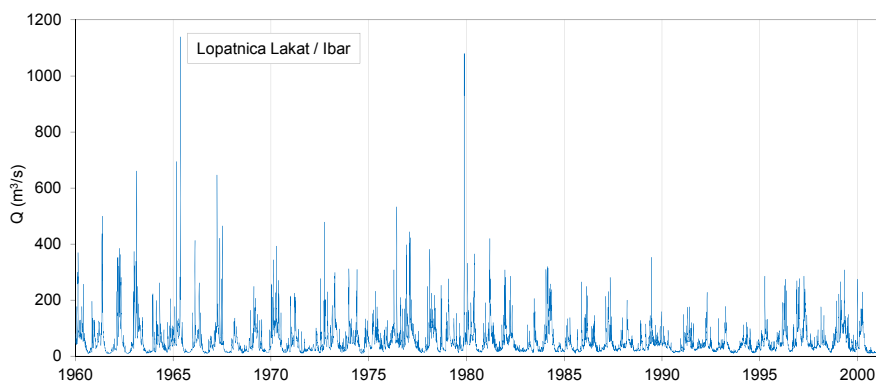


Inženjerska hidrologija

PRIMENA VEROVATNOĆE I STATISTIKE U HIDROLOGIJI

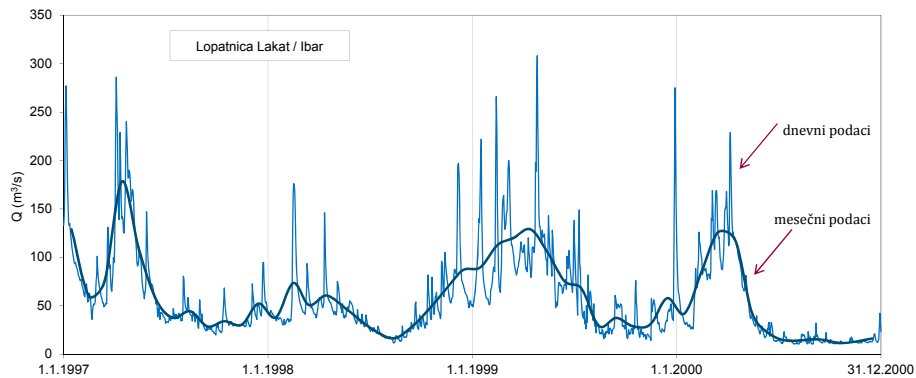
Karakter hidroloških procesa

- Hidrološki procesi odvijaju se u prostoru i vremenu
 - delom predvidivo (**deterministički**)
 - delom nepredvidivo (**slučajno, stohastički**)



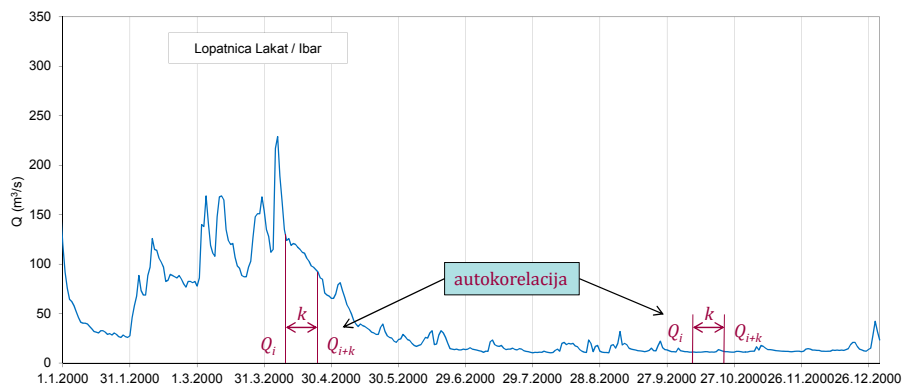
Karakter hidroloških procesa

- Hidrološki procesi odvijaju se u prostoru i vremenu
 - delom predvidivo (**deterministički**)
 - delom nepredvidivo (**slučajno, stohastički**)



