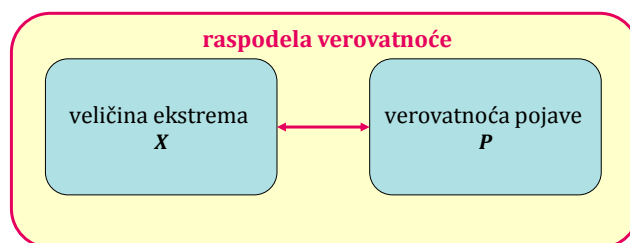
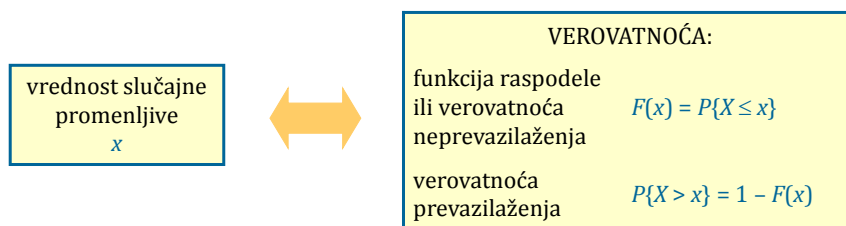


Statistička analiza hidroloških ekstrema

- Cilj statističke analize:
 - pronaći raspodelu verovatnoće ("model") koja dovoljno dobro opisuje vezu X - P u osmotrenom nizu podataka
 - uz pomoć odabrane raspodele, odrediti:
 - verovatnoću pojave zadatog ekstrema, $P(X)$
 - veličinu ekstrema zadate verovatnoće pojave, $X(P)$



Način izražavanja veze X-P



- **velike vode (maksimumi)**
 - $P\{X \leq x\} = F(x) \rightarrow$ obezbeđenost
 - $P\{X > x\} = 1 - F(x) \rightarrow$ rizik, neobezbeđenost
- **male vode (minimumi)**
 - $P\{X \leq x\} = F(x) \rightarrow$ rizik, neobezbeđenost
 - $P\{X > x\} = 1 - F(x) \rightarrow$ obezbeđenost

Povratni period

- Definiše se kao recipročna vrednost verovatnoće kritičnog događaja
 - predstavlja način izražavanja verovatnoće kritičnog događaja
 - predstavlja prosečan broj godina između dva prevazilaženja vrednosti
 - izražava se u godinama

- velike vode (maksimumi)

$$T(x) = \frac{1}{P\{X > x\}} = \frac{1}{1 - F(x)}$$

- primer:

$T(200 \text{ m}^3/\text{s}) = 50 \text{ god.}$ znači da će se protok od $200 \text{ m}^3/\text{s}$ prevazići jednom u 50 godina (odnosno sa verovatnoćom $1/50 = 0.02 = 2\%$)

$$T(x) = \frac{1}{P\{X \leq x\}} = \frac{1}{F(x)}$$

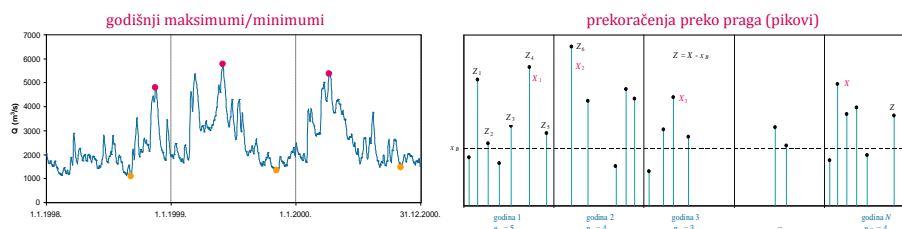
- male vode (minimumi)

- primer:

$T(0.4 \text{ m}^3/\text{s}) = 20 \text{ god.}$ znači da će se protok manji od $0.4 \text{ m}^3/\text{s}$ javiti jednom u 20 godina (odnosno sa verovatnoćom $1/20 = 0.05 = 5\%$)

Uslovi za statističku analizu

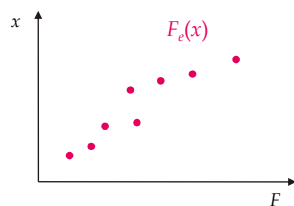
- Uslovi koje hidrološki nizovi ekstrema moraju da ispune:
 - nezavisni podaci (slučajnost)
 - jednako raspoređeni, "istorodni" (homogenost)
- Ispunjavanje uslova proverava se pomoću odgovarajućih statističkih testova
- Smatra se da nizovi godišnjih ekstrema i pikova iznad praga u opštem slučaju ispunjavaju ove uslove



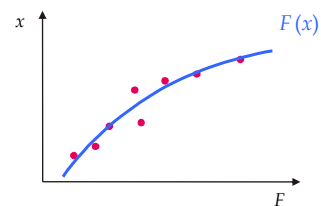
POSTUPAK statističke analize

- PRILAGODAVANJE teorijskih raspodela osmotrenim podacima
 - formiranje EMPIRIJSKE RASPODELE >>>
 - proračun parametara TEORIJSKIH RASPODELA >>>
 - TESTIRANJE SAGLASNOSTI empirijske i teorijskih raspodela >>>
 - IZBOR najbolje raspodele >>>

osmotreni podaci -
EMPIRIJSKA RASPODELA



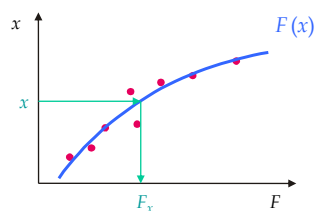
prilagođavanje -
TEORIJSKA RASPODELA



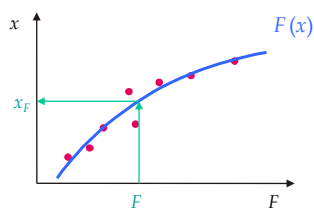
POSTUPAK statističke analize

- PRORAČUN teorijske raspodele
 - VEROVATNOĆE za zadanu vrednost, $F(x)$
 - KVANTILA (vrednosti za zadanu verovatnoću), $x(F)$

proračun
VEROVATNOĆE



proračun
KVANTILA



Empirijska raspodela

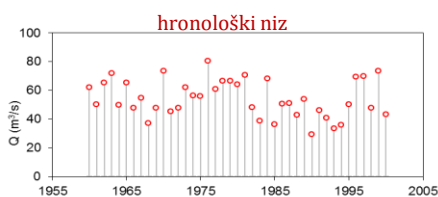
- Proračun empirijske funkcije raspodele
 - potrebno oceniti funkciju raspodele $F(x)$ tj. verovatnoću $P\{X \leq x\}$
- Kao kao empirijska funkcija raspodele može se koristiti
 - kumulativna relativna frekvencija
 - različite formule za kompromisnu verovatnoću

