Рачунска хидраулика
Збирка решених задатака

Марко Иветић Дубравка Покрајац
Биљана Трајковић Ненад Јаћимовић
Ненад Стефановић

Радна верзија, јануар 1999

Садржај

Предговор

или

Успомени на Миодрага Радојковића

Пред вама се налази књижица малог обима али веома значајна. Она комплетира један курс, курс Рачунске хидраулике, и то универзитетски, који је покривен писаним материјалом, књигом, Течење у цевима (1996), и белешкама, Отворени токови, (1995. и 1997.) и Струјање у порозној средини (1995. и 1999.), са заједничким главним насловом Рачунска хидраулика. Збирка задатака не замењује оно што је написано у књизи и белешкама, него се надовезује на то. Због тога и нема више од 150 страна.

Курс Рачунске хидраулике је јединствен, вероватно доста субјективан, али не само нас четворо, него и наших претходника на овом пољу, у првом реду покојног професора Миодрага Радојковића. Гледајући га са каквом лакоћом и самопоуздањем образлаже оно што је урадио пред громадама попут Мајка Абота (Michael B. Abbott) и Жана Канжа (Jean Cunge), и ми смо се охрабрили да закорачимо у ову област и дамо свој скромни допринос. Због тога, ову књигу њему и посвећујемо.

Сви задаци изузев једног били су на испитима. Изабрани су са идејом да илуструју примену Хидраулике у решавању разноврсних практичних задатака из Хидротехнике. Нису проблемски, као што су то задаци из Механике флуида, али захтевају знање и разумевање проблематике која се обрађује. Излазак Збирке касни неколико година, а за кашњење је највише крив први аутор, јер је као искључиво своју обавезу прихватио издавање материјала предавања, било у облику књиге, било у облику бележака.

Не знам колико ће ову књигу користити инжењери из праксе. Страха да ће их обесхрабрити све што у свом имену има реч Хидраулика, и још уз то и рачунска, никада се нисам ослободио. Сваки коментар, критика или сугестија, људи из праксе, студената или колега, подједнако су добро дошли.

Узео сам ту слободу да се сам потпишем у предговору овог заједничког дела због тога што се са овом генерацијом навршава десет година од увођења овог важног предмета у редовну наставу. У другачијим условима од ових, ово би била прилика да се направи пауза, оде на село или негде другде, а предмет препусти неком другом да га тај (или та) даље унапреди. Овако, одговорност да то остане на достигнутом нивоу остаје моја, а то у овим условима није лако. Област коју предмет покрива је једна од најдинамичнијих у инжењерству, и свака стагнација је неприхватљива.

Веома сам захвалан рецензентима, професору Др Божидару Батинићу и Др Душану Продановићу, који су пажљиво прочитали текст и дали пуно корисних примедби, од којих сам већину прихватио. Још нешто би се вероватно могло поправити, и спреман сам да то и учиним у наредном издању.

Сваки испитни рок има три задатка, али задаци нису разврстани по роковима него по тематским целинама. У тематској целини 1, која се односи на течење у цевима, има 16 задатака, у тематској целини 2, отворени токови, има 12 задатака, колико и у трећој целини, струјање воде у порозној средини.

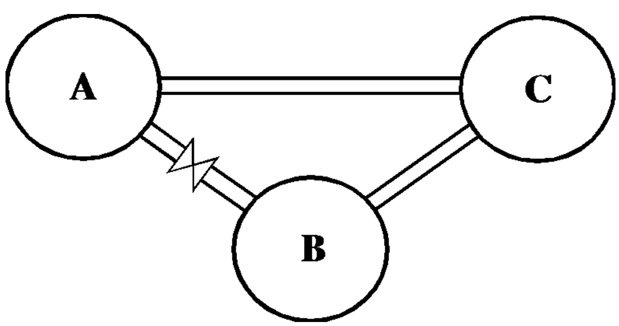
Београд, маја 1999. године Марко В. Иветић

Задатак 1

9. септембар 1993./1

Три цилиндрична резервоара A, B и C, пречника $D_A = 4$m, $D_B = 3$ m и $D_C = 4$m, међусобно су повезана цевима, као на скици. Карактеристике цеви и затварача дате су у табели:

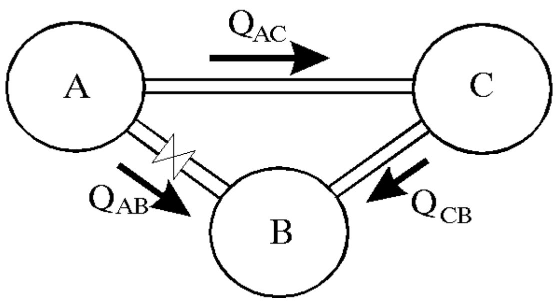
цев	дужина [m]	пречник [m]	λ	ξ_{ulaz}	ξ_{zatv}	ξ_{izl}
$A-B$	10	0.3	0.026	0.5	20	1.0
$B-C$	10	0.3	0.026	0.5	–	1.0
$C-A$	15	0.3	0.026	0.5	–	1.0



У почетном тренутку нивои у резервоарима износе $\Pi_A = 10$ m, $\Pi_B = 8$mи $\Pi_C = 8$m. Математичким моделом квази-устаљеног течења одредити промену нивоа у резервоару C кроз време.

Решење:

Површине попречних пресека резервоара су $A_A = A_C = 12.57$ m^2, $A_B = 7.07$ m^2, а цеви $A_{cevi} = 0.0707$ m^2.



Математички модел

На скици су означени усвојени позитивни смерови протицаја. Уколико се прорачуном добије негативна вредност протицаја то значи да је течење у супротном правцу од првобитно усвојеног.