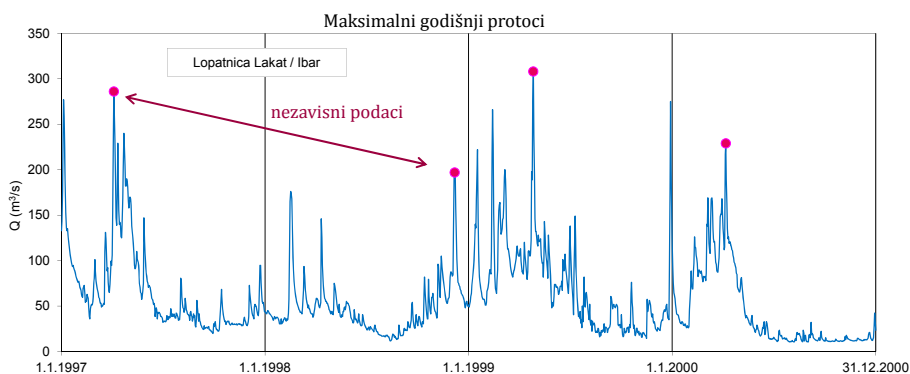
Karakter hidroloških procesa

- Protoci kao vremenske serije
 - izražena međuzavisnost podataka (**autokorelacija**)
 - redosled podataka je bitan



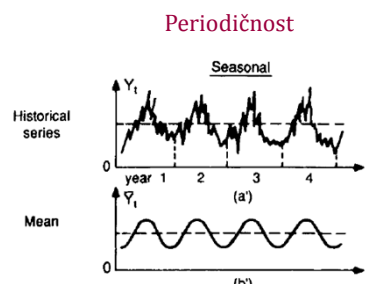
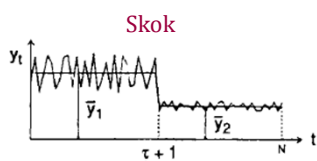
Karakter hidroloških procesa

- **Čisto slučajan proces:** jedan podatak osmatranja ne zavisi od prethodnih ili narednih osmatranja
 - redosled podataka nije bitan
 - pogodno za ekstremne hidrološke pojave (velike/male vode)

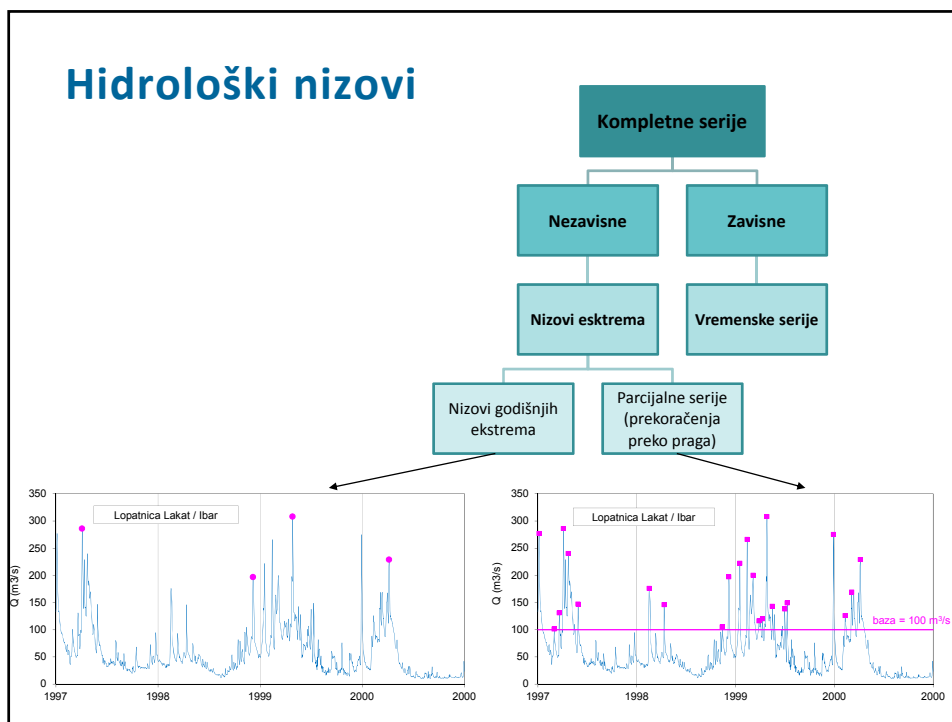


Karakter hidroloških procesa

- **Složeni proces:**
 - determinističke komponente (trend, skokovi, periodičnost)
 - slučajne komponente (opisivanje međuzavisnosti i čisto slučajna komponenta)

