala ostvaruje jednoliko tečenje, dubine u presecima 1 i 2 su iste (desna strana slike 8.3), pa su iste i brzine  $V_1$  i  $V_2$ . Ukupne sile pritiska i inercijalne sile su nula, pa se prethodni izraz jednakosti sila svodi na zbir komponente težine (sa znakom minus jer kota dna opada u pozitivnom pravcu  $x_1$ ) i trenja:

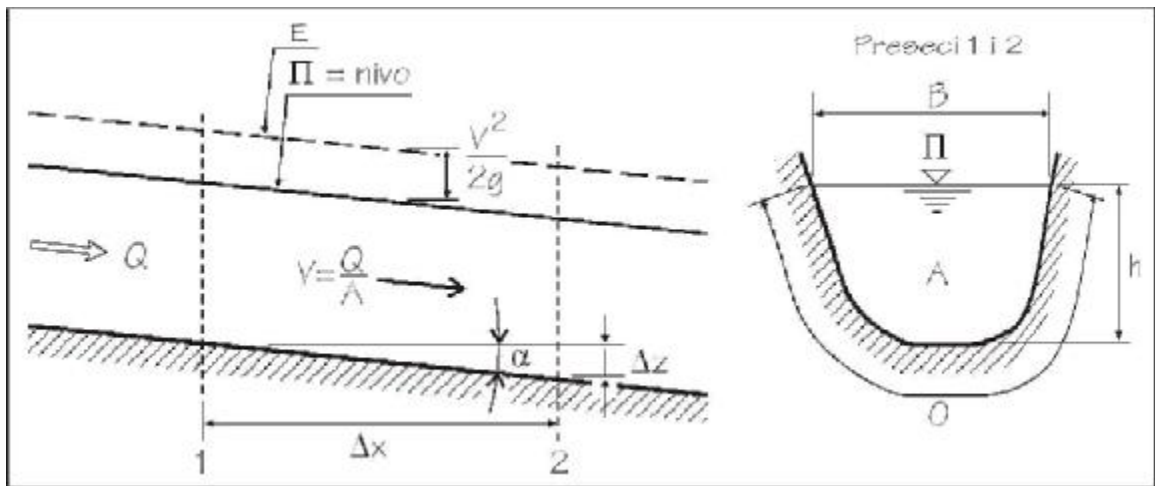
$$-\rho g A \Delta z - \tau O \Delta x = 0$$

Deljenjem izraza sa težinom konačne zapremine između preseka 1 i 2 ( $\rho g A \Delta x$ ) dobija se bezdimenzionalni izraz:

$$-\frac{\Delta z}{\Delta x} - \frac{\tau}{\rho g R} = 0 \Rightarrow -\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\tau}{\rho g R} \quad (8.3)$$

gde je  $R = A/O$  hidraulički radijus (slika 6.3 na strani 219).

Jednoliko tečenje (slika 8.4) je poseban slučaj tečenja u kanalu *kada su gravitaciona sila koja "vuče" fluid i sila trenja koja " koči" u ravnoteži*. Jednoliko tečenje se može uspostaviti samo u prizmatičnom kanalu beskonačne



Slika 8.4: Jednoliko tečenje: dubine i brzine u presecima 1 i 2 su iste

dužine i nagiba dna većeg od nula  $\alpha > 0$ . To je slučaj koji se retko javlja u prirodi ali je zgodan za analizu, jer *pokazuje kojoj dubini fluid teži ako se pusti da teče u beskonačno dugačkom kanalu.*

Kako su u jednolikom tečenju dubina i brzina konstantne duž kanala, sledi da je linija nivoa (odnosno, pizometarska linija) paralelna sa linijom dna, a linija energije paralelna sa linijom nivoa<sup>3</sup>. Ako je nagib linije dna:

$$I_D = \tan \alpha = -\frac{\Delta z}{\Delta x} = -\frac{dz}{dx}$$

(u izrazu se prešlo sa konačnih razlika  $\Delta z/\Delta x$  na diferencijalne  $dz/dx$ , jer je kanal prizmatičan) onda su i nagibi linije nivoa i energetske linije:

$$-\frac{dz}{dx} = -\frac{d\Pi}{dx} = -\frac{dE}{dx} \quad \text{odnosno} \quad I_D = I_\Pi = I_E \quad (8.4)$$

Zamenom  $I_D = -\Delta z/\Delta x$  u jednačinu (8.3), dobija se izraz za tangencijalni napon odnosno koeficijent tangencijalnog napona u jednolikom tečenju:

$$I_D = \frac{\tau}{\rho g R} \Rightarrow \tau = \rho g R I_D \Rightarrow C_\tau = \frac{\rho g R I_D}{\frac{1}{2}\rho V^2} \quad (8.5)$$

Sličan obrazac je bio dobijen kod tečenja u cevi (6.9), na strani 220 (poglavlje 6.1.1), *Koeficijent linijskog gubitka energije, samo u formi:*

$$\Delta E_{1-2} = C_\tau \frac{L V^2}{R 2g} \Rightarrow I_D = C_\tau \frac{V^2}{2gR}$$

<sup>3</sup>Zašto je zgodno što su nagibi energije i dna isti? U energetske jednačini je potreban nagib linije energije, koji se ne zna unapred i koji se “ne vidi”. U jednolikom tečenju je  $I_E = I_D$ . Pošto se nagib dna zna jer se jednostavno meri geodetskim metodama, zna se i nagib linije energije.



U izrazu (8.5) za  $C_T$ , poznat je nagib dna  $I_D$ , a za konstantan protok  $Q$  nepoznata je brzina:

$$V = \sqrt{\frac{2g}{C_T}} \sqrt{R \cdot I_D} \quad (8.6)$$

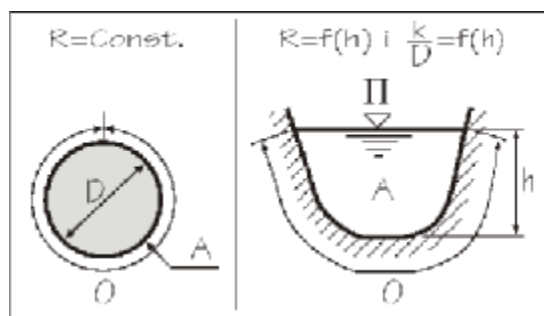
gde je  $\sqrt{\frac{2g}{C_T}} = C_c$  Šezijev<sup>4</sup> “koeficijent”<sup>5</sup> trenja, koji je dimenzionalan, sa dimenzijom  $[L^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$ . Za poznatu brzinu, protok kanalom je:

$$Q = C_c A \sqrt{R \cdot I_D} \quad (8.7)$$

Šezijev koeficijent trenja nije zgodan za upotrebu, jer je povezan sa koeficijentom tangencijalnog napona  $C_T$ , pa samim tim zavisi i od režima tečenja  $C_T = f(Re, k/R)$ . Kod kružnih cevi (poglavlje 6.1, *Trenje pri jednolikom tečenju kroz cev kružnog poprečnog preseka*) su detaljno analizirani režimi tečenja i veza  $C_T(Re, k/D)$ . Za hrapav turbulentan režim dobijeno je  $C_T = C_T(k/D)$  što kod cevi nije predstavljalo problem, jer je proticajni presek uvek isti. Međutim, kod otvorenih tokova<sup>6</sup>, proticajni presek se menja za jedan isti protok (slika 8.5), pa bi to značilo da se i koeficijent tangencijalnog napona  $C_c$  menja pri istom protoku.

Ako se “pozaјmi” obrazac iz otpora trenja u cevi za koeficijent  $\lambda$  (6.40) za turbulentno tečenje u hrapavoj cevi:

$$\lambda = 0,185 \left(\frac{k}{D}\right)^{1/3} \quad (8.8)$$



Slika 8.5: Kod tečenja u cevi hidraulički radijus je konstantan dok kod otvorenih tokova hidraulički radijus (kao i relativna hrapavost) zavisi od dubine  $h$

<sup>4</sup>Antoine Chézy (1718 - 1798) francuski inženjer koji se bavio merenjima protoka na rekama i kanalima u okolini Pariza. Na osnovu višegodišnjih rezultata merenja, 1775. je predložio vezu između brzine i kvadratnog korena iz nagiba dna kanala (8.6)  $V = C\sqrt{RI}$  pri čemu je koeficijent  $C$  bio za reku Senu  $C = 44$ . U radovima iz 1775. se vidi da je Šezi koristio istu relaciju i za tečenje vode kroz kolektore, sa koeficijentom  $C = 17$ . Zahvaljujući Proniju (njegovom bivšem studentu, inženjeru koga je Bonaparta poslao u naučnu misiju u Egipat) koji je prvi prihvatio Šezijevu jednačinu, ona je ušla u široku upotrebu.

<sup>5</sup>Reč *koeficijent* je stavljena pod navodnike jer se ovde ne radi o pravom, bezdimenzionalnom koeficijentu. Šezijev koeficijent je dimenzionalan i o tome treba voditi računa kada se rešava jednačina (8.6).

<sup>6</sup>U uvodnim napomenama je rečeno da se pretpostavlja tečenje u kanalu u hrapavom turbulentnom režimu, što je u najvećem broju slučajeva i ispunjeno.

pa se zameni u izraz za  $C_T$ :

$$4C_T = 0,185\left(\frac{k}{4R}\right)^{1/3} \Rightarrow C_T = 0,0297\left(\frac{k}{R}\right)^{1/3}$$

dobija se brzina:

$$V = 5,8\left(\frac{R}{k}\right)^{1/6}\sqrt{2gR \cdot I_D} = 5,8\frac{\sqrt{2g}}{k^{1/6}} \cdot R^{2/3}\sqrt{I_D} \quad (8.9)$$

Urađenim smenama je postignuto da koeficijent  $5,8\frac{\sqrt{2g}}{k^{1/6}}$  više ne zavisi od hidrauličkog radijusa  $R$ , pa ni od dubine u kanalu. Umesto Šezijevog uvodi se novi koeficijent  $n$ :

$$\frac{1}{n} = 5,8\frac{\sqrt{2g}}{k^{1/6}} \quad (8.10)$$

koji se zove Maningov<sup>7</sup> “koeficijent”<sup>8</sup> hrapavosti<sup>9</sup> sa dimenzijom  $[L^{-1/3}T^1]$ . Veza Šezijevog i Maningovog koeficijenta je:

$$C_c = \frac{1}{n}R^{1/6} \quad (8.11)$$

Primenom Maningovog koeficijenta (8.10) i njegovom zamenom u jednačinu (8.9) dobija se brzina u kanalu pri jednolikom tečenju:

$$V = \frac{1}{n}R^{2/3}\sqrt{I_D} \quad (8.12)$$

<sup>7</sup>Robert Manning (1816 - 1897) irski računovodja (rodjen u Normandiji, Francuska, gde je njegov otac učestvovao u ratu) koji je radio u artiljerijskoj jedinici zaduženoj za drenažne radove. Iako bez formalne inženjerske obuke, zavoleo je hidrauliku i počeo je da radi na projektu vodosnabdevanja Belfasta. Kako je bio računovođa, problem proračuna brzine u otvorenim tokovima je rešio pragmatično, upoređivanjem 7 tada poznatih jednačina (Du Buat - 1786, Eyselwein - 1814, Weisbach - 1845, St. Venant - 1851, Neville - 1860, Darcy i Bazin - 1865, i Ganguillet i Kutter - 1869) i traženjem jednačine koja najbolje fituje njihovu srednju vrednost.

<sup>8</sup>Kao i Šezijev koeficijent, i Maningov koeficijent je dimenzionalan. Ako se koriste vrednosti za koeficijent  $n$  iz literature [31], treba obratiti pažnju u kojim jedinicama je ta vrednost data, pa u istim jedinicama uvrstiti i ostale veličine u jednačinu (8.12) odnosno (8.13). U literaturi se koristi i recipročna vrednost Maningovog koeficijenta  $1/n$  koja se naziva Štriklerov koeficijent i označava se sa  $M$  ili sa  $kS$ .

<sup>9</sup>Kod proračuna prirodnih tokova se obično podrazumeva da Maningov koeficijent osim gubitaka na trenje usled hrapavosti obuhvata i aluvijalne otpore i lokalne gubitke usled prepreka u toku (na primer drveće) pa je u takvim uslovima pravilnije  $n$  nazvati Maningov koeficijent otpora.

Ova jednačina se često naziva *Šezi-Maningova jednačina*. Protok u kanalu je:

$$Q = VA = \frac{1}{n} AR^{2/3} \sqrt{I_D} \quad (8.13)$$

Šezi-Maningova jednačina je veoma popularna u hidrotehnici. Prednosti primene Maningovog koeficijenta su:

- što  $n$  ne zavisi od hidrauličkog radijusa  $R$ , već samo od apsolutne hrapavosti  $k$ , pri čemu treba voditi računa da  $k$  nije isto za različite dubine  $h$ , već se često razlikuje za čitav red veličine,
- što se vrednosti za  $n$  mogu naći u literaturi u tablicama, gde se opisno daje stanje obloge kanala (u poslednje vreme se mogu naći i fotografije kanala):
  1. dobro zagladjen beton 0,011 - 0,013
  2. loše održavan zemljani kanal 0,035 - 0,050
  3. neobradjeni beton 0,015 - 0,018
  4. ...
- što se već dugo koristi i postoji veliko iskustvo u njenoj primeni i u odabiru koeficijenta  $n$ .

Osnovni nedostatak Maningovog koeficijenta je što to nije “pravi” koeficijent, jer ima dimenziju ( $m^{-1/3}s$ ), pa u Šezi-Maningovoj jednačini treba voditi računa o skladu dimenzionalnih veličina. Ograničenje je i u uslovu da se može primenjivati samo za razvijeno turbulentno tečenje, najčešće u opsegu brzina od 0,3 do 3 m/s. Takođe, postoji i ograničenje po nagibu dna kanala: jednačina se sme koristiti samo za male nagibe, jer je korišćen uslov  $\sin \alpha \approx \tan \alpha$ .

---

### Primer 8.2.1

Ako se Maningov koeficijent poveća dva puta, za koliko se u stvari efektivno povećala apsolutna hrapavost dna kanala  $k$ ?

Iz izraza za hrapavost (8.10) dobija se veza Maningovog koeficijenta i apsolutne hrapavosti:

$$n = \frac{k^{1/6}}{5,8\sqrt{2g}}$$

Na osnovu ovoga, sledi da se za dva puta veći Maningov koeficijent, apsolutna hrapavost povećava  $2^6$  puta, odnosno 64 puta.

Za određeni kanal nagiba dna  $I_D$ , hrapavosti  $n$  i geometrije poprečnog preseka  $A = f(h)$ ,  $R = f(h)$  za protok  $Q$  postoji samo jedna jednolika dubina i ta se dubina naziva *normalna dubina*  $h_N$ . Normalna dubina je dubina pri kojoj su uravnotežene sile težine i sila trenja. U prirodi se retko ostvaruje normalna dubina, jer lokalni poremećaji često nametnu neku drugu dubinu pri istom protoku, pa uzvodno ili nizvodno od tih poremećaja *fluidna struja teži ka normalnoj dubini* odnosno, teži ka stabilnom stanju.

Ako je poznat protok u kanalu, normalna dubina se dobija rešavanjem Šezi-Maningove jednačine (8.12) uz stavljanje indeksa  $N$  uz sve veličine koje zavise od dubine:

$$Q = \frac{1}{n} A_N R_N^{2/3} \sqrt{I_D} \tag{8.14}$$

Ova jednačina je za većinu kanala analitički nerešiva već se rešenje najčešće dobija numerički ili traženjem nule izraza:

$$\frac{nQ}{\sqrt{I_D}} - A_N R_N^{2/3} = 0$$

ili pisanjem izraza u obliku pogodnom za iteracije:

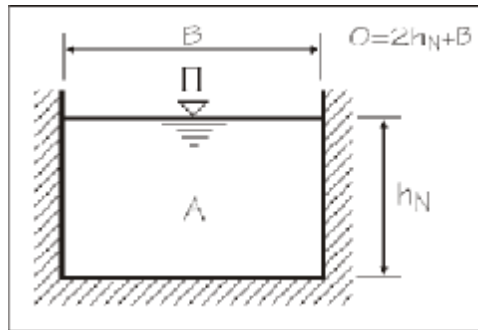
$$h_N^{(i+1)} = f(h_N^{(i)})$$

Kao prvu iteraciju  $h_N^{(1)}$  treba uzeti procenjeno približno rešenje. Na žalost, u zavisnosti od oblika funkcije  $f(h_N^{(i)})$  može se desiti da rešenje za  $h_N$  divergira. Uslov da iterativni proces konvergira ka rešenju u nekom intervalu vrednosti  $h_N$  je da je  $|df/dh_N| < 1$  na tom intervalu.

**Primer 8.2.2**

Kroz pravougaoni kanal širine  $B = 0,5$  m, hrapavosti  $n = 0,015 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$  i nagiba dna  $I_D = 0,2\%$ , teče protok  $Q = 800$  L/s. Izračunati kolika je normalna dubina? Kolika će normalna dubina biti ako je dno kanala horizontalno?

Potrebno je napisati izraz za površinu kanala  $A$  i hidraulički radijus  $R$  u funkciji dubine:



$$A_N = B h_N = 0,5 h_N$$

$$R_N = \frac{A_N}{O_N} = \frac{B h_N}{B + 2 h_N} = \frac{0,5 h_N}{0,5 + 2 h_N}$$

Protok  $Q$ , Manningov koeficijent  $n$  i nagib dna kanala  $I_D$  su konstante, pa se u Šezi-Manningovoj jednačini (8.14) mogu napisati sa leve strane izraza:

$$\frac{nQ}{\sqrt{I_D}} = A_N R_N^{2/3} \Rightarrow \frac{0,015 \times 0,8}{\sqrt{0,002}} = 0,2683 = 0,5h_N \left( \frac{0,5h_N}{0,5 + 2h_N} \right)^{2/3} \quad (8.15)$$

Izraz koji je pogodan za iteracije je:

$$h_N^{(i+1)} = \frac{0,2683}{0,5 \left( \frac{0,5h_N^{(i)}}{0,5 + 2h_N^{(i)}} \right)^{2/3}} = 0,5367 \left( \frac{0,5 + 2h_N^{(i)}}{0,5h_N^{(i)}} \right)^{2/3}$$

Ako se rešavanje počne sa prvom iteracijom za normalnu dubinu  $h_N^{(1)} = 1$  m kao rešenja se dobijaju sledeće dubine:

$$h_N = 1 \Rightarrow 1,569 \Rightarrow 1,492 \Rightarrow 1,499 \Rightarrow 1,498 \dots$$

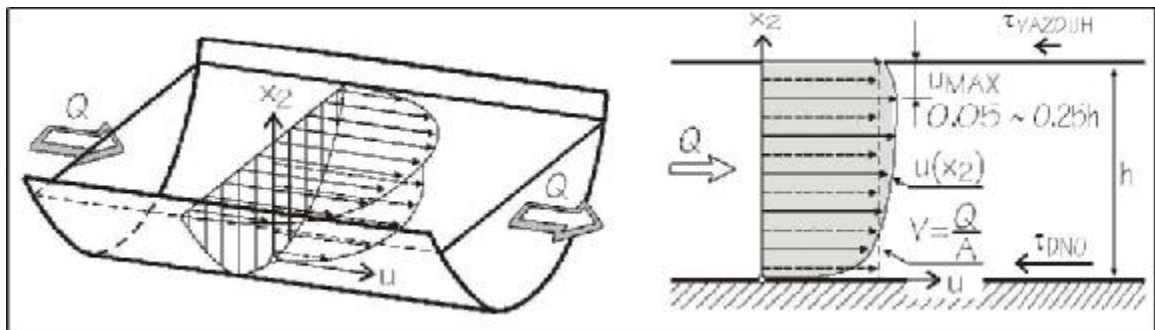
Prihvatljivo tačno rešenje se dobija kada razlika između dve uzastopne iteracije bude manja od neke određene vrednosti (na primer 1 mm).

Kod horizontalnog kanala nagib dna je  $I_D = 0$ . Leva strana izraza (8.15) je beskonačno velika pa sledi da će normalna dubina biti beskonačno velika. Drugim rečima, kod kanala sa horizontalnim dnom, ne postoji jednoliko tečenje, jer se nikada neće uspostaviti ravnoteža između sile trenja i komponente gravitacione sile u pravcu toka kanala, jednostavno zato što je vrednost komponente sile težine nula!

### 8.3 Raspored brzina u preseku

Prilikom postavljanja dinamičke jednačine (8.2) korišćena je srednja profilska brzina  $V$ . Međutim, u poprečnom preseku kanala raspored brzina nije uniforman. Uz zidove kanala, zbog delovanja viskoznosti, brzina je nula, dok je u sredini kanala brzina najveća. U zavisnosti od stepena razvijenosti turbulencije, maksimalna brzina je 10 do 20% veća od srednje profilske brzine.

Na slici 8.6, prikazan je tipičan raspored brzina u preseku. U vertikalnom preseku (desni deo slike) se vidi da se maksimalna brzina ne javlja na površini vode, već malo niže. Iako je u uvodnim napomenama rečeno da kod otvorenih tokova vazduh ne utiče na tečenje, u realnim uslovima taj uticaj postoji. Na površini fluida se javlja tangencijalni napon između fluida i vazduha  $\tau_{vazd}$  i on usporava fluidne deliće, tako da brzina  $u_{max}$  nije na slobodnoj površini. Takođe, na smanjenje površinske brzine značajan uticaj imaju i sekundarna, bočna strujanja.



Slika 8.6: Raspored brzina u preseku kod otvorenog toka - zbog delovanja tangencijalnog napona između fluida i vazduha, na površini nije maksimalna brzina

Srednja profilska brzina se definiše preko protoka kanalom  $V = Q/A$ , a protok se dobija integrisanjem brzina po celom preseku. U odnosu na određivanje protoka u cevi, gde se pretpostavlja osnosimetričan raspored brzina, i gde je dovoljno poznavati brzine u samo jednom vertikalnom preseku, kod otvorenih tokova je potrebno poznavati brzine i po širini kanala ( $x_2$ ) i po dubini (pravac  $x_3$ )<sup>10</sup>.

Primena srednje brzine  $V$  u dinamičkoj i energetske jednačini zadovoljava većinu praktičnih zadataka. Međutim, ako postoji velika lokalna neravnost brzina u preseku i ako je potrebno postići tačnije proračune, potrebno je u dinamičku jednačinu uvesti Businessov koeficijent  $\beta$  (jednačina (4.83) na strani 150), a u energetske jednačinu Koriolisov koeficijent  $\alpha$  (jednačina (4.109), na strani 165).

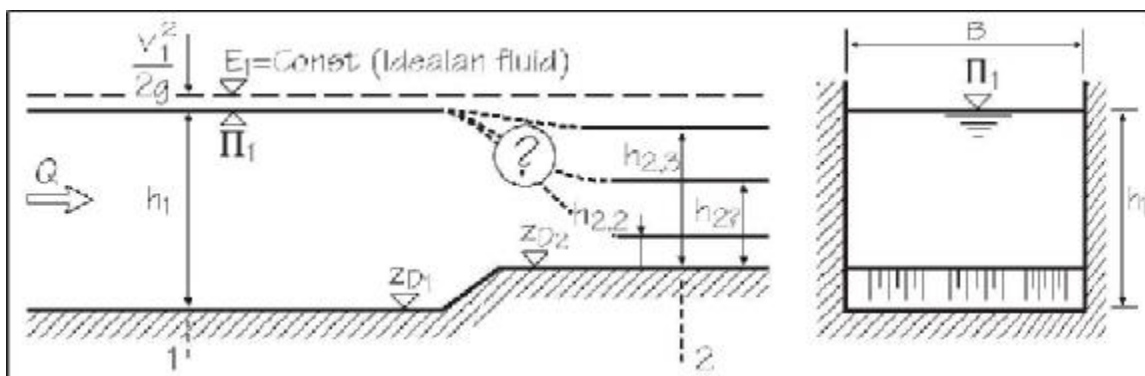
### 8.4 Specifična energija, kritična dubina

Posmatra se jednostavan slučaj promene kote dna između dva bliska preseka, pri čemu se u presecima ostvaruje hidrostatička raspodela pritiska. Pošto je u pitanju lokalna promena, gde trenje nije dominantno, može se pretpostaviti da je fluid idealan.

Ako su poznati protok i dubina u preseku 1, pitanje je kolika će biti dubina u preseku 2? Iz energetske jednačine:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow Z_{D1} + h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = Z_{D2} + h_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

<sup>10</sup>Prilikom merenja protoka u velikim rekama ili kanalima, umesto da se mere brzine u više vertikalnih preseka po dubini pa da se sumiraju te brzine, često se meri samo brzina na dubinama 0,2 i 0,8 od  $h$  u srednjem profilu, jer se kod razvijene turbulencije u tim tačkama nalazi srednja brzina  $V$ .



Slika 8.7: Kako odrediti dubinu u preseku 2 kada energetska jednačina nudi dva moguća (pozitivna) rešenja

i jednačine kontinuiteta primenjene na pravougaoni kanal širine  $B$ :

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2 \Rightarrow V_1 h_1 B_1 = V_2 h_2 B_2$$

dobija se:

$$h_1 + \frac{Q^2}{2gB^2 h_1^2} = \Delta Z + h_2 + \frac{Q^2}{2gB^2 h_2^2} \tag{8.16}$$

Dubina  $h_2$  je nepoznata veličina i dobija se iz jednačine oblika:

$$h_2 + \frac{\text{Const}2}{h_2^2} = \text{Const}1 \tag{8.17}$$

Jednačina je trećeg stepena i ima tri rešenja: prvo rešenje je negativno  $h_{2,1} < 0$  i sigurno ne odgovara zadatku. Druga dva rešenja su pozitivna  $0 < h_{2,2} < h_{2,3} < h_1$ . Kako su oba rešenja moguća, pitanje je koje je tačno rešenje? Da bi se ova dilema razrešila, potrebni su dodatni uslovi i objašnjenja ponašanja fluida u različitim režimima tečenja.

### 8.4.1 Specifična energija

Uvodi se novi pojam *specifična energija*<sup>11</sup> koji predstavlja *energiju u odnosu na dno kanala*. Specifična energija je zbir dubine i brzinske visine:

$$e = h + \frac{V^2}{2g} \text{ [m]} \tag{8.18}$$

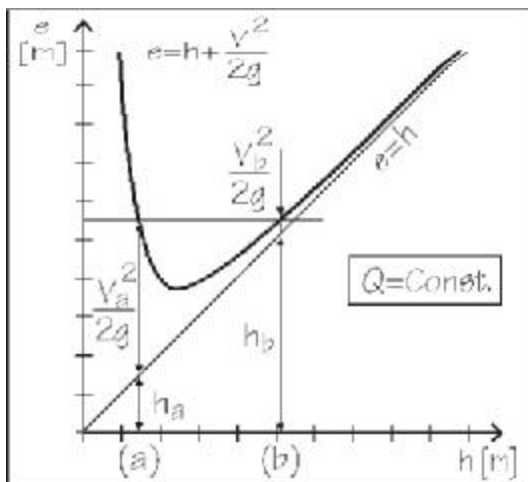
<sup>11</sup>Pojam je prvi uveo 1912. godine Boris Bahmečev (Boris Alexandrovich Bakhmeteff) (1880 - 1951) ruski inženjer, naučnik, diplomata i vlasnik fabrike šibica! Kao profesor na Kolumbija univerzitetu, bio je među prvim osnivačima moderne teorije mehanike fluida, ali je istovremeno učestvovao i u formiranju "Arhiva Ruske istorije i kulture".

pa je ukupna energija u preseku:

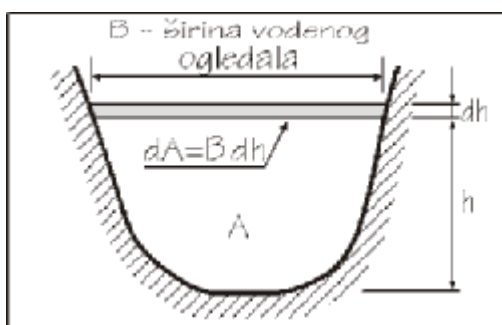
$$E = \Pi + \frac{V^2}{2g} = Z_D + h + \frac{V^2}{2g} = Z_D + e \tag{8.19}$$

Čemu služi ovaj novi pojam? Objašnjenje se može dobiti ako se analizira izgled funkcije  $e = e(h)$ . Prvo će se napisati izraz sa protokom  $Q$  umesto brzinom  $V$ :

$$e = h + \frac{V^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2gA^2(h)} \tag{8.20}$$



Slika 8.8: Dijagram specifične energije



Slika 8.9: Obračun izvoda površine preseka po dubini

Ako dubina  $h$  teži u beskonačno,  $h \rightarrow \infty \Rightarrow e = h + 0$ , a ako dubina  $h$  teži nuli,  $h \rightarrow 0 \Rightarrow e = h + \infty$ . Odatle sledi da funkcija ima dve asimptote, pa postoji i minimum funkcije. Dubina pri kojoj funkcija ima minimum se određuje iz uslova  $de/dh = 0$ :

$$\frac{de}{dh} = 1 + \frac{Q^2}{2g} \left( -\frac{2}{A^3} \right) \frac{dA}{dh} = 0 \tag{8.21}$$

gde je iskorišćena pretpostavka da je protok  $Q$  konstantan, a da je površina  $A$  složena funkcija.