За течење кроз цеви $A-B$, $A-C$ и $C-B$ потребно је написати Бернулијеве једначине, тако је за цев $A-B$:

$$\Pi_A = \Pi_B + (\Sigma\xi + \lambda\frac{L}{D})\frac{Q_{AB}^2}{2gA_{cevi}^2} \tag{1.1}$$

Или у облику датом у изразу (2.9) у књизи (Иветић, 1996):

$$\Pi_A - \Pi_B = r_{AB}Q_{AB}|Q_{AB}| \tag{1.2}$$

где је

$$r_{AB} = \frac{8\lambda_{eff}L}{\pi^2 gD^5} = 228.1 \qquad \lambda_{eff} = \lambda + \frac{D}{L}\Sigma\xi = 0.671 \tag{1.3}$$

Слично се може написати и за остале цеви. Изрази за протицаје гласе:

$$Q_{AB} = SGN^1(\Pi_A - \Pi_B)\sqrt{\frac{|\ \Pi_A - \Pi_B\ |}{228.1}} \tag{1.4}$$

$$Q_{AC} = SGN(\Pi_A - \Pi_C)\sqrt{\frac{|\ \Pi_A - \Pi_C\ |}{28.6}} \tag{1.5}$$

$$Q_{CB} = SGN(\Pi_C - \Pi_B)\sqrt{\frac{|\ \Pi_C - \Pi_B\ |}{24.1}} \tag{1.6}$$

За резервоаре A, B и C је потребно написати једначине континуитета:

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{A_A}(-Q_{AB} - Q_{AC}) \tag{1.7}$$

[1] $SGN(X) = 1$ ако је $X \geq 0$, и $SGN(X) = -1$ ако је $X < 0$

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{A_B}(Q_{AB} + Q_{CB}) \tag{1.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{A_C}(Q_{AC} - Q_{CB}) \tag{1.9}$$

Нумерички модел

Једначина континуитета апроксимира се Ојлеровом методом:

$$\Pi_A^{n+1} = \Pi_A^n + \frac{\Delta t}{A_A}(-Q_{AB}^n - Q_{AC}^n) \tag{1.10}$$

$$\Pi_B^{n+1} = \Pi_B^n + \frac{\Delta t}{A_B}(Q_{AB}^n + Q_{CB}^n) \tag{1.11}$$

$$\Pi_C^{n+1} = \Pi_C^n + \frac{\Delta t}{A_C}(Q_{AC}^n - Q_{CB}^n) \tag{1.12}$$

Резултати

t	Π_A	Π_B	Π_C	Q_{AB}	Q_{AC}	Q_{CB}
[s]	[m]	[m]	[m]	[m^3/s]	[m^3/s]	[m^3/s]
0	10.00	8.00	8.00	0.094	0.265	0.000
5	9.86	8.07	8.11	0.089	0.248	0.040
10	9.72	8.16	8.19	0.083	0.232	0.036
15	9.60	8.24	8.27	0.077	0.216	0.032
20	9.48	8.32	8.34	0.071	0.200	0.029
25	9.37	8.39	8.41	0.066	0.184	0.027
30	9.27	8.46	8.47	0.060	0.168	0.024
35	9.18	8.51	8.53	0.054	0.152	0.022
40	9.10	8.57	8.58	0.048	0.135	0.020
45	9.03	8.62	8.62	0.043	0.119	0.017
50	8.96	8.66	8.66	0.037	0.103	0.015
55	8.91	8.70	8.70	0.031	0.086	0.013
60	8.86	8.73	8.73	0.024	0.069	0.010
65	8.83	8.75	8.75	0.018	0.051	0.007
70	8.80	8.77	8.77	0.011	0.032	0.005
75	8.78	8.78	8.78	≈ 0	≈ 0	≈ 0

* * *

Колико је оправдано користити модел квазиустаљеног течења за решавање овог задатка може се проверити применом неких готових решења.

Као прво, код модела квазиустаљеног течења претпоставља се тренутно успостављање устаљеног течења воде у цеви, док би се узимањем у обзир инерције воде (математички модел крутог удара) добило да је карактеристично време T_0 за цев AC

$$T_{oAC} = \sqrt{\frac{2DL_{AC}}{g\Delta\Pi_{AC}\lambda}} = 2.86s$$

а за цев AB $T_{o,AB} = 0.675$ s, односно, да је време успостављања устаљеног течења, $t_{99\%} = 2.646 T_o$ за цев AC је 7.6 s, а за цев AB је 1.8 s. (Водити рачуна да се при прорачуну T_o, користи $\lambda_{eff} = \lambda + \frac{D}{L}\sum\xi$).

Као друго, под утицајем трења амплитуде осциловања воде у цеви између два резервоара се пригушују, па прва екстремна вредност амплитуде осцилација нивоа у резервоару C не може да пређе вредност

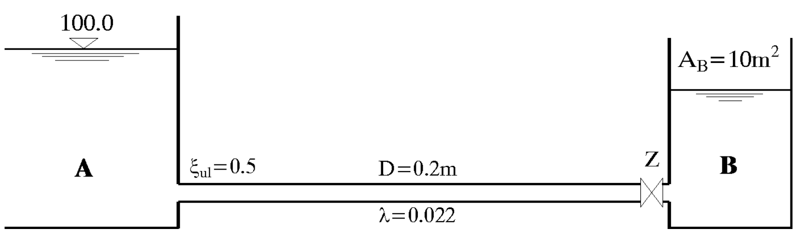
$$(Z_C)_{m+1} \leq \frac{\lambda_{AC}^{ef}}{D}\frac{A_{cevi}}{A_C} = 0.03m$$

односно за цев AB и резервоар B, вредност од 0.005 m, што очигледно води закључку о оправданости коришћења математичког модела квазиустаљеног течења у овом случају.

Задатак 2

24. октобар 1993./1

Резервоар B (хоризонталне површине 10 m^2) пуни се водом из резервоара A (велике површине и константног нивоа $\Pi_A = 100$ m) кроз цев дужине 100 m, пречника $D = 0.2$m(коефицијент трења $\lambda = 0.022$). Затварачем Z, протицај се одржава приближно константним. Корекције



Вредност регулисаног протицаја усвојити тако да буде блиска максималној за коју је могућа регулација у целом опсегу нивоа у резервоару B од 95 m до 97 m.