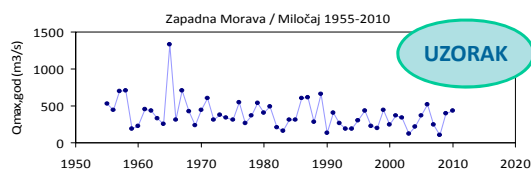


Hidrološki nizovi

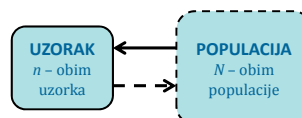


Hidrološki nizovi

- Prikupljeni hidrološki podaci čine **uzorak** iz nepoznate **populacije**



- Uzorak je podskup populacije
- **Zaključivanje o populaciji na osnovu uzorka**
- Reprzentativan uzorak?
- *Prost slučajni uzorak*: onaj u kome su elementi *nezavisni* i *isto raspoređeni* (slučajnost i homogenost uzorka); tada je analiza najjednostavnija



Osnovni pojmovi iz verovatnoće

- Teorija verovatnoće
 - matematička disciplina koja se bavi izučavanjem slučajnih pojava
 - slučajne pojave su empirijski fenomeni čiji ishodi nisu uvek strogo definisani (neizvesni su)
- Eksperiment ili opit
 - stvarni ili zamišljeni eksperiment čiji je rezultat NEIZVESAN (pojava poplava, pojava suše, pojava jake kiše)
 - ako se eksperiment ponavlja mnogo puta pod istim uslovima, pojavljuje se određena zakonomernost u ishodima
 - verovatnoća – kvantitativna mera kojom se procenjuje mogućnost/nemogućnost nastupanja ishoda

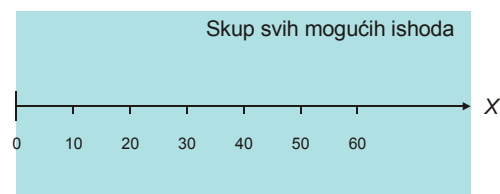
Osnovni pojmovi iz verovatnoće

- Ishodi ili realizacije
 - rezultati eksperimenta
- Skup svih mogućih ishoda
 - svi mogući rezultati eksperimenta
- Slučajni događaj
 - podskup skupa svih mogućih ishoda
- Slučajna promenljiva
 - veličina koja se ponaša po nekom zakonu verovatnoće, tj. uzima vrednosti iz skupa svih mogućih ishoda sa nekom verovatnoćom

Osnovni pojmovi

■ Primer:

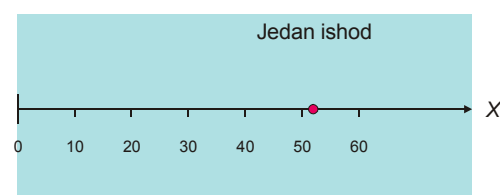
- Protok kao slučajna promenljiva X
- Skup svih mogućih ishoda: $0 \leq X < \infty$



Osnovni pojmovi

■ Primer:

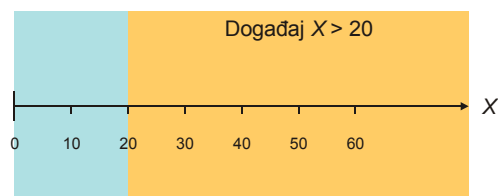
- Protok kao slučajna promenljiva X
- Skup svih mogućih ishoda: $0 \leq X < \infty$
- Ishodi ili realizacije (osmatranja): $X = 52 \text{ m}^3/\text{s}$



Osnovni pojmovi

■ Primer:

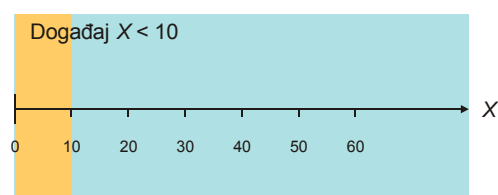
- Visina kiše kao slučajna promenljiva X
- Skup svih mogućih ishoda: $0 \leq X < \infty$
- Ishodi ili realizacije (osmatranja): $X = 52 \text{ m}^3/\text{s}$
- Slučajni događaj:
 $X > 20 \text{ m}^3/\text{s}$