Empirijska raspodela

- Kumulativna relativna frekvencija kao empirijska raspodela

$$P\{X \leq x_k\} = \frac{k}{n} = \frac{\text{broj podataka} \leq x_k}{\text{broj podataka u nizu}}$$

x_k – k -ti podatak u nizu uređenom u rastući redosled

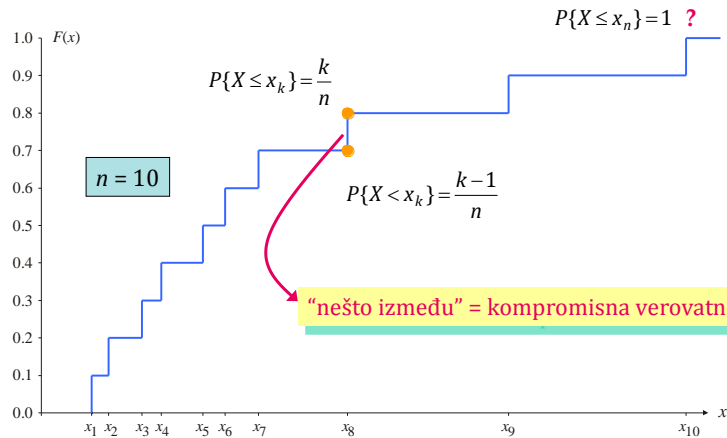


| k | x_k |
|-----|-------|
| 1 | 29.3 |
| 2 | 33.3 |
| 3 | 35.7 |
| 4 | 36.2 |
| 5 | 37.2 |
| ... | ... |
| 41 | 80.3 |

$$P\{X \leq x_5\} = P\{X \leq 37.2\} = \frac{5}{41} = 0.122$$

Empirijska raspodela

- Kumulativna relativna frekvencija kao empirijska raspodela



Empirijska raspodela

- Kompromisna verovatnoća po Hejzenu kao empirijska raspodela

$n = 40$

| k | x_k | $(k - 0.5) / n$ |
|-----|---------------------|-----------------|
| 1 | $x_1 = x_{\min}$ | 0.5/40 |
| 2 | x_2 | 1.5/40 |
| 3 | x_3 | 2.5/40 |
| 4 | x_4 | 3.5/40 |
| 5 | x_5 | 4.5/40 |
| ... | | |
| 38 | x_{38} | 37.5/40 |
| 39 | x_{39} | 38.5/40 |
| 40 | $x_{40} = x_{\max}$ | 39.5/40 |

$$P\{X \leq x_k\} = \frac{k - 0.5}{n}$$

$$P\{X \leq x_{\min}\} = \frac{0.5}{n} = \frac{0.5}{40} = 0.0125$$

$$P\{X \leq x_{\max}\} = \frac{n-1}{n} = \frac{39.5}{40} = 0.9875$$

$$P\{X > x_{\max}\} = 1 - P\{X \leq x_{\max}\} = 0.0125$$

Empirijska raspodela

- Kompromisna verovatnoća po Vejbulu kao empirijska raspodela

$n = 40$

| k | x_k | $k / (n + 1)$ |
|-----|---------------------|---------------|
| 1 | $x_1 = x_{\min}$ | 1/41 |
| 2 | x_2 | 2/41 |
| 3 | x_3 | 3/41 |
| 4 | x_4 | 4/41 |
| 5 | x_5 | 5/41 |
| ... | | |
| 38 | x_{38} | 38/41 |
| 39 | x_{39} | 39/41 |
| 40 | $x_{40} = x_{\max}$ | 40/41 |

$$P\{X \leq x_k\} = \frac{k}{n+1}$$

$$P\{X \leq x_{\min}\} = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{41} = 0.0244$$

$$P\{X \leq x_{\max}\} = \frac{n}{n+1} = \frac{40}{41} = 0.9756$$

$$P\{X > x_{\max}\} = 1 - P\{X \leq x_{\max}\} = 0.0244$$

Empirijska raspodela

- Formule kompromisne verovatnoće

| Autor | Kompromisna verovatnoca | a | Koristi se za |
|---------------|--|-------|-----------------------------------|
| Weibull | $P\{X \leq x_i\} = \frac{i}{n+1}$ | 0 | sve raspodele |
| Hazen | $P\{X \leq x_i\} = \frac{i-0.5}{n}$ | 0.5 | sve raspodele |
| Blom | $P\{X \leq x_i\} = \frac{i-0.375}{n+0.25}$ | 0.375 | normalna i log-normalna raspodela |
| Gringorten | $P\{X \leq x_i\} = \frac{i-0.44}{n+0.12}$ | 0.44 | Gumbelova raspodela |
| Cunnane | $P\{X \leq x_i\} = \frac{i-0.4}{n+0.2}$ | 0.4 | sve raspodele |
| Opšta formula | $P\{X \leq x_i\} = \frac{i-a}{n+1-2a}$ | | |

Teorijske raspodele verovatnoće u hidrologiji

- Normalna i log-normalna raspodela
- Gumbelova raspodela
- Pirson III i log-Pirson III raspodela
- Opšta raspodela ekstremnih vrednosti

[primer >](#)

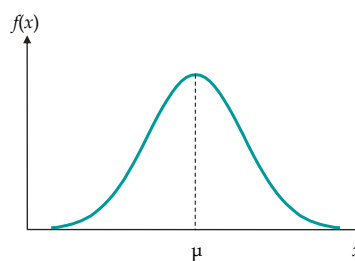
[nazad >](#)

Normalna raspodela

- Gustina raspodele:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < x < \infty$$

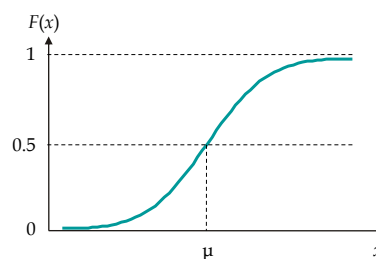
- μ, σ - parametri raspodele



- Funkcija raspodele:

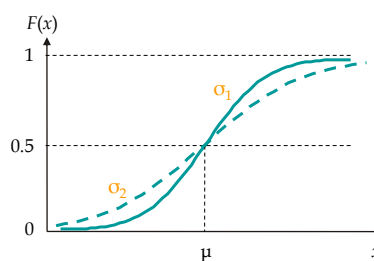
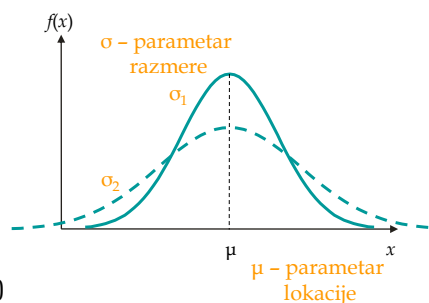
$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] du$$