За промену нивоа воде у резервоару B срачунати одступања усвојеног протицаја од константног, промену нивоа и положаје затварача чије карактеристике су дате у табели

Степен отворености	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
Коеф. лок. губ. ξ_Z	3000.	1000.	200.	70.	35.	15.	7.	3.

Степен отворености схватити као индикацију положаја запорног органа затварача између потпуно затвореног (0.0) и потпуно отвореног (1.0). Између задатих вредности у табели претпоставити линеарну промену. Применити математички модел квази-устаљеног течења.

Решење

Математички модел

Бернулијева једначина од резервоара A до B:

$$\Pi_A = \Pi_B + \left(\xi_{ul} + \lambda\frac{L}{D} + \xi_Z + 1\right)\frac{V^2}{2g} \tag{2.1}$$

Једначина континуитета за резервоар B:

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{Q}{A_B} \tag{2.2}$$

Нумерички модел

Бернулијева једначина

$$Q^{n+1} = A_c\sqrt{\frac{2g(\Pi_A - \Pi_B^{n+1})}{\xi_{ul} + \lambda\frac{L}{D} + \xi_z^{n+1} + 1}} \tag{2.3}$$

За дискретизацију једначине континуитета користиће се Ојлерова метода.

$$\Pi_B^{n+1} = \Pi_B^n + \frac{Q^n}{A_B}\Delta t \tag{2.4}$$

Почетни услов је $\Pi_B(t = 0) = 95\mathrm{m}$.

Одређивање вредности регулисаног протицаја

Током времена ниво у резервоару B ће се повећавати, па ће, за одржавање константног протицаја у цеви, затварач Z морати постепено да се отвара. За $\Pi_B = 97$ m узима се да је затварач отворен (највише што може, према подацима из табеле), $\tau = 0.7$, чему одговара $\xi_Z = 3$. У посматраном интервалу нивоа, регулисани протицај не може бити већи од протицаја који се добије за ниво $\Pi_B = 97.0$ m(и скоро потпуно отворени затварач). Из једначине (2.1) следи:

$$3 = \left(0.5 + 0.022\frac{100}{0.2} + 3 + 1\right)\frac{V^2}{2g}$$

$$V = 1.97\mathrm{m/s} \longrightarrow Q = 0.0612\mathrm{m^3/s}$$

Добијена вредност од 0.0612 m^3/s представља максималну вредност протицаја, која се може одржавати константном током промене нивоа у резервоару B, са усвојеним затварачем.

Усваја се да је регулисани протицај $Q_R = 0.060$ m^3/s. Временски корак интеграције једначине континуитета од $\Delta t = 1\mathrm{min}$, одређен је захтевом корекције положаја затварача.

Резултати

У почетном тренутку протицај 0.060 m^3/s добија се ако је затварач отворен 50.8%, односно ако је коефицијент $\xi_z = 14.4$. После 60 s ниво у резервоару порасте за 0.36 m (усвајајући да је током 60 s протицај константан). Због промењеног нивоа у резервоару B нова вредност протицаја у том тренутку падне на 0.0578 m^3/s. Да би се при нивоу у B од 95.36 m обезбедио протицај од 0.060 m^3/s затварач мора да се отвори на 53.2% чему одговара $\xi_z = 12.45$. Резултати прорачуна приказани су у следећој табели.

Време [s]	Π_B [m]	Q [m^3/s]	$\xi_Z[-]$	$\Delta\Pi_B$ [m]	A_Z/A_0 [%]
0.0	95.00	0.0600	14.37	0.36	50.8
60	95.36	0.0578			
		0.0600	12.45	0.36	53.2
120	95.72	0.0576			
		0.0600	10.51	0.36	55.6
180	96.08	0.0574			
		0.0600	8.58	0.36	58.0
240	96.44	0.0572			
		0.0600	6.64	0.36	60.9
300	96.80	0.0569			
		0.0600	4.7	0.36	65.75
360	97.16	0.0565			
		0.0600			

Дискретним маневрима затварача (сваких 60 s промена положаја затварача) протицај се одржава између 57.8 и 60.0 l/s током шест минута (360 s).

Унутар интервала од 60 s протицај се мења због смањења денивелације ($\Pi_A - \Pi_B$). Промена протицаја није линеарна, али се у овом случају не прави значајна грешка ако се претпостави да је тако (максимална грешка у рачунању промене нивоа у резервоару B, у последњем интервалу, износи 0.5·(60-56.5)/60·100 =2.9 %, односно око 1 cm).

Ово је веома идеализован облик регулације који, поред мерења протицаја и поређења са задатом вредности, захтева и мерење нивоа у резервоару B и познавање карактеристика затварача да би се применом Бернулијеве једначине могао предвидети положај затварача који обезбеђује задати протицај. Напомене о реалним облицима регулације могу се наћи у уџбенику (Иветић, 1996).

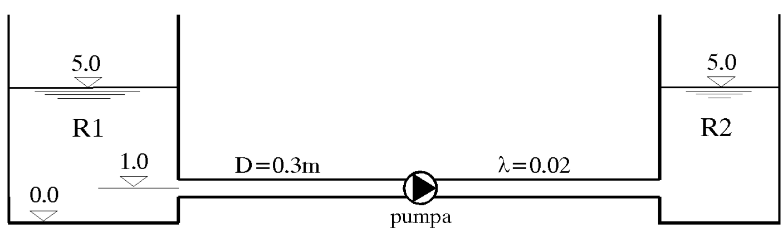
Задатак 3

16. јул 1992/1

Цев дужине 400 m, пречника $D = 0.3$ m, спаја два цилиндрична резервоара $R1$ и $R2$, хоризонталних површина $A_1 = 20$ m^2 и $A_2 = 5$ m^2. Оса цеви се налази на коти 1.00 m, а дно резервоара на коти 0.00 m. Претпоставља се да је коефицијент трења приближно константан и једнак λ =0.02.