Osnovni pojmovi

■ Primer:

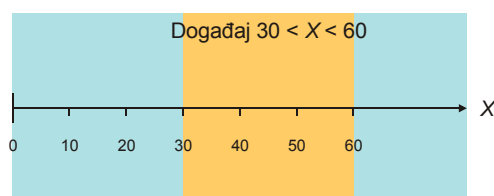
- Visina kiše kao slučajna promenljiva X
- Skup svih mogućih ishoda: $0 \leq X < \infty$
- Ishodi ili realizacije (osmatranja): $X = 52 \text{ m}^3/\text{s}$
- Slučajni događaj:
 $X > 20 \text{ mm}^3/\text{s}, X \leq 10 \text{ m}^3/\text{s}$



Osnovni pojmovi

■ Primer:

- Visina kiše kao slučajna promenljiva X
- Skup svih mogućih ishoda: $0 \leq X < \infty$
- Ishodi ili realizacije (osmatranja): $X = 52 \text{ m}^3/\text{s}$
- Slučajni događaj:
 $X > 20 \text{ m}^3/\text{s}$, $X \leq 10 \text{ m}^3/\text{s}$, $30 \leq X \leq 60 \text{ m}^3/\text{s}$



Osnovni pojmovi

■ Slučajne promenljive:

- *prekidne ili diskretne*: skup svih mogućih ishoda = skup celih brojeva
 - broj dana u godini sa kišom većom od 10 mm
 - broj dana u godini sa temperaturom ispod 0°C
 - broj talasa velikih voda u godini sa maksimalnim protokom većim od neke vrednosti
- *neprekidne ili kontinualne*: skup svih mogućih ishoda = skup realnih brojeva
 - protok
 - visina kiše
 - nivo vode (vodostaj, ako se ne menja kota nule vodomera)
 - zapremine talasa velikih voda
 - nivo podzemnih voda

Raspodela verovatnoće

- Ishodi ili realizacije i događaji se dešavaju sa određenom verovatnoćom, prema RASPODELI VEROVATNOĆE
- Raspodela verovatnoće za **diskretnu slučajnu promenljivu**

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

$$p_i = P\{X = x_i\}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots = \sum_i p_i = 1$$

Raspodela verovatnoće

- Primer raspodele **diskretne slučajne promenljive**:

- bacanje novčića $X : \begin{pmatrix} P & G \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

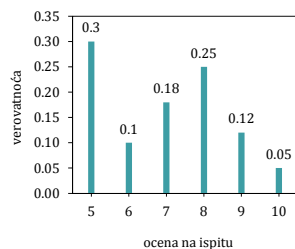
- bacanje kocke $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$

- ocena na ispitu $X : \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0.30 & 0.10 & 0.18 & 0.25 & 0.12 & 0.05 \end{pmatrix}$

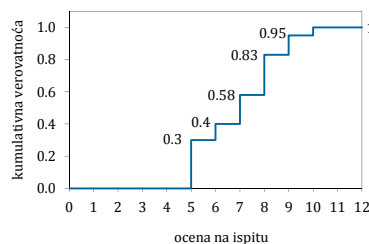
Raspodela verovatnoće

- Grafički prikaz raspodele **diskretne slučajne promenljive**
 - primer: ocena na ispitu

$$X : \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0.30 & 0.10 & 0.18 & 0.25 & 0.12 & 0.05 \end{pmatrix}$$



štapičasti dijagram
verovatnoća



stepenasti dijagram
kumulativnih verovatnoća

Raspodela verovatnoće

- Primer raspodele **diskretne slučajne promenljive**

- Verovatnoća da neće biti nijednog kišnog dana:

$$P\{X=0\} = 0$$

- Verovatnoća da će se javiti 2 ili manje kišnih dana u zadatom mesecu:

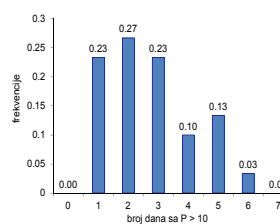
$$\begin{aligned} P\{X \leq 2\} &= P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\} = \\ &= 0 + 0.23 + 0.27 = 0.50 \end{aligned}$$