U opštem slučaju površina kanala  $A$  je složena funkcija dubine  $h$  i dužine kanala  $x_1$ :

$$dA = \frac{\partial A}{\partial h} dh + \frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 \tag{8.22}$$

U polaznim pretpostavkama je rečeno da se posmatra tečenje samo u prizmatičnim kanalima gde je  $\partial A / \partial x_1 = 0$ , pa je moguće  $\partial A / \partial h$  zameniti sa  $dA / dh$ . Sa slike 8.9, vidi se da je  $dA = B dh \Rightarrow dA / dh = B$ , pa se izvod specifične energije po dubini (8.21) može napisati:

$$\frac{de}{dh} = 1 - \frac{Q^2}{g} \frac{1}{A^3} B = 0 \Rightarrow \frac{Q^2 B}{g A^3} = 1 \tag{8.23}$$



Za poznati protok  $Q$  i geometriju kanala  $B(h)$  i  $A(h)$  rešenjem dobijenog izraza po nepoznatoj dubini  $h$ , dobija se dubina pri kojoj *tok ima minimum specifične energije*.

Sličan izraz je već korišćen u poglavlju 5.1.5, *Standardni bezdimenzionalni brojevi u Mehanici fluida*, za bezdimenzionalnu gravitaciju (Frudov broj). Ako se u izraz (8.23), umesto protoka  $Q$ , stavi brzina  $V = Q/A$ :

$$\frac{Q^2 B}{g A^3} = \frac{V^2 A^2 B}{g A^3} = \frac{V^2}{g \frac{A}{B}} = \frac{V^2}{g H} = 1 \quad (8.24)$$

gde je odnos  $A/B$  zamenjen nekom reprezentativnom dubinom  $H$ , dobija se Frudov broj:

$$Fr = \frac{V^2}{g H}$$

Dobijeni uslov za minimum specifične energije (8.23) se sada može napisati:

$$Fr = \frac{Q^2 B}{g A^3} = 1 \quad (8.25)$$

Analizom dijagrama specifične energije (slika 8.8) može se zaključiti da u jednolikom tečenju, kada je dubina duž kanala konstantna i jednaka normalnoj dubini (slika 8.4), specifična energija  $e$  je **takođe konstantna dok ukupna energija  $E$**  postepeno pada niz fluidnu struju. Kod nejednolikog tečenja, *zbog promene dubine duž kanala specifična energija niz tok fluida može i da raste i da pada, dok ukupna energija može samo da opada*.

### 8.4.2 Kritična dubina

Rešavanjem jednačine (8.25) za konkretan kanal i poznati protok, dobija se dubina pri kojoj fluid ima minimalnu specifičnu energiju. Ta dubina se zove *kritična dubina* i označava se sa  $h_{KR}$ .

---

#### Primer 8.4.1

Kolika je kritična dubina za pravougaoni kanal, širine  $B = 12$  cm, kroz koji protiče  $Q = 3$  L/s?

Za pravougaoni kanal, proticajna površina je:  $A = Bh$ . Uslov za kritičnu dubinu je:

$$\frac{Q^2 B}{g A^3} = 1 \Rightarrow \frac{Q^2 B}{g B^3 h_{KR}^3} = 1 \Rightarrow h_{KR} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g B^2}}$$

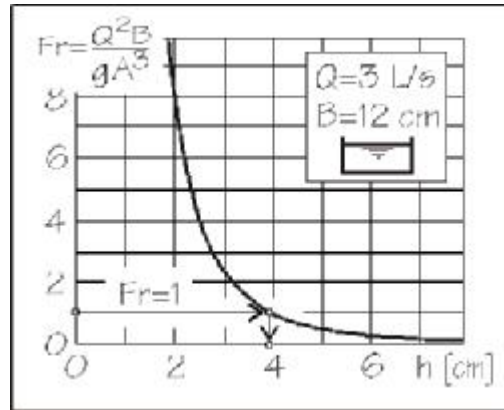
Zamenom vrednosti, dobija se kritična dubina:

$$h_{KR} = \sqrt[3]{\frac{0,003^2}{9,81 \times 0,12^2}} = 0,04 \text{ m}$$

Vrednost minimuma specifične energije  $e$  je:

$$e = h + \frac{V^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2g B^2 h^2}$$

$$e = 0,04 + \frac{0,003^2}{2 \times 9,81 \times 0,12^2 \times 0,04^2} = 0,06 \text{ m}$$



Za pravougaoni kanal kritična dubina može da se odredi analitički. U opštem slučaju, kod složene geometrije korita, to nije moguće, pa se rešenje dobija ili numerički ili grafički, crtanjem zavisnosti  $Fr(h)$  kao što je to prikazano na slici.

Interesantno je uporediti vrednost kritične dubine i vrednost minimuma specifične energije. Za pravougaoni kanal, može se napisati sledeće:

$$\frac{Q^2 B}{g A^3} = \frac{V^2 B}{g A} = \frac{V^2 B}{g B h_{KR}} = \frac{V^2}{g h_{KR}} = 1 \tag{8.26}$$

odakle sledi da je kritična dubina  $h_{KR} = \frac{V^2}{g}$  odnosno da je  $\frac{V^2}{2g} = \frac{1}{2} h_{KR}$ . Ako se to zameni u izraz za specifičnu energiju, dobija se da je njen minimum:

$$e_{min} = h_{KR} + \frac{V_{KR}^2}{2g} = h_{KR} + \frac{1}{2} h_{KR} = \frac{3}{2} h_{KR} \tag{8.27}$$

što je i dobijeno u prethodnom primeru 8.4.1: kritična dubina u pravougaonom kanalu je bila  $h_{KR} = 0,04 \text{ m}$ , a specifična energija  $e = e_{min} = 0,06 \text{ m}$ .

Za kanal trougaonog poprečnog preseka (slika 8.10) sa nagibom bokova 1:1, kritična dubina se kao i za pravougaoni kanal može odrediti analitički iz uslova:

$$\frac{Q^2 B}{g A^3} = \frac{Q^2 2h}{g h^6} = 1$$

### 8.4. SPECIFIČNA ENERGIJA, KRITIČNA DUBINA

pa je kritična dubina:

$$h_{KR} = \sqrt[5]{\frac{2Q^2}{g}}$$

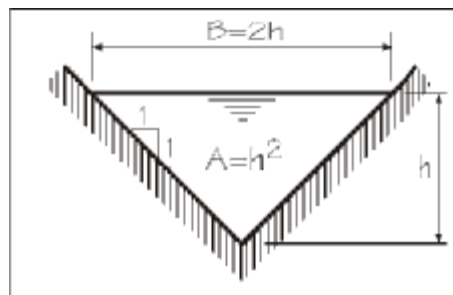
Veza između kritične dubine i specifične energije se dobija iz:

$$\frac{V^2}{g \frac{A}{B}} = \frac{V^2}{g \frac{h^2}{2h}} = \frac{2V^2}{gh} = 1$$

$$h_{KR} = \frac{2V^2}{g} \Rightarrow \frac{1}{4}h_{KR} = \frac{V^2}{2g} \tag{8.28}$$

pa je minimum specifične energije u trougaonom kanalu:

$$e_{min} = h_{KR} + \frac{V_{KR}^2}{2g} = h_{KR} + \frac{1}{4}h_{KR} = \frac{5}{4}h_{KR} \tag{8.29}$$



Slika 8.10: Geometrija trougaonog kanala

#### Primer 8.4.2

Za pravougaoni kanal širine 12 cm nacrtati dijagram zavisnosti protoka od dubine, za konstantnu specifičnu energiju  $e_o = 6$  cm.

Funkcija  $Q(h)$  se dobija iz jednačine za specifičnu energiju, stavljajući da je ona konstantna  $e = e_o$  (za pravougaoni presek):

$$e_o = h + \frac{Q^2}{2gB^2h^2} \Rightarrow Q^2 = 2gB^2h^2(e_o - h)$$

Da bi se analizirala funkcija, posmatra se ponašanje funkcije za:

$$h = e_o \Rightarrow Q = 0$$

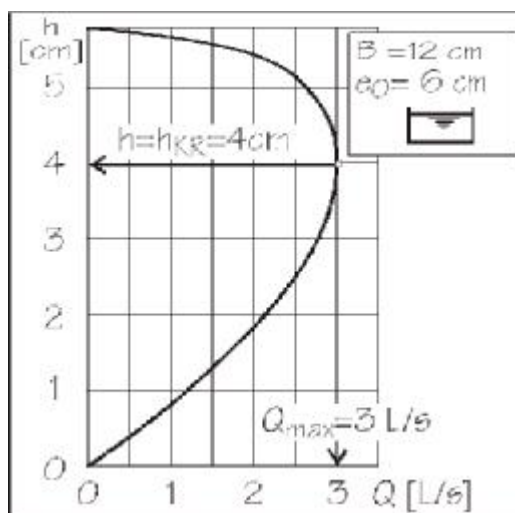
$$h = 0 \Rightarrow Q = 0$$

Pošto postoji maksimum funkcije, traži se prvi izvod protoka po dubini:

$$2Q \frac{dQ}{dh} = 4gB^2he_o - 6gB^2h^2$$

$$\frac{dQ}{dh} = 0 \Rightarrow 4he_o - 6h^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{2}{3}e_o$$

odakle se dobija da je ekstremna vrednost protoka pri dubini  $h = \frac{2}{3}e_o$ , a to je upravo pri kritičnoj dubini  $h = h_{KR}$ .



Za date podatke u zadatku moguće je konstruisati prikazani dijagram. Sa dijagrama se vidi da je maksimalan protok  $Q_{max} = 3 \text{ L/s}$ , što je i bilo dato u prethodnim primerima.

### 8.4.3 Kritičan nagib dna kanala

Kritična dubina zavisi od protoka i geometrije poprečnog preseka kanala, dok normalna dubina zavisi od protoka, geometrije, hrapavosti i nagiba dna. Za konstantan protok u kanalu, u kome se može menjati nagib dna (na primer, na laboratorijskom kanalu), kritična dubina će biti konstantna, a normalna dubina će biti manja za veće nagibe a veća za manje nagibe dna. Nagib dna pri kome su normalna i kritična dubina iste, zove se *kritičan nagib*.

Iz Šezi-Maningove jednačine (8.14), napisane za normalnu dubinu, lako se može odrediti koliki je kritičan nagib dna:

$$Q = \frac{1}{n} A_N R_N^{2/3} \sqrt{I_D} \Rightarrow I_{D,KR} = \left( \frac{nQ}{A_{KR} R_{KR}^{2/3}} \right)^2 \quad (8.30)$$

gde su  $A_{KR}$  i  $R_{KR}$  proticajna površina i hidraulički radijus za kritičnu dubinu  $h_{KR}$ .

#### Primer 8.4.3

U prethodnom primeru 8.4.1 je određena kritična dubina za pravougaoni kanal, pri protoku od  $Q = 3 \text{ L/s}$ . Koliki je kritičan nagib dna ako je Maningov koeficijent trenja  $n = 0,014 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ ? Da li taj kritični nagib zavisi od Maningovog koeficijenta trenja?

Kritična dubina se dobija iz uslova da je  $Fr = 1$  (izračunata u prethodnom primeru)  $h_{KR} = 0,04 \text{ m}$ . Za tu dubinu, proticajna površina je:

$$A_{KR} = h_{KR} B = 0,04 \times 0,12 = 0,0048 \text{ m}^2$$

a hidraulički radijus:

$$R_{KR} = \frac{A_{KR}}{O_{KR}} = \frac{A_{KR}}{2h_{KR} + B} = \frac{0,0048}{2 \times 0,04 + 0,12} = 0,024 \text{ m}$$

pa je kritični nagib (prema jednačini (8.30)):

$$I_{D,KR} = \left( \frac{nQ}{A_{KR} R_{KR}^{2/3}} \right)^2 = \left( \frac{0,014 \times 0,003}{0,0048 \times 0,024^{2/3}} \right)^2 = 0,0105 \text{ m/m} = 1,05\%$$

Povećanjem koeficijenta trenja (na primer, za lošije održavan kanal, sa travom koja se probija kroz betonsku oblogu), kritični nagib se takođe povećava i to sa kvadratom odnosa hrapavosti.

### 8.4.4 Miran i buran režim tečenja

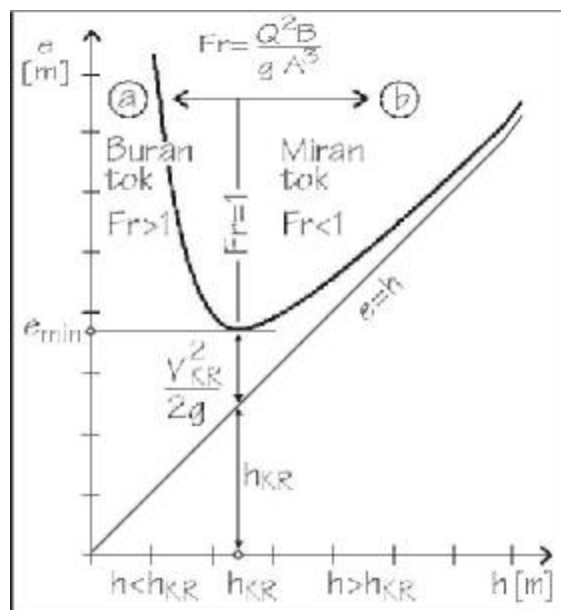
Dijagram specifične energije prikazan na slici 8.11, jasno pokazuje da kritična dubina (uslov  $Fr = 1$ ) razdvaja tok na dve karakteristične oblasti. Zašto je to tako, može se videti ako se Frudov broj, dat izrazom (8.25), pomnoži sa  $(\rho A)$  i napiše u obliku sila:

$$Fr = \frac{V^2}{gH} = \frac{\rho V^2 A}{\rho g A H} = \frac{\rho Q V}{\rho g V} = \frac{I}{G} \quad (8.31)$$

Dobijeni količnik pokazuje da je **Frudov broj odnos inercijalnih i gravitacionih sila**. Veći Frudov broj znači da su u toku dominantni inercijalni, brzinski uticaji, a manji broj znači da u toku preovlađuju mirni, gravitacioni uticaji.

Frudov broj se može shvatiti i kao pokazatelj kinematičnosti toka, kao odnos između kinetičke ( $V^2/2g$ ) i potencijalne ( $h$ ) energije: Frudov broj je veći što je dubina manja, a brzinska visina veća. U oblasti (a) levo od kritične dubine (slika 8.11) veći deo energije je u brzinskoj visini, pa je Frudov broj  $Fr > 1$ . Pošto su brzine (inercijalne sile) dominantne, režim tečenja u ovoj oblasti se zove *buran režim* ili silovit režim<sup>12</sup>. U oblasti (b) desno od kritične dubine, u kojoj je veći deo energije u potencijalnoj energiji (dubini) Frudov broj je  $Fr < 1$ . Zbog malih brzina, a velikih dubina, ovaj režim tečenja se zove *miran režim*<sup>13</sup>.

Brzina koja se javlja pri kritičnoj dubini se zove *kritična brzina*. Ta brzina odgovara brzini prostiranja poremećaja, analogno stišljivim fluidima i kritičnoj brzini zvuka, koja razdvaja dve oblasti različitog ponašanja fluida



Slika 8.11: Kritična dubina je granica između burnog i mirnog toka

<sup>12</sup>Na engleskom: supercritical ili rapid flow.

<sup>13</sup>Na engleskom: subcritical ili tranquil flow.

(odnosno, Frudov broj kod otvorenih tokova je analogan Mahovom broju kod stišljivih fluida). Kod pravougaonog kanala, kritična brzina je:

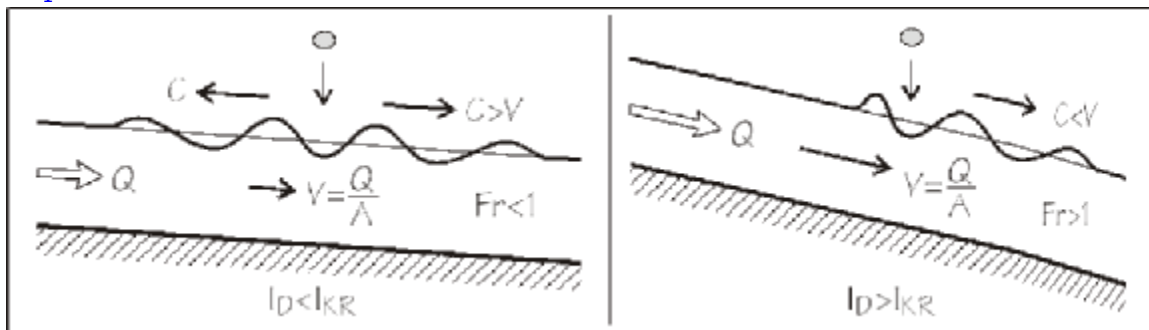
$$\frac{V^2}{gh} = 1 \Rightarrow V = c = \sqrt{gh} \tag{8.32}$$

a kod ostalih kanala je  $c = \sqrt{g \frac{A}{B}}$ . Upravo zbog shvatanja kritične brzine kao granične brzine, Frudov broj se često piše i kao odnos trenutne i granične brzine<sup>14</sup>:

$$Fr = \frac{V^2}{c^2} \tag{8.33}$$

**Primer 8.4.4**

Posmatra se tok u dva kanala, gde su isti protoci, ali su nagibi dna različiti. U prvom kanalu je nagib dna manji od kritičnog (jednačina (8.30)), pa je normalna dubina veća od kritične, a drugom kanalu je nagib dna veći od kritičnog pa je normalna dubina manja od kritične. Ako se u kanal unese poremećaj (baci kamen), kako će se prostirati talasi duž kanala?



U prvom slučaju je miran režim tečenja, dubina je veća od kritične, pa je brzina toka  $V$  manja od kritične brzine, odnosno, od brzine  $c$  kojom putuju poremećaji kroz tok. Zbog toga se poremećaji prostiru i uzvodno.

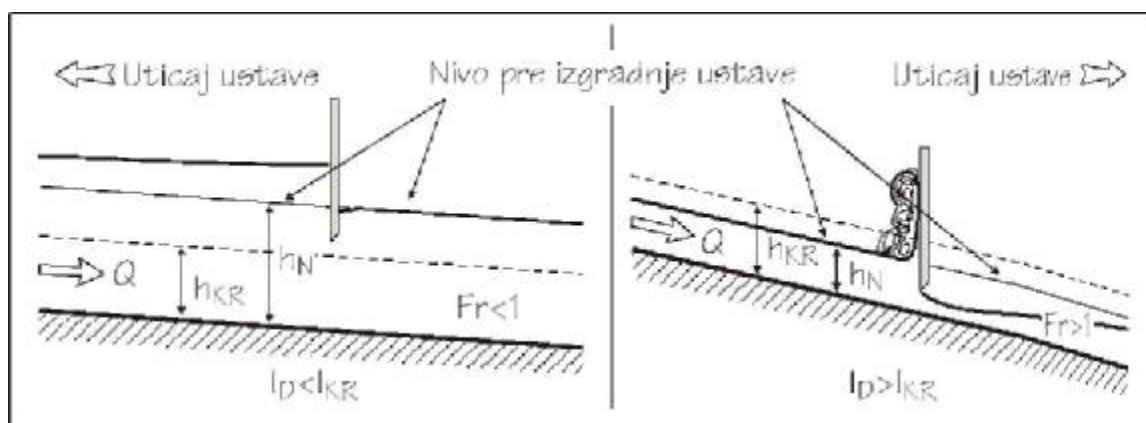
U drugom slučaju, gde je buran režim, brzina toka je veća od brzine prostiranja poremećaja, tako da poremećaj ne može da utiče na uzvodne preseke, već putuje **samo nizvodno**.

Kao zaključak iz datog primera, može se izvući opšte pravilo o prostiranjima uticaja u mirnom i burnom režimu tečenja:

- Mirno tečenje je podložno *nizvodnoj kontroli* jer poremećaj može da putuje uzvodno - kaže se da u mirnom režimu nizvodni granični uslovi odlučuju o uzvodnim dubinama.

<sup>14</sup>U anglosaksonskoj literaturi koristi se koren iz Frudovog broja:  $Fr = \frac{V}{c}$ .

- Kod burnog tečenja poremećaj se prostire nizvodno, pa fluid ne zna šta se dešava nizvodno. *Uzvodni granični uslov je kontrolni*, odlučuje o **nizvodnim dubinama**.



Slika 8.12: Ako se stavi ustava u tok sa normalnom dubinom (jednoliko tečenje), ukoliko je bilo mirno tečenje, ustava će izazivati promene dubina uzvodno (leva slika) a u burnom tečenju, nizvodno (desna slika)

Na slici 8.12, ilustrovan je primer kako tok različito reaguje na prepreku, u zavisnosti od režima tečenja. U oba primera se u tok, koji je bio jednolik (sa normalnom dubinom), stavlja oštroična prepreka. U prvom slučaju, u mirnom režimu, napraviće se uspor uzvodno od prepreke, koji će se prostirati daleko uzvodno od ustave, dok će nizvodno tok praktično odmah da se vrati na prethodnu, normalnu dubinu<sup>15</sup>, jer tu dubinu “kontroliše” neki daleki nizvodni presek.

U drugom slučaju (desni deo slike 8.12) tok je u burnom režimu, pa se poremećaj ustave oseća samo nizvodno. Uzvodno, tok će lokalno da “udara” u prepreku, da se podigne pretvarajući veliku kinetičku energiju u potencijalnu, ali se to neće osećati u uzvodnim deonicama kanala.

#### Primer 8.4.5

Posmatra se tečenje idealnog fluida, ulaz iz jezera ( $\Pi_{REZ} = \text{Const.}$ ) u kanal. Koliki je protok u kanalu? Kolika je dubina na početku kanala, ukoliko nije pod usporom sa nizvodne strane?

<sup>15</sup>Pod uslovom da nije promenjen režim tečenja, da ustava nije napravila toliki poremećaj da se nizvodno od nje ne pojavi buran tok.

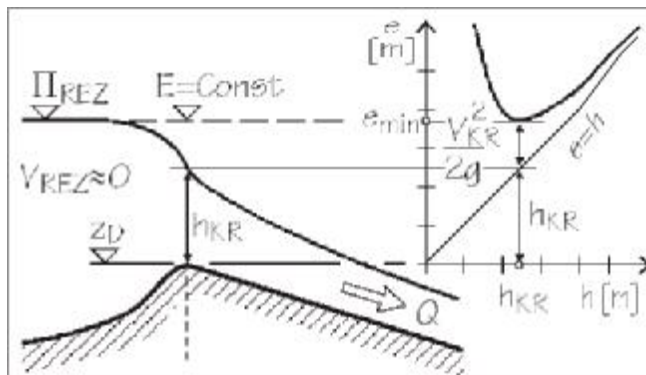
Za presek na samom početku kanala se može napisati energetska jednačina:

$$E = z + h + \frac{Q^2}{2gb^2h^2}$$

$$E = z + e = \text{Const.} / \frac{d}{dx}$$

Diferenciranjem po  $x$  dobija se promena linije nivoa duž kanala:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{de}{dh} \frac{dh}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} + (1 - Fr) \frac{dh}{dx} = 0 \quad (8.34)$$



Na samom prevoju je  $dz/dx = 0$ . Pošto je  $dh/dx \neq 0$  sledi da je  $(1 - Fr) = 0$  pa je dubina na prevoju  $h = h_{KR}$ .

Uzvodno od prevoja je nagib dna  $dz/dx > 0$ . Dubine su ovde veće od kritične  $h > h_{KR}$  (miran režim) pa je  $(1 - Fr) > 0$  a odatle sledi da je  $dh/dx < 0$ . Dubine počevši od kritične u uzvodnom smeru postepeno rastu.

Nizvodno od prevoja je nagib dna  $dz/dx < 0$  a nagib linije nivoa ostaje kao i sa uzvodne strane  $dh/dx < 0$ . Član  $(1 - Fr)$  mora biti negativan pa odatle sledi da su dubine  $h < h_{KR}$  (buran režim).

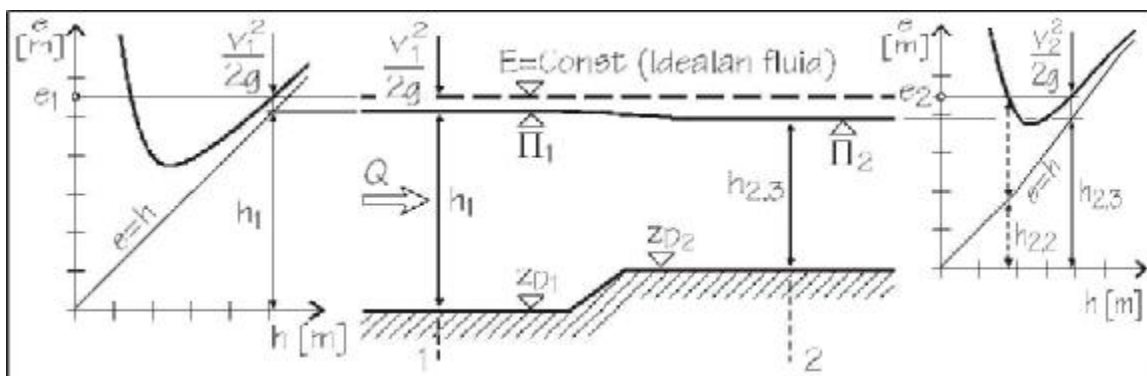
Presek na prevoju se zove *kontrolni presek* i tu se javlja kritična dubina. Od te kritične dubine uticaji se prenose uzvodno jer je miran režim i nizvodno jer je buran režim. Uzvodne dubine ne mogu uticati na nizvodne, niti mogu nizvodne dubine da utiču na tečenje u uzvodnom delu kanala.