На половини цеви налази се пумпа, чије се карактеристике могу апроксимирати следећом релацијом:

$$H_P = H_0 + A \cdot Q^2 + B \cdot Q \tag{3.1}$$



У почетном тренутку, када се пумпа укључује, нивои у резервоарима су исти и износе 5.00 m. Математичким моделом квази-устаљеног течења одредити промене нивоа у резервоарима све до тренутка када се пумпа искључи, што ће се десити када висинска разлика између нивоа у резервоарима достигне 15 m. На резервоарима нема никаквих других прикључака осим поменуте цеви.

Решење

Математички модел

Локални губици енергије и брзинске висине неће се узимати експлицитно, јер се ради о тзв. дугачкој цеви

$$L/D = 400/0.3 = 1333 > 1000$$

Бернулијева једначина од резервоара R1 до резервоара R2:

$$\Pi_1 - \Pi_2 + (H_0 + AQ^2 + BQ) = r_{12}Q|Q| \qquad (3.2)$$

где је $r_{12} = \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2g\ A_c^2} = 271.9 \mathrm{s}^2\mathrm{m}^{-5}$.

Једначине континуитета за резервоаре $R1$ и $R2$:

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{Q}{A_1} \qquad \frac{\mathrm{d}\Pi_2}{\mathrm{d}t} = \frac{Q}{A_2} \qquad (3.3)$$

Нумерички модел

Једначина (3.1) је нелинеарна, па је један од начина да се реши - линеаризација и итеративно приближавање тачном решењу. Користи се метода Њутн-Рафсона на сваком временском нивоу за тренутне вредности пијезометарских кота Π_1 и Π_2.

$$Q^{(k+1)} = \frac{\Pi_1 - \Pi_2 + r_{12}Q^{(k)}|Q^{(k)}| + (H_0 - A(Q^{(k)})^2)}{2r_{12}|Q^{(k)}| - (2AQ^{(k)} + B)} \qquad (3.4)$$

где (k) и $(k+1)$, означавају редне бројеве итерација.

Једначине (3.2) дискретизују се неком приближном методом. Овде се користи леап-фрог метода:

$$\frac{\Pi_1^{n+1} - \Pi_1^{n-1}}{2\Delta t} = -\frac{Q^n}{A_1} \qquad \frac{\Pi_2^{n+1} - \Pi_2^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{Q^n}{A_2} \qquad (3.5)$$

док се на првом кораку користи модификована Ојлерова метода:

$$\frac{\Pi_1^1 - \Pi_1^0}{\Delta t} = -\frac{Q^0 + Q^*}{2A_1} \qquad \frac{\Pi_2^1 - \Pi_2^0}{\Delta t} = \frac{Q^0 + Q^*}{2A_2} \qquad (3.6)$$

где $n-1$, n и $n+1$, означавају временске нивое код интеграције једначина континуитета, а Q^* представља оцену протицаја на временском нивоу Δt, до које се дошло применом Ојлерове методе првог реда тачности.

Резултати

У почетном тренутку, за $\Pi_1 - \Pi_2 = 0$, протицај се добија итеративно, претпостављајући вредност у нултој итерацији $Q^{(0)} = 1\mathrm{m/s}\cdot\frac{D^2\pi}{4} = 0.070$ $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$, решавањем једначине:

$$Q^{(1)} = \frac{0 + 271.9 \times 0.070^2 + 15 + 250 \times 0.070^2}{2 \times 271.9 \times 0.070 + 500 \times 0.070 + 5} = 0.225 \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$

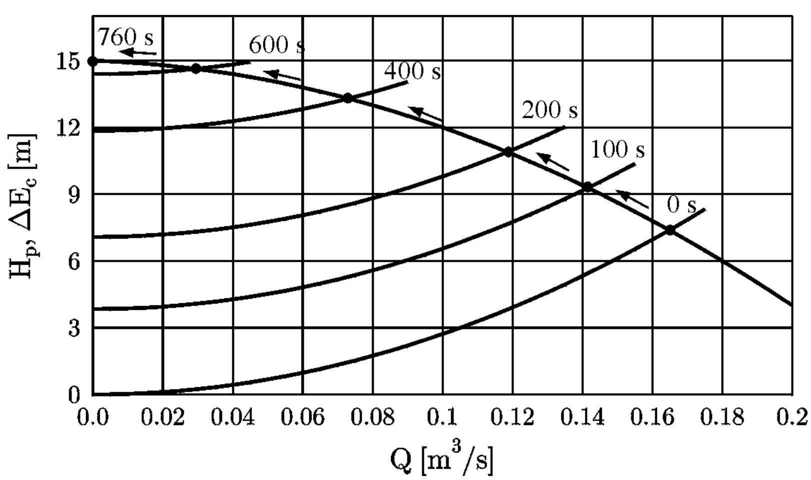
$$Q^{(2)} = \frac{41.42}{239.8} = 0.173 \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$

$$Q^{(3)} = \frac{30.62}{185.58} = 0.165 \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$

$$Q^{(4)} = \frac{29.21}{177.23} = 0.165 \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$

Приближно решење се врло брзо приближава тачном, тако да није потребно више од три итерације на једном временском нивоу.