- Verovatnoća da će se javiti 5 ili više kišnih dana u zadatom mesecu:

$$\begin{aligned} P\{X \geq 5\} &= 1 - P\{X \leq 4\} = \\ &= 1 - (P\{X=0\} + P\{X=1\} + \dots + P\{X=4\}) = \\ &= 1 - (0 + 0.23 + 0.27 + 0.23 + 0.10) = 1 - 0.83 = 0.17 \end{aligned}$$

BROJ DANA U JUNU
SA PADAVINAMA > 10 mm
Novi Sad - Petrovaradin

Godina	Broj dana	Godina	Broj dana
1961	2	1976	5
1962	1	1977	1
1963	1	1978	2
1964	4	1979	3
1965	2	1980	4
1966	1	1981	5
1967	5	1982	3
1968	1	1983	3
1969	6	1984	2
1970	5	1985	3
1971	1	1986	1
1972	4	1987	2
1973	3	1988	2
1974	3	1989	2
1975	2	1990	3



Raspodela verovatnoće

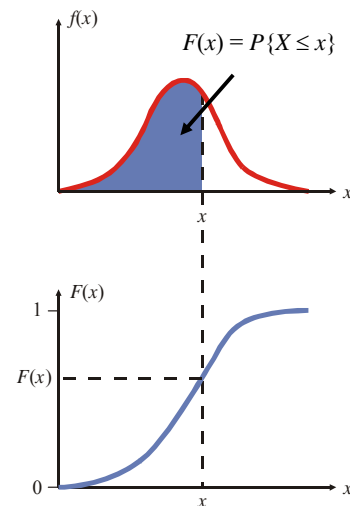
■ Raspodela verovatnoće za kontinualnu slučajnu promenljivu

- funkcija gustine verovatnoće $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1$$

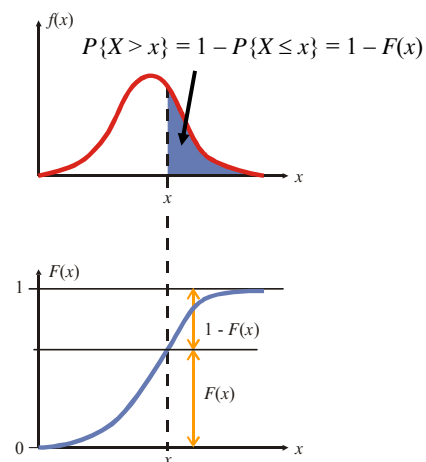
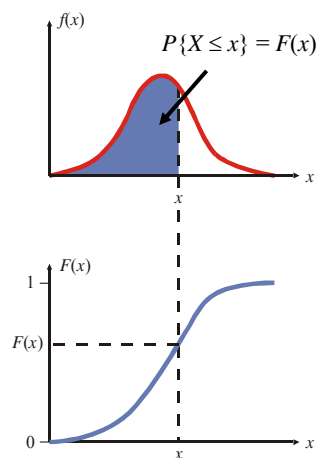
- funkcija raspodele verovatnoće $F(x)$

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(u) du$$



Raspodela verovatnoće

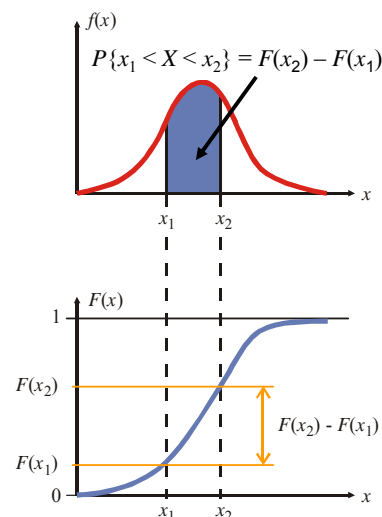
■ Verovatnoće događaja za kontinualnu slučajnu promenljivu



Raspodela verovatnoće

- Verovatnoće događaja za **kontinualnu slučajnu promenljivu**

$$\begin{aligned}
 P\{x_1 < X < x_2\} &= \\
 &= 1 - P\{X < x_1\} - P\{X > x_2\} = \\
 &= 1 - P\{X > x_2\} - P\{X < x_1\} = \\
 &= P\{X < x_2\} - P\{X < x_1\} \\
 &= F(x_2) - F(x_1)
 \end{aligned}$$