- neintegrabilna funkcija
- računa se na osnovu tablica standardne normalne raspodele



Normalna raspodela

- Parametri raspodele
 - μ – srednja vrednost ($\mu = \mu'_1$)
 - σ – standardna devijacija ($\sigma^2 = \mu_2$)
- Osobine – momenti raspodele
 - $\mu'_1 = \mu$ (srednja vrednost)
 - $\mu_2 = \sigma^2$ (σ – standardna devijacija)
 - $C_s = \mu_3 / \sigma^3 = 0$ (koeficijent asimetrije)
- Važna osobina: simetričnost ($C_s = 0$)

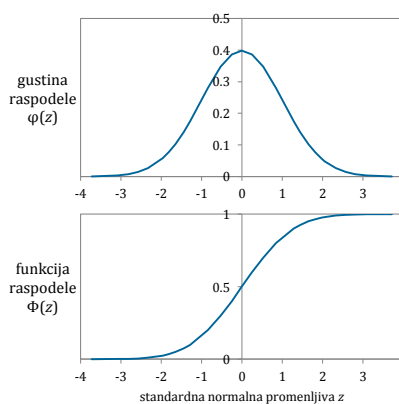


Normalna raspodela

- **Standardna normalna raspodela** = normalna raspodela sa parametrima $\mu = 0$ i $\sigma = 1$
 - Standardizovana normalna promenljiva: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
 - Funkcija raspodele: $\Phi(z) = F_2(z) = P\{Z \leq z\}$

Tablice standardne normalne raspodele

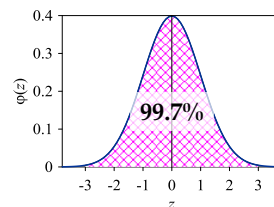
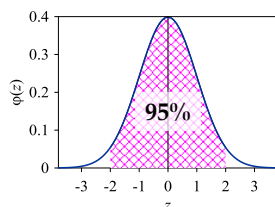
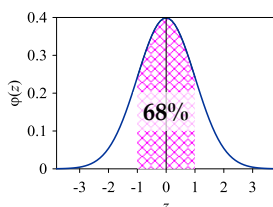
| $\Phi(z)$ | z | $\Phi(z)$ | z |
|-----------|-------|-----------|------|
| 0.001 | -3.09 | 0.999 | 3.09 |
| 0.002 | -2.88 | 0.998 | 2.88 |
| 0.005 | -2.58 | 0.995 | 2.58 |
| 0.01 | -2.33 | 0.99 | 2.33 |
| 0.02 | -2.05 | 0.98 | 2.05 |
| 0.05 | -1.64 | 0.95 | 1.64 |
| 0.1 | -1.28 | 0.9 | 1.28 |
| 0.2 | -0.84 | 0.8 | 0.84 |
| 0.3 | -0.52 | 0.7 | 0.52 |
| 0.4 | -0.25 | 0.6 | 0.25 |
| 0.5 | 0 | 0.5 | 0 |



Normalna raspodela

■ Važne osobine normalne raspodele

- $P\{-1 < Z \leq 1\} = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.841 - 0.159 = 0.683$
- $P\{-2 < Z \leq 2\} = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0.977 - 0.023 = 0.954$
- $P\{-3 < Z \leq 3\} = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0.9987 - 0.0014 = 0.9973$

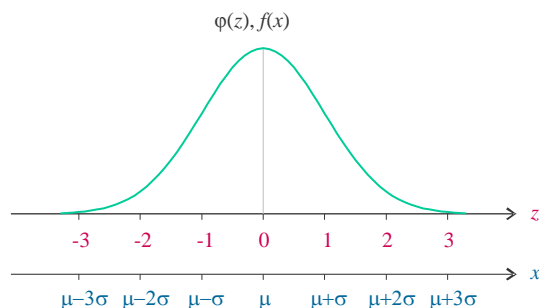


Normalna raspodela

■ Proračun normalne raspodele preko standardne normalne raspodele:

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{\sigma Z + \mu \leq x\} = P\left\{Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$



$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$X = \mu + Z\sigma$$

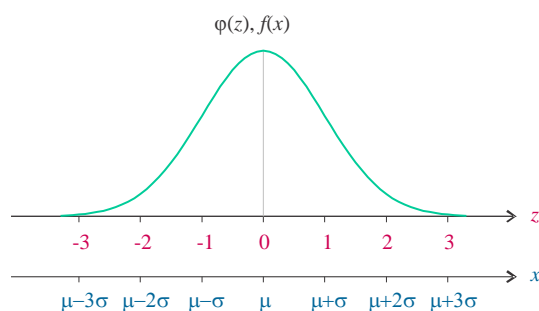
Z - broj standardnih devijacija u odstupanju od srednje vrednosti

Normalna raspodela

- Proračun normalne raspodele preko standardne normalne raspodele – primer:

- $\mu = 120, \sigma = 20$
- $x = 120, z = (150 - 120)/20 = 1.5$

$$F(x) = F(150) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{150 - 120}{20}\right) = \Phi(1.5) = 0.933$$



Normalna raspodela

- Određivanje parametara na osnovu uzorka

$$\mu = \bar{x}$$

$$\sigma = S_x$$

- Postupak proračuna

$$x \rightarrow z = \frac{x - \bar{x}}{S_x} \xrightarrow{\text{TAB}} \Phi(z) = F(x)$$

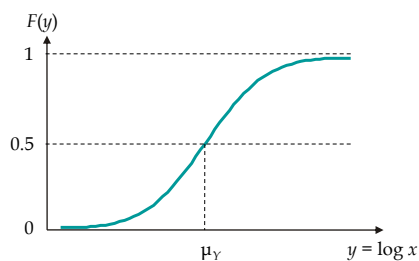
$$F(x) = \Phi(z) \xrightarrow{\text{TAB}} z \rightarrow x = \bar{x} + z \cdot S_x$$



F = NORMSDIST(z)
z = NORMSINV(F)

Log-normalna raspodela

- Primena normalne raspodele na logaritmovane podatke
 - ako slučajna promenljiva $Y = \log X$ prati normalnu raspodelu, tada X prati log-normalnu raspodelu
 - parametri: srednja vrednost i standardna devijacija logaritmovanog niza
 μ_Y, σ_Y



Log-normalna raspodela

- Određivanje parametara na osnovu uzorka

$$\mu_Y = \bar{y}$$

$$\sigma_Y = S_y$$

- Postupak proračuna

$$x \rightarrow y = \log x \rightarrow z = \frac{y - \bar{y}}{S_y} \xrightarrow{\text{TAB}} \Phi(z) = F_Y(y) = F_X(x)$$

$$F_X(x) = \Phi(z) \xrightarrow{\text{TAB}} z \rightarrow y = \bar{y} + z \cdot S_y \rightarrow x = 10^y$$