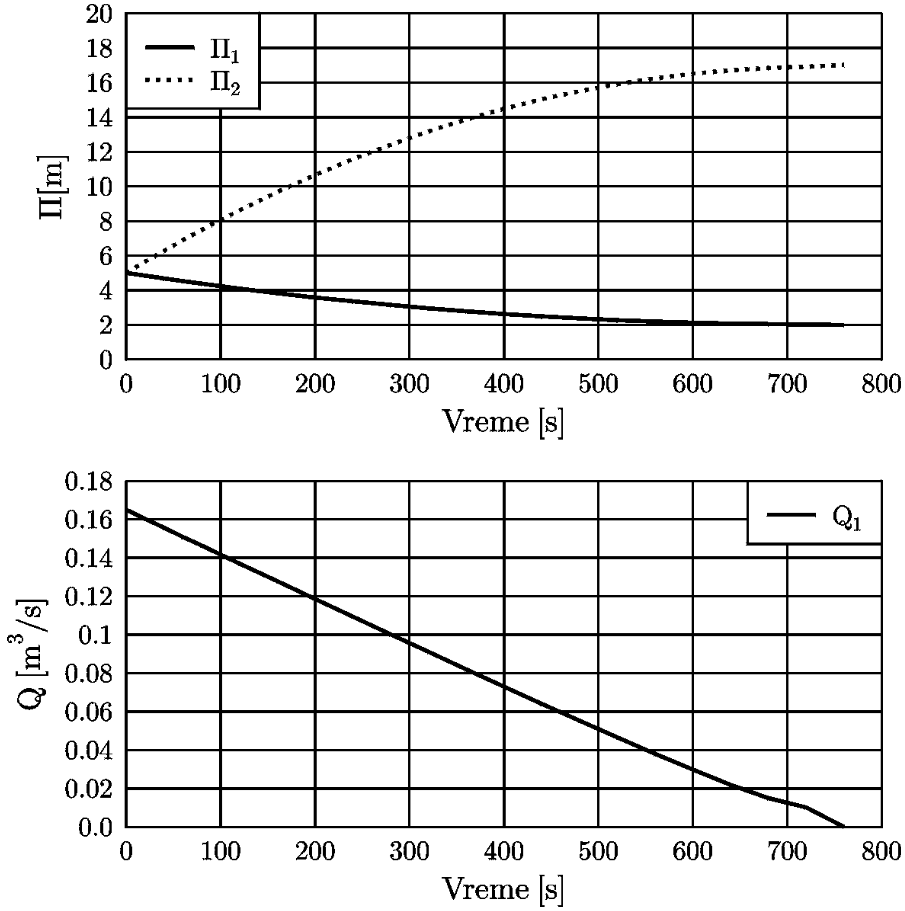
То се види и на приложеној скици на којој су поред карактеристике пумпе нацртане карактеристике цевовода ($\Delta E_c = \Pi_2 - \Pi_1 + r_{12} Q|Q|$) у неколико временских пресека, тако да се може пратити померање радне тачке (од укључивања до престанка рада пумпе).



Временски корак интеграције, $\Delta t = 20$ s, одређује се из услова довољне тачности интеграције, са једне стране, као и економичности прорачуна, са друге стране. У тренутку $t = 120$ s промењен је временски корак на $\Delta t = 40$ s.

t [s]	Π_1[m]	Π_2 [m]	Q [m^3/s]	
0	5.00	5.00	0.165	
20	4.84*	5.66*	0.160	Модификована Ојлерова метода
40	4.68	6.28	0.156	
60	4.53	6.91	0.151	
80	4.38	7.49	0.146	
100	4.24	8.08	0.141	
120	4.10	8.62	0.137	Промена временског корака
160	3.83	9.68	0.128	
200	3.59	10.67	0.118	
240	3.36	11.57	0.109	
280	3.15	12.41	0.100	
320	2.96	13.17	0.091	
360	2.79	13.87	0.082	
400	2.63	14.48	0.073	
440	2.50	15.04	0.064	
480	2.37	15.50	0.055	
520	2.28	15.92	0.046	
560	2.19	16.24	0.038	
600	2.13	16.53	0.030	
640	2.07	16.72	0.022	
680	2.04	16.88	0.013	
720	2.02	16.93	0.009	
760	2.00	17.02	0.000	

Промена нивоа у резервоарима $R1$ и $R2$, и промена протицаја у цеви која спаја та два резервоара дати су на следећим дијаграмима



Π[m]
Π_1
Π_2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
0
100
200
300
400
500
600
700
800
Vreme [s]
Q [m^3/s]
Q_1
0.0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0.12
0.14
0.16
0.18
Vreme [s]

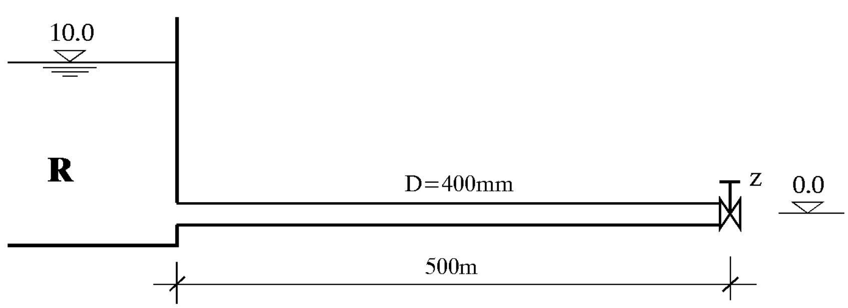
Задатак 4

31. јануар 1991/1

На једном крају хоризонталне цеви пречника $D = 400$ mm, дужине 500 m, налази се резервоар велике запремине (ниво константан, $\Pi_R = 10$ m), а на другом затварач, који је у почетном тренутку затворен (протицај кроз цев је једнак нули). Кота цеви је $Z_C = 0.0$ m.

Затварач се нагло отвара и остаје делимично отворен. Одредити како и за које време се успоставља устаљено течење.

Напомене за прорачун: Занемарују се еластична својства флуида и зидова цеви. Користи се математички модел крутог удара. На узводној страни цеви пијезометарска кота је константна и приближно једнака Π_R. Низводно од затварача Π кота такође је константна и једнака $Z_C = 0.0$ m, док узводно од затварача она зависи од протицаја и губитка на затварачу. Коефицијент локалног губитка на делимично отвореном затварачу, $\xi_Z = 10$, и коефицијент трења, $\lambda = 0.025$, константни су за све протицаје.



Математички модел

За прорачун се користи математички модел крутог удара. Динамичка једначина за масу флуида у цеви од резервоара до пресека испред затварача гласи:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{gA_c}{L}\left(\Pi_R - \Pi_Z\right) - \frac{2\lambda}{D^3\pi}Q|Q| \tag{4.1}$$

Ако се у претходном изразу Π_Z изрази као:

$$\Pi_Z = Z_C + \xi_Z \frac{Q|Q|}{2gA_c^2} \tag{4.2}$$

добија се динамичка једначина где је урачунат и губитак на затварачу, а који је урачунат у треће преко λ_{ef}

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{gA_c}{L}\left(\Pi_R - Z_C\right) - \frac{2\lambda_{ef}}{D^3\pi}Q|Q| \tag{4.3}$$

Површина попречног пресека цеви је $A_c = 0.126\mathrm{m}^2$, а ефективни коефицијент трења $\lambda_{ef} = \lambda + \xi_Z \frac{D}{L} = 0.033$.