Na početku ovog poglavlja 8.4 (strana 346), postavljeno je pitanje koliki će biti nivo vode u preseku 2, kod blagog podizanja dna (slika 8.7). Energetska jednačina se sada može napisati korišćenjem specifičnih energija:

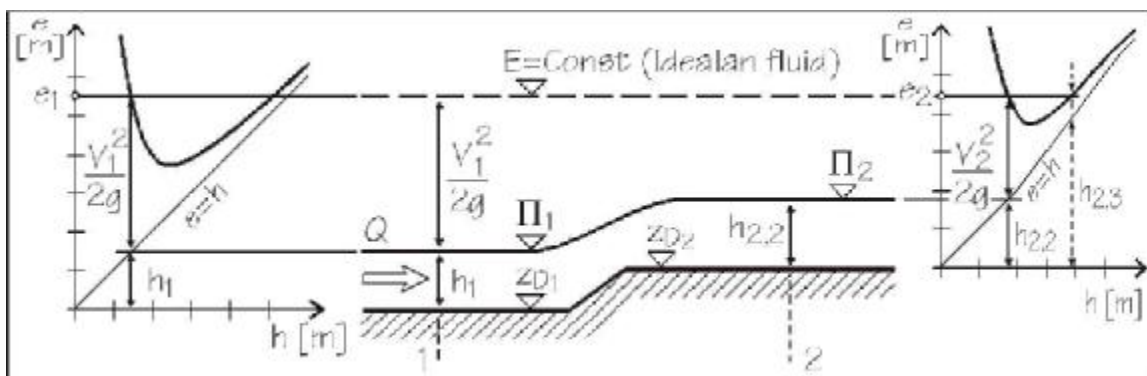
$$E_1 = E_2 \quad \Rightarrow \quad e_1 = \Delta z + e_2 \quad \Rightarrow \quad e_2 = e_1 - \Delta z \quad (8.35)$$

Ako se u preseku 2 nacrtaju dijagram specifične energije, ali podignut za  $\Delta z$ , i linija energije produži do dijagrama, dobija se  $e_2$ , specifična energija u preseku 2. Ta specifična energija se može ostvariti pri *dve alternativne dubine*,  $h_{2,2}$  i  $h_{2,3}$ . Upravo te dve dubine su bile rešenja jednačine (8.17). Dilema koja dubina se ostvaruje u preseku 2 se rešava razmatranjem režima tečenja: *uzima se ono rešenje koja ima isti režim tečenja kao polazna dubina  $h_1$* . Ako je polazna dubina  $h_1$  bila u mirnom režimu, kao na slici 8.13, u preseku 2 će se ostvariti dubina  $h_{2,3}$ . Ako je u preseku 1 bio buran režim (slika 8.14), dubina u preseku 2 će biti  $h_{2,2}$ .





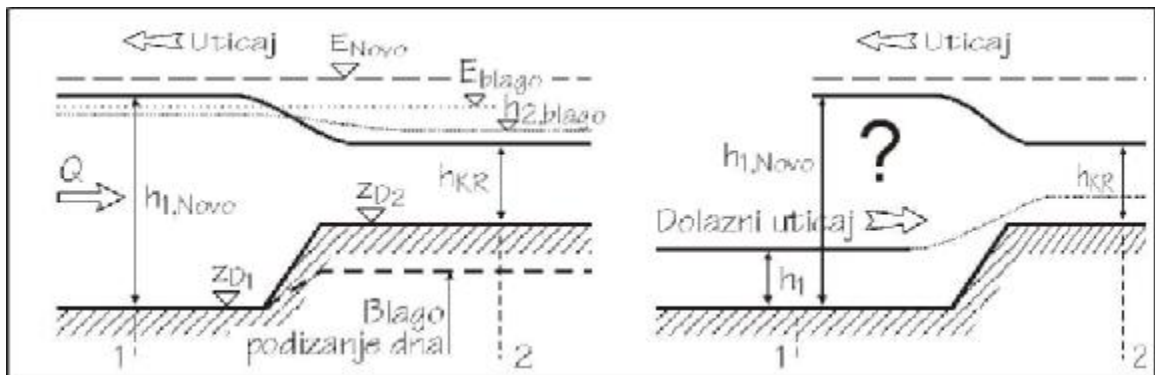
Slika 8.13: Rešenje problema postavljenog na slici 8.7: u preseku 2 režim tečenja ne može da se promeni, tako da se usvaja ono rešenje u kome je dubina  $h_2 > h_{KR}$



Slika 8.14: Ako je dubina u preseku 1 bila u burnom režimu, tada će i dubina u preseku 2 ostati u burnom režimu

Šta će se dogoditi u slučaju velikog podizanja dna, kada je  $\Delta z$  toliko da se u jednačini (8.35) dobije specifična energija u preseku 2 manja od minimalne,  $e_2 < e_{min}$ ? Takvo podizanje dna više nije *blago* i pretpostavka da će ukupna energija  $E$  ostati nepromenjena više nije korektna. Presek 2 počinje da utiče na tok i on sada postaje *novi kontrolni presek*. Na slici 8.15, prikazan je takav slučaj, zajedno sa varijantom blagog podizanja dna (linije dna, nivoa i energetska linija dati tačkasto). Pošto je presek 2 kontrolni, u njemu će se formirati kritična dubina, jer pri toj dubini fluid ima minimum specifične energije  $e_2 = e_{min}$ , odnosno, sa kritičnom dubinom fluid ima maksimalan protok (kao što je pokazano u primeru 8.4.2)<sup>16</sup>.

<sup>16</sup>Zašto je u preseku 2 kritična dubina se može objasniti i jednostavnije. Ako se fluidnom toku nametne takav presek gde fluid treba da podigne svoju ukupnu energiju da bi taj presek savladao - a to je primer naglog podizanja dna ili naglog bočnog suženja, i ako fluid može sâm da donese odluku (nivoi nisu diktirani nekim nizvodnim uslovima), on će taj



Slika 8.15: Ako se kota dna značajno podigne, u preseku 2 se formira kritična dubina a u preseku 1 miran tok bez obzira na uzvodne uslove

Ukupna energija u preseku 2 mora biti veća nego u slučaju malog podizanja kote dna, tako da u uzvodnom preseku 1 dubina mora porasti. Ona se računa iz energetske jednačine, a kao rešenje se uzima dubina  $h_{1,Novo}$  u oblasti mirnog tečenja (opet će biti na raspolaganju tri rešenja, jer se dobija kubna jednačina), *bez obzira da li je dolazni tok ranije bio u mirnom ili burnom režimu*. Objašnjenje zašto je uzvodno od kritične dubine uvek miran režim je dato u primeru 8.4.5, gde je analizirana diferencijalna jednačina linije nivoa (8.34).

Šta se događa uzvodno od preseka 1? Ako je kanal bio sa malim nagibom dna, u mirnom režimu, povećanje dubine  $h_{1,Novo}$  će se propagirati uzvodno, u skladu sa pravilom da se u mirnom toku uticaji prostiru uzvodno (levi deo slike 8.15). Ako je u dovodnom kanalu tok bio buran (desni deo slike 8.15), doći će do “sukoba uticaja”: uzvodni tok bi trebalo da “gospodari” kanalom jer se uticaji u burnom toku prostiru niz fluidnu struju, dok je rešenje sa  $h_{1,Novo}$  nametnulo sada miran tok sa uzvodnim prostiranjem uticaja. Kako će izgledati linija nivoa za sada nije moguće odrediti. Ta dilema će se razrešiti u narednom poglavlju.

## 8.5 Hidraulički skok

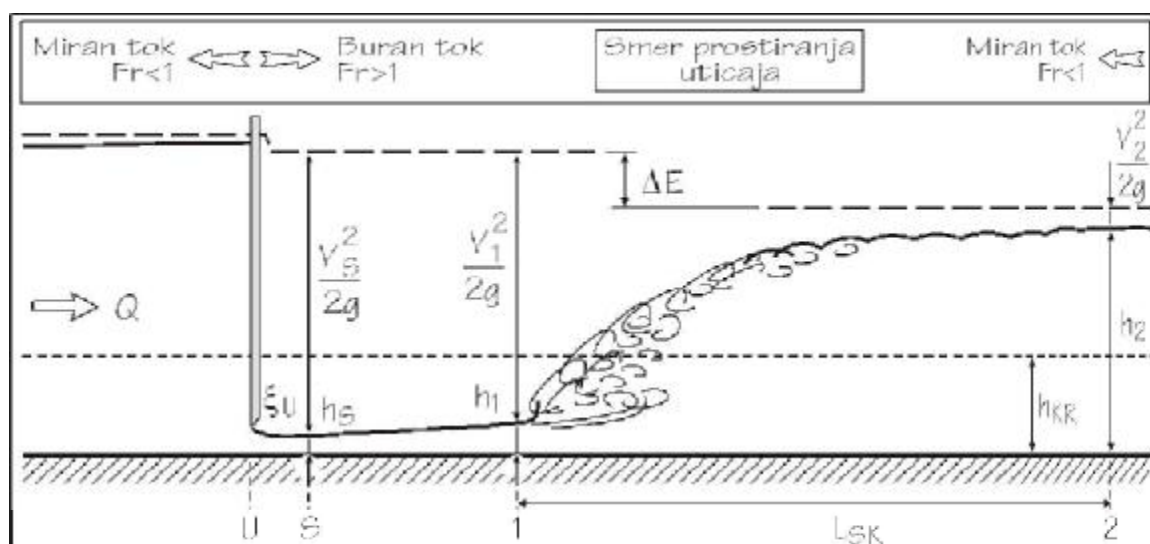
Miran i buran režim tečenja se razlikuju po pravcima prostiranja uticaja. Miran režim tečenja ( $Fr < 1$ ) je podložan nizvodnoj kontroli i uticaji se prostiru uz fluidnu struju. U burnom režimu ( $Fr > 1$ ) uticaji se prostiru niz fluidnu struju, a uzvodni presek kontroliše dubine nizvodno. Šta se do-

---

presek da savalada sa minimumom specifične energije, odnosno sa takvom dubinom pri kojoj će imati maksimalan protok. Ta dubina je kritična dubina.

gadja kada dodje do “sukoba uticaja”, kao što je to prikazano u primeru na slici 8.15, desno? Kako izgleda linija nivoa u tom slučaju?

Posmatra se horizontalni prizmatični kanal u kome se na neki način formira buran tok ( $h_1 < h_{KR}$ ), a sa nizvodne strane se diktira miran tok ( $h_2 > h_{KR}$ ). Takav tok se, na primer, može ostvariti u veoma dugačkom kanalu sa malim nagibom dna, kada se u nekom uzvodnom presku spusti ustava<sup>17</sup> tako da njen otvor bude manji od kritične dubine (slika 8.16). Uzvodno od ustave dolazi do podizanja nivoa i povećanja energije fluida, jer fluid treba da savlada nametnutu prepreku.



Slika 8.16: Ako je otvor ustave ispod kritične dubine, ustava nameće nizvodno buran tok u kanalu gde bi inače bio miran tok, određen nekim nizvodnim uslovom: prelaz iz nametnutog burnog toka u miran je isključivo kroz hidraulički skok, u kome se gubi veliki deo energije

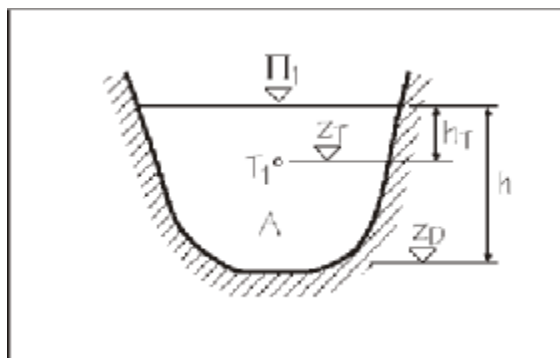
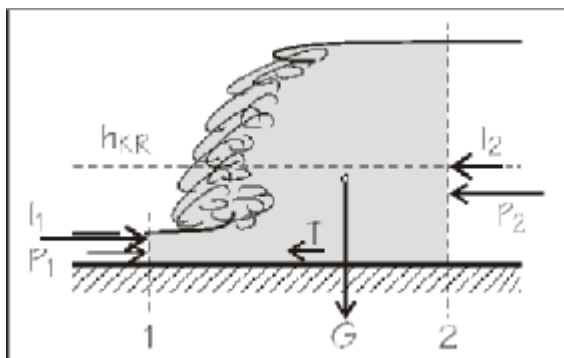
Prelaz iz burnog režima u miran je *moгуć jedino kroz diskontinuitet*, u kome će se “uništiti” značajan deo nagomilane energije uzvodno od ustave. Takav diskontinuitet u nivou se zove *hidraulički skok* i on se događa lokalno, na relativno kratkoj dužini kanala. Dubine  $h_1$  (u burnom) i  $h_2$  (u mirnom režimu) se nazivaju *spregnute dubine*<sup>18</sup>, jer se pri jednom protoku samo te dve dubine mogu međusobno “spregnuti” u skok.

Na slici 8.16, prikazan je hidraulički skok u kome se, kroz intenzivno vrtloženje, nivo povećava sa  $h_1$  na  $h_2$ . Dužina hidrauličkog skoka  $L_{SK}$  je obično 4 do 5 dužina  $h_2$  [10]. Hidraulički skok je lokalni fenomen, u kome se

<sup>17</sup>Ustava kao kontrolni organ će biti detaljnije razmatrana u poglavlju 8.8 *Isticanje ispod ustave*.

<sup>18</sup>U literaturi se koristi još i termin *konjugovane dubine*.

kroz vrtloge izgubi znatna energija<sup>19</sup> i za njegovo rešavanje potrebno je primeniti dinamičku jednačinu, jednačinu sila na konačnu masu fluida između preseka 1 i 2 (slika 8.16).



Slika 8.17: Sile koje deluju na konačnu masu fluida, za preseke ispred hidrauličkog skoka ( $h_1 < h_{KR}$ ) i iza skoka ( $h_2 > h_{KR}$ )

Slika 8.18: Uz proračun hidrostatičke sile pritiska za presek 1

Za rešavanje hidrauličkog skoka pretpostavlja se da sila trenja nije značajna, jer se skok događa “lokalno”, na maloj dužini kanala. Ako se skok formira na deonici kanala, gde je horizontalno dno komponenta sile težine u pravcu toka je nula, a ako je nagib dna relativno mali, tada je komponenta sile težine u pravcu toka zanemarljiva u odnosu na ostale sile. Takođe, ako je kanal prizmatičan, sila konture će biti nula. Iz uslova da skok “stoji” na jednom mestu, dobija se ravnoteža preostalih sila u pravcu toka (horizontalnih sila):

$$P_1 + I_1 = P_2 + I_2 \quad \text{pri čemu je} \quad G_x = 0 \quad \text{i} \quad T \approx 0 \quad (8.36)$$

Uz pretpostavku da u presecima 1 i 2 važi hidrostatička raspodela pritiska, sile pritiska su<sup>20</sup>:

$$P_1 = p_{T1} A_1 = \rho g (\Pi_1 - Z_{T1}) A_1 = \rho g h_{T1} A_1$$

$$P_2 = p_{T2} A_2 = \rho g (\Pi_2 - Z_{T2}) A_2 = \rho g h_{T2} A_2 \quad (8.37)$$

<sup>19</sup>Hidraulički skok kod idealnog fluida nema smisla jer je upravo suština skoka da uništi višak energije koju fluid ima u burnom režimu.

<sup>20</sup>Sile pritiska su detaljno obrađene u poglavlju *Hidrostatika*. Zbog jednostavnijeg pisanja jednačine, član  $(\Pi - z_T)$  se često menja sa  $h_T$ , visinom od težišta do površine. Međutim, ponekada se u rešavanju zadataka uzme pogrešno rastojanje, od dna kanala do težišta!

### 8.5. HIDRAULIČKI SKOK

a inercijalne sile u preseccima 1 i 2 su (uz korišćenje jednačine kontinuiteta  $V_1A_1 = V_2A_2$ ):

$$I_1 = \rho Q V_1 = \rho \frac{Q^2}{A_1} \quad I_2 = \rho Q V_2 = \rho \frac{Q^2}{A_2} \quad (8.38)$$

U jednačini (8.36), kada se zamene sile (8.37) i (8.38), tri veličine su međusobno povezane: dubine  $h_1$  i  $h_2$  i protok  $Q$ . Dve od te tri veličine moraju biti poznate, a rešavanjem jednačine se dobija treća.

#### Primer 8.5.1

Nacrtati funkciju skoka za pravougaoni kanal širine 12 cm kojim teče voda gustine  $\rho = 1 \text{ kg/dm}^3$  protokom  $Q = 3 \text{ L/s}$ .

Sila pritiska za date uslove, u funkciji dubine  $h$  je:

$$P = \rho g h_T A = \rho g \frac{h}{2} B h = 9810 \times 0,12 \times \frac{h^2}{2} = 588,6 h^2$$

a inercijalna sila za dati protok, u funkciji dubine  $h$  je:

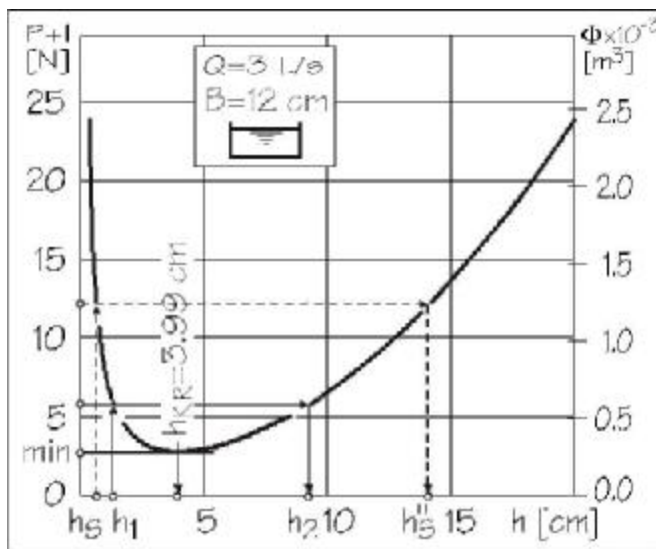
$$I = \rho Q V = \rho \frac{Q^2}{A} = \rho \frac{Q^2}{B h}$$

$$I = 1000 \frac{0,003^2}{0,12 h} = \frac{0,075}{h}$$

Crta se dijagram  $P+I$  u funkciji od  $h$ :

$$P + I = 588,6 h^2 + \frac{0,075}{h}$$

Na dijagramu su upisane i vrednosti funkcije skoka  $\Phi$  u formi specifične sile (desna strana), kao i minimum funkcije ( $h_{KR}$ ).



Ako su poznate dve spregnute dubine, jednačina (8.36) se rešava po protoku i dobija se samo jedno pozitivno rešenje. Međutim, kada se jednačina rešava po jednoj od dubina, dobijaju se dva pozitivna i moguća rešenja: polazna, poznata dubina (u primeru 8.5.1, na datom dijagramu dubina  $h_S$ ) i druga, spregnuta, nepoznata dubina  $h''_S$ , koja se nalazi u suprotnom režimu u odnosu na poznatu.

Sa dijagrama datog u primeru 8.5.1, vidi se da je minimum funkcije skoka za kritičnu dubinu. To znači da *jedino kritična dubina nema svoju spregnutu*

*dubinu*, što je i logično, jer dve spregnute dubine moraju biti u različitim režimima tečenja.

U literaturi se jednačina hidrauličkog skoka (8.36) često piše i u formi specifične sile. U izrazu za silu pritiska (8.37) proizvod visine težišta i površine preseka je statički moment:

$$P_1 = \rho g h_{T1} A_1 = \rho g S_1 \quad (8.39)$$

Ako se suma svih sila u horizontalnom pravcu podeli sa  $(\rho g)$  dobija se:

$$\rho g S_1 + \rho \frac{Q^2}{A_1} = \rho g S_2 + \rho \frac{Q^2}{A_2} \Rightarrow S_1 + \frac{Q^2}{g A_1} = S_2 + \frac{Q^2}{g A_2} \quad (8.40)$$

gde je  $S + \frac{Q^2}{gA} = \Phi$  funkcija hidrauličkog skoka (ili specifična sila) koja je funkcija dubine jer je  $S = S(h)$  i  $A = A(h)$ . Jednačina hidrauličkog skoka sada glasi:

$$\Phi(h_1) = \Phi(h_2) \quad (8.41)$$

Funkcija skoka  $\Phi$  je dvoznačna funkcija jer dve spregnute dubine  $h_S$  i  $h''_S$  zadovoljavaju jednačinu. Minimum funkcije koji se dobija iz uslova:

$$\frac{d\Phi}{dh} = 0 \Rightarrow \Phi_{min} \text{ za } h = h_{KR}$$

se ostvaruje pri kritičnoj dubini, kao što je i pokazano u primeru 8.5.1.

Kada se odrede dve spregnute dubine  $h_1$  i  $h_2$  (slika 8.16), gubitak energije  $\Delta E$  se može odrediti koristeći energetska jednačinu za preseke 1 i 2:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta E_{1-2} \quad (8.42)$$

Gubitak energije mora biti pozitivan. Ako se jednačina skoka pokuša primeniti u "pogrešnom" smeru, od  $h_1$ , koja je u mirnom režimu ka  $h_2$  u burnom režimu, dinamička jednačina (8.41) će dati rešenje koje je brojčano ispravno. Srećom, energetska jednačina (8.42) će pokazati da je to nemoguće, jer bi se dobio *negativan gubitak energije*, odnosno, *dobitak energije u skoku!*

### Primer 8.5.2

U kanalu trapeznog preseka širine dna  $b = 0,5$  m i nagiba bokova  $1 : m = 1 : 0,8$ , za  $Q = 1,2$  m<sup>3</sup>/s odrediti spregnutu dubinu dubini  $h_1 = 0,45$  m.

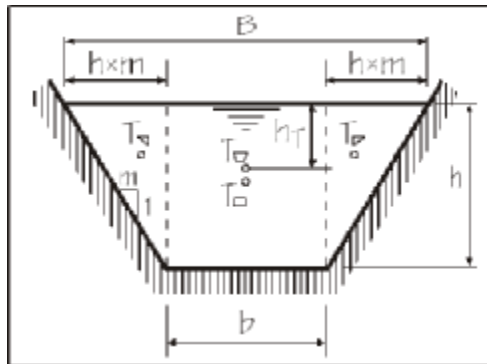
### 8.5. HIDRAULIČKI SKOK

Za dati kanal potrebno je napisati površinu kanala i položaj težišta u funkciji od dubine:

$$B = b + 2 h m = 0,5 + 1,6 h$$

$$A = \frac{b+B}{2}h = b h + h^2 m = 0,5h + 0,8h^2$$

Prvi korak u rešavanju hidrauličkog skoka je uvek proračun kritične dubine. Iz uslova da je  $Fr = 1$  dobija se:



$$\frac{Q^2 B_{KR}}{g A_{KR}^3} = \frac{Q^2 (0,5 + 1,6 h_{KR})}{g (0,5 h_{KR} + 0,8 h_{KR}^2)^3} = 1 \Rightarrow h_{KR} = 0,608 \text{ m}$$

Gornja jednačina se rešava iteracijama, gde je potrebno sa jedne strane izraza izvući iz imenioca član<sup>21</sup>  $h_{KR}$ .

Za proračun hidrauličkog skoka je potreban položaj težišta trapeza.

$$h_T = \frac{b h \frac{h}{2} + 2 \frac{h^2 m h}{2 \cdot 3}}{A}$$

Statički moment za trapezni presek je:

$$S = h_T A = \frac{b h \frac{h}{2} + 2 \frac{h^2 m h}{2 \cdot 3}}{A} A = 0,5 b h^2 + 0,333 h^3 m = 0,25 h^2 + 0,2667 h^3$$

a specifična inercijalna sila je:

$$\frac{Q^2}{g A} = \frac{1,2^2}{9,81 (0,5 h + 0,8 h^2)} = \frac{0,1468}{0,5 h + 0,8 h^2}$$

U preseku 1 ukupna specifična sila za  $h_1 = 0,45 \text{ m}$  je:

$$S_1 + \frac{Q^2}{g A_1} = 0,25 h_1^2 + 0,2667 h_1^3 + \frac{0,1468}{0,5 h_1 + 0,8 h_1^2} = 0,45426$$

pa je izraz koji treba rešiti po spregnutoj dubini  $h_2$ :

$$0,25 h_2^2 + 0,2667 h_2^3 + \frac{0,1468}{0,5 h_2 + 0,8 h_2^2} = 0,45426$$

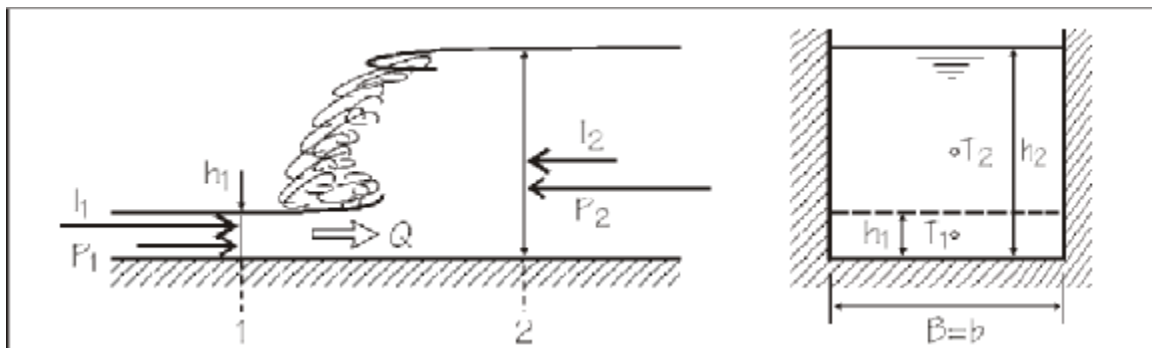
<sup>21</sup>U izrazu za kritičnu dubinu, članovi  $h_{KR}$  i  $h_{KR}$  predstavljaju jednu istu dubinu. Član u imeniocu  $h_{KR}$  je različito napisan samo da bi se pokazalo po kom članu je rešena jednačina. Ako se pokuša rešavanje iteracijama po nekom od drugih članova, rešenje će divergirati.

Izraz može da se napiše u formi pogodnoj za iteracije:

$$h_2 = \sqrt[3]{1,7032 - 0,9374h_2^2 - \frac{0,55043}{0,5h_2 + 0,8h_2^2}}$$

Početna dubina za rešavanje mora biti u mirnom režimu, veća od kritične dubine. Za  $h_2 = 1$  dobijaju se redom sledeća rešenja:  $1 \Rightarrow 0,699 \Rightarrow 0,794 \Rightarrow 0,794$  tako da je finalno rešenje za spregnutu dubinu  $h_2 = 0,794$  m.

U prethodnom primeru je dobijena funkcija skoka, koja se ne može rešiti analitički, već je rešena približno, numerički. Kod pravougaonog kanala je, međutim, moguće izvesti analitički obrazac za spregnute dubine.