Raspodela verovatnoće

- Primer raspodele verovatnoće za **kontinualnu slučajnu promenljivu**:

- eksponecijalna raspodela:

$$f(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0$$

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_0^x f(u) du = \int_0^x e^{-u} du = -e^{-u} \Big|_0^x = 1 - e^{-x}$$

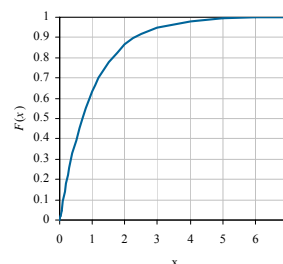
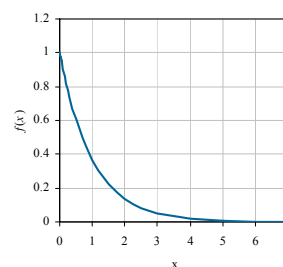
$$P\{X \leq 1\} = F(1) = 1 - e^{-1} = 1 - 0.368 = 0.632$$

$$\begin{aligned}
 P\{1 < X < 2\} &= F(2) - F(1) = 1 - e^{-2} - 1 + e^{-1} = \\
 &= 0.368 - 0.135 = 0.233
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P\{2 < X < 3\} &= F(3) - F(2) = 1 - e^{-3} - 1 + e^{-2} = \\
 &= 0.135 - 0.050 = 0.085
 \end{aligned}$$

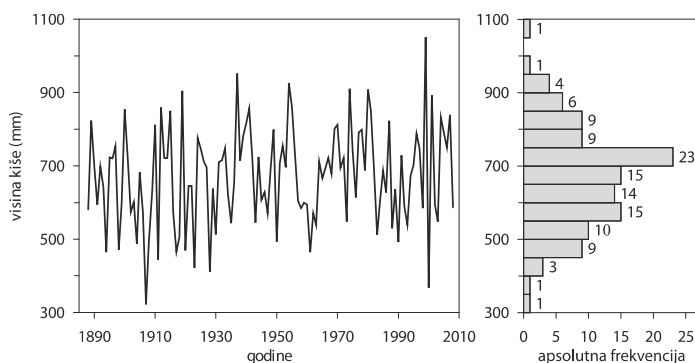
$$P\{X > 3\} = 1 - F(3) = 1 - 1 + e^{-3} = 0.050$$

$$\begin{aligned}
 P\{X \leq 1\} + P\{1 < X < 2\} + P\{2 < X < 3\} + P\{X > 3\} &= \\
 = 0.632 + 0.233 + 0.085 + 0.050 &= 1.000
 \end{aligned}$$



Raspodela verovatnoće

- Grafičko predstavljanje raspodele **kontinualne slučajne promenljive**
 - Histogram = dijagram frekvencija
 - podela na klase: približan broj klasa $K = 5 \log n$

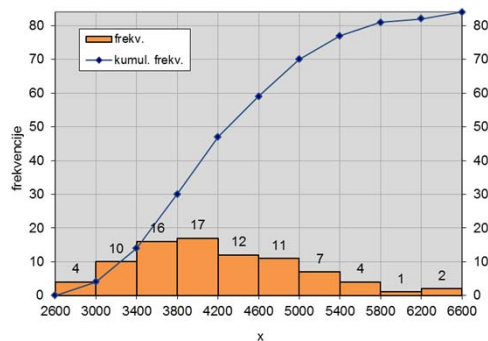


Raspodela verovatnoće

- Primer za **kontinualnu slučajnu promenljivu**: maksimalni godišnji protoci na Savi kod Sremske Mitrovice – raspodela iz uzorka
 - $n = 84$; broj klasa: $K = 5 \log 84 = 9.6$, usvaja se $K = 10$

apsolutne frekvencije n_i

Klasa od	Klasa do	Frekv. n_i	Kumul. frekv. $F_i = \sum n_i$
2600	3000	4	4
3000	3400	10	14
3400	3800	16	30
3800	4200	17	47
4200	4600	12	59
4600	5000	11	70
5000	5400	7	77
5400	5800	4	81
5800	6200	1	82
6200	6600	2	84