Карактеристично време за убрзавање стуба течности само под утицајем силе притиска једнако је

$$T_0 = \sqrt{\frac{2DL}{g\Delta\Pi\lambda_{ef}}} = \sqrt{\frac{2\times 0.4\times 500}{9.81\times 10\times 0.033}} = 11.1\mathrm{s} \tag{4.4}$$

а протицај у устаљеном течењу

$$Q_\infty = T_0\frac{gA_c}{L}\Delta\Pi = 0.274\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \tag{4.5}$$

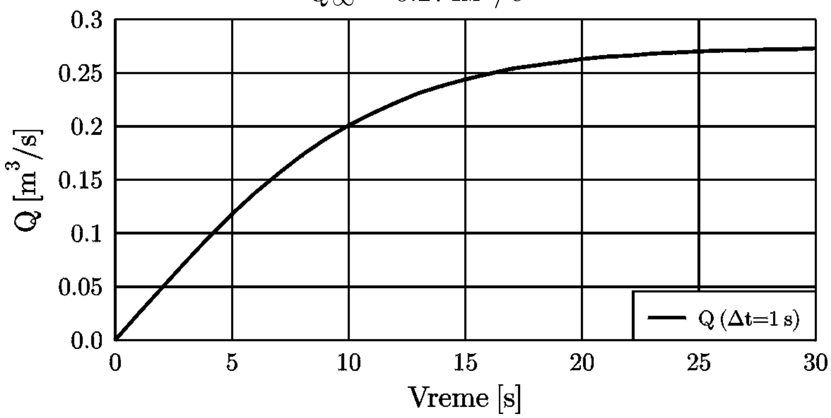
Нумерички модел

За приближно решавање обичне диференцијалне једначине примениће се Ојлерова метода:

$$Q^{n+1} = Q^n + \frac{gA_c}{L}(\Pi_R - Z_C)\Delta t - \frac{2\lambda_{eff}}{D^3\pi}Q^n|Q^n|\Delta t \tag{4.6}$$

Из анализе стабилности види се да је Ојлерова метода стабилна ако је $\Delta t < T_0$, међутим, због тачности мора се рачунати са знатно краћим временским кораком. У табели која следи приказани су резултати прорачуна протицаја за три вредности временског прираштаја, $\Delta t = 1$, 2 и 4 s. Промена протицаја у цеви добијена са временским кораком $\Delta t = 1s$ приказана је и графички.

$Q_\infty = 0.274 \text{м}^3/\text{с}$



Резултати

t	Q (Δt =1 s)	Q (Δt =2 s)	Q (Δt = 4 s)
0	0.000	0.000	0.000
1	0.025		
2	0.049	0.049	
3	0.073		
4	0.096	0.097	0.099
5	0.118		
6	0.138	0.140	
7	0.156		
8	0.173	0.177	0.184
9	0.188		
10	0.201	0.205	
11	0.212		
12	0.222	0.227	0.238
13	0.230		
14	0.238	0.242	
15	0.244		
16	0.249	0.253	0.262
17	0.253		
18	0.257	0.260	
19	0.260		
20	0.262	0.265	0.271
21	0.264		
22	0.266	0.268	
23	0.267		
24	0.269	0.270	0.273
25	0.270		
26	0.270	0.272	
27	0.271		
28	0.272	0.272	0.274
29	0.272		
30	0.272	0.273	

Задатак 5

1. јули 1994./1

Два резервоара A и B, спаја цев пречника $D = 1.2$ m, дужине $L = 200$ m. Коефицијент локалног губитка енергије на улазу у цев износи $\xi_{ul} = 0.5$, коефицијент трења $\lambda = 0.015$. На половини цеви се налази затварач, чији коефицијент локалног губитка у посматраном тренутку износи $\xi_z = 3.0$.

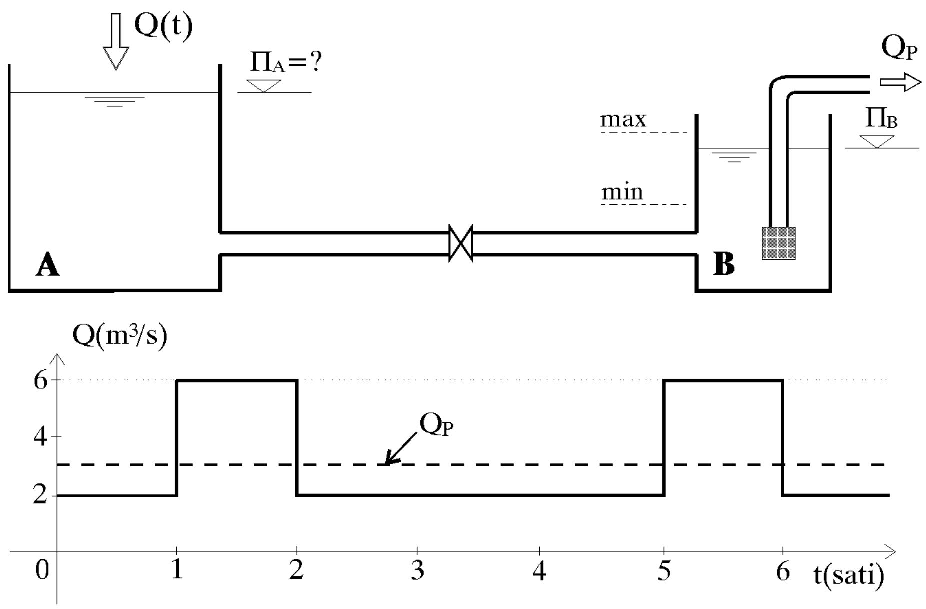
У резервоар A, чија је хоризонтална површина једнака 2400 m^2, дотиче вода са периодично промењљивим протицајем (види дијаграм). Из резервоара B, чија је хоризонтална површина једнака 600 m^2, пумпе захватају воду при константном протицају $Q_P = 3$ м^3/с.