Slika 8.19: Hidraulički skok u pravougaonom horizontalnom kanalu

U pravougaonom horizontalnom kanalu širine  $B$  i protoka  $Q$  (slika 8.19) za dubinu u burnom režimu  $h_1$  sile u preseku 1 su:

$$P_1 = \rho g h_{T_1} A_1 = \rho g \frac{h_1}{2} B h_1 \quad I_1 = \rho Q V_1 = \rho \frac{Q^2}{h_1 B}$$

Iz uslova sume horizontalnih sila, dobija se:

$$P_1 + I_1 = P_2 + I_2 \quad \Rightarrow \quad \rho \frac{Q^2}{B} \left( \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) = \rho g \frac{B}{2} (h_2^2 - h_1^2)$$

Ako se izraz podeli sa gustinom i srede se razlike kvadrata, dobija se:

$$\frac{Q^2}{B} \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2} = \frac{gB}{2} (h_2 - h_1)(h_2 + h_1)$$

Izraz može da se podeli sa  $B(h_2 - h_1)$ :

$$\frac{Q^2}{B^2} \frac{1}{h_1 h_2} = \frac{g}{2} (h_2 + h_1) \tag{8.43}$$



## 8.5. HIDRAULIČKI SKOK

365

a zatim da se pomnoži sa  $\frac{2}{g}h_1h_2$ :

$$\frac{2Q^2}{gB^2} = h_1h_2^2 + h_1^2h_2 \quad (8.44)$$

Ako se želi izračunati spregnuta dubina  $h_2$ , potrebno je prethodni izraz podeliti sa  $\frac{1}{h_1^3}$ , pri čemu je  $h_1 > 0$ , pa se dobija:

$$\frac{2Q^2}{gB^2h_1^3} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{h_1}\right) \quad (8.45)$$

U preseku 1, u pravougaonom kanalu Frudov broj je:

$$Fr_1 = \frac{Q^2B}{gA^3} = \frac{Q^2B}{gB^3h_1^3} = \frac{Q^2}{gB^2h_1^3}$$

pa se prethodna jednačina (8.45) može napisati u obliku kvadratne jednačine:

$$2Fr_1 = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{h_1}\right) \Rightarrow \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{h_1}\right) - 2Fr_1 = 0 \quad (8.46)$$

Rešavanjem kvadratne jednačine dobija se nepoznata spregnuta dubina  $h_2$ :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8Fr_1} - 1 \right) \Rightarrow h_2 = \frac{h_1}{2} \left( \sqrt{1 + 8Fr_1} - 1 \right) \quad (8.47)$$

Na sličan način je moguće dobiti iz izraza (8.44) nepoznatu dubinu  $h_1$  ako je poznata dubina  $h_2$ , samo je potrebno izraz podeliti sa  $\frac{1}{h_2^3}$ . Sređivanjem, dobiće se tražena dubina:

$$h_1 = \frac{h_2}{2} \left( \sqrt{1 + 8Fr_2} - 1 \right) \quad (8.48)$$

Do potpuno istih izraza bi se došlo da je jednačina (8.43) podeljena sa  $\frac{h_2}{h_1}$  i u nju uvršćena brzina  $V_1$  (ili podeljena sa  $\frac{h_1}{h_2}$  i uvršćena brzina  $V_2$ ):

$$V_i = \frac{Q}{A_i} = \frac{Q}{Bh_i}$$

$$V_1^2 = \frac{gh_2(h_1 + h_2)}{2h_1} \quad V_2^2 = \frac{gh_1(h_1 + h_2)}{2h_2}$$

Sredjivanjem izraza, uz uslov da je (samo za pravougaoni kanal) Frudov broj  $Fr_1 = \frac{V_1^2}{gh_1}$ , dobija se kvadratna jednačina kao i (8.46), čije je rešenje izraz (8.47).

Često se u izrazu za spregnutu dubinu u pravougaonom kanalu umesto Frudovog broja u preseku 1 (ili preseku 2) koristi sledeći odnos:

$$Fr_1 = \frac{Q^2 B}{gA_1^3} = \left( \frac{h_{KR}}{h_1} \right)^3 \quad Fr_2 = \frac{Q^2 B}{gA_2^3} = \left( \frac{h_{KR}}{h_2} \right)^3 \quad (8.49)$$

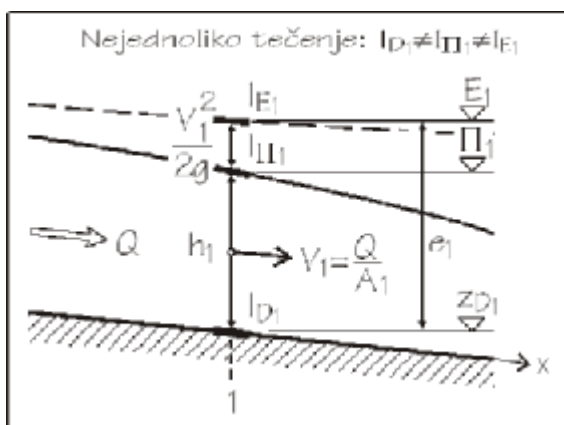
Do izraza se dolazi zamenom rešenja za kritičnu dubinu u pravougaonom kanalu:

$$Fr = 1 \quad \Rightarrow \quad h_{KR}^3 = \frac{Q^2}{gB^2}$$

u izraz za Frudov broj u preseku 1 (slično je i za presek 2):

$$Fr_1 = \frac{Q^2 B}{gA_1^3} = \frac{Q^2 B}{gB^3 h_1^3} = \frac{Q^2}{gB^2 h_1^3} = \frac{h_{KR}^3}{h_1^3} = \left( \frac{h_{KR}}{h_1} \right)^3 \quad (8.50)$$

## 8.6 Nejednoliko tečenje (blago promenljivo)



Slika 8.20: Nagibi dna,  $\Pi$  linije i  $E$  linije pri nejednolikom tečenju nisu

isti

Pošto su dubine u presecima različite, različite su i brzine, pa su u dinamičkoj jednačini svi članovi različiti od nule. Deljenjem sa  $\rho g A \Delta x$  dobija se izraz:

$$-\frac{\Delta h}{\Delta x} - \frac{\Delta z_D}{\Delta x} - \frac{\tau}{\rho g R} = \frac{Q}{gA} \frac{\Delta V}{\Delta x} \quad (8.52)$$

Nejednoliko blago promenljivo tečenje karakteriše postepena promena dubine duž kanala, pri čemu *ne dolazi do promene režima tečenja*. Na slici 8.3, na strani 339, sa leve strane pokazano je takvo tečenje i za taj slučaj je, uz pretpostavku da je kanal prizmatičan, a protok konstantan, ispisana dinamička jednačina (8.2) [11]:

$$\begin{aligned} -\Delta h \rho g A - \rho g A \Delta z_D - \tau O \Delta x &= \\ &= \rho Q \Delta V \end{aligned} \quad (8.51)$$

Za prizmatični kanal dubina  $h$ , kota dna  $z_D$  i srednja profilska brzina<sup>22</sup>  $V$  zavise samo od dužine  $x$ , pa se konačne razlike mogu zameniti diferencijalima:

$$-\frac{dh}{dx} - \frac{dz_D}{dx} - \frac{\tau}{\rho g R} = \frac{Q}{gA} \frac{dV}{dx} = \frac{V}{g} \frac{dV}{dx} \quad (8.53)$$

U poslednjem članu je  $Q/A$  zamenjen sa srednjom brzinom  $V$ . Ako se taj član prebaci sa leve strane i grupišu se svi izvodi po  $x$ , dobija se izvod ukupne energije  $E$ , odnosno, nagib linije energije  $I_E$ :

$$-\frac{d}{dx} \left( h + z_D + \frac{V^2}{2g} \right) = -\frac{dE}{dx} = I_E = \frac{\tau}{\rho g R} \quad (8.54)$$

Isti izraz za nagib linije energije bio je dobijen i kod jednolikog tečenja (8.5) samo što je tamo korišćen nagib dna  $I_D$ , umesto nagiba energije  $I_E$ . Slično kao i kod jednolikog tečenja i ovde se može napisati Šezi-Maningova jednačina za nejednoliko tečenje:

$$Q = \frac{1}{n} A_1 R_1^{2/3} \sqrt{I_{E_1}} \quad (8.55)$$

koja važi za jedan presek (slika 8.20) bez obzira na trend promene dubine. Još jednom se naglašava da jednačina (8.55) važi samo u uslovima *blagih promena sa ustaljenim protokom*. U slučajevima naglih promena protoka, kao što je slučaj putovanja talasa kanalom, za istu dubinu razlikuju se protoci u periodu porasta talasa i u periodu opadanja talasa, tako da je potrebno u Šezi-Maningovu jednačinu uvesti korekciju za neustaljenost.

### 8.6.1 Diferencijalna jednačina linije nivoa

Jednačina koja opisuje promenu linije nivoa duž jedne prizmatične deonice kanala sa konstantnim nagibom dna se može dobiti sređivanjem jednačine (8.52), odnosno (8.53), po članu  $dh/dx$ . Potrebno je prvo srediti član sa  $dV/dx$  tako da se eliminiše brzina, a uvede promena proticajne površine po kanalu:

$$\frac{Q}{gA} \frac{dV}{dx} = \frac{Q}{gA} \frac{d}{dx} \left( \frac{Q}{A} \right) = \frac{Q}{gA} Q \left( -\frac{1}{A^2} \frac{dA}{dx} \right) = -\frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dx} \quad (8.56)$$

<sup>22</sup>Stvarna brzina u nekoj tački preseka zavisi od dubine i udaljenja od ivice kanala, ali se ovde radi sa srednjom profilskom brzinom  $V = Q/A$ , koja je konstantna po preseku.

a zatim zameniti  $dA/dx$  sa  $B dh/dx$  (već korišćeno prilikom izvođenja jednačine za kritičnu dubinu (8.22)). Ako se u izraz uvede i Frudov broj, dobija se:

$$-\frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dx} = -\frac{Q^2 B}{gA^3} \frac{dh}{dx} = -Fr \frac{dh}{dx} \quad (8.57)$$

Diferencijalna jednačina (8.53) se može srediti tako što se uvede nagib dna  $I_D = -dz/dx$ , zameni nagib linije energije sa (8.54) i stavi (8.57):

$$-\frac{dh}{dx} + I_D - I_E + Fr \frac{dh}{dx} = 0 \quad (8.58)$$

pa njenim rešavanjem po  $dh/dx$  se dobija *diferencijalna jednačina linije nivoa za blago promenljivo tečenje*:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{I_D - I_E}{1 - Fr} \quad (8.59)$$

Dobijena diferencijalna jednačina linije nivoa je nelinearna, jer su i nagib linije energije i Frudov broj nelinearne funkcije od dubine:

$$I_E(h) = \left( \frac{nQ}{AR^{2/3}} \right)^2 \quad Fr(h) = \frac{Q^2 B}{gA^3} \quad (8.60)$$

gde su  $A = A(h)$ ,  $R = R(h)$  i  $B = B(h)$ .

Diferencijalna jednačina (8.59) nema analitičkog rešenja, već se rešava približnim numeričkim metodama. Rešenje jednačine zavisi od graničnih uslova, pa je potrebno liniju nivoa prvo ispitati, proveriti režim tečenja i odrediti pravce prostiranja uticaja. Pošto se jednačina rešava približno, od jednog do drugog preseka duž kanala, pravac rešavanja treba da bude u pravcu prostiranja uticaja.

### 8.6.2 Rešavanje diferencijalne jednačine linije nivoa

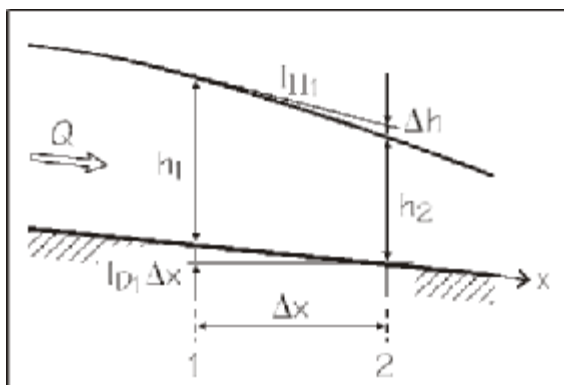
Za numeričko rešavanje diferencijalne jednačine linije nivoa (8.59) uobičajeno je da se koristi tzv. modifikovan Ojlerov metod, gde se diferencijalni priraštaj menja konačnom razlikom:

$$\frac{dh}{dx} \approx \frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta h}{\Delta x} = f(h)$$

kada  $\lim \Delta x \rightarrow 0$ . Desni deo diferencijalne jednačine (8.59), je funkcija samo dubine  $f(h)$ :

$$f(h) = \frac{I_D - I_E}{1 - Fr}$$

jer su nagib energije  $I_E = I_E(h)$  i Frudov broj  $Fr = Fr(h)$  funkcije samo dubine  $h$  a ne i dužine kanala  $x$ . U uslovima promenljive dubine  $h$  pitanje je na osnovu koje dubine izračunati  $f(h)$ ?



Slika 8.21: Kontinualna promena dubine i aproksimacija u dva preseka

Na slici 8.21, prikazana je deonica kanala sa nejednolikim tečenjem. Numeričkim rešavanjem linije nivoa, dobijaju se dubine u presecima 1 i 2. Vrednost funkcije  $f(h)$  između dva preseka se mora aproksimovati na osnovu vrednosti dubina u presecima.

Jedna mogućnost aproksimacije je da se uzme njihova srednja vrednost (ovakva aproksimacija se naziva *trapezna metoda* ili *metoda srednje tačke*):

$$f(h) \approx \frac{1}{2}(f(h_1) + f(h_2)) \tag{8.61}$$

Diferencijalna jednačina linije nivoa u diferencnom obliku je tada:

$$\frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}(f(h_1) + f(h_2)) \tag{8.62}$$

pa je za poznatu dubinu u preseku 1 moguće odrediti nepoznatu dubinu:

$$h_2 = \frac{f(h_1) + f(h_2)}{2}(x_2 - x_1) + h_1 \tag{8.63}$$

Kako se rešava dobijena jednačina? Na slici 8.22, dat je početak toka u kanalu velikog nagiba dna  $I_D$ . Za protok  $Q$  poznata je početna dubina<sup>23</sup>  $h_1$  na mestu  $x_1$ . U tom preseku se, prema (8.60), mogu izračunati nagib linije energije  $I_E$  i Frudov broj  $Fr$ .

Na mestu  $x_2$  (koje korisnik sam bira) nepoznata dubina  $h_2$  se računa iz jednačine (8.63). Međutim, u ovom izrazu dubina  $h_2$  nije poznata! Dubina tek treba da se izračuna, a sa desne strane izraza treba izračunati vrednost funkcije  $f(h_2)$  (vrednost izraza  $\frac{I_D - I_E}{1 - Fr}$  za nepoznatu dubinu  $h_2$ ). Rešenje je u iterativnom postupku: prvo se pretpostavi nizvodna dubina<sup>24</sup>  $h_2^{[0]}$  (indeks

<sup>23</sup>Kasnije, u narednim poglavljima će se videti da je početna dubina jednaka kritičnoj dubini, odnosno, da prilikom numeričkog rešavanja diferencijalne jednačine nivoa, treba za proračun u preseku  $x_1$  uzeti dubinu koja je malo manja od kritične jer je nagib kanala veći od kritičnog.

<sup>24</sup>Pretpostavljena dubina mora biti fizički moguća. U narednom poglavlju će se analizirati mogući oblici linije nivoa, u zavisnosti od graničnih uslova.

[0] označava nultu iteraciju), pa se izračuna vrednost funkcije  $f(h_2^{[0]})$ .

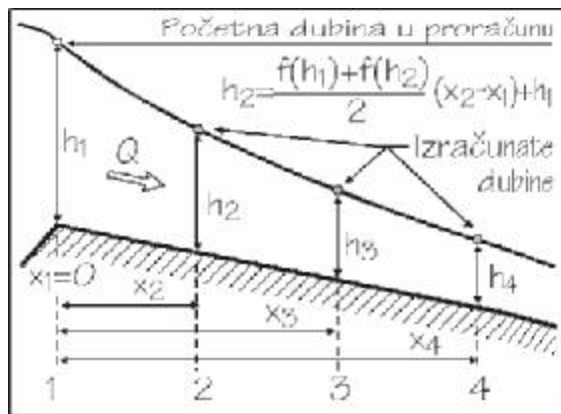
Rešavanjem jednačine (8.63) dobija se nova vrednost za dubinu  $h_2^{[1]}$ . Pomoću te vrednosti se ponovo izračuna funkcija  $f(h_2^{[1]})$ , pa nova iteracija dubine  $h_2^{[2]}$ . Ceo postupak se ponavlja sve dok razlike između dve sukcesivne iteracije rešenja dubine  $h_2$  ne budu manje od neke zadate greške  $|h_2^{[i+1]} - h_2^{[i]}| < \epsilon$ .

Iterativan proračun je veoma zahtevan, ali je pogodan za programiranje. Povoljno u proračunu je što korisnik sam određuje mesta gde želi da izračuna dubine, pri čemu se mora ispoštovati uslov da između dva račun-ska preseka promena nivoa bude relativno mala.

Za proračun linije nivoa, bez računara, pogodnije je da se rešava inverzan oblik jednačine (8.62), gde se za poznatu dubinu  $h_1$  i željenu dubinu  $h_2$  računa mesto  $x_2$ , gde se ta željena dubina ostvaruje:

$$x_2 - x_1 = \frac{h_2 - h_1}{0,5(f(h_1) + f(h_2))} \Rightarrow x_2 = \frac{h_2 - h_1}{0,5(f(h_1) + f(h_2))} + x_1 \quad (8.64)$$

U napisanoj varijanti rešavanja diferencijalne jednačine, poznate su dubine  $h_1$  i  $h_2$ , pa samim tim i vrednosti funkcija  $f(h_1)$  i  $f(h_2)$ , tako da se direktno dobija mesto  $x_2$  gde se ostvaruje zadata dubina  $h_2$ . Naravno, postoji i određeni nedostatak ovakvog pristupa: mora se tačno znati oblik linije nivoa koji se računa. Traženo  $h_2$  mora biti takvo da ima fizičkog smisla u datim graničnim uslovima. Zbog toga je potrebno da se obavi prvo analiza mogućeg oblika linije nivoa u kanalu i da se unapred "skicira" rešenje.



Slika 8.22: Približno rešavanje diferencijalne jednačine linije nivoa

## 8.7 Oblici linije nivoa kod nejednolikog tečenja

Diferencijalna jednačina koja opisuje liniju nivoa kod blago promenljivog tečenja (8.59), pri konstantnom protoku  $Q = \text{Const.}$  daje mogući spektar rešenja u zavisnosti od režima tečenja i odnosa trenutne dubine prema normalnoj dubini. U nastavku će se analizirati oblici linije nivoa za različite uslove tečenja.

### 8.7.1 Nagib linije energije jednak nagibu dna

Kada su nagibi linije energije i dna isti  $I_E = I_D$ , to je slučaj jednolikog tečenja sa normalnom dubinom  $h = h_N = \text{Const.}$  Diferencijalna jednačina (8.59) postaje:

$$\frac{dh}{dx} = 0$$

bez obzira na režim tečenja i pokazuje da nema promene dubine duž kanala.

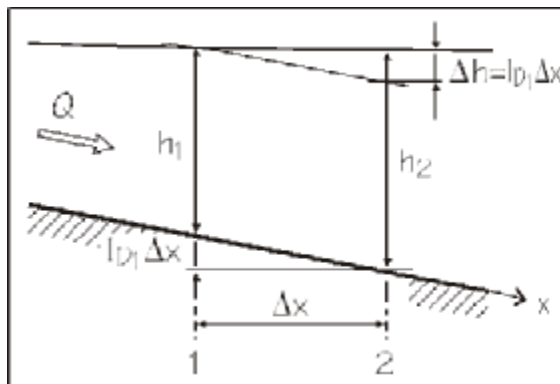
Za nagib energije koji teži nagibu dna  $I_E \rightarrow I_D$  dubina teži normalnoj dubini  $h \rightarrow h_N$ . Ako je  $I_E < I_D$ , tada je  $h > h_N$ , a za  $I_E > I_D$  dubina je  $h < h_N$ .

### 8.7.2 Velika dubina u kanalu

Kada dubina u kanalu u pravcu toka raste  $h \rightarrow +\infty$ , tada brzina opada  $V \rightarrow 0$ , pa Frudov broj  $Fr \rightarrow 0$  teži nuli kao i nagib linije energije  $I_E \rightarrow 0$ . Diferencijalna jednačina (8.59) tada ima oblik:

$$\frac{dh}{dx} = I_D$$

što znači da dubina ima horizontalnu tangentu (slika 8.23).



Slika 8.23: Pri velikim dubinama u nizvodnom pravcu nivo vode teži ka horizontali

### 8.7.3 Dubina jednaka kritičnoj a različita od normalne

U poglavlju 8.4.3, definisan je kritični nagib dna kanala  $I_{KR}$  kao nagib pri kome su jednake normalna i kritična dubina  $h_N = h_{KR}$  (jednačina (8.30)). Za dubinu  $h = h_{KR}$  i nagib dna kanala<sup>25</sup>  $I_D \neq I_{KR}$  Frudov broj je  $Fr = 1$  pa je:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{I_D - I_E}{1 - Fr} = \frac{I_D - I_E}{0} = \pm\infty \quad (8.65)$$

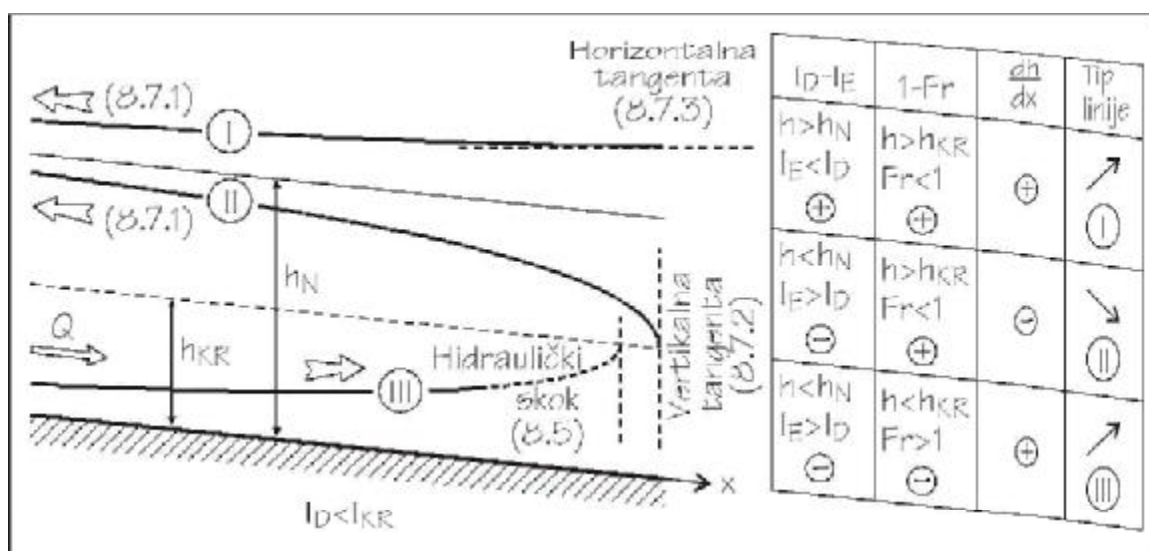
Linija nivoa ima vertikalnu tangentu, što znači da dolazi do nagle promene dubine, pa pretpostavka o blago promenljivom strujanju i hidrostatičkoj raspodeli pritisaka ne važi. U ovoj zoni se ne može rešavati diferencijalna jednačina (8.59), a blisko toj zoni računski korak  $\Delta x$  mora biti kratak.

<sup>25</sup>Slučaj kada je  $I_D = I_{KR}$  je slučaj iz prethodnog poglavlja 8.7.1 gde je  $I_D = I_E$ .

Kada linija nivoa prilazi kritičnoj dubini, za dubine  $h > h_{KR}$  u toku je miran režim pa je imenilac u jednačini pozitivan  $(1 - Fr) > 0$ , a za dubine  $h < h_{KR}$  (buran režim) imenilac je negativan  $(1 - Fr) < 0$ .

### 8.7.4 Nagib dna kanala manji od kritičnog nagiba

Za nagib dna kanala koji je manji od kritičnog  $I_D < I_{KR}$  normalna dubina je veća od kritične  $h_N > h_{KR}$ . Analiziraju se tri moguće vrednosti dubina: za raspone  $h < h_{KR}$ , za  $h_{KR} < h < h_N$  i za  $h > h_N$ .



Slika 8.24: Mogući oblici linije nivoa pri nagibu dna manjem od kritičnog nagiba, odnosno pri  $h_{KR} < h_N$

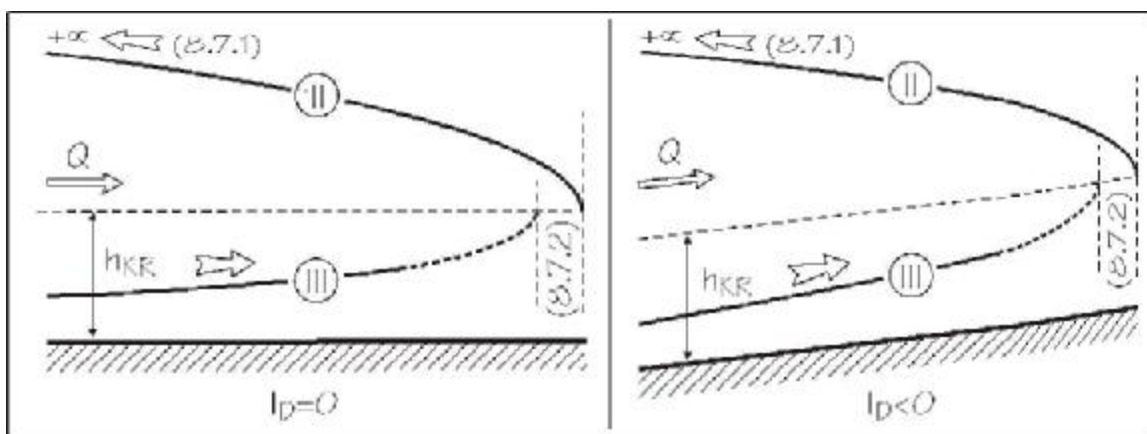
Na slici 8.24, dat je podužni presek kanala, sa ucrtana tri moguća opsega nivoa vode. Za svaki od opsega se analiziraju brojilac i imenilac diferencijalne jednačine i određuje da li linija opada ili raste i koje su asimptotske vrednosti dubina:

- **Linija tip (I)** Dubine veće od normalne dubine. Miran režim. Liniju nameće visoka kota sa nizvodne strane i uticaj te kote se prostire uzvodno. Uzvodno, dubina teži normalnoj dubini, sa gornje strane.
- **Linija tip (II)** Dubine između kritične i normalne. Miran režim. Liniju nameće nizvodna strana i uticaj se prostire uzvodno. Granični slučaj je kada sa nizvodne strane kota padne ispod kritične dubine - tada je najnižvodnija kota u kanalu jednaka kritičnoj. Uzvodno, dubina teži normalnoj dubini, sa donje strane.



8.7. OBLICI LINIJE NIVOVA KOD NEJEDNOLIKOG TEČENJA 373

- **Linija tip (III)** Dubine manje od kritične. Buran režim u kanalu sa malim nagibom dna. Ovaj tip linije nameće neki uzvodni granični uslov (isticanje ispod ustave, prelivanje preko praga, ...), a uticaj tog uslova se prostire nizvodno. Dubina nizvodno postepeno raste, ali ne može glatko da pređe kroz kritičnu dubinu, već će se negde formirati hidraulički skok.



Slika 8.25: Mogući oblici linije nivoa u horizontalnom kanalu (levo) i pri negativnom nagibu dna (desno)

Ako je nagib dna kanala horizontalan  $I_D = 0$  ili ako je kontra nagib dna  $I_D < 0$ , normalna dubina  $h_N$  je beskonačno velika (slika 8.25). U takvom slučaju linija (I) ne postoji, a ostaju moguće jedino linije (II) i (III).

8.7.4.1 Beskonačno dugačak prizmatičan kanal malog nagiba

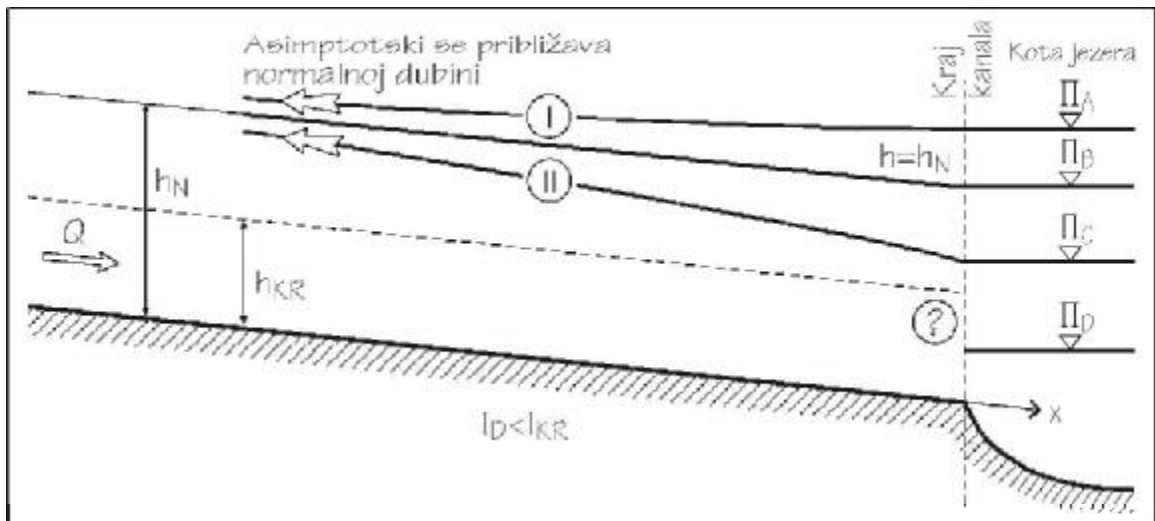
Posmatra se tok u kanalu malog nagiba dna  $I_D < I_{KR}$  koji se nizvodno završava jezerom. Kota vode u jezeru može da se menja. Kako utiče promenljiva kota vode u jezeru na dubine u kanalu?