F = NORMSDIST(z)
z = NORMSINV(F)

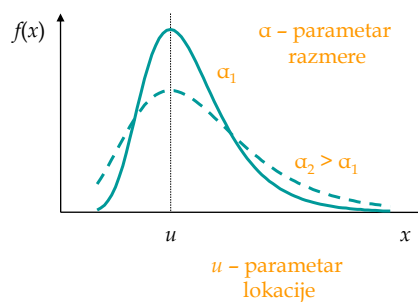
Gumbelova raspodela

- Gustina raspodele: $f(x) = \frac{1}{\alpha} \exp\left\{-\frac{x-u}{\alpha} - \exp\left[-\frac{x-u}{\alpha}\right]\right\}, \quad -\infty < x < \infty$
- Funkcija raspodele: $F(x) = \exp\left\{-\exp\left[-\frac{x-u}{\alpha}\right]\right\}$
- Inverzna funkcija raspodele: $x(F) = u + \alpha[-\ln(-\ln F)]$
- Drugi nazivi:
 - dvostruko eksponencijalna raspodela
 - raspodela ekstremnih vrednosti I tipa

Gumbelova raspodela

- Parametri:
 - α - parametar razmere
 - u - parametar lokacije
- Osobine:
 - srednja vrednost $\mu(u, \alpha)$
 - standardna devijacija $\sigma(u, \alpha)$
$$\mu = u + 0.5772\alpha$$

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \alpha$$
 - koef. asimetrije $C_s = 1.14$



Gumbelova raspodela

Standardna Gumbelova raspodela

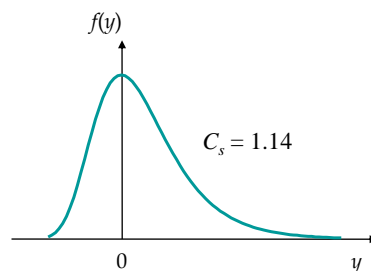
- Gumbelova raspodela sa parametrima $u = 0, \alpha = 1$

- Smena: $Y_G = \frac{X - u}{\alpha}$

- Funkcija raspodele: $F(y) = e^{-e^{-y}}$

- Inverzna funkcija raspodele:

$$y_G(F) = -\ln(-\ln F)$$



Gumbelova raspodela

Određivanje parametara na osnovu uzorka

$$u = \bar{x} - 0.45 S_x$$

$$\alpha = 0.78 S_x$$

Postupak proračuna

$$x \rightarrow y = \frac{x - u}{\alpha} \rightarrow F_Y(y) = e^{-e^{-y}} = F_X(x)$$

$$F_X(x) = F_Y(y) \rightarrow y = -\ln(-\ln F) \rightarrow x = u + y \cdot \alpha$$



$$F = \text{EXP}(-\text{EXP}(-y))$$

$$y = -\text{LN}(-\text{LN}(F))$$

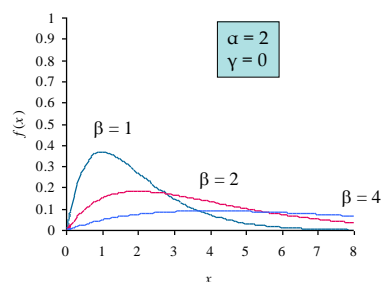
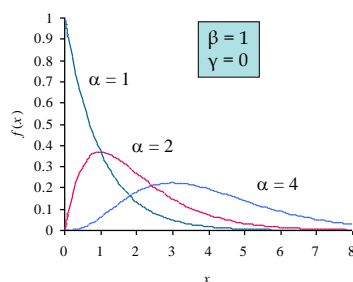
Pirsonova raspodela III tipa

- Troparametarska gama raspodela

- Gustina raspodele: $f(x) = \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha)} \left(\frac{x-\gamma}{\beta} \right)^{\alpha-1} e^{-(x-\gamma)/\beta}, x \geq \gamma$

- Parametri:

- α - parametar oblika, β - parametar razmere, γ - parametar lokacije



Pirsonova raspodela III tipa

- Osobine:

- momenti: $\mu = \alpha\beta + \gamma, \sigma = \beta\sqrt{\alpha}, C_s = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$
- asimetrična $C_s = 2/\sqrt{\alpha}$
- za $C_s = 0$ postaje normalna raspodela
- troparametarska - lakše prilagođavanje

- Proračun

- Tablice faktora frekvencije $K_p(F, C_s)$



$$X(F) = \sigma \cdot K_p(F) + \mu$$

Tabela 3. Faktori

| F(x) | 0.001 | 0.002 | 0.005 | 0.01 | 0.02 | 0.05 | 0.1 | 0.2 | 0.3 |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| T | 1.001 | 1.002 | 1.005 | 1.010 | 1.020 | 1.053 | 1.111 | 1.25 | 1.429 |
| D _s | | | | | | | | | |
| 0.0 | -3.090 | -2.878 | -2.576 | -2.326 | -2.054 | -1.645 | -1.282 | -0.842 | -0.524 |
| 0.1 | -2.948 | -2.757 | -2.482 | -2.253 | -2.000 | -1.616 | -1.270 | -0.846 | -0.536 |
| 0.2 | -2.808 | -2.637 | -2.388 | -2.178 | -1.945 | -1.586 | -1.258 | -0.850 | -0.548 |
| 0.3 | -2.669 | -2.517 | -2.294 | -2.104 | -1.890 | -1.555 | -1.245 | -0.853 | -0.558 |
| 0.4 | -2.533 | -2.399 | -2.201 | -2.029 | -1.834 | -1.524 | -1.231 | -0.855 | -0.569 |
| 0.5 | -2.399 | -2.283 | -2.108 | -1.955 | -1.777 | -1.491 | -1.216 | -0.857 | -0.578 |
| 0.6 | -2.268 | -2.169 | -2.016 | -1.880 | -1.720 | -1.458 | -1.200 | -0.857 | -0.588 |
| 0.7 | -2.141 | -2.057 | -1.926 | -1.806 | -1.663 | -1.423 | -1.183 | -0.857 | -0.596 |
| 0.8 | -2.017 | -1.948 | -1.837 | -1.733 | -1.606 | -1.389 | -1.166 | -0.856 | -0.604 |
| 0.9 | -1.899 | -1.842 | -1.749 | -1.660 | -1.549 | -1.353 | -1.147 | -0.854 | -0.611 |
| 1.0 | -1.786 | -1.741 | -1.664 | -1.588 | -1.492 | -1.317 | -1.128 | -0.852 | -0.618 |
| 1.1 | -1.678 | -1.643 | -1.581 | -1.518 | -1.435 | -1.280 | -1.107 | -0.848 | -0.624 |
| 1.2 | -1.577 | -1.550 | -1.501 | -1.449 | -1.379 | -1.243 | -1.086 | -0.844 | -0.629 |