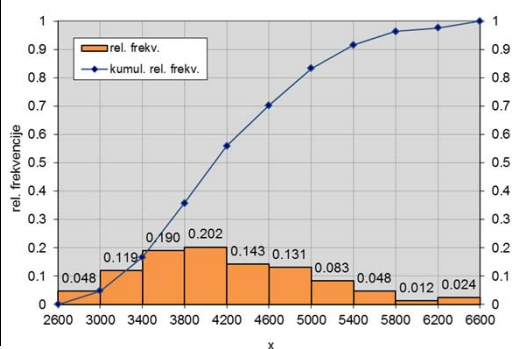


Raspodela verovatnoće

- Primer: maksimalni godišnji protoci na Savi kod Sremske Mitrovice – raspodela iz uzorka

relativne frekvencije n_i^*

Klasa od	Klasa do	Rel. frekv. $n_i^* = n_i/n$	Kumul. rel. frekv. $F_i^* = F_i/n$
2600	3000	0.048	0.048
3000	3400	0.119	0.167
3400	3800	0.190	0.357
3800	4200	0.202	0.560
4200	4600	0.143	0.702
4600	5000	0.131	0.833
5000	5400	0.083	0.917
5400	5800	0.048	0.964
5800	6200	0.012	0.976
6200	6600	0.024	1

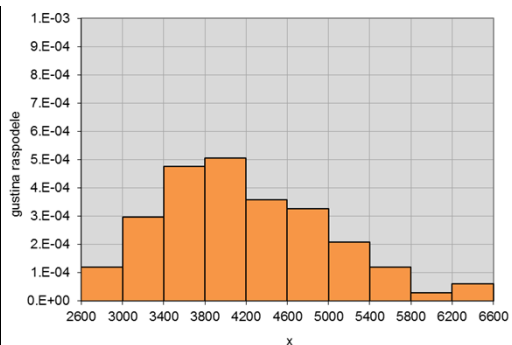


Raspodela verovatnoće

- Primer: maksimalni godišnji protoci na Savi kod Sremske Mitrovice – raspodela iz uzorka

gustina raspodele $f_i^* = n_i^*/\Delta x$

Klasa od	Klasa do	Gustina $f_i^* = n_i^*/\Delta x$	Kumul. rel. frekv. $F_i^* = F_i/n$
2600	3000	1.19E-04	0.048
3000	3400	2.98E-04	0.167
3400	3800	4.76E-04	0.357
3800	4200	5.06E-04	0.560
4200	4600	3.57E-04	0.702
4600	5000	3.27E-04	0.833
5000	5400	2.08E-04	0.917
5400	5800	1.19E-04	0.964
5800	6200	2.98E-05	0.976
6200	6600	5.95E-05	1



Osobine raspodela verovatnoće

- Momenti raspodele
 - momenti oko koordinatnog početka

$$\mu'_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx$$

- momenti oko sredine

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r f(x) dx$$

Osobine raspodela verovatnoće

- Mere centralne tendencije

- srednja vrednost
 - težište gustine raspodele:

$$\mu'_1 = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

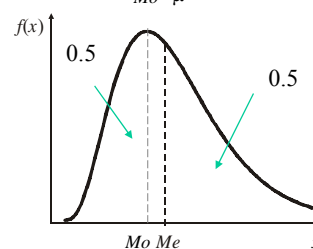
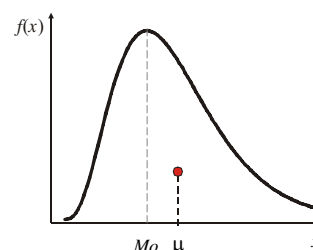
- iz uzorka:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- medijana (Me)

$$F(Me) = \int_{-\infty}^{Me} f(x) dx = \int_{Me}^{\infty} f(x) dx = 0.5$$

- mod (Mo) - maksimum gustine



Osobine raspodela verovatnoće

■ Mere odstupanja od srednje vrednosti

- disperzija (varijansa):

$$\mu_2 = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

- iz uzorka:

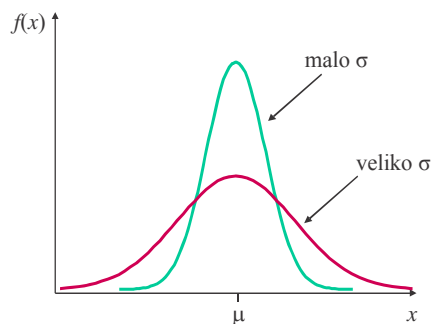
$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