У почетном тренутку, за t =0, ниво у црпном базену (резервоар B) износи Z_0 =8.00 m. Одредити почетни ниво у резервоару A, као и промену нивоа у резервоарима A и B, током једног циклуса промене протицаја. Ниво у резервоару B не сме да пређе $Z_{max} = 9.00$ m, нити да падне испод $Z_{min} = 5.00$ m, док за нивое у резервоару A нема никаквих ограничења. Уколико је то неопходно, одредити потребне маневре затварачем и одговарајуће коефицијенте локалног губитка. (Коефицијент локалног губитка затварача креће се у границама од 0.2 до ∞.)

Решење:

Математички модел

Користи се математички модел квази-устаљеног течења, где се претпоставља да се протицај у цеви успоставља тренутно, а прати се промена нивоа воде у резервоарима. Период кроз који се прати понашање система много је дужи од карактеристичног времена модела хидрауличког удара (период осцилација $4L/a \approx 0.8$ s). Код математичког модела кру-



тог удара периода осциловања је значајно дужа

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{LA_A A_B}{gA(A_A + A_B)}} = 584\mathrm{s},$$

али максимална амплитуда осцилација износи само

$$\max z_B = \frac{D}{\lambda_{eff}}\frac{A}{A_B} = 0.05\mathrm{m}$$

Карактеристично време убрзавања стуба течности у овом случају је

$$T_0 \approx 23\,\mathrm{s}$$

Рачунање са временским корацима које захтевају математички модели хидрауличког удара ($\Delta t \approx 0.1$ s) и крутог удара ($\Delta t \leq T_0 \approx 20$ s) не би било економично, а могуће одступање од тачнијег решења је мање од 0.05m за резервоар B, док је за резервоар A мање од 0.01 m.

Површина резервоара A је 4 пута већа од површине резервоара B, за колико су и осцилације нивоа (које се добијају математичким моделом крутог удара) у резервоару A мање него у резервоару B. Пошто посматраном тренутку (када долази до промене дотицаја) претходи 1 сат рада са константним дотицајем, може се претпоставити да је у цеви успостављено устаљено течење, односно

$$\frac{\mathrm{d}Q_{AB}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}(\Pi_A - \Pi_B)}{\mathrm{d}t} = 0$$

Пошто је

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_A}{\mathrm{d}t} = \frac{Q(t) - Q_{AB}}{A_A} \qquad \frac{\mathrm{d}\Pi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{Q_{AB} - Q_P}{A_A} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}(\Pi_A - \Pi_B)}{\mathrm{d}t} = \frac{Q(t) - Q_{AB}}{A_A} - \frac{Q_{AB} - Q_P}{A_B} = 0$$

одакле се добија да је $Q_{AB} \approx 2.8\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$. Пијезометарска кота у резервоару A је једнака

$$\Pi_A = 8.0 + 7.0\frac{2.8^2}{19.62 \cdot 1.13^2} = 10.19\,\mathrm{m}$$

Промене нивоа у резервоарима одређују се из једначина континуитета

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{A_A}\left(Q(t) - Q_{AB}\right) \qquad \frac{\mathrm{d}\Pi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{A_B}\left(Q_{AB} - Q_P\right) \tag{5.1}$$

Нумерички модел

Одговарајући нумерички модел, заснован на Ојлеровој методи, гласи

$$\Pi_A^{n+1} = \Pi_A^n + \frac{Q(t)^n - Q_{AB}^n}{A_A}\Delta t \qquad \Pi_B^{n+1} = \Pi_B^n + \frac{Q_{AB}^n - Q_P}{A_B}\Delta t \tag{5.2}$$

Прорачун је урађен са временским прираштајем $\Delta t = 10$ min.

Напомена: Могло се, такође, претпоставити да сва вода коју захватају пумпе полази из резервоара A, тј. да је $Q_{AB}^0 = 3.0$ m^3/s. Таква претпоставка би се кориговала током првих неколико корака, али би се разликовао почетни ниво у резервоару A и био би $\Pi_A^0 = 10.51$ m. Како за ниво у резервоару A нема никавих ограничења, прорачун би могао и да крене са таквом претпоставком. Ојлерова метода интеграције једначина континуитета је довољно добра, јер протицај јесте константан у целом временском интервалу, баш као што се претпоставља у Ојлеровој методи.