Pirsonova raspodela III tipa

- Određivanje parametara na osnovu uzorka

$$\alpha = \frac{4}{c_{sx}^2}, \quad \beta = \frac{S_x \cdot c_{sx}}{2}, \quad \gamma = \bar{x} - \alpha\beta$$

- Postupak proračuna

$$x \rightarrow K_p = \frac{x - \bar{x}}{S_x} \xrightarrow{\text{TAB za } c_{sx}} F_X(x)$$

$$F_X(x) \xrightarrow{\text{TAB za } c_{yx}} K_p \rightarrow x = \bar{x} + K_p \cdot S_x$$

K_p – faktor
frekvencije



$$\begin{aligned} C_{sx} > 0: & F = \text{GAMMADIST}((x - \gamma)/\beta, \alpha, 1, \text{TRUE}) \\ & x = \gamma + \beta * \text{GAMMAINV}(F, \alpha, 1) \\ C_{sx} < 0: & F = 1 - \text{GAMMADIST}((x - \gamma)/\beta, \alpha, 1, \text{TRUE}) \\ & x = \gamma + \beta * \text{GAMMAINV}(1 - F, \alpha, 1) \end{aligned}$$

Log-Pirson III raspodela

- Log-Pirson III raspodela
 - ako slučajna promenljiva $Y = \log X$ prati Pirson III raspodelu, tada X prati log-Pirson III raspodelu
 - primena Pirson III raspodele na logaritmovane podatke

Log-Pirson III raspodela

- Određivanje parametara na osnovu uzorka

$$\alpha = \frac{4}{c_{sy}^2}, \quad \beta = \frac{S_y \cdot c_{sy}}{2}, \quad \gamma = \bar{y} - \alpha\beta$$

- Postupak proračuna

$$x \rightarrow y = \log x \rightarrow K_p = \frac{y - \bar{y}}{S_y} \xrightarrow{\text{TAB za } c_{sy}} F_Y(y) = F_X(x)$$

$$F_X(x) \xrightarrow{\text{TAB za } c_{sy}} K_p \rightarrow y = \bar{y} + K_p \cdot S_y \rightarrow x = 10^y$$



$$\begin{aligned} C_{sy} > 0: & F = \text{GAMMADIST}((y - \gamma)/\beta, \alpha, 1, \text{TRUE}) \\ & y = \gamma + \beta * \text{GAMMAINV}(F, \alpha, 1) \\ C_{sy} < 0: & F = 1 - \text{GAMMADIST}((y - \gamma)/\beta, \alpha, 1, \text{TRUE}) \\ & y = \gamma + \beta * \text{GAMMAINV}(1 - F, \alpha, 1) \end{aligned}$$

[nazad >](#)

Opšta raspodela ekstremnih vrednosti

- Drugi nazivi:
 - GEV raspodela (General Extreme Value distribution)
 - Dženkinsonova raspodela

- Funkcija raspodele:

$$F(x) = \exp\left\{-\left[1 - k \frac{x-u}{\alpha}\right]^{1/k}\right\}, \quad k \neq 0 \quad \begin{array}{l} x > u + \alpha/k, \quad k < 0 \\ x < u + \alpha/k, \quad k > 0 \end{array}$$

- za $k = 0$, GEV raspodela se svodi na Gumbelovu: $F(x) = \exp\left\{-\exp\left[-\frac{x-u}{\alpha}\right]\right\}$

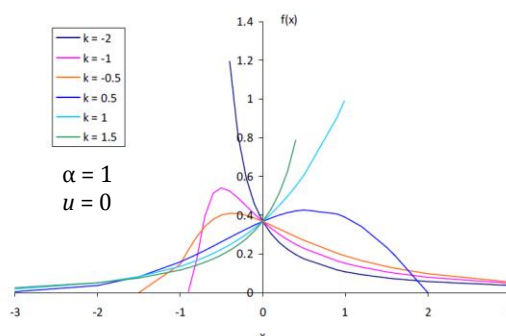
- Inverzna funkcija raspodele:

$$x(F) = u + \frac{\alpha}{k} [1 - (-\ln F)^k], \quad k \neq 0$$

Opšta raspodela ekstremnih vrednosti

Parametri:

- k – parametar oblika
- α – parametar razmere
- u – parametar lokacije



Osobine:

$$EX = \varepsilon + \frac{\alpha}{k} [1 - \Gamma(1+k)], \quad DX = \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2 [\Gamma(1+2k) - \Gamma^2(1+k)]$$

$$C_s = \text{sgn}(k) \frac{-\Gamma(1+3k) + 3\Gamma(1+2k)\Gamma(1+k) - 2\Gamma^3(1+k)}{[\Gamma(1+2k) - \Gamma^2(1+k)]^{3/2}}$$

Opšta raspodela ekstremnih vrednosti

Određivanje parametara na osnovu uzorka

$$C_s = \text{sgn}(k) \frac{-\Gamma(1+3k) + 3\Gamma(1+2k)\Gamma(1+k) - 2\Gamma^3(1+k)}{[\Gamma(1+2k) - \Gamma^2(1+k)]^{3/2}} \longrightarrow k$$

$$\alpha = S_x \frac{k}{[\Gamma(1+2k) - \Gamma^2(1+k)]^{1/2}}, \quad u = \bar{x} - \frac{\alpha}{k} [1 - \Gamma(1+k)]$$

Postupak proračuna

$$x \rightarrow y = \frac{x-u}{\alpha} \rightarrow F(x) = \exp\left\{-[(1-ky)^{1/k}]\right\}$$

$$F(x) \rightarrow y = 1 - (-\ln F)^k \rightarrow x = u + y \cdot \alpha$$

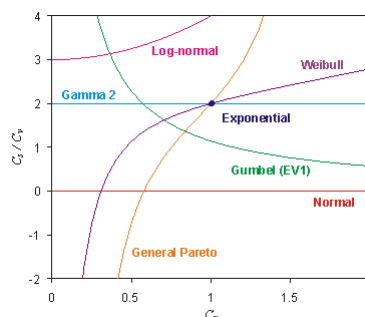


$\Gamma(\cdot) = \text{EXP}(\text{GAMMALN}(\cdot))$
 $F = \text{EXP}(-((1-ky)^{1/k}))$
 $y = 1 - (-\text{LN}(F))^k$

Izbor teorijske raspodele

■ Izbor najbolje teorijske raspodele

- na osnovu primenljivosti teorijske raspodele
 - da li osobine teorijske raspodele odgovaraju osobinama uzorka (npr. asimetrija)