Za dati protok i geometriju, mogu se izračunati kritična i normalna dubina:

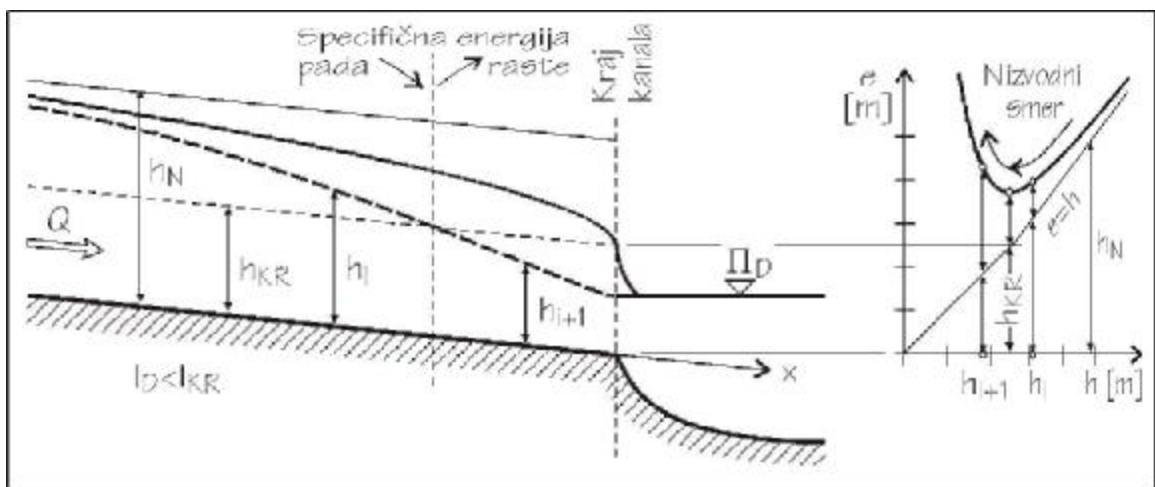
$$Fr = 1 \Rightarrow h_{KR} \quad Q = \frac{1}{n} A_N R_N^{2/3} \sqrt{I_D} \Rightarrow h_N$$

pri čemu će se dobiti da je  $h_N > h_{KR}$ .

Posmatraju se četiri moguća slučaja kote vode u nizvodnom jezeru (slika 8.26). Za slučajeve (A), (B) i (C), rešenje linije nivoa se dobija direktno na osnovu slike 8.24. Pitanje je šta će se dogoditi u slučaju (D), kada je nivo u jezeru  $h < h_{KR}$ ?



Slika 8.26: Linije nivoa u kanalu za različite kote vode u nizvodnom jezeru



Slika 8.27: Linija nivoa prikazana isprekidanom linijom ne može da se ostvari već se na kraju kanala javlja kritična dubina, jer je tada minimum specifične energije

Sledeći logiku postepenog obaranja nizvodnog nivoa i postepenog spuštanja linije (II), očekivalo bi se da će se u slučaju (D) formirati linija nivoa koja uzvodno teži normalnoj, a nizvodno se glatko spaja sa kotom u jezeru (na slici 8.27 je takvo rešenje prikazano isprekidanom linijom). Ako se pogleda linija specifične energije (na desnoj strani slike), vidi se da bi to značilo da specifična energija  $e$  postepeno pada niz tok (sve dok je tok u mirnom režimu, do kritične dubine  $h_{KR}$ ), a da zatim počinje da raste, uz promenu režima tečenja.

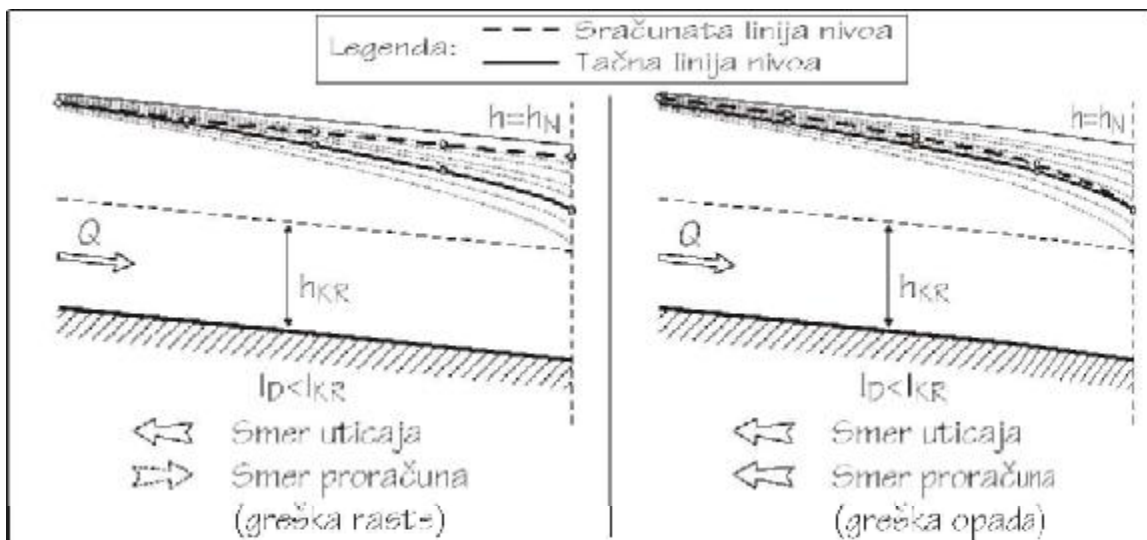
U poglavlju 8.4.4, *Miran i buran režim tečenja*, na osnovu analize pravaca

8.7. OBLICI LINIJE NIVOVA KOD NEJEDNOLIKOG TEČENJA 375

prostiranja uticaja, zaključeno je da se ne može promeniti režim toka u okviru jedne deonice sa konstantnim nagibom dna. Takodje, analiza diferencijalne jednačine linije nivoa ovo potvrđuje, jer se za dubine manje od kritične  $h < h_{KR}$  formira linija tip (III), a tada nivo u kanalu mora da raste u smeru toka a ne da opada.

Na osnovu date analize linije nivoa, mogu se izvući sledeći zaključci:

- Kritična dubina<sup>26</sup> se ostvaruje na kraju kanala u slučaju kada je nivo u jezeru niži od kritične dubine, jer je tada u tom preseku minimalna specifična energija<sup>27</sup>.
- Nivo vode u jezeru utiče na tečenje u kanalu samo ako je dubina u jezeru veća od kritične dubine.
- Za linije (I) i (II) kota jezera utiče na dubine u kanalu, pa je smer prostiranja uticaja uz fluidnu struju (jer je tok miran). Nizvodni presek je kontrolni presek.



Slika 8.28: Smer rešavanja diferencijalne jednačine utiče na greške

Poslednji zaključak o smeru prostiranja uticaja u kanalu ujedno definiše i smer rešavanja diferencijalne jednačine linije nivoa. Ako se jednačina rešava

<sup>26</sup>U stvarnosti, na samom izlazu će se formirati takozvana *ivična dubina* koja je nešto manja od kritične (posebno ako nema aeracije sa donje strane), pa pritisak na dnu nije nula nego je negativan (nije hidrostatički raspored pritisaka u izlaznom preseku).

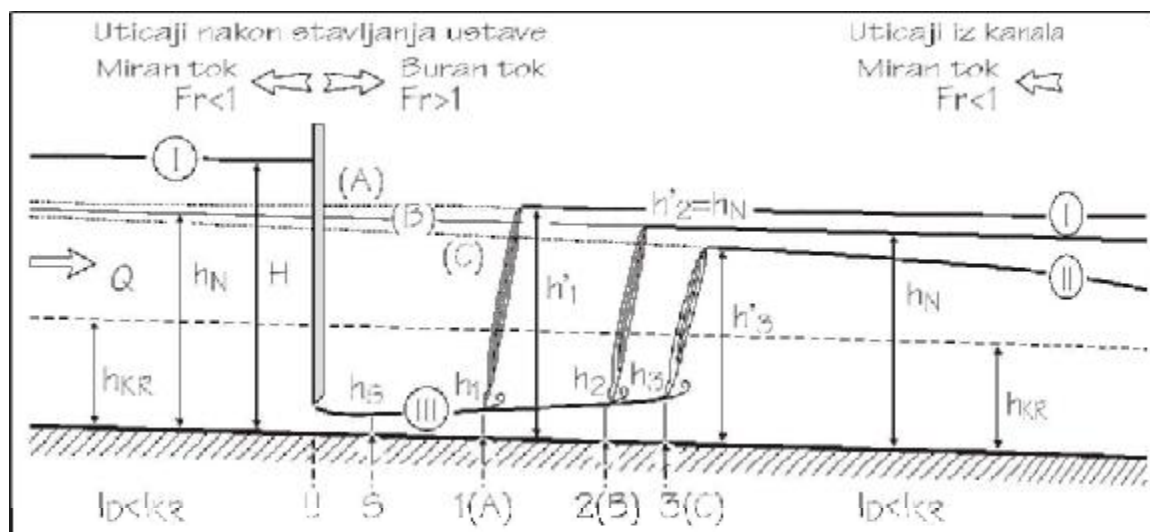
<sup>27</sup>Uobičajeno je da se podužni presek kanala crta u distordovanoj razmeri, tako da na slikama obično izgleda kao da voda na izlazu iz kanala naglo pada, da nije kontinualna linija nivoa.

u smeru prostiranja uticaja, dobijaju se rešenja koja konvergiraju ka rešenju, stabilna su i konzistentna (desni deo slike 8.28). Male numeričke greške, koje se prave u svakom računskom koraku, nemaju uticaj na finalno rešenje.

Ako se zanemari fizika problema, diferencijalna jednačina se može rešavati u oba smera. Ako se rešava u smeru suprotnom od smera prostiranja uticaja, kao što je to pokazano na levom delu slike 8.28, proračun je nestabilan jer i najmanja računaska greška se "pojačava" i vodi ka pogrešnom rešenju.

### 8.7.4.2 Ustava u kanalu malog nagiba dna

U kanalu sa nagibom dna manjim od kritičnog, tok će težiti normalnoj dubini preko linije (I) ili (II). Ako je nizvodni granični uslov dovoljno daleko od nekog preseka koji se posmatra, može se slobodno pretpostaviti da je u tom preseku normalna dubina. Ako se u takav kanal postavi ustava, sa otvorom u dnu takvim da bude manji od kritične dubine  $u < h_{KR}$ , pitanje je kako će izgledati linija nivoa?



Slika 8.29: U kanalu sa malim nagibom dna u kome je linija nivoa bila određena nizvodnim uslovima (linije (A), (B) ili (C)) je stavljena ustava čime se formira nizvodno buran tok i hidraulički skok (u presecima 1, 2 i 3)

Na slici 8.29, prikazan je deo kanala u kome bi, da nema ustave, tok bio sa normalnom dubinom koju nameću trenje i nagib dna. Kada se stavi ustava, u tok se unese poremećaj koji treba savladati. Za to je potrebna dodatna energija koju će fluid "obežbediti" tako što će podići kotu ispred ustave, smanjiti brzinu i smanjiti gubitak energije na trenje na uzvodnoj deonici. Ta nova dubina ispred ustave  $H > h_N$  je sada nova granična dubina za uzvodni deo kanala, te se formira linija tipa (I).

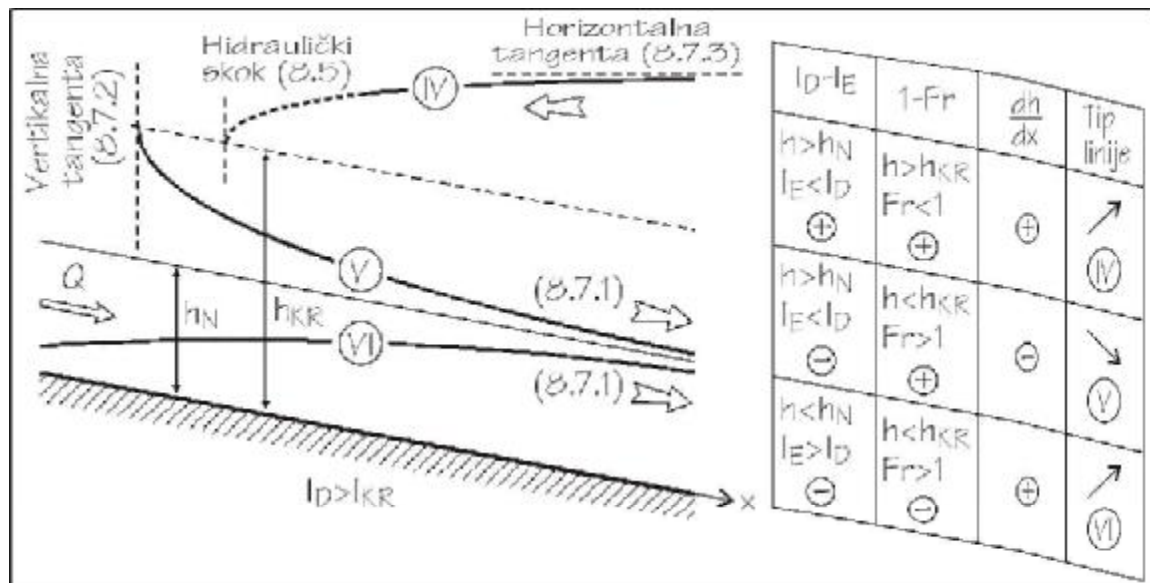
## 8.7. OBLICI LINIJE NIVOVA KOD NEJEDNOLIKOG TEČENJA 377

Nizvodno od ustave se formira suženi presek, koji je za stepen kontrakcije mlaza manji od visine otvora ustave  $i$ , istovremeno, manji od kritične dubine  $h_S < h_{KR}$ . Usled nametnute dubine  $h_S$ , formira se buran tok sa linijom tipa (III) i sa nizvodnim smerom prostiranja uticaja.

Jedini način spajanja linije (III) u burnom i nizvodne dubine u mirnom režimu je hidraulički skok (poglavlje 8.5). Položaj skoka zavisi od nizvodne dubine, jer skok traži mesto gde će se spregnuti dve dubine  $h$  i  $h'$ .

### 8.7.5 Nagib dna kanala veći od kritičnog nagiba

U kanalu gde je nagib dna veći od kritičnog  $I_D > I_{KR}$  normalna dubina je manja od kritične  $h_N < h_{KR}$  i moguća su tri opsega dubina, u rasponima  $h < h_N$ ,  $h_N < h < h_{KR}$  i  $h > h_{KR}$ .



Slika 8.30: Mogući oblici linije nivoa pri nagibu dna većem od kritičnog nagiba, odnosno pri  $h_{KR} > h_N$

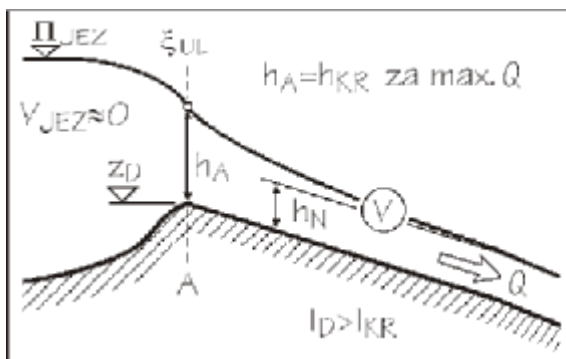
Na slici 8.30, dat je podužni presek kanala sa ucrtanim mogućim linijama nivoa i sa tablicom u kojoj se porede znaci brojioca i imenioca iz diferencijalne jednačine (8.59):

- **Linija tip (IV)** Dubine veće od kritične. Miran režim u kanalu sa velikim nagibom. Ovaj tip linije nameće nizvodni granični uslov (ulivanje u jezero sa visokom kotom, nizvodni kanal sa malim nagibom dna, nizvodna ustava, i sl.) a uticaj ovog uslova se prostire uzvodno. Uzvodno, linija nivoa teži ka kritičnoj, ali pre no što dođe do kritične dubine, formiraće se hidraulički skok.

- **Linija tip (V)** Dubine između kritične i normalne. Buran režim. Liniju nameće uzvodna početna dubina i uticaji se prostiru nizvodno. Nizvodno, dubina teži normalnoj sa gornje strane.
- **Linija tip (VI)** Dubine manje od normalne. Buran režim. Liniju nameće neki uzvodni granični uslov (ustava, uzvodni kanal sa većim nagibom, nizvodno od praga, itd.) i uticaji se prostiru nizvodno. Nizvodno, dubina teži normalnoj sa donje strane.

Kako će izgledati linija nivoa u kanalu zavisi od uzvodnih i/ili nizvodnih graničnih uslova. U nastavku će se analizirati dva karakteristična slučaja: slobodan ulazak iz jezera u kanal sa velikim nagibom i uticaj ustave na tok u kanalu sa velikim nagibom.

### 8.7.5.1 Prelaz iz jezera u kanal sa nagibom većim od kritičnog



Slika 8.31: Na početku kanala se formira kritična dubina, koja nizvodno teži normalnoj

A javljaju dubine koje su manje od kritične. Prema oznakama sa slike 8.30 formira se linija nivoa (V) koja asimptotski sa gornje strane teži normalnoj dubini, dubini koju nameće trenje.

Kota vode u uzvodnom jezeru se dobija iz energetske jednačine, za presek u jezeru i za presek u tački A:

$$E_{JEZ} = E_A + \Delta E \Rightarrow \Pi_{JEZ} + \frac{V_{JEZ}^2}{2g} = z_D + h_A + (1 + \xi) \frac{V_A^2}{2g}$$

Dubina u preseku A je kritična  $h_A = h_{KR}$  a brzina u jezeru se može zanemariti, pa je pijezometarska kota u jezeru:

$$\Pi_{JEZ} = z_D + h_{KR} + (1 + \xi) \frac{V_{KR}^2}{2g}$$

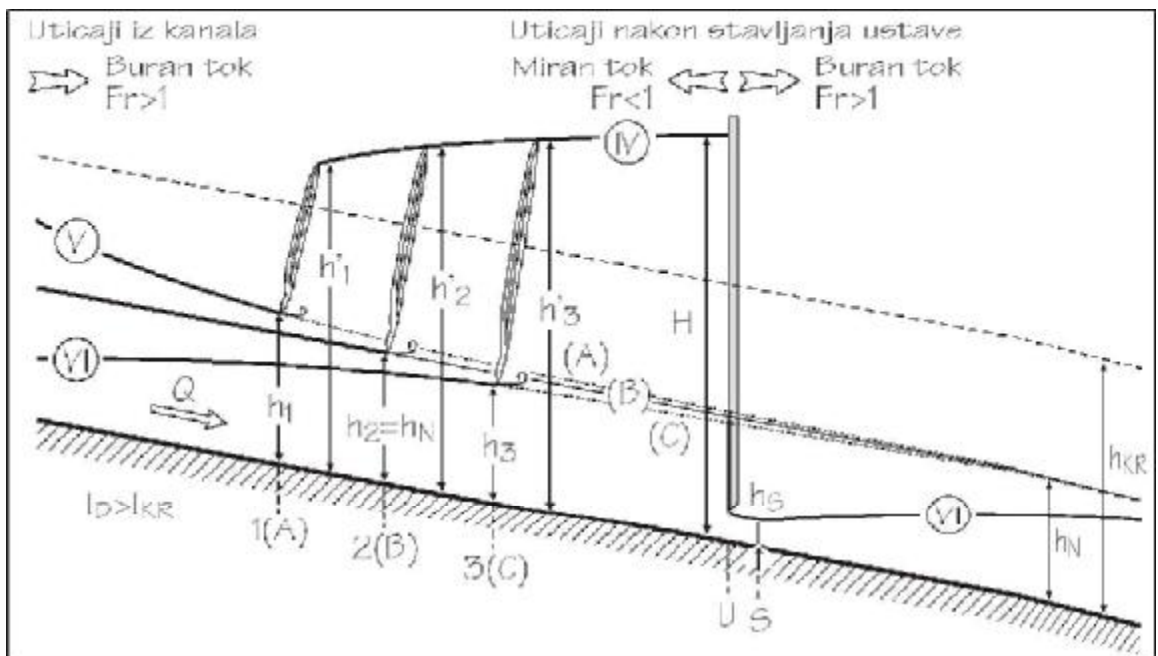
Posmatra se izliv iz jezera u kanal koji ima nagib dna veći od kritičnog  $I_D > I_{KR}$  (slika 8.31). Takav slučaj je već rađen u poglavlju 8.4.4 *Miran i buran režim tečenja*, u primeru 8.4.5 (strana 355), pri čemu je bio zanemaren gubitak energije na ulazu u kanal.

Na slici 8.31, dubina u preseku A je jednaka kritičnoj dubini, jer je tada protok maksimalan<sup>28</sup>. Analiza linije nivoa u primeru 8.4.5, ukazala je na to da se nizvodno od preseka

<sup>28</sup>To se može shvatiti i kao težnja toka da sam formira dubinu na početku kanala takvu da se dobije minimum specifične energije  $e_A$  a maksimum protoka  $Q$ . Presek A se zbog toga i zove *kontrolni presek*.

8.7.5.2 Ustava u kanalu sa nagibom dna većim od kritičnog

U kanalu sa nagibom dna većim od kritičnog postavlja se ustava sa otvorom  $u < h_N$ . Kako će izgledati linija nivoa uzvodno i nizvodno od ustave?



Slika 8.32: U kanalu sa velikim nagibom dna u kome je linija nivoa bila definisana uzvodnim uslovima (linije (A), (B) ili (C)) je stavljena ustava čime se formira uzvodno miran tok i hidraulički skok (u presecima 1, 2 ili 3)

Pre postavljanja ustave uzvodni kontrolni presek nameće liniju nivoa koja teži normalnoj dubini<sup>29</sup> bilo sa gornje (linija (V)) ili donje strane (linija (VI)). Kada se postavi ustava (slika 8.32), formira se nizvodno sužena dubina  $h_s$  (manja od otvora ustave  $u$  zbog kontrakcije mlaza). Ta dubina je sada nova granična dubina za nizvodnu liniju nivoa, koja teži normalnoj dubini sa donje strane (linija (VI)).

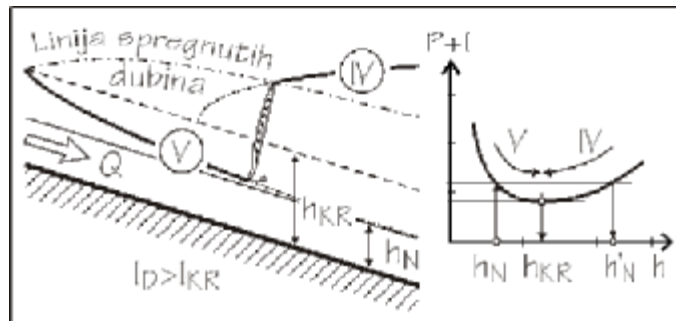
Uzvodno od ustave će se formirati velika dubina, veća od  $h_{KR}$ , koja se računa iz energetske jednačine  $E_{uzv} = E_{suz} + \Delta E$ . Ta uzvodna dubina će biti u mirnom režimu, sa smerom prostiranja uticaja od ustave ka uzvodnom kraju. Linija nivoa je tipa (IV) i definisana je samo do kritične dubine  $h_{kr}$ .

Hidraulički skok se formira negde u zoni preseka 1, 2 ili 3 (slika 8.32). Mesto skoka je tamo gde se zadovolji funkcija skoka  $\Phi(h_1) = \Phi(h_1')$  data jednačinom (8.41) odnosno tamo gde se postigne ravnoteža sila sa uzvodne

<sup>29</sup>Samo kao podsetnik: normalna dubina je ravnoteža gravitacione sile i sile trenja.

i nizvodne strane skoka  $(P + I)_1 = (P + I)_{1'}$ , jednačina (8.36).

Sam postupak određivanja mesta skoka je skiciran na 8.33. U kanalu se prvo odredi linija spregnutih dubina za liniju u burnom režimu, odnosno, odredi se linija potrebnih dubina da bi se na određenom mestu formirao skok sa postojećom dubinom u burnom, uzvodnom režimu. Tamo gde se preseku linije spregnutih dubina i linija nivoa izračunata za miran režim (linija (IV)), dolazi do skoka.



Slika 8.33: Linija spregnutih dubina pokazuje kolika treba da bude dubina sa nizvodne strane da bi se u nekom preseku formirao hidraulički skok

Međutim, može se desiti da se uzvodno od ustave uopšte ne formira skok. Ako je tok sa velikim Frudovim brojem, a ustava ne remeti značajno tok, linija spregnutih dubina će biti iznad linije nivoa u mirnom režimu (linija (IV)). Tada ne dolazi do skoka (kaže se da je skok “odbačen”), već je kompletna deonica kanala u burnom režimu. Samo lokalno, neposredno uz ustavu, tok udara u ustavu i podiže  $\Pi$  kotu pretvarajući veliku brzinsku visinu u potencijalnu energiju.

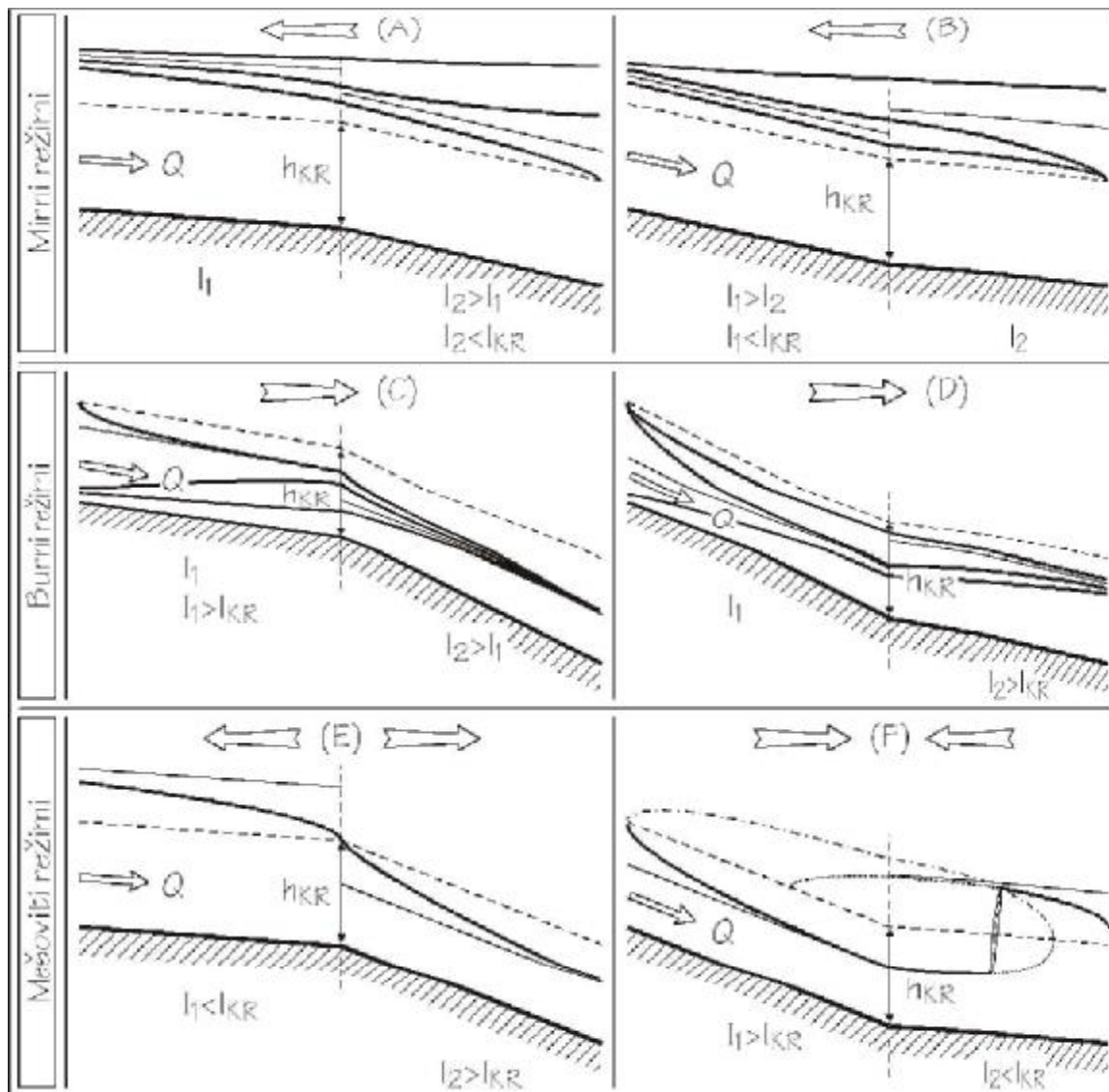
### 8.7.6 Linija nivoa kod promene nagiba ili hrapavosti dna

Do sada je analizirana linija nivoa u izolovanom kanalu, konstantnog preseka i nagiba dna, u zavisnosti od uzvodnih i nizvodnih graničnih uslova. Na osnovu tih analiza, može se skicirati izgled linije nivoa u dva spojena kanala, različitih nagiba dna ili različitih hrapavosti. Kada se odredi moguć izgled linije nivoa, određuju se i opsezi mogućih vrednosti dubina u okviru kojih treba rešavati diferencijalnu jednačinu (8.59), kao i smer proračuna.