- standardna devijacija:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

- koeficijent varijacije:

$$C_v = \frac{\sigma}{\mu} \quad c_v = \frac{S}{\bar{x}}$$



Osobine raspodela verovatnoće

■ Asimetrija raspodele

- treći momenat:

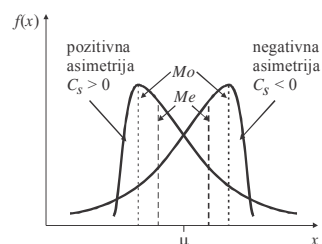
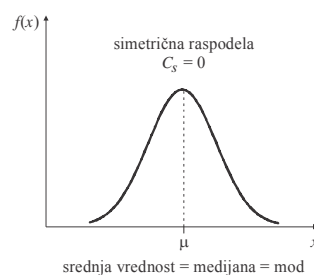
$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^3 f(x) dx$$

- koeficijent asimetrije:

$$C_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

- iz uzorka:

$$c_s = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \frac{1}{S^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$$



Osobine raspodela verovatnoće

■ Kvantili

- Kvantil = inverzna funkcija raspodele verovatnoće

$$x_p = F^{-1}(p)$$

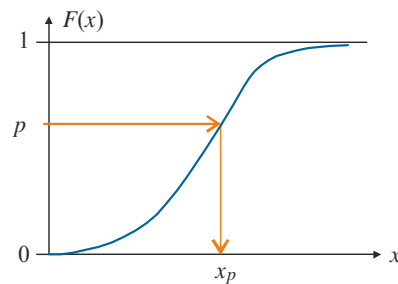
- Medijana = kvantil za $p = 0.5$

$$Me = x_{0.5} = F^{-1}(0.5)$$

- Kvartili

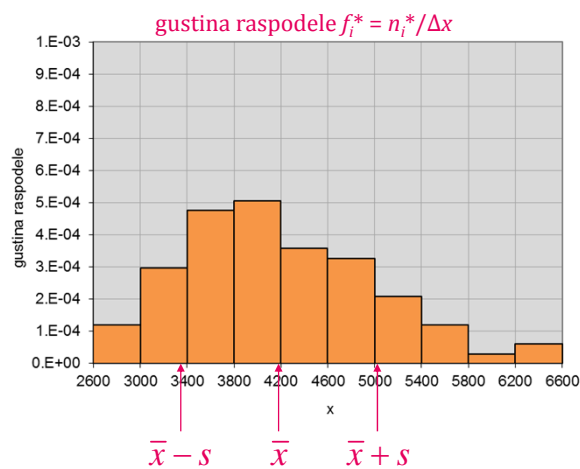
$$x_{0.25} = F^{-1}(0.25)$$

$$x_{0.75} = F^{-1}(0.75)$$



Osobine raspodela verovatnoće

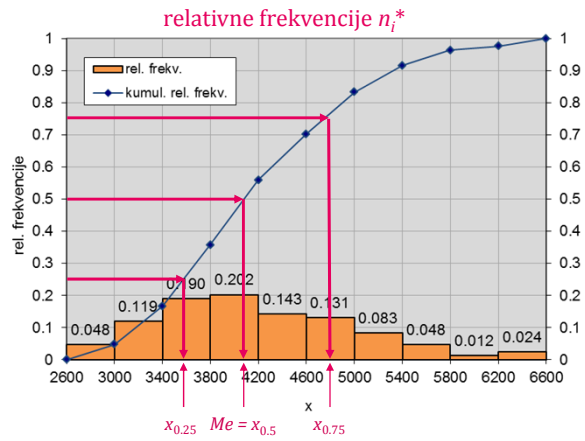
■ Primer: Sava – Sremska Mitrovica



broj podataka	84
srednja vrednost	4193
standardna devijacija	818
koeficijent varijacije	0.195
koeficijent asimetrije	0.634

Osobine raspodela verovatnoće

- Primer: Sava – Sremska Mitrovica



broj podataka	84
srednja vrednost	4193
$x_{0.25}$	3578
$x_{0.5} = Me$	4046
$x_{0.75}$	4812