- na osnovu **testova saglasnosti** emirijske i teorijske raspodele
- vizuelna provera na **papiru verovatnoće**

[nazad >](#)

Testiranje saglasnosti

■ Saglasnost empirijske i teorijske raspodele

- empirijska raspodela $F_e(x)$
- teorijska raspodela $F_t(x)$

■ Test Kolmogorova-Smirnova

- H_0 : raspodele su saglasne, H_a : raspodele nisu saglasne
- kontrolna statistika $D_{\max} = \max |F_t(x) - F_e(x)|$
- kriterijum:
 - $D_{\max} < D_{kr}$ → raspodele su saglasne
 - $D_{\max} > D_{kr}$ → raspodele nisu saglasne
- D_{kr} zavisi od dužine uzorka n i praga značajnosti α :

| n | $\alpha = 10\%$ | $\alpha = 5\%$ | $\alpha = 2\%$ | $\alpha = 1\%$ |
|-----|-----------------|----------------|----------------|----------------|
| 20 | 0.265 | 0.294 | 0.329 | 0.352 |
| 40 | 0.189 | 0.210 | 0.235 | 0.252 |

Testiranje saglasnosti

■ Test Kramer – fon Mizesa (ili $n\omega^2$ test)

- H_0 : raspodele su saglasne, H_a : raspodele nisu saglasne
- kontrolna statistika

$$n\omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[F_i(x_i) - \frac{i-0.5}{n} \right]^2 \approx \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n [F_i(x_i) - F_e(x_i)]^2$$

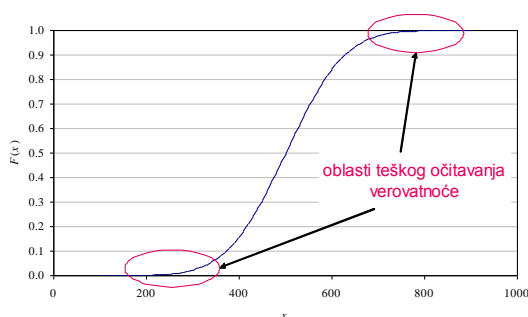
- kriterijum:
 - $n\omega^2 < n\omega_{kr}^2 \rightarrow$ raspodele su saglasne
 - $n\omega^2 > n\omega_{kr}^2 \rightarrow$ raspodele nisu saglasne
- $n\omega_{kr}^2$ zavisi od praga značajnosti α :

| | $\alpha = 10\%$ | $\alpha = 5\%$ | $\alpha = 2.5\%$ | $\alpha = 1\%$ |
|-------------|-----------------|----------------|------------------|----------------|
| $n\omega^2$ | 0.348 | 0.462 | 0.581 | 0.744 |

[nazad >](#)

Grafički prikaz funkcija raspodele

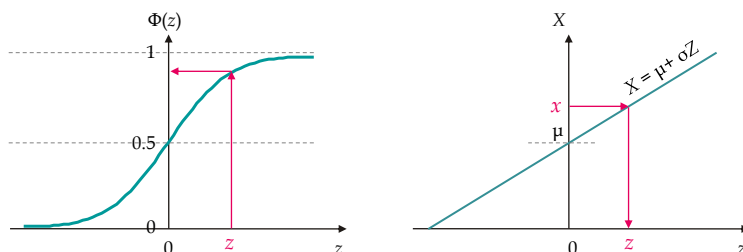
■ Dijagram $F(x)$ u aritmetičkoj razmeri



- Funkcije raspodele se prikazuju na **dijagramima (papirima) verovatnoće**
- Na papirima verovatnoće zavisnost $F(x)$ se linearizuje

Dijagram normalne verovatnoće

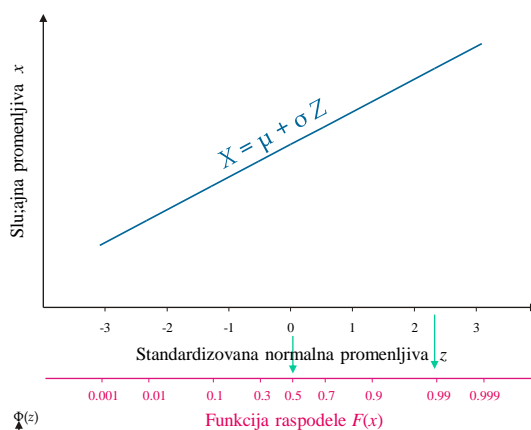
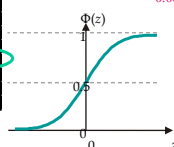
- Standardizovana normalna promenljiva Z i verovatnoća $\Phi(z)$ su u jednoznačnoj vezi
- Linearna veza između standardizovane i originalne promenljive: $X = \mu + \sigma Z$



Dijagram normalne verovatnoće - konstrukcija

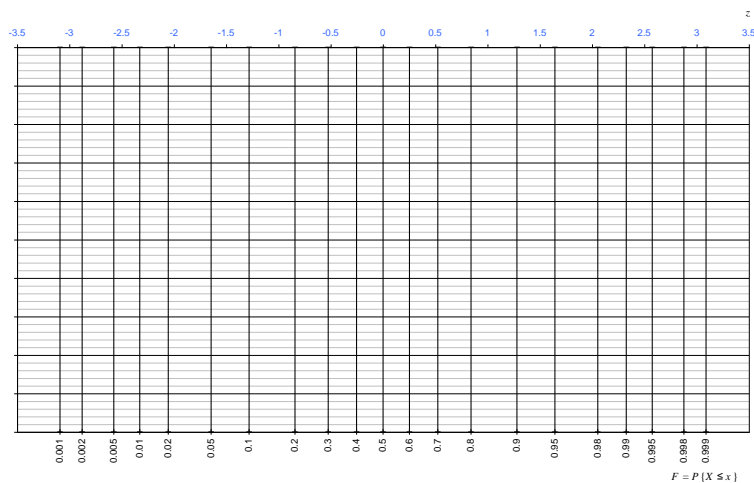
- Linearna veza između standardizovane i originalne promenljive: $X = \mu + \sigma Z$
- Jednoznačna veza između standardizovane normalne promenljive i funkcije raspodele: $Z - F(z)$

| $F(z)$ | z | $F(z)$ | z |
|--------|--------|--------|-------|
| 0.001 | -3.090 | 0.5 | 0.000 |
| 0.002 | -2.878 | 0.6 | 0.253 |
| 0.005 | -2.576 | 0.7 | 0.524 |
| 0.01 | -2.326 | 0.75 | 0.674 |
| 0.02 | -2.054 | 0.8 | 0.842 |
| 0.025 | -1.960 | 0.9 | 1.282 |
| 0.05 | -1.645 | 0.95 | 1.645 |
| 0.1 | -1.282 | 0.975 | 1.960 |
| 0.2 | -0.842 | 0.99 | 2.326 |
| 0.25 | -0.674 | 0.995 | 2.576 |
| 0.3 | -0.524 | 0.998 | 2.878 |
| 0.4 | -0.253 | 0.999 | 3.090 |