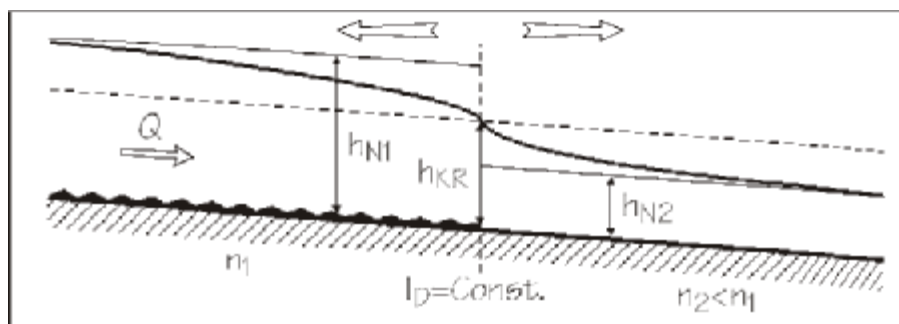
Na slici 8.34, prikazani su svi mogući slučajevi spajanja dva kanala, istih poprečnih preseka a različitih nagiba dna. Strelicama iznad toka je pokazan i pravac prostiranja uticaja.

Promena nagiba dna uz zadržavanje istih svih ostalih parametara toka rezultuje samo u promeni normalne dubine, dok kritična dubina ostaje ista. Promenu normalne dubine u kanalu može da izazove i promena hrapavosti dna. Na slici 8.35, prikazana je varijanta prelaska toka iz kanala sa većom hrapavošću u kanal sa manjom, pri čemu je ta promena toliko velika, da dolazi i do promene režima tečenja.





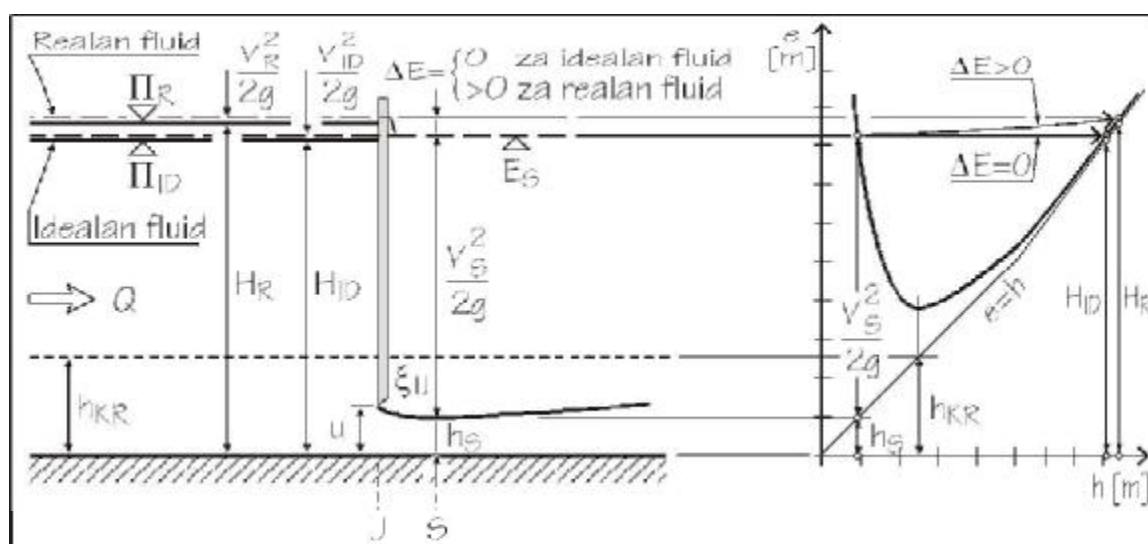
Slika 8.34: Mogući oblici linije nivoa pri promeni nagiba dna



Slika 8.35: Promena režima tečenja usled promene hrapavosti dna kanala

## 8.8 Isticanje ispod ustave

Ustava je do sada nekoliko puta spominjana kao kontrolni element, odnosno kontrolni presek u toku. U zavisnosti od režima toka, pomoću ustave se može uticati na uzvodne i nizvodne dubine, tako da ustava predstavlja *unutrašnji granični uslov*. Istovremeno, ustava je “lokalni elemenat” u toku jer na tečenje kroz ustavu ne utiče trenje, odnosno normalna dubina.



Slika 8.36: Isticanje ispod oštroične ustave (levo) i odgovarajući dijagram specifične energije (desno) za slučajeve idealnog i realnog fluida

Ustava se standardno analizira kao oštroični otvor. Oštra izlazna ivica primorava mlaz da se odvoji od ustave i da formira stabilan nizvodni suženi presek, tako da je koeficijent kontrakcije mlaza (odnos suženog mlaza i otvora ustave) relativno konstantan u širem dijapazonu protoka. Time se postiže stabilan, ponovljiv granični uslov.

Na slici 8.36, prikazan je presek kroz oštroičnu ustavu. Brzina koja se javlja ispod same ustave (kroz otvor  $u$ ) je  $V_u = \frac{Q}{uB}$  i ta brzina nije reprezentativna za proračun, jer u preseku nije ispunjen uslov da je hidrostatska raspodela pritiska (nije ispunjen uslov da strujnice budu paralelne i upravne na presek). Za proračun ustave se koristi nešto nizvodnija sužena dubina  $h_S$ , gde se mlaz sužava za koeficijent kontrarkcije  $C_A$ , i gde su strujnice međusobno paralelne i upravne na presek. Visina  $h_S$  se dobija iz  $h_S B = u C_A B$ , a koeficijent kontrakcije  $C_A$  ima vrednosti u opsegu  $0,6 \sim 0,65$ .

Visina ispred ustave je  $H$  (na slici 8.36 sa  $H_{ID}$  je prikazana visina za slučaj idealnog fluida a sa  $H_R$  za slučaj realnog fluida, kada postoji gubitak energije  $\xi_U$ ) dok se obično sa  $H_0$  označava specifična energija ispred ustave,

zbir visine i brzinske visine. U rešavanju zadataka sa ustavom često se zanemaruje brzinska visina jer je mala u odnosu na visinu, tako da se u stvari rešavanjem dobija visina  $H_0$ .

Ako se pretpostavi idealan fluid, gubitak energije na ustavi je  $\Delta E = 0$ , pa na dijagramu (desni deo slike 8.36) specifične energije  $e(h)$ , može se videti par  $H_{ID}/h_S$ . Do istog rešenja se dolazi postavljanjem energetske jednačine:

$$E_{UZV} = E_S \Rightarrow H + \frac{V_{UZV}^2}{2g} = h_S + \frac{V_S^2}{2g}$$

gde je pretpostavljeno horizontalno dno u zoni ustave, a sužena dubina je za pravougaoni presek kanala  $h_S = u C_A$ . Rešavanjem po dubini  $H$ , koja je nepoznata, dobija se jednačina trećeg stepena. Od dva pozitivna rešenja, uzima se ona dubina  $H$  koja je u mirnom režimu.

Za realan fluid postoji gubitak energije  $\Delta E$ , koji se obično izražava preko koeficijenta  $\xi_U$ . Sužena dubina  $h_S$  ostaje ista (jer ona zavisi samo od visine otvora ustave), a sa povećanjem gubitaka raste uzvodna dubina  $H$ .

Ustava kontroliše tečenje u kanalu, ona je kontrolni (regulacioni) element. Do sada je razmatrana pretpostavka da je protok kanalom konstantan i da će se uzvodna dubina prilagoditi ulovima koje nametne ustava. U realnosti, uzvodno od ustave je obično kanal ili jezero koji su za red veličine veći od dimenzija kanala i dubina nizvodno od ustave, pa se  $H$  može smatrati konstantnim, nezavisnim od  $u$ . Protok kanalom tada nije konstantan već zavisi od otvora ustave, a može se odrediti iz energetske jednačine:

$$H + \frac{V_{UZV}^2}{2g} = h_S + (1 + \xi_U) \frac{V_S^2}{2g} \Rightarrow H = h_S + \frac{(1 + \xi_U) Q^2}{2g B^2 h_S^2}$$

gde je brzinska visina ispred ustave zanemarena. Rešavanjem po protoku dobija se:

$$Q = \frac{B h_S}{\sqrt{1 + \xi_U}} \sqrt{2g(H - h_S)} \Rightarrow Q = C_A C_V B u \sqrt{2g(H - h_S)} \quad (8.66)$$

U jednačini (8.66) uveden je koeficijent brzine  $C_V = 1/\sqrt{1 + \xi_U}$ , koji u sebi nosi gubitak energije na ustavi. Za idealan fluid je  $C_V = 1$ , dok je za realan fluid  $C_V < 1$ . Takođe, u jednačini (8.66), uveden je i koeficijent kontrakcije mlaza  $C_A = A_S/A = B h_S/Bu$ . Često se u literaturi koristi i koeficijent protoka  $C_Q$ , koji je proizvod koeficijenta kontrakcije i koeficijenta brzine<sup>30</sup>  $C_Q = C_A C_V$ .

<sup>30</sup>Koeficijenti brzine  $C_V$ , kontrakcije  $C_A$  i protoka  $C_Q$  su korišćeni i kod isticanja kroz oštroični otvor, u poglavlju 7.2.3.4 *Primeri pisanja energetske jednačine, na stranama 135 i 136.*

**Primer 8.8.1**

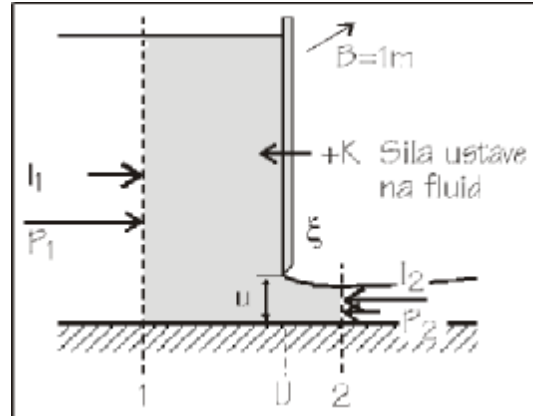
U pravougaonom horizontalnom kanalu širine  $B = 1$  m nalazi se ustava. Ispred ustave je dubina vode  $h_1 = 1,5$  m a ustava je podignuta za  $u = 0,15$  m. Ako je koeficijent kontrakcije mlaza na ustavi  $C_A = 0,65$  i koeficijent gubitka energije na ustavi  $\xi = 0,1$  odrediti protok kanalom i silu vode na ustavu ( $\rho = 1$  kg/dm<sup>3</sup>).

Nizvodno od ustave se formira dubina  $h_2 = u C_A = 0,0975$  m. Za dubine  $h_1$  i  $h_2$  može se postaviti energetska jednačina:

$$z_{D1} + h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_{D2} + h_2 + \frac{V_2^2}{2g}(1 + \xi) \Rightarrow h_1 + \frac{Q^2}{2gh_1^2 B^2} = h_2 + \frac{(1 + \xi)Q^2}{2gh_2^2 B^2}$$

$$1,5 + 0,02265Q^2 = 0,0975 + 5,8977Q^2 \Rightarrow Q = 0,489 \text{ m}^3/\text{s}$$

Sila na ustavu se računa pomoću dinamičke jednačine. Na zapreminu vode između preseka 1 i 2 deluju sile pritiska, inercijalne sile i sila konture. Pošto su preseki bliski, trenje se može zanemariti, a zbog horizontalnog dna, komponenta sile težine u pravcu toka je nula.



$$P_1 = \rho g h_{T1} A_1 = \rho g \frac{h_1}{2} h_1 B$$

$$P_1 = 0,5 \rho g h_1^2 B = 11,04 \text{ KN}$$

$$P_2 = \rho g h_{T2} A_2 = \rho g \frac{h_2}{2} h_2 B = 0,5 \rho g h_2^2 B = 0,047 \text{ KN}$$

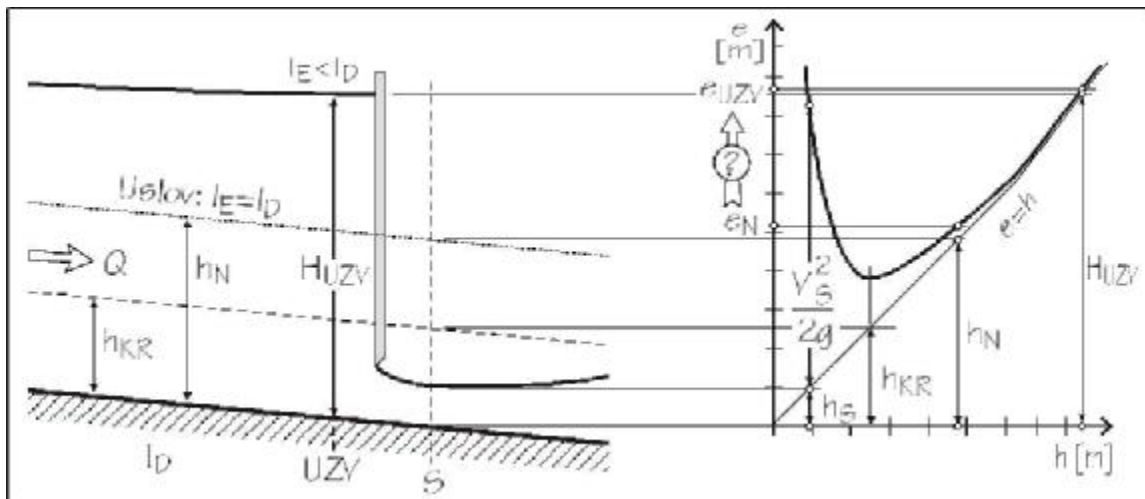
$$I_1 = \rho Q V_1 = \rho \frac{Q^2}{A_1} = 0,159 \text{ KN} \quad I_2 = \rho Q V_2 = \rho \frac{Q^2}{A_2} = 2,45 \text{ KN}$$

Ukupna sila vode na ustavu je obrnuta sila u odnosu na silu  $\vec{K}$ :

$$-K = P_1 + I_1 - P_2 - I_2 = 11,04 + 0,159 - 0,047 - 2,45 = 8,7 \text{ KN}$$

Kada se u kanal sa konstantnim nagibom dna  $I_D$ , u kome se ostvaruje tok sa normalnom dubinom i konstantnom specifičnom energijom  $e = \text{Const}$ . postavi ustava, ispred i iza ustave će doći do povećanja ukupne energije. Pitanje je odakle toku ta dodatna energija?

Pre stavljanja ustave voda je išla dubinom  $h_N$  i imala specifičnu energiju  $e_N$  (u primeru je to slučajno u mirnom režimu  $h_N > h_{KR}$ , isto važi i za



Slika 8.37: Postavljanjem ustave u tok poraste ukupna energija

buran režim). Stavljanjem ustave dobijaju se dubine  $h_S$  (funkcija otvorenosti ustave) i odgovarajuća  $H_{UZV}$  sa specifičnom energijom  $E_{UZV}$  (idealni fluid, slika 8.37).

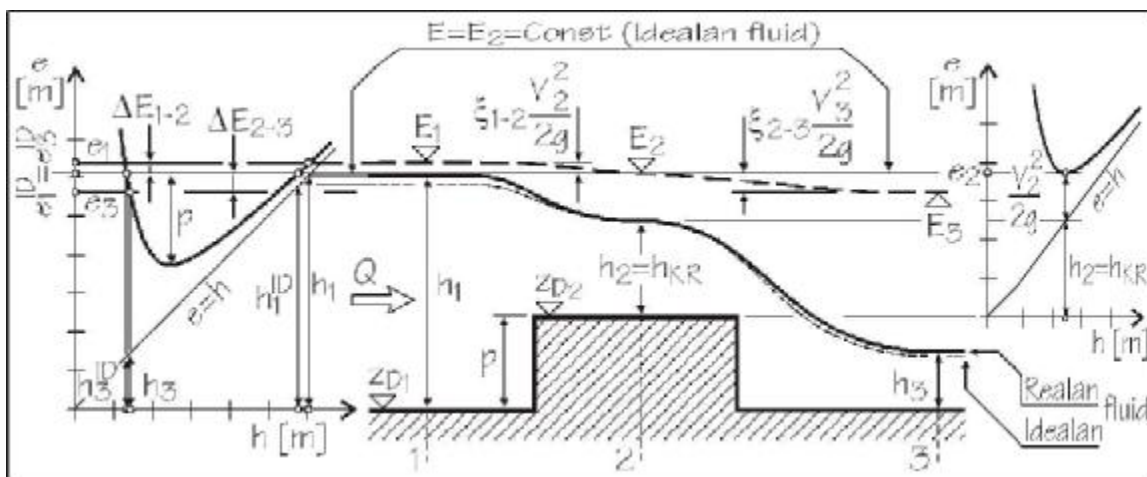
Brzina u uzvodnom preseku je posle stavljanja ustave znatno manja  $V_{UZV} \ll V_N$ . Gubitak energije na trenje, koje je odgovorno za "trošenje" energije u uzvodnom delu toka, smanjuje se sa kvadratom brzine, tako da je nagib linije energije  $I_E$  skoro horizontalan. Ukupan rezultat je da sa porastom dubine pada  $I_E$  pa se energija čuva u potencijalnoj energiji (u dubini). Upravo je ovaj princip suština rada hidro akumulacija.

## 8.9 Prelivanje preko širokog praga

Široki prag je pravougaona prepreka u dnu toka, čija je dužina oko dva do tri puta veća od dubine na pragu a visina dovoljna da napravi naglu promenu u toku. Prema slici 8.15, na strani 358, na širokom pragu će se javiti minimum specifične energije tako da je na pragu kritična dubina.

Kada se u tok stavi široki prag (slika 8.38), uzvodno se formira miran tok. Ukupna energija u uzvodnom preseku se povećava na račun smanjenih gubitaka na trenje i to taman toliko da se na pragu formira kritična dubina (odnosno da se savlada prepreka sa minimum specifične energije). Kada tok prođe kroz kritičnu dubinu na pragu, sa nizvodne strane će preći u buran režim, ako to dozvole nizvodni uslovi.

Široki prag je lokalni objekat i računa se pomoću energetske jednačine. Dužina praga je dovoljna da se na njoj formira hidrostatički raspored pritiska, a nije prevelika tako da se trenje može zanemariti. Ako se sa  $h_2 = h_{KR}$



Slika 8.38: Široki prag (u sredini slike) sa dijagramima specifične energije za preseke 1 i 3 (levo) i za presek 2, na pragu, gde se ostvaruje  $h_{KR}$  (desno)

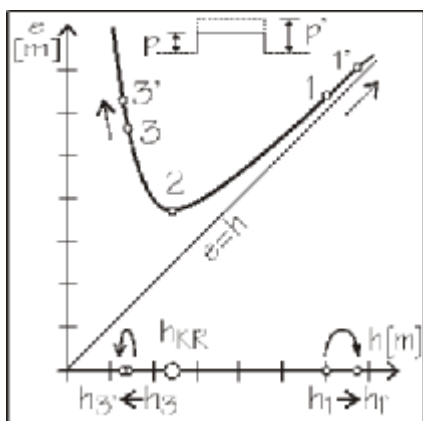
označi dubina na pragu, koji je visine  $p$ , za preseke 1 i 2 se može postaviti energetska jednačina:

$$E_1 = E_2 + \Delta E_{1-2} \Rightarrow h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = p + h_2 + (1 + \xi_1) \frac{V_2^2}{2g} \quad (8.67)$$

kao i za preseke 2 i 3 (presek na pragu i nizvodno od praga):

$$E_2 = E_3 + \Delta E_{2-3} \Rightarrow p + h_2 + \frac{V_2^2}{2g} = h_3 + (1 + \xi_2) \frac{V_3^2}{2g} \quad (8.68)$$

pri čemu gubici energije na uzvodnom  $\xi_1$  i nizvodnom delu praga  $\xi_2$  nisu isti.



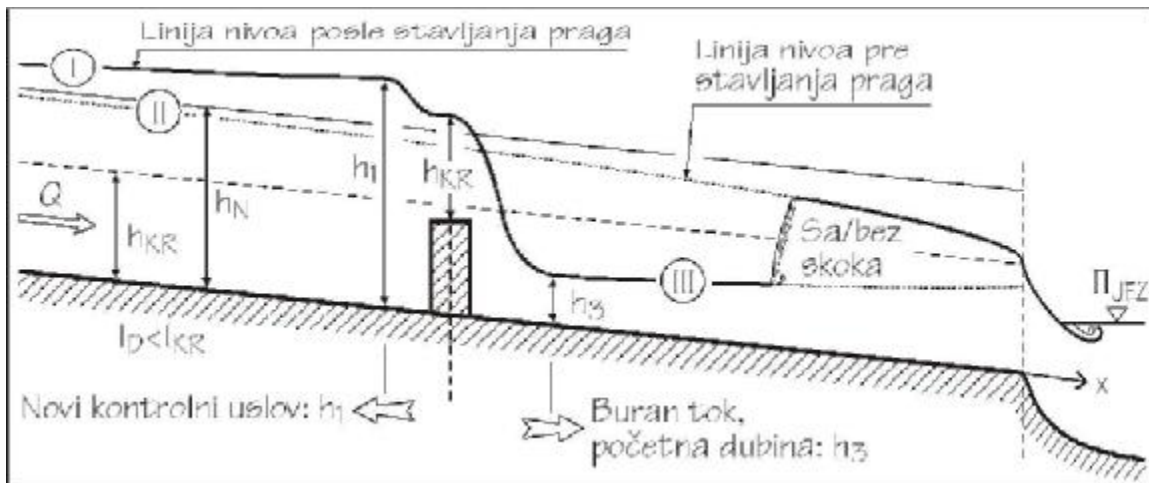
Slika 8.39: Slučaj povećanja visine praga sa  $p$  na  $p'$

Ako se poveća visina praga sa  $p$  na  $p'$ , dubina na samom pragu i dalje ostaje kritična, a uzvodne i nizvodne dubine se menjaju u skladu sa dijagramom specifične energije (slika 8.39): uzvodna dubina će porasti dok će se nizvodna smanjiti.

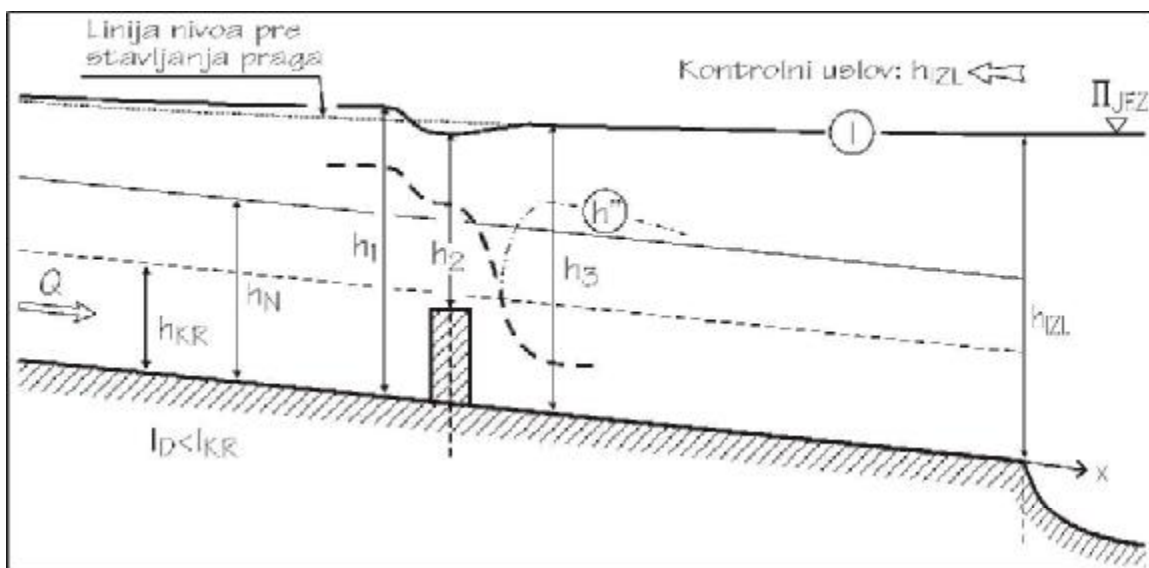
Kao i ustava, i prag predstavlja unutrašnji granični uslov i značajno utiče na režime tečenja. Na slici 8.40, prikazan je slučaj postavljanja praga u kanal sa malim nagibom dna  $I_D < I_{KR}$  i sa nizvodnom kotom vode u jezeru jednakom nuli. Pre postavljanja praga, tečenje u kanalu je bilo prema liniji (II). Postavljanjem praga, uzvodno se formira linija uspora (I), a nizvodno dolazi do burnog

### 8.9. PRELIVANJE PREKO ŠIROKOG PRAGA

toka (III). Da li će se formirati skok (kao što je pokazano na slici) ili će biti cela nizvodna deonica u burnom režimu, pa i izlazna dubina više neće biti kritična, zavisi od odnosa dubina.



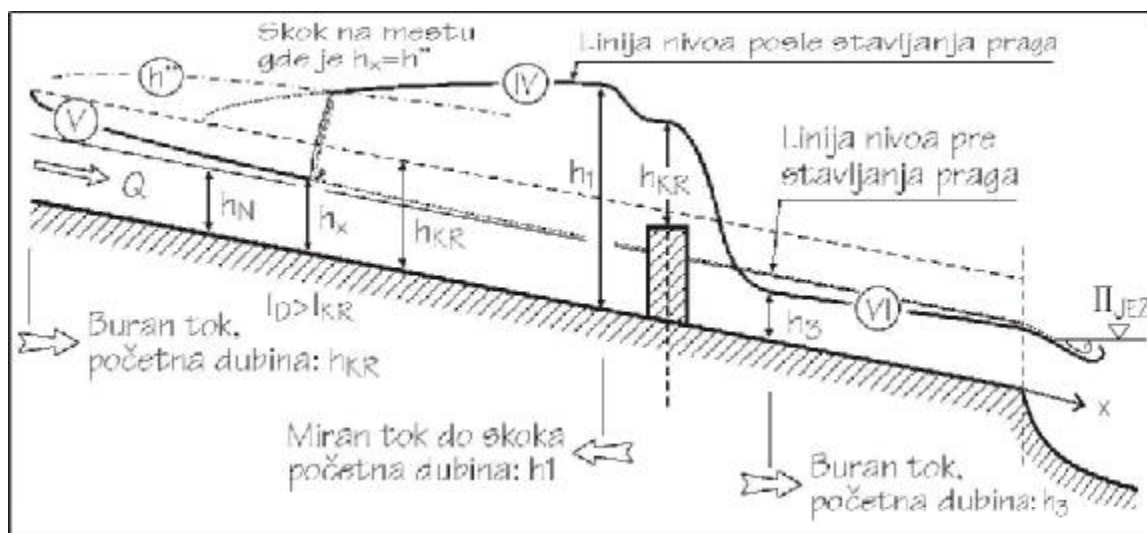
Slika 8.40: Široki prag predstavlja novi (unutrašnji) kontrolni uslov, pa se linija nivoa prilagođava u uzvodnom i nizvodnom smeru



Slika 8.41: Nivo vode u nizvodnom jezeru je visok pa je široki prag potopljen: ne dolazi do formiranja kritične dubine na pragu ni burnog režima nizvodno

Nizvodni uslovi mogu u potpunosti da promene sliku 8.40. Ako su nizvodne dubine velike (kao na slici 8.41) i potope hidraulički skok u preseku 3, nizvodni uticaj će se preneti preko praga u uzvodni deo kanala. Na pragu se više neće ostvarivati kritična dubina, već sada prag postaje "mala" prepreka.

Na samom pragu dolazi do smanjenja dubine i povećanja brzine, ali to ostaje u domenu mirnog tečenja.



Slika 8.42: Široki prag u kanalu sa velikim nagibom: formira se hidraulički skok uzvodno od praga

Kako izgledaju moguće linije nivoa kada se široki prag postavi u kanal sa velikim nagibom  $I_D > I_{KR}$ , prikazano je na slici 8.42. Tok proračuna za ovakav slučaj bi bio sledeći:

- Prvo treba izračunati normalnu dubinu  $h_N$  i kritičnu dubinu  $h_{KR}$  (dubinu na pragu).
- Odrediti dubinu u preseku 1 iz energetske jednačine  $E_1 = E_2 + \Delta E_{1-2}$ . Kao rešenje uzeti dubinu u mirnom režimu  $h_1 > h_{KR}$ .
- Odrediti dubinu u preseku 3 iz energetske jednačine  $E_2 = E_3 + \Delta E_{2-3}$ . Kao rešenje uzeti dubinu u burnom režimu  $h_3 < h_{KR}$ .
- Izračunati liniju nivoa nizvodno od praga (VI) rešavanjem diferencijalne jednačine  $\frac{dh}{dx} = \frac{I_D - I_E}{1 - Fr}$ , tako što se sa računom kreće od  $h_3$ , a težiti normalnoj dubini  $h_N$  sa donje strane.
- Izračunati liniju nivoa uzvodno od praga (IV). Linija je u mirnom režimu pa rešavanje diferencijalne jednačine početi sa polaznom dubinom  $h_1$ , a težiti dubini  $h_{KR}$  (ne sme se sa proračunom doći do same kritične dubine).



- Izračunati liniju nivoa u uzvodnom delu kanala (V). Linija je u burnom režimu pa rešavanje diferencijalne jednačine početi sa dubinom jednakom dubini na početku kanala (verovatno je to  $h_{KR}$  pa proračun treba početi sa  $0,9 h_{KR}$ ) a težiti normalnoj dubini  $h_N$  sa gornje strane.
- Mesto skoka se dobija u preseku linije spregnutih dubina za buran režim ( $h''$ ) i linije nivoa u mirnom režimu (IV). Linija spregnutih dubina se dobija iz jednačine skoka  $\Phi(h_{(V)}) = \Phi(h'')$  (jednačina (8.41) na strani 8.41) gde su  $h_{(V)}$  dubine dobijene proračunom za liniju (V).

**Primer 8.9.1**

Kroz pravougaoni kanal širine dna  $b = 2$  m protiče  $Q = 2,351$  m<sup>3</sup>/s vode. Ako je u kanalu prag visine  $p = 2/3$  m i ako je lokalni koeficijent gubitka energije od preseka na pragu do nizvodnog preseka  $\xi_N = 0,1$ , odrediti dubinu iza praga  $h_3$  pod uslovom da nizvodni uslovi omogućavaju nepotopljeno tečenje.

Za date podatke, prvo treba odrediti kritičnu dubinu. Iz uslova  $Fr = 1$  sledi:

$$Fr = \frac{Q^2 B}{g A^3} = 1 \Rightarrow h_{KR} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g B^2}} = \sqrt[3]{\frac{2,351^2}{9,81 \times 2^2}} = 0,52 \text{ m}$$

Na pragu se ostvaruje kritična dubina, pa je energetska jednačina za preseke na pragu i za nizvodni presek:

$$p + h_{KR} + \frac{V_{KR}^2}{2g} = h_3 + \frac{V_3^2}{2g}(1 + \xi_N) \Rightarrow 1,45 = h_3 + \frac{0,0775}{h_3^2}$$

Dobijena kubna jednačina može da se reši iterativno, pri čemu treba da se dobije dubina koja je manja od kritične. Ako se jednačina reši po kvadratnom članu iz imenioca, dobija se:

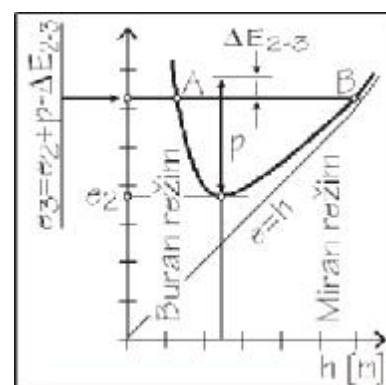
$$h_3^{(i+1)} = \sqrt{\frac{0,0775}{1,45 - h_3^{(i)}}}$$

čijim rešavanjem dubina konvergira ka:

$$h_3 = 0 \Rightarrow 0,231 \Rightarrow 0,252 \Rightarrow 0,254 \Rightarrow 0,254 \text{ m}$$

Rešenje  $h_3 = 0,254$  m je dobro jer je u burnom režimu (tačka A na dijagramu). Ako se ista kubna jednačina napiše u drugačijem obliku za rešavanje iteracijama:

$$h_3^{(i+1)} = 1,45 - \frac{0,0775}{h_3^{2(i)}}$$



kao rešenje će se dobiti druga dubina (tačka  $B$  na dijagramu):

$$h_3 = 0,3 \Rightarrow 0,589 \Rightarrow 1,226 \Rightarrow 1,398 \Rightarrow h_3 = 1,4104 \Rightarrow h_3 = 1,411 \text{ m}$$

što je pogrešno rešenje jer se nalazi u mirnom režimu!

---

# Bibliografija

- [1] Ackers, P., W.R. White, J.A. Perkins i A.J.M. Harrison. (1978). *Weirs and Flumes for Flow Measurement*. John Wiley and Sons. Chichester.
- [2] Brown, G.O. (2002). The History of the Darcy-Weisbach Equation for Pipe Flow Resistance. *Environmental and Water Resources History*. Editori: Jerry R. Rogers i Augustine J. Fredrich. Proceedings and Invited Papers for the ASCE 150th Anniversary, ASCE Civil Engineering Conference and Exposition, Washington, DC.
- [3] Chow, V., D. Maidment i L. Mays. (1988). *Applied Hydrology*. McGraw-Hill.
- [4] Cunge, J.A. (1998). From Hydraulics to Hydroinformatics. *ICHE - International Conference on Hydro-Science and Engineering*. Editori: K. Peter Holz, Mutsuto Kawahara, Sam S. Y. Wang. 3rd International Conference, Brandenburg University of Technology at Cottbus, Cottbus/Berlin, Germany.
- [5] Dyke, M.V. (1982). *An Album of Fluid Motion*.
- [6] Finnemore, E.J. i J.B. Franzini. (2002). *Fluid Mechanics with Engineering Applications*, deseto izdanje, McGraw-Hill Higher Education.
- [7] Gleick, J. (1996). *Chaos - The Amazing Science of the Unpredictable*, Minerva.
- [8] Gray, D.D. (1999). *A First Course in Fluid Mechanics for Civil Engineers*, Water Resources Publications, LLC.
- [9] Hajdin, G. (1977-2002). *Mehanika fluida, knjiga prva, Osnove*, Građevinski fakultet Beograd.
- [10] Hajdin, G. (2002). *Mehanika fluida, knjiga druga, Uvođenje u hidrauliku*, Građevinski fakultet Beograd.
- [11] Ivetić, M. (2006). *Hidraulika, Skripta za studente AGF Banja Luka*, interna publikacija.
- [12] Idelchik, I.E. (1986). *Handbook of Hydraulic Resistance - Second edition, revised and augmented*. Book translation by G.R. Malyavskaya, O.G. Martynenko i E. Fired. Springer-Verlag.

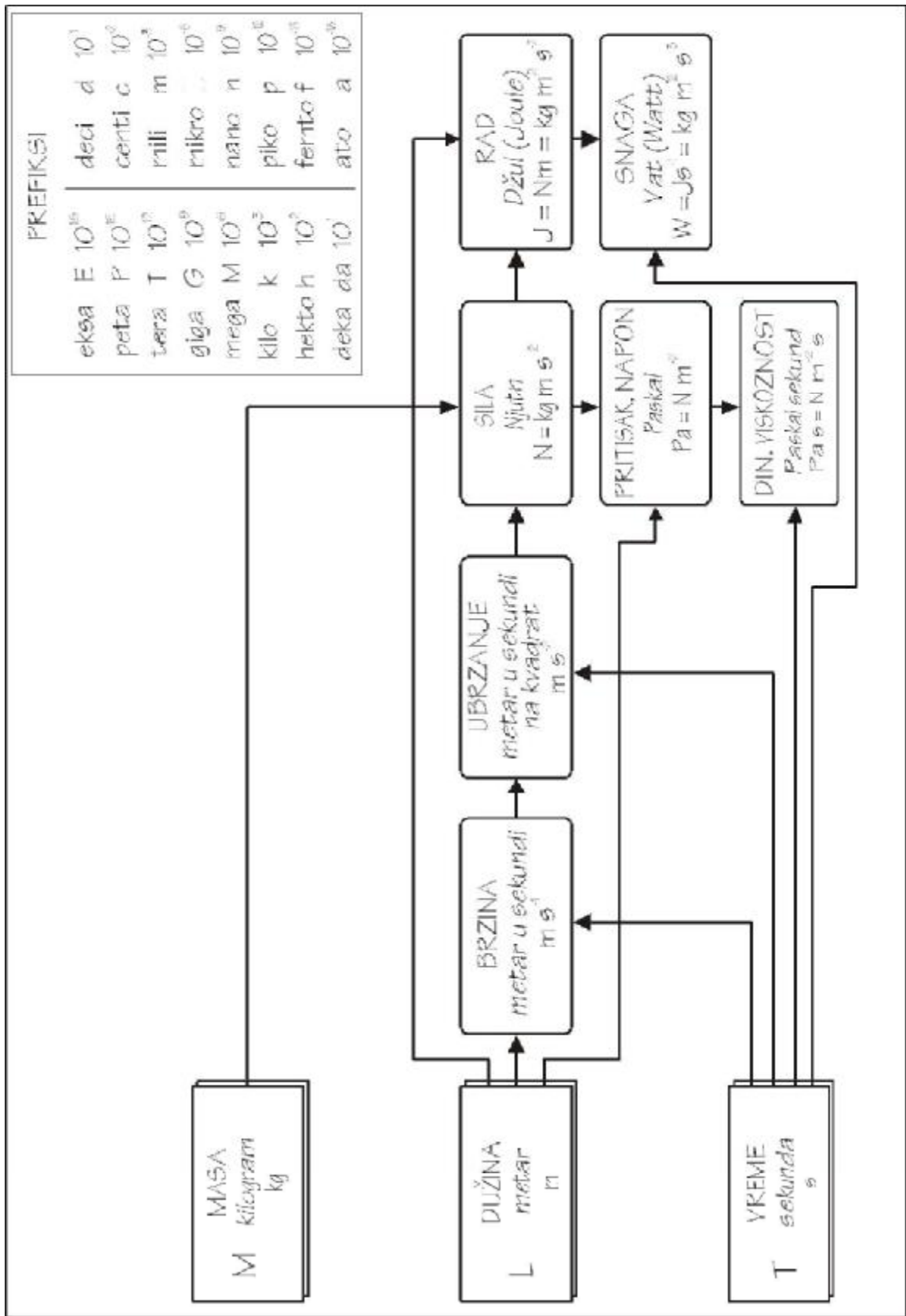
- [13] Knudsen, J.G. i D.L. Katz (1958). *Fluid Dynamics and Heat Transfer*, McGraw-Hill.
- [14] Kukulka, D.J. (1981). *Thermodynamics and Transport Properties of Pure and Saline Water*. Magistarska teza. State University of New York, Buffalo.
- [15] Levi, E. (1995). *The Science of Water. The foundation of Modern Hydraulics*, ASCE Press.
- [16] Liggett, J.A. (1994). *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill.
- [17] Liggett, J.A. i D.A. Cauhey. (1998). *Fluid Mechanics - an Interactive Text*, ASCE Press, Multimedia Studio, Cornell University.
- [18] Maksimović, Č. sa grupom autora (1980-2005) *Vežbe iz predmeta Mehanika fluida - Praktikum*, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- [19] Massey, B. i J. Ward-Smith (1998). *Mechanics of Fluids*, Stanley Thornes (Publishers) Ltd.
- [20] Munson, B.R., D.F. Young i T.H. Okiishi (2006) *Fundamentals of Fluid Mechanics*, peto izdanje, John Wiley and Sons.
- [21] Mušicki, Đ. (1975). *Uvod u teorijsku fiziku I, Teorijska mehanika*, ICS Beograd.
- [22] Nakayama, Y. i R.F. Boucher (1999), *Introduction to Fluid Mechanics*, Arnold, London.
- [23] Reynolds, A.J. (1973). *Turbulent Flows in Engineering*, John Wiley and Sons.
- [24] Rouse, H. i S. Ince (1957). *History of Hydraulics*, Iowa Institute of Hydraulic Research, The University of Iowa.
- [25] Sopta L. i L. Kranjčević (2006), *Mehanika Fluida*, skripta za studente Tehničkog fakulteta u Rijeci.
- [26] Streeter, V.L. i E.B. Wylie (1988). *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill.
- [27] Young, D.F. i T.H. Okiishi (1997). *A Brief Introduction to Fluid Mechanics*, John Wiley and Sons.
- [28] White, F.M. (1996). *Fluid Mechanics*, 4th edition, WCB McGraw-Hill.
- [29] Istorijske reference:  
<http://www.gap-system.org/history/>  
<http://scienceworld.wolfram.com/biography/>
- [30] Internet sajt:  
<http://scienceworld.wolfram.com/physics/topics/FluidMechanics.html>
- [31] Internet sajt: <http://manningsn.sdsu.edu/>

## Dodatak A

# Osnovne i izvedene fizičke veličine

Tabela A.1: Sedam osnovnih veličina SI sistema - ako se ne razmatra i termodinamika, u "Mehanici fluida" se koriste samo prve tri (M, L, T)

Veličina	Jedinica	Oznaka (simbol jedinice)
Masa (M)	kilogram	kg
Dužina (L)	metar	m
Vreme (T)	sekund	s
Temperatura	kelvin	K
Jačina struje	amper	A
Svetlosna jačina	kandela	cd
Količina supstance	mol	mol



Slika A.1: Veza između osnovnih i nekih izvedenih veličina [18]

Tabela A.2: Izvedene veličine koje se najčešće koriste u “Mehanici fluida” [18]

Veličina	Oznaka	Eksponenti	Jedinica	Napomena
Sila	$F$	$M L T^{-2}$	N (Newton)	$kg m s^{-2}$
Površina	$A$	$L^2$	$m^2$	
Zapremina	$V$	$L^3$	$m^3$	
Brzina	$u, V$	$L T^{-1}$	$m s^{-1}$	
Ugao	$\alpha$	$L^0$	rad	
Ugaona brzina	$\omega$	$T^{-1}$	$s^{-1}$	
Frekvencija	$f$	$T^{-1}$	Hz (Hertz)	$s^{-1}$
Ubrzanje	$a, g$	$L T^{-2}$	$m s^{-2}$	
Gustina	$\rho$	$M L^{-3}$	$kg m^{-3}$	
Specifična težina	$\gamma$	$M L^{-2} T^{-2}$	$N m^{-3}$	$kg m^{-2} s^{-2}$
Protok	$Q$	$L^3 T^{-1}$	$m^3 s^{-1}$	
Rad, Energija i Količina toplote	$R, E$	$M L^2 T^{-2}$	J (Joule)	N m
Snaga	$N$	$M L^2 T^{-3}$	W (Watt)	$J s^{-1}$
Napon, Pritisak	$\sigma, p$	$M L^{-1} T^{-2}$	Pa (Pascal)	$N m^{-2}$
Kinematski koef. viskoznosti	$\nu$	$L^2 T^{-1}$	$m^2 s^{-1}$	
Dinamički koef. viskoznosti	$\mu$	$M L^{-1} T^{-1}$	Pa s	$kg m^{-1} s^{-1}$
Modul elastičnosti	$E$	$M L^{-1} T^{-2}$	$N m^{-2}$	$kg m^{-1} s^{-2}$
Kapilarna konstanta	$\delta$	$M T^{-2}$	$N m^{-1}$	$kg s^{-2}$





## Dodatak B

# Tabele osobina nekih fluida

Podaci u narednoj tabeli B.1 daju gustinu vode, dinamički koeficijent viskoznosti, površinski napon u kontaktu sa vazduhom, pritisak vodene pare i visinu pritiska vodene pare u funkciji od temperature. Podaci su dobijeni na osnovu eksperimentalnih merenja i ekstrapolacijom pomoću sledećih izraza ( $T$  je temperatura u stepenima Celzijusa, od  $0^{\circ}$  do  $100^{\circ}\text{C}$ ,  $\rho$  u  $\text{kg/m}^3$ ,  $\mu$  u  $\text{Pa s}$ ,  $\sigma$  u  $\text{N/m}$  a  $p_V$  u  $\text{kPa}$ ) [3, 8, 14].

$$\rho = \frac{999,8396 + 18,224944T - 0,00792221T^2 - 55,44846 \cdot 10^{-6}T^3}{1 + 18,159725 \cdot 10^{-3}T} + \frac{149,7562 \cdot 10^{-9}T^4 - 393,2952 \cdot 10^{-12}T^5}{1 + 18,159725 \cdot 10^{-3}T} \quad (\text{B.1})$$

$$\mu = 2,414 \cdot 10^{-5} \times 10^{\frac{247,8}{T+133,15}} \quad (\text{B.2})$$

$$\sigma = 0,07598 - 0,0001669T \quad (\text{B.3})$$

$$p_V = 0,60456 e^{\frac{17,27T}{237,2+T}} \quad (\text{B.4})$$

Tabela B.1: Osobine čiste vode na atmosferskom pritisku

T ° C	$\rho$ Kg/m <sup>3</sup>	$\mu$ Pa s	$\sigma$ N/m	$p_v$ kPa (aps)	$h_v$ m
0	999,8	$1,753 \cdot 10^{-3}$	0,0760	0,605	0,062
1	999,9	$1,698 \cdot 10^{-3}$	0,0758	0,650	0,066
2	999,9	$1,645 \cdot 10^{-3}$	0,0756	0,698	0,071
3	1000,0	$1,595 \cdot 10^{-3}$	0,0755	0,750	0,077
4	1000,0	$1,547 \cdot 10^{-3}$	0,0753	0,805	0,082
5	1000,0	$1,501 \cdot 10^{-3}$	0,0751	0,864	0,088
6	999,9	$1,457 \cdot 10^{-3}$	0,0750	0,926	0,094
7	999,9	$1,415 \cdot 10^{-3}$	0,0748	0,992	0,101
8	999,8	$1,375 \cdot 10^{-3}$	0,0746	1,062	0,108
9	999,8	$1,336 \cdot 10^{-3}$	0,0745	1,137	0,116
10	999,7	$1,300 \cdot 10^{-3}$	0,0743	1,216	0,124
11	999,6	$1,264 \cdot 10^{-3}$	0,0741	1,300	0,133
12	999,5	$1,230 \cdot 10^{-3}$	0,0740	1,389	0,142
13	999,4	$1,197 \cdot 10^{-3}$	0,0738	1,483	0,151
14	999,2	$1,166 \cdot 10^{-3}$	0,0736	1,583	0,162
15	999,1	$1,136 \cdot 10^{-3}$	0,0735	1,689	0,172
16	998,9	$1,107 \cdot 10^{-3}$	0,0733	1,800	0,184
17	998,8	$1,079 \cdot 10^{-3}$	0,0731	1,919	0,196
18	998,6	$1,052 \cdot 10^{-3}$	0,0730	2,044	0,209
19	998,4	$1,027 \cdot 10^{-3}$	0,0728	2,176	0,222
20	998,2	$1,002 \cdot 10^{-3}$	0,0726	2,316	0,237
25	997,0	$8,904 \cdot 10^{-4}$	0,0718	3,137	0,321
30	995,7	$7,972 \cdot 10^{-4}$	0,0710	4,203	0,431
35	994,0	$7,185 \cdot 10^{-4}$	0,0701	5,570	0,572
40	992,2	$6,514 \cdot 10^{-4}$	0,0693	7,307	0,751
45	990,2	$5,939 \cdot 10^{-4}$	0,0685	9,494	0,978
50	988,0	$5,442 \cdot 10^{-4}$	0,0676	12,224	1,262
60	983,2	$4,631 \cdot 10^{-4}$	0,0660	19,753	2,050
70	977,8	$4,004 \cdot 10^{-4}$	0,0643	30,937	3,229
80	971,8	$3,510 \cdot 10^{-4}$	0,0626	47,104	4,946
90	965,3	$3,113 \cdot 10^{-4}$	0,0610	69,899	7,389
100	958,4	$2,790 \cdot 10^{-4}$	0,0593	101,325	10,789

Tabela B.2: Osobine nekih fluida na atmosferskom pritisku [8, 20]

Fluid	T ° C	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$\mu$ Pa s	$\sigma$ N/m	$p_v$ kPa (aps)	$E$ MPa
Benzen	20	895	$0,65 \cdot 10^{-3}$	0,029	10,0	1.030
Carbon tetrahlorid	20	1.588	$0,97 \cdot 10^{-3}$	0,026	12,1	1.100
Etil alkohol	20	789	$1,19 \cdot 10^{-3}$	0,023	5,9	1.060
Benzin	20	680	$0,29 \cdot 10^{-3}$		55,2	
Kerozin	20	808	$1,92 \cdot 10^{-3}$	0,025	3,2	
Živa	20	13.550	$1,56 \cdot 10^{-3}$	0,510	$1,5 \cdot 10^{-4}$	26.200
Morska voda (35 ppt)	20	1.025	$1,07 \cdot 10^{-3}$	0,073	2,34	2.300
Sveža voda	20	998	$1,00 \cdot 10^{-3}$	0,073	0,07	2.171

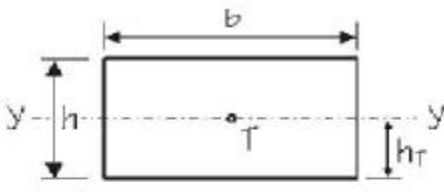
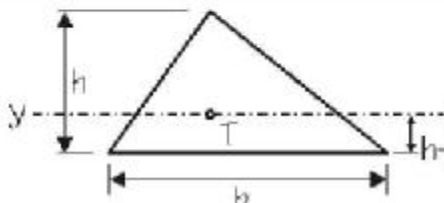
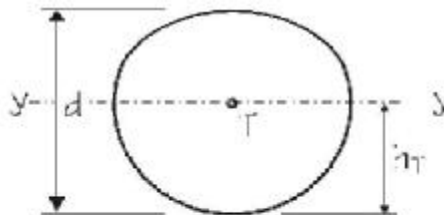
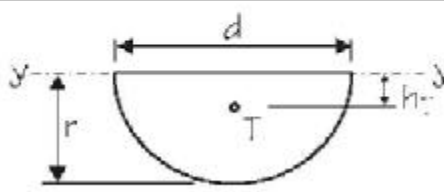
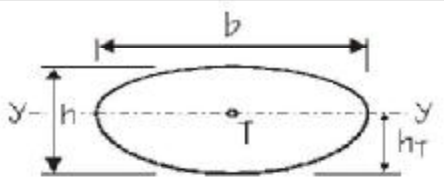
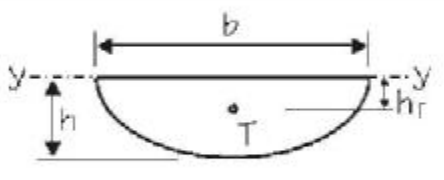
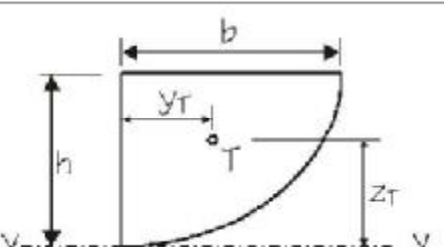
Tabela B.3: Ugao kvašenja tečnosti u kontaktu sa vazduhom, na 20<sup>0</sup> C [17]

Tečnost	Zid suda	$\theta$
Benzene 4	Parafin	0 <sup>0</sup>
	Teflon	46 <sup>0</sup>
n-Decane	Teflon	32 <sup>0</sup> - 40 <sup>0</sup>
Živa	Staklo	128 <sup>0</sup> - 148 <sup>0</sup>
	Teflon	150 <sup>0</sup>
n-Octane	Teflon	26 <sup>0</sup> - 30 <sup>0</sup>
n-Propanol	Polietilen	7 <sup>0</sup>
	Parafin	22 <sup>0</sup>
	Teflon	43 <sup>0</sup>
Voda	Zlato	0 <sup>0</sup>
	Staklo	0 <sup>0</sup>
	Platina	40 <sup>0</sup>
	Ljudska koža	75 <sup>0</sup> - 90 <sup>0</sup>
	Teflon	98 <sup>0</sup> - 112 <sup>0</sup>
	Parafin	110 <sup>0</sup>
Glicerin	Staklo	0 <sup>0</sup>
Etil alkohol	Staklo	0 <sup>0</sup>

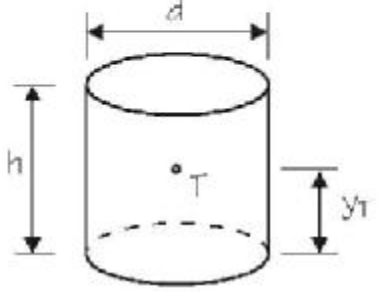
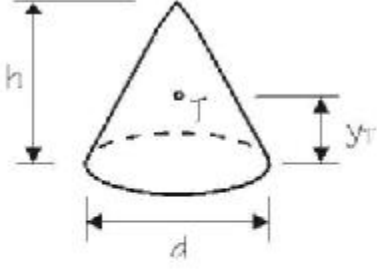
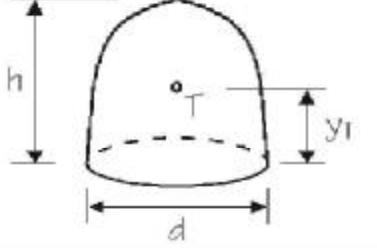
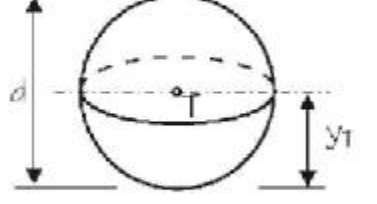
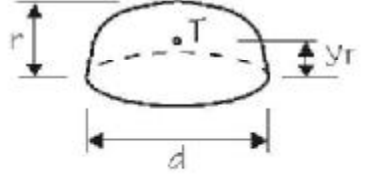