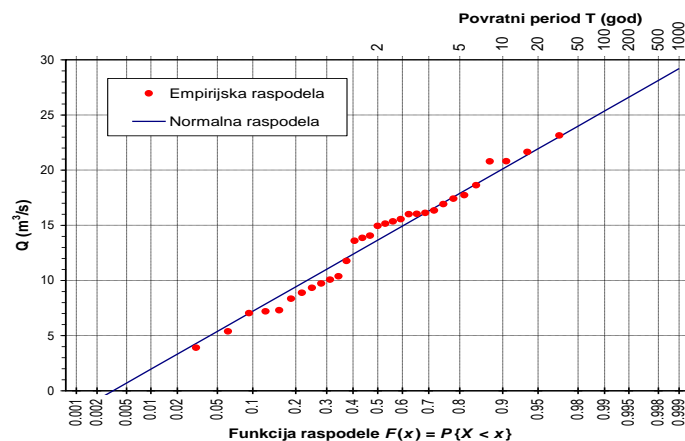
Papir normalne verovatnoće

- “Komerčijalni” papir normalne verovatnoće



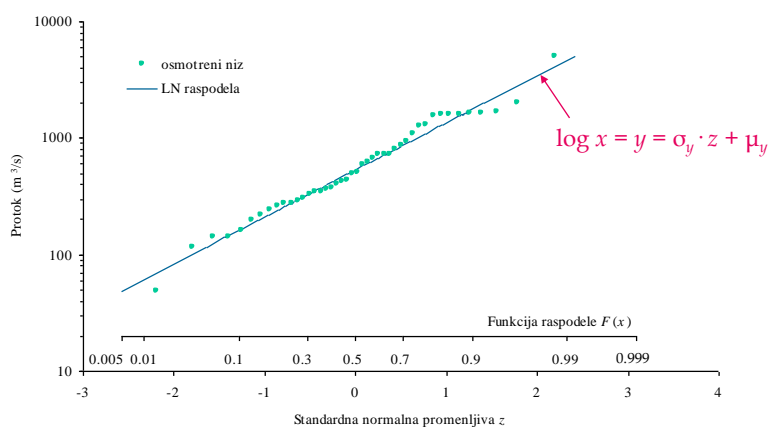
Dijagram normalne verovatnoće

- Ako se tačke empirijske raspodele na papiru normalne verovatnoće grupišu oko prave linije, tada se smatra da normalna raspodela dobro opisuje taj niz

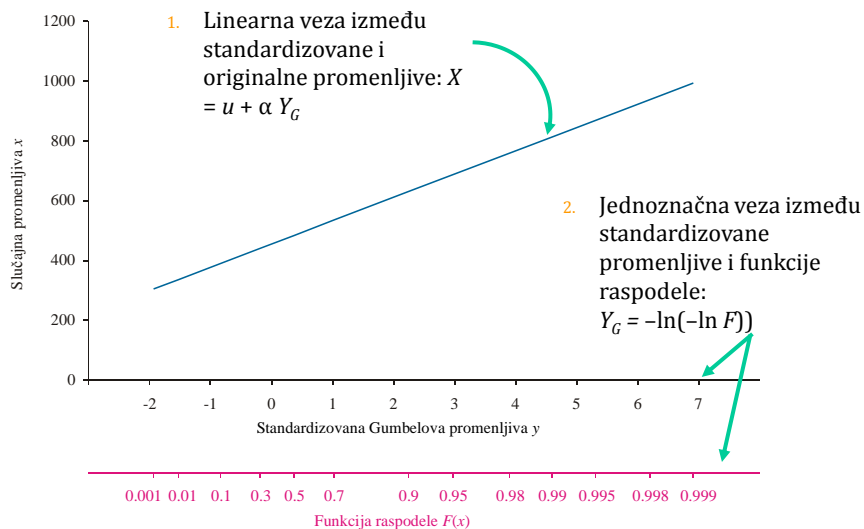


Dijagram log-normalne verovatnoće

- Dijagram normalne verovatnoće sa osom za X u logaritamskoj raspodeli

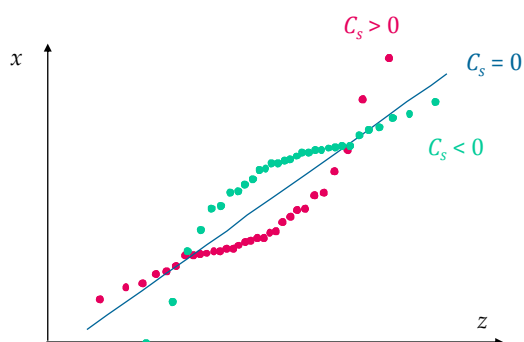


Dijagram Gumbelove verovatnoće



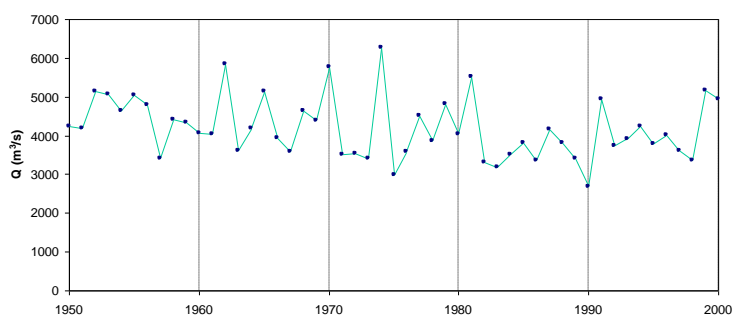
Dijagrami verovatnoće

- Ocena podobnosti raspodele
 - na dijagramu normalne verovatnoće:



Primer

- Sava – Sremska Mitrovica



| | originalni niz X | logaritmovani niz $Y = \log X$ |
|------------------------|-----------------------|-----------------------------------|
| broj podataka | 51 | 51 |
| srednja vrednost | 4187 | 3.6147 |
| standardna devijacija | 781.3 | 0.07936 |
| koeficijent varijacije | 0.187 | 0.022 |
| koeficijent asimetrije | 0.623 | 0.196 |

Primer

■ Proračun parametara raspodela

- Normalna raspodela:

$$\mu = \bar{x} = 4187 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\sigma = S_x = 781.3 \text{ m}^3/\text{s}$$