## **Dodatak C**

# **Geometrijske karakteristike ravnih površina i nekih tela**

		površina	položaj težišta	moment inercije
PRAVOKAONIK		$A = b h$	$\eta_T = \frac{h}{2}$	$I_w = \frac{b h^3}{12}$
TROUGAO		$A = \frac{b h}{2}$	$\eta_T = \frac{h}{3}$	$I_w = \frac{b h^3}{36}$
KRUG		$A = \frac{\pi d^2}{4}$	$\eta_T = \frac{d}{2}$	$I_w = \frac{\pi d^4}{64}$
POLUKRUG		$A = \frac{\pi d^2}{8}$	$\eta_T = \frac{4 r}{3 \pi}$	$I_w = \frac{\pi d^4}{128}$
ELIPSA		$A = \frac{\pi b h}{4}$	$\eta_T = \frac{h}{2}$	$I_w = \frac{\pi b h^3}{64}$
POLUELIPSA		$A = \frac{\pi b h}{4}$	$\eta_T = \frac{4 h}{3 \pi}$	$I_w = \frac{\pi b h^3}{128}$
PARABOLA		$A = \frac{2}{3} b h$	$\eta_T = \frac{3 h}{5}$ $y_T = \frac{3 b}{8}$	$I_w = \frac{2 b h^3}{7}$

Slika C.1: Površine, položaj težišta i momenti inercije

		zapremina	položaj težišta
VALJAK		$\frac{\pi d^2 h}{4}$	$y_T = \frac{h}{2}$
KUPA		$\frac{1}{3} \frac{\pi d^2 h}{4}$	$y_T = \frac{h}{4}$
PARABOLOID		$\frac{1}{2} \frac{\pi d^2 h}{4}$	$y_T = \frac{h}{3}$
SFERA		$\frac{\pi d^3}{6}$	$y_T = \frac{d}{2}$
POLUSFERA		$\frac{\pi d^3}{12}$	$y_T = \frac{3r}{8}$

Slika C.2: Zapremine i položaj težišta

# Indeks

- Arhimed, 67
- Bahmećev Boris, 347  
specifična energija, 347
- Barometar, 44
- Bernoulli Daniel, 130  
Bernulijeva jednačina, 130, 132, 133, 161, 172  
poredjenje Bernulijeve i energetske jedn., 172, 306  
primeri Bernulijeve jed., 134
- Bezvrtložnost fluida, 87, 132
- Blagopromenljivo tečenje, 338
- Blasius Heinrich  
debljina graničnog sloja, 254  
otpori u cevi, 237  
tangencijalni napon na ploči, 258  
trenje uz ploču, 259
- Bojl Robert, 41
- Bordo Zan-Carls, 323  
Bordina teorema, 323
- Brzina  
brzina fluidnog delića, 97  
brzinska visina, 138, 168, 304, 338  
Businessov korekc. faktor, 99, 150, 289, 299, 346  
Koriolisov korekc. faktor, 99, 164, 169, 314, 346  
merenje brzine delića, 139, 304  
po visini malog mlaza, 136  
raspored po preseku, 138, 289, 345  
srednja profilska brzina, 99, 122, 289, 304  
u rezervoaru, 135, 309  
ugaona brzina deformacije, 111, 143  
veza protok brzina, 291
- Brzina deformacije, 14, 143
- Brzinska visina, 168, 304, 347
- Buckingham Edgar, 183  
Bakingemova (Pi) teorema, 183  
primer opstrujavanja tela, 186  
primer preliv preko brane, 190  
primer proste grede, 185
- Buran režim tečenja, 355
- Business Jozef, 150  
korekcionni faktor, 99, 150, 289, 299, 346
- Cauchy Augustin, 200  
Košijev broj, 200
- Chézy Antoine, 341
- d'Alamber Jean, 147, 295  
inercijalna sila, 147
- Darcy Henry, 221  
koeficijent trenja, 221, 241  
Mudijev dijagram, 235
- Darsi-Vajsbahova jednačina, 221
- Dimenzionalna analiza, 180  
Bakingemova (Pi) teorema, 183  
bezdimezionalna sila, 187  
dimenzionalni sistem, 180  
nezavisnost veličina, 181  
promena sistema, 180  
sveobuhvatnost veličina, 181
- komentari, 191  
izbor varijabli, 191  
jedinственost rešenja, 193  
veza sa eksperimentom, 193
- merni broj, 182, 184
- pi članovi, 183
- standardni bezdim. brojevi, 196, 206



- Frudov broj, 198, 353  
 Košijev broj, 200  
 Mahov broj, 200  
 Rejnoldsov broj, 189, 196  
 Veberov broj, 199  
 Dinamička jednačina, 123, 127, 128, 142, 145, 147, 217, 294, 338  
 dinamička ili energetska jedn., 325  
 hidraulički skok, 154, 360  
 isticanje na dole, 297  
 naglo proširenje cevi, 323  
 otvoreni tokovi, 338  
 sila na zatvarač, 321  
 udar mlaza u ploču, 296  
 uticaj profila brzina, 299  
 vertikalni mlaznik, 152  
 Dinamika fluida, 6, 85  
 Dubina, 337, 338, 347  
 kritična dubina, 349  
 normalna dubina, 344  
 specifična energija, 347  
 spregnute dubine, 359  
 Emisiona linija, 93  
 Energetska jednačina, 156, 159, 160, 165, 168, 171, 172, 216, 303, 346, 386  
 cevi različitog prečnika, 316  
 dinamička ili energetska jedn., 325  
 isticanje iz suda, 177  
 isticanje kroz mlaznik, 310, 318  
 kratak naglavak, 178  
 potopljeno isticanje, 309  
 račvanje cevi, 174, 320  
 Venturijevo suženje, 312  
 Energetska linija, 309, 310, 337  
 crtanje, 317, 321  
 Energija  
 entalpija, 159  
 gubitak energije, 163, 171, 302  
 gubitak na trenje, 216, 305  
 lokalni gubitak, 305  
 zavisnost od  $Re$ , 229  
 interna energija, 156, 159, 166, 171  
 ireverzibilna konverzija energije, 163  
 kinetička energija, 156, 301  
 lokalni gubici, 307  
 mehanička energija, 161, 327  
 održanje energije, 155  
 potencijalna energija, 156, 171, 303  
 usled pritiska, 131, 303  
 usled visine delića, 131, 303  
 razdvajanje mehaničke i toplotne, 161  
 razmena sa konturom, 152, 164, 170, 286, 294, 301, 326  
 reverzibilna konverzija energije, 162  
 ukupna entalpija, 159  
 unutrašnja energija, 156, 168  
 Fanning John Thomas, 233  
 Fluid  
 bezvrtložnost, 87, 112, 132  
 definicija, 1, 9, 12  
 fluidna struja, 286  
 gasovi, 3  
 gustina fluida, 20  
 homogen fluid, 9, 21, 87, 119  
 idealan fluid, 17, 87, 112, 130, 133, 136, 161, 249, 306  
 idealan gas, 41  
 izotropan fluid, 9, 34, 86  
 kruto telo - fluidi, 1, 2  
 neprekidan fluid, 86  
 nestišljiv, 23, 87  
 Njutnovski fluidi, 16  
 površinski napon, 28, 31  
 realan fluid, 86, 133, 306  
 specifična težina, 22  
 stišljivost, 22, 87, 110, 119, 249, 286  
 tečnosti, 2  
 viskoznost, 16, 86, 88  
 Fluidni delić, 3, 33, 86, 107  
 Froude William, 198  
 Frudov broj, 198, 349, 353  
 Frudova sličnost, 208  
 Gauss Johann Carl Friedrich, 106  
 Gausova teorema, 106  
 Granični sloj, 248, 269  
 debljina sloja, 253, 263

- laminaran sloj, 252, 254  
 Prantlov koncept, 250  
 tačka odvajanja, 266, 267, 269  
 turbulentan sloj, 252, 255
- Heisenberg Werner, 229**  
 princip neodredjenosti, 229
- Hidrauličke mašine, 301, 326**  
 koeficijent korisnog dejstva, 329, 331  
 pumpe, 327  
   geodetska visina dizanja, 328  
   izbor, 327  
   snaga pumpe, 329  
   visina dizanja, 328  
 reverzibilne mašine, 333  
   odnos snaga, 334  
   značaj u sistemu, 334  
 turbine, 330  
   dimenzionisanje, 332  
   pad turbine, 330  
   snaga turbine, 331
- Hidraulički radijus, 219, 339**  
 kružni presek, 220  
 otvoreni tokovi, 336
- Hidraulički skok, 154, 359–362**
- Hidrodinamičke sile (otpori), 215, 246**  
 otpor oblika, 246, 260  
 otpor trenja, 246, 247
- Hidrodinamika, 3, 6, 85**
- Hidrostatičke sile**  
 ekscentricitet, 54  
 horizontalna komponenta, 63  
 na horiz. ravnu površ., 51  
 na vert. ravnu površ., 53, 55  
 ravanski - gasovi, 78  
 ravanski - hor. sila, 72  
 ravanski - ver. sila, 75  
 ravanski zadaci, 70  
 razdvajanje na komponente, 58  
 sabiranje komponenti, 66  
 sila od gasova, 77  
 sila potiska, 67  
 vertikalna komponenta, 59
- Hidrostatika, 33, 85**
- Homogen fluid, 20, 36, 39, 87, 119, 286**
- Hunter Rouse, 233**
- Idealan fluid, 17, 87, 112, 130, 133, 136, 161, 249, 306**
- Inercijalna sila, 147, 295**
- Inercijalni sistem**  
 količina kretanja, 123  
 konstantna masa, 100, 103, 156  
 konstantna zapremina, 100, 104, 156  
 veza mase i zapremine, 102
- Izotropan fluid, 34, 86**
- Jednačina**  
 kontinuiteta, 117, 121, 290  
 održanja kol. kretanja, 123, 127, 142, 147  
 održanja mehan. energije, 161  
 održanja ukupne energije, 158, 160  
 primeri primene jedn. održanja, 315  
 toplotne energije, 162
- Jednoliko strujanje, 91, 339**
- Kármán Theodor, 238**  
 vrtlozi, 272  
   merenje protoka, 276
- Kapilarnost, 31**
- Kavitacija, 307, 314**
- Koeficijent**  
 Šezijev koeficijent trenja, 341  
 brzine, 136, 383  
 Businessov, 99, 289, 299, 346  
 kontrakcije, 135, 136, 383  
 Koriolisov, 99, 164, 169, 314, 346  
 korisnog dejstva, 329, 331  
 linijskog gubitka energije, 220, 305  
 lokalnog gubitka energije, 306, 307, 323  
 protoka, 2, 133, 136, 141, 178, 191, 313, 383  
 Q/H/eta dijagram, 330  
 sile, 188, 189, 323  
 tangencijalnog napona, 220  
   Mudijev dijagram, 235  
   zavisnost od Re, 222
- Kolbruk-Vajt, 239**

- Količina kretanja, 123  
**Kontrolna zapremina**, 102  
 Konzervativnost jednačina, 101, 102, 124  
**Konzervativnost mase**, 116  
**Koriolis Gaspar**, 164  
     korekcionni faktor, 99, 164, 169, 314, 346  
 Kritična dubina, 349  
**Kronekerov simbol**, 113, 144  
  
**Lagrange Joseph-Louis**, 102  
     Lagranžev pristup, 102  
**Laminarno strujanje**, 88, 223  
     Businessov koeficijent, 299  
     Darsijev koef. gubitka energ., 225  
     granica, 232  
     Koriolisov koeficijent, 169, 315  
     odnos srednje i maks. brzine, 224  
     odnos trenja i brzine, 225  
     raspored brzina, 224  
**Lewis Moody**, 233  
  
**Mach Ernst**, 200  
     Mahov broj, 200, 249  
**Manning Robert**  
     koeficijent trenja, 342, 343  
**Manometar**, 45  
     živin, 45  
     diferencijalni, 47, 313  
     kalibracija, 48  
     na cevi, 312  
     obrnuta U cev, 48  
     sa membranom, 48  
     U cev, 47  
**Mariot Edme**, 41  
**Materijalni delić**, 86, 107  
     bezvrtložnost, 87, 112, 132  
     brzina deformacija, 110  
         devijatorski deo, 113  
         sferni deo, 113  
     brzina klizanja, 112  
     brzina rotacije, 112  
     brzina zaprem. dilatacije, 110  
     ugaona brzina, 111, 143  
**Materijalni izvod**, 103, 108  
     konvektivna komponenta, 109  
     lokalna komponenta, 109  
     ubrzanje delića, 128  
     veza za konst. zapreminom, 115  
**Mehanika fluida**  
     definicija, 1, 9  
     kroz istoriju, 3  
     način izučavanja, 2  
     predmet izučavanja, 2, 102  
**Miran režim tečenja**, 354  
  
**Navie-Stoksova jednačina**, 145, 146  
**Navier Claude**, 145  
**Nejednoliko strujanje**, 366, 368–370  
**Nestišljiv fluid**, 23, 87  
**Nikuradse Johann**, 238  
**Njutn Isak**, 16  
     Njutnovski fluidi, 16, 145  
**Normalna dubina**, 344  
  
**Oštrovični otvori**, 134  
     koeficijent brzine, 136  
     koeficijent kontrakcije, 135, 136  
     koeficijent protoka, 136  
     pritisak u mlazu, 135  
     Toričelijeva jednačina, 136  
**Oštrovični preliv**, 139  
     brzina u mlazu, 140  
     koeficijent protoka, 141  
     protok, 141  
     Vajsbahovo rešenje, 140  
**Ojler Leonard**, 101  
     Ojlerov pristup, 101, 149, 291  
     Ojlerova jednačina (dinamička), 128, 130  
**Okvašen obim**, 219  
**Osnovna jednačina hidrostatičke**, 36, 37, 171  
**Otpor oblika**, 246, 260  
     granični sloj, 262, 272  
     hrapave loptice za golf, 269  
     osnovne pretpostavke, 261  
     raspored pritiska  
         idealni fluid, 265  
         realni fluid, 265

- tačka odvajanja, 266
- uticaj Re broja, 280
- režim strujanja, 269
- sila uzgona, 281**
  - avionsko krilo, 282
  - rotirajući cilindar, 281
- strujolika tela, 268**
- tačka odvajanja
  - uticaj Re broja, 271
- ukupna sila otpora, 267, 276**
- virtložni trag, 266
  - nestabilnost, 271
  - Struhalov broj, 274**
  - tačka odvajanja, 272
  - uticaj Re broja, 272
- Otpor trenja, 246, 247**
  - glatka ploča, 258
  - granični sloj, 248, 250
    - debljina, 251
    - prelazna oblast, 255
    - proračun debljine, 253
    - režim strujanja, 252
  - Reynoldsov broj, 252**
  - hrapava ploča, 258
- osnovne pretpostavke, 248**
- sila trenja, 258**
  - način proračuna, 259
- strujna slika, 247**
- tangencijalni napon, 256**
- Otvoreni tokovi, 335**
  - Šezi-Maningova jednačina
    - jednoliko tečenje, 343
    - nejednoliko tečenje, 367
  - Šezijev koeficijent trenja, 341
  - široki prag, 385
  - blagopromenljivo tečenje, 338, 366
  - burno tečenje
    - uzvodna kontrola, 355
  - Businesov koeficijent, 346
  - dubina, 337**
  - Frudov broj, 353**
    - režimi tečenja, 353
  - hidraulički skok, 359
  - funkcija skoka, 362
  - jednačina sila, 154, 360
  - spregnuta dubina, 361**
  - jednoliko tečenje, 339
    - nagibi linija, 340
  - kontrolni presek, 356**
  - Koriolisov koeficijent, 346
  - kritična dubina, 349
    - kritičan nagib, 352
    - maksimalan protok, 357**
  - Maningov koeficijent, 342
    - ograničenja, 343
  - mirno tečenje
    - nizvodna kontrola, 354**
  - nejednoliko tečenje, 366
    - diferencijalna jednačina, 368
    - mogući oblici lin. nivoa, 370
    - rešavanje dif. jednačine, 369, 370
  - pretpostavke, 336**
  - prizmatičan kanal, 336
  - raspored brzina, 345**
  - režimi tečenja, 153
  - specifična energija, 347
    - dijagram, 356**
    - minimum, 349**
  - ustava, 382
- Paskal Blez, 24**
- Pijezometarska kota, 171, 288, 303**
  - fluida gustine  $\rho$ , 38
  - vazduha zanemarljivog  $\rho$ , 40
- Pijezometarska linija, 309, 310, 337**
  - crtanje, 317, 321
- Pito Henri, 139**
  - Pito cev, 139**
  - Pito-Prantlova sonda, 139, 304**
- Površinske sile na fluid, 34, 123, 125, 338
- Površinski napon, 28
- Prantl Ludvig, 139**
  - granični sloj, 250
- Princip održanja
  - održanje energije, 156, 300
  - održanje količine kretanja, 122, 292
  - održanje mase, 116, 290
  - opšte, 107
- Pritisak**

- apsolutni pritisak, 27, 43, 307
- atmosferski pritisak, 27, 44
- definicija, 24
- hidrostatički, 28
- jedinica, 24
- manometarski, 28
- merenje, 44, 45
- najmanja vrednost, 28
- prosek normalnih napona, 127
- u mlazu vode, 135, 310, 319
- vakuum, 27
- visina pritiska, 37, 168
- zaustavni pritisak, 138, 188, 304
- Prony Riche, 221, 341
- Protok
  - energije, 159
  - merenje protoka, 312
  - protok mase, 98
  - protok zapremine, 97, 98, 289
- Prvi zakon termodinamike, 155
- Rad
  - devijatorski deo defor. rada, 162
  - mehanički rad, 156, 301
  - rad konturne sile, 170, 302
  - rad na pomeranju, 131
  - rad sile pritiska, 131, 156, 158, 162, 170, 302
  - rad sile težine, 131, 156, 157, 170, 302
  - rad toka, 131
  - rad viskoznih sila, 158, 162
  - sferni deo defor. rada, 162
- Realan fluid, 86, 166, 306
- Relativno mirovanje fluida
  - nagib površine, 81
  - pravolinijsko kretanje, 79
  - rotacija suda, 82
- Reynolds Osborne, 88, 189
- Rejnoldsov broj, 189, 196, 252, 271, 336
- Rejnoldsov eksperiment, 230
- Rejnoldsova sličnost, 208
- Rejnoldsova transp. teor., 104, 122
- SI
  - definicija *kg*, 11
  - definicija *m*, 10
  - definicija *s*, 11
  - osnovne veličine, 10
- Sile
  - fiktivne sile, 151, 295
  - hidrodinamičke sile, 215
  - hidrostatička sila, 50
  - inercijalne sile, 123, 147, 151, 295
  - konturna sila, 151, 217, 287, 294, 326
  - na vertikalni mlaznik, 152
  - poligon sila, 153, 295
  - potiska, 66
  - površinske sile, 34, 123, 125, 151, 287, 293, 338
  - prave sile, 123, 124, 147, 151
  - sila otpora oblika, 276
  - sila trenja uz konturu, 158
  - sila trenja uz ploču, 258
  - uzgona, 281, 282, 284
  - zapreminska sila, 34, 123, 124, 157, 287, 293, 338
- Sličnost i modeli, 201
  - dinamička sličnost, 205, 207
  - Frudova sličnost, 208
  - geometrijska sličnost, 202
    - distordovani modeli, 203
    - konturni uslovi, 207
  - kinematska sličnost, 203
  - primeri
    - Fr i Re sličnost, 210
    - Frudova sličnost, 209
    - Rejnoldsova sličnost, 212
  - razmera, 202
    - pravila, 204
    - sloboda izbora razmera, 207
  - Rejnoldsova sličnost, 208
- Specifična energija, 347
- Spregnute dubine, 359
- Stišljivost fluida, 22
- Stokes George, 145
- Strouhal Vincenz, 274

- Struhalov broj**, 274  
**Strujnica fluidnog delića**, 93, 108  
 Bernulijeva jednačina, 130  
 protok kroz strujnicu, 94  
 vizuelizacija, 94
- Šezijev koeficijent trenja**, 341, 342
- Tangencijalni napon**, 125  
 devijatorski deo napona, 126, 142  
 koeficijent, 183, 220, 221  
 normalni deo, 126  
 sferni deo napona, 126  
 složena funkcija, 181  
 veza sa brzinom u cevi, 220
- Termodinamički procesi**, 156
- Toriceli Evangelista**, 45  
 Toričelijeva jednačina, 136
- Trajektorija fluidnog delića**, 93, 108
- Turbulentno strujanje**, 88, 287  
 Businessov koeficijent, 299  
 fluktuaciona komponenta, 89  
 granični sloj, 249  
**granica**, 232  
 Koriolisov koeficijent, 169, 315  
**laminaran podsloj**, 228  
 oblasti  
 glatka cev, 234, 237  
 hrapava cev, 235, 240  
 prelaz glatka-hrapava cev, 234, 239  
 osrednjavanje brzina, 230  
 osrednjena komponenta, 89  
 potrošnja energije, 232  
 razvoj turbulencije, 228  
 histerezis, 228  
 turbulentna viskoznost, 90  
 turbulentno jezgro, 228
- Ustaljeno strujanje**, 90, 134, 287, 336  
 kvaziustaljeno strujanje, 91, 134
- Uzgon**, 281, 282, 284
- Vajsbah Julius**, 139  
 Veličina, 180  
 definicija, 10  
 način zapisa, 11  
 osnovne veličine, 10  
**SI sistem mera**, 12
- Venturi Giambattista**, 312  
 Venturijevo suženje, 312
- Visina pritiska**, 168
- Viskoznost**, 12, 86, 88, 143  
 bezdimenzionalna viskoznost, 189  
 Bingamov fluid, 17  
 definicija, 12  
 dinamički koeficijent, 15  
 idealan fluid, 17  
**jedinica mere**, 16  
 kinematski koeficijent, 16  
**mehanizam viskoznosti**, 17  
 promenljiva po prostoru, 145  
**Rejnoldsov broj**, 189  
 turbulentna viskoznost, 90  
 uticaj temperature, 18
- Vrtložni trag**, 271
- Weber Moritz**, 199  
 Veberov broj, 199
- Zapreminske sile na fluid**, 34, 123, 124, 338
- Zaustavni pritisak**, 138, 188, 304

## Indeks urađenih primera

1. Primer 2.2.1: Primer proračuna sile trenja usled viskoznosti, 19
2. Primer 2.5.1: Promena gustine usled stišljivosti vode, 22
3. Primer 2.6.1: Sila usled pritiska u fluidu - Paskalov zakon, 26
4. Primer 2.6.2: Hidrostatički i apsolutni pritisci, 28
5. **Primer 2.7.1: Pritisak unutar mehura vode, 31**
6. Primer 3.1.1: Proračun pijezometarske kote, 39
7. **Primer 3.1.2: Zavisnost gustine vazduha od visine, 41**
8. **Primer 3.1.3: Zavisnost gustine vazduha od visine i temperature, 43**
9. **Primer 3.2.1: Živin manometar sa U cevi, 49**
10. **Primer 3.3.1: Sila na dno suda, 51**
11. **Primer 3.3.2: Sila na poklopac suda, 55**
12. **Primer 3.3.3: Vertikalna komponenta sile, 62**
13. **Primer 3.3.4: Horizontalna komponenta sile, 64**
14. **Primer 3.3.5: Određivanje gustine tečnosti areometrom, 68**
15. **Primer 3.3.6: Horizontalna sila na ustavu, 74**
16. **Primer 3.3.7: Vertikalna sila na poklopac, 76**
17. **Primer 3.4.1: Pritisci u sudu koji rotira, 83**
18. **Primer 4.1.1: Proračun brzine preko strujnica, 95**
19. **Primer 4.1.2: Proračun strujnice i trajektorije, 95**
20. **Primer 4.1.3: Raspored brzina između dve ploče, laminarno strujanje, 99**
21. **Primer 4.3.1: Promena mase fluida u sudu, 105**
22. **Primer 4.3.2: Materijalni izvod brzine, 109**
23. **Primer 4.4.1: Proračun brzine dilatacije, 118**
24. **Primer 4.4.2: Maseni i zapreminski protoci smeše fluida, 118**
25. **Primer 4.4.3: Jednačina održanja mase - provera rasporeda brzina, 120**
26. **Primer 4.5.1: Sređivanje jednačine kretanja za tačku, 128**
27. **Primer 4.5.2: Primer Bernulijeve jednačine, 132**
28. **Primer 4.5.3: Isticanje kroz oštroični otvor, 136**
29. **Primer 4.5.4: Oštroični preliv, 142**

30. **Primer 4.5.5: Konstantna pijezometarska kota po preseku, 146**
31. Primer 4.5.6: **Businessov koeficijent za turbulentni tok, 150**
32. Primer 4.6.1: **Koriolisov koeficijent za turbulentni tok, 165**
33. **Primer 4.6.2: Zagrevanje vode pri gubitku energije, 167**
34. **Primer 4.6.3: Koji je smer toka vode, 172**
35. **Primer 5.1.1: Primer bezdimenzionalne analize, 180**
36. Primer 5.1.2: **Moguće kombinacije osnovnih veličina, 181**
37. **Primer 5.1.3: Bezdimezionalni pritisak, 189**
38. **Primer 5.1.4: Bezdimezionalni momenat proste grede, 194**
39. Primer 5.2.1: **Fizički model automobila, 203**
40. **Primer 5.2.2: Frudov model ustave, 209**
41. **Primer 5.2.3: Frudov i Rejnoldsov model, 210**
42. **Primer 5.2.4: Model i objekat su isti, 212**
43. **Primer 6.1.1: Gubitak energije u laminarnom toku, 225**
44. **Primer 6.1.2: Kinematski koeficijent viskoznosti, 226**
45. **Primer 6.1.3: Koeficijent trenja za laminarni i turbulentni režim, 238**
46. **Primer 6.1.4: Koeficijent trenja za vodovodnu cev, 239**
47. **Primer 6.1.5: Isticanje vode iz rezervoara, 241**
48. **Primer 6.1.6: Poređenje kružne i kvadratne cevi, 244**
49. **Primer 6.3.1: Debljina graničnog sloja, 255**
50. **Primer 6.3.2: Sila otpora oblika, 260**
51. **Primer 6.4.1: Sila otpora oblika - odnos sila, 268**
52. **Primer 6.4.2: Frekvencija vrtloga iza stuba, 274**
53. **Primer 6.4.3: Sila otpora na objekat, 278**
54. **Primer 6.4.4: Sila vode na prag, 279**
55. **Primer 6.4.5: Sila uzgona na rotirajući cilindar, 282**
56. **Primer 7.2.1: Jednačina kontinuiteta, 291**
57. **Primer 7.2.2: Sila na koleno, 299**
58. **Primer 7.2.3: Koriolisov koeficijent za laminaran tok u cevi, 315**
59. **Primer 8.2.1: Manningov koeficijent - hrapavost, 343**



- 60. Primer 8.2.2: Normalna dubina, 344
- 61. Primer 8.4.1: Krična dubina, 349
- 62. Primer 8.4.2: Dijagram  $Q(h)$  za kanal, 351
- 63. Primer 8.4.3: Krični nagib kanala, 352
- 64. Primer 8.4.4: Prostiranje poremećaja u kanalu, 354
- 65. Primer 8.4.5: Prelaz jezero - kanal, 355
- 66. Primer 8.5.1: Funkcija skoka, 361
- 67. Primer 8.5.2: Hidraulički skok, 362
- 68. Primer 8.8.1: Isticanje ispod ustave, 384
- 69. Primer 8.9.1: Široki prag, 389