- Log-normalna raspodela:

$$\mu_Y = \bar{y} = 3.6147$$

$$\sigma_Y = S_y = 0.07936$$

- Gumbelova raspodela:

$$u = \bar{x} - 0.45 \cdot S_x = 4187 - 0.45 \cdot 781.3 = 3835 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\alpha = 0.78 \cdot S_x = 0.78 \cdot 781.3 = 609.4 \text{ m}^3/\text{s}$$

| | X | Y = log X |
|------------------------|-------|-----------|
| broj podataka | 51 | 51 |
| srednja vrednost | 4187 | 3.6147 |
| standardna devijacija | 781.3 | 0.07936 |
| koeficijent asimetrije | 0.623 | 0.196 |

Primer

■ Proračun parametara raspodela

- Pirson III raspodela:

$$\alpha = \frac{4}{c_{sx}^2} = \frac{4}{0.623^2} = 10.31$$

$$\beta = \frac{S_x \cdot c_{sx}}{2} = \frac{781.3 \cdot 0.623}{2} = 243.3$$

$$\gamma = \bar{x} - \frac{2S_x}{c_{sx}} = 4187 - \frac{2 \cdot 781.3}{0.623} = 1678 \text{ m}^3/\text{s}$$

- Log-Pirson III raspodela:

$$\alpha = \frac{4}{c_{sy}^2} = \frac{4}{0.196^2} = 104.31$$

$$\beta = \frac{S_y \cdot c_{sy}}{2} = \frac{0.07936 \cdot 0.196}{2} = 0.007771$$

$$\gamma = \bar{y} - \frac{2S_y}{c_{sy}} = 3.6147 - \frac{2 \cdot 0.07936}{0.196} = 2.804$$

| | X | Y = log X |
|------------------------|-------|-----------|
| broj podataka | 51 | 51 |
| srednja vrednost | 4187 | 3.6147 |
| standardna devijacija | 781.3 | 0.07936 |
| koeficijent asimetrije | 0.623 | 0.196 |

Primer

■ Proračun teorijskih raspodela

- protok za $F(x) = 0.95$

- Normalna raspodela:

$$F_X(x) = 0.95 \xrightarrow{\text{TAB.XL}} z(0.95) = 1.645$$

$$x = \bar{x} + z \cdot S_x = 4187 + 1.645 \cdot 781.3 = 5472 \text{ m}^3/\text{s}$$

- Log-normalna raspodela:

$$F_X(x) = 0.95 \xrightarrow{\text{TAB.XL}} z(0.95) = 1.645$$

$$y = \bar{y} + z \cdot S_y = 3.6147 + 1.645 \cdot 0.07936 = 3.74524$$

$$x = 10^y = 5562 \text{ m}^3/\text{s}$$

Primer

■ Proračun teorijskih raspodela

- protok za $F(x) = 0.95$

- Gumbelova raspodela:

$$F_X(x) = 0.95 \rightarrow y(0.95) = -\ln(-\ln 0.95) = 2.970$$

$$x = u + y \cdot \alpha = 3835 + 2.970 \cdot 609.4 = 5645 \text{ m}^3/\text{s}$$

- Pirson III raspodela:

$$F_X(x) = 0.95 \xrightarrow{\text{TAB}} k_p(F = 0.95, c_{sx} = 0.6) = 1.797, \quad k_p(F = 0.95, c_{sx} = 0.7) = 1.819$$

$$k_p(F = 0.95, c_{sx} = 0.623) = 1.802$$

$$x = \bar{x} + k_p \cdot S_x = 4187 + 1.802 \cdot 781.3 = 5595 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$F_X(x) = 0.95 \xrightarrow{\text{XL}} \frac{x - \gamma}{\beta} = \text{GAMMAINV}(0.95, 10.311, 1) = 16.098 = u$$

$$x = \gamma + u \cdot \beta = 1678 + 16.098 \cdot 243.3 = 5595 \text{ m}^3/\text{s}$$

Primer

■ Proračun teorijskih raspodela

- protok za $F(x) = 0.95$

- Log-Pirson III raspodela:

$$F_X(x) = 0.95 \xrightarrow{\text{TAB}} k_p(F = 0.95, c_{sy} = 0.1) = 1.673, \quad k_p(F = 0.95, c_{sy} = 0.2) = 1.700$$

$$k_p(F = 0.95, c_{sy} = 0.196) = 1.699$$

$$y = \bar{y} + k_p \cdot S_y = 3.6147 + 1.699 \cdot 0.07936 = 3.74953$$

$$x = 10^y = 5617 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$F_X(x) = 0.95 \xrightarrow{\text{XL}} \frac{y - \gamma}{\beta} = \text{GAMMAINV}(0.95, 104.31, 1) = 121.66 = u$$

$$y = \gamma + u \cdot \beta = 2.8041 + 121.66 \cdot 0.00777 = 5617 \text{ m}^3/\text{s}$$

Primer

■ Sava – Sremska Mitrovica

- Rezultati proračuna kvantila od 95%

| Raspodela | Protok sa $F(x) = 0.95$ (m^3/s) |
|--------------|--|
| Normalna | 5472 |
| Log-normalna | 5562 |
| Gumbelova | 5645 |
| Pirson III | 5595 |
| Log-Pirson 3 | 5617 |

Primer

- Sava – Sremska Mitrovica
 - Saglasnost empirijske i teorijske raspodele – test Kolmogorova-Smirnova

| D_{\max} | | | | |
|------------|-------|-------|-------|-------|
| N | LN | G | P3 | LP3 |
| 0.088 | 0.072 | 0.072 | 0.065 | 0.067 |

| D_{kr} | | | | |
|----------|-----------------|----------------|----------------|----------------|
| N | $\alpha = 10\%$ | $\alpha = 5\%$ | $\alpha = 2\%$ | $\alpha = 1\%$ |
| 51 | 0.171 | 0.190 | 0.213 | 0.228 |

Primer

- Sava – Sremska Mitrovica
 - izbor najbolje raspodele: kontrola osobina raspodela

| | originalni niz X | logaritmovani niz $Y = \log X$ |
|------------------------|-----------------------|-----------------------------------|
| broj podataka | 51 | 51 |
| srednja vrednost | 4187 | 3.6147 |
| standardna devijacija | 781.3 | 0.07936 |
| koeficijent varijacije | 0.187 | 0.022 |
| koeficijent asimetrije | 0.623 | 0.196 |



P3



LP3, možda LN

Primer

- Sava – Sremska Mitrovica
 - izbor najbolje raspodele: saglasnost empirijske i teorijske raspodele

| D_{\max} | | | | |
|------------|-------|-------|-------|-------|
| N | LN | G | P3 | LP3 |
| 0.088 | 0.072 | 0.072 | 0.065 | 0.067 |

najbolje slaganje

Primer

- Sava – Sremska Mitrovica
 - izbor najbolje raspodele: vizuelna provera na papiru verovatnoće