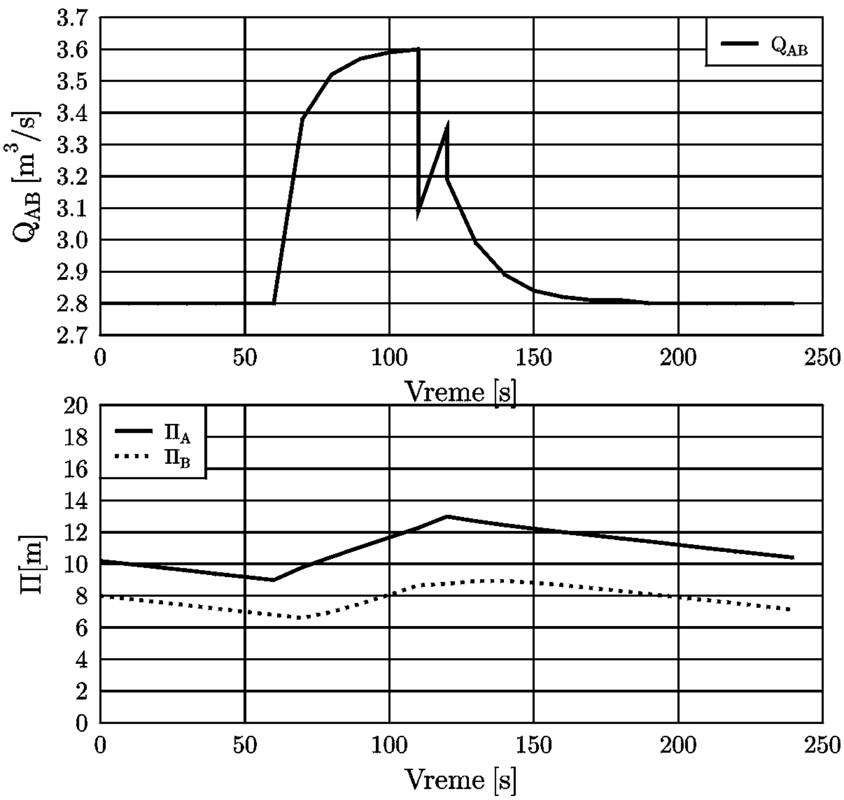
Резултати

t [min]	$Q(t)$ [m^3/s]	Π_A [m]	Π_B [m]	Q_{AB} [m^3/s]	ξ_Z [-]
0	2	10.19	8.00	2.80	3.0
10	2	9.99	7.80	2.80	
20	2	9.79	7.60	2.80	
30	2	9.59	7.40	2.80	
40	2	9.39	7.20	2.80	
50	2	9.19	7.00	2.80	
60	2	8.99	6.80	2.80	
60	6				
70	6	9.79	6.60	3.38	3.0
80	6	10.44	6.98	3.52	
90	6	11.06	7.50	3.57	
100	6	11.67	8.07	3.59	
110	6	12.27	8.66	3.60	3.0
110	6			3.09	5.5
120	6	12.99	8.750	3.35	5.5
120	2			3.19	6.5
130	2	12.69	8.94	2.99	6.5
140	2	12.44	8.94	2.89	
150	2	12.22	8.83	2.84	
160	2	12.01	8.67	2.82	
170	2	11.81	8.49	2.81	
180	2	11.61	8.30	2.81	6.5
190	2	11.41	8.11	2.80	
200	2	11.21	7.91	2.80	
240	2	10.41	7.11	2.80	6.5

У претходној табели тренутне промене протицаја $Q(t)$ и положаја затварача приказане су понављањем ознаке за временски тренутак и исписивањем нових вредности за оне величине које на ту промену реагују.

Графички приказ промене нивоа у резервоарима и промене протицаја у цеви дат је на дијграмима.

У тренутку $t = 110$ min, а после тога у $t = 120$ min, протицај је коригован (коефицијент локалног губитка на затварачу повећан је са $\xi_z = 3.0$, прво на $\xi_z = 5.5$, а после на $\xi_z = 6.5$), да се не дозволи да ниво у резервоару B пређе 9.0 m. На дијаграму се могу видети нагле промене протицаја са 3.60 на 3.09, односно, са 3.35 на 3.19, које одговарају променама положаја затварача.

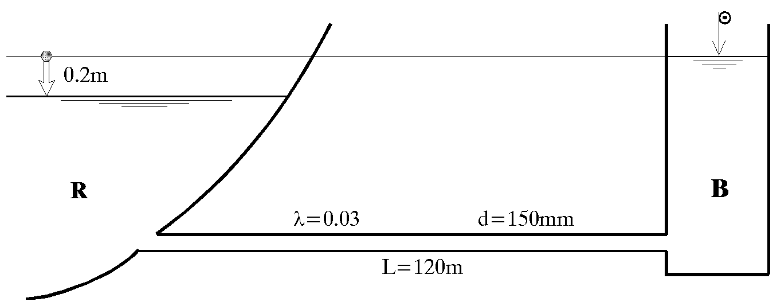


Q_{AB} [m^3/s]
Q_{AB}
Vreme [s]
Π[m]
Π_A
Π_B
Vreme [s]

Задатак 6

2. јули 1995./1

На слици је приказан бунар (B) у којем се налази уређај за мерење нивоа. Бунар је пречника 0.8m и спојен је са водотоком (R) преко цеви дужине 120 m, пречника 150 mm и коефицијента трења $\lambda = 0.03$. Одредити време за које се у бунару успоставља приближно исти ниво (разлика нивоа мања од 0.02 m) као у водотоку. Као меродавну промену узети нагли пад нивоа у водотку за 0.2 m.

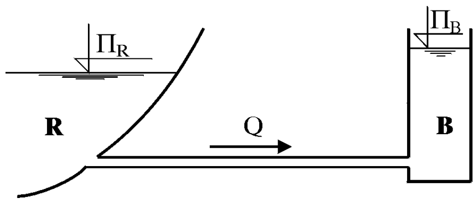


Решење

Задатак се може решити применом математичког модела крутог удара, а оправданост коришћења овог модела објасниће се у даљем тексту.

Математички модел

На скици су дате ознаке појединих величина, као и усвојени позитиван смер течења воде.



Динамичка једначина за флуид у цеви:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{gA_c}{L}(\Pi_R - \Pi_B) - \frac{2\lambda}{d^3\pi}Q|Q| \tag{6.1}$$

Једначина континуитета за бунар Б:

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{Q}{A_B} \qquad\qquad z_b = \Pi_B - \Pi_R \tag{6.2}$$

Променљива z_b представља одступање нивоа Π_B од равнотежног који је у овом случају једнак Π_R.

Параметри

Површине попречног пресека цеви A_c и бунара A_B су:

$$A_c = \frac{0.15^2\pi}{4} = 0.01767\,\mathrm{m}^2 \qquad\qquad A_B = 0.5026\,\mathrm{m}^2$$

Периода осциловања воде у цеви је:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{LA_B}{gA_c}} = 117\,\mathrm{s}$$

Аналитичко решење

За прелиминарну процену траженог времена "умирења" осцилација користи се аналитичко решење. Комплетно аналитичко решење не постоји, али се на основу познавања једне екстремне вредности може одредити наредна (стране 75 и 78, Иветић, 1996). Такође, може се одредити екстремна вредност нивоа у мерном бунару, $\min z_B$. То је коначна величина без обзира колико велико било почетно одступање од равнотежног нивоа.

$$\min z_B = \frac{D}{\lambda}\frac{A_c}{A_B} = -0.176\,\mathrm{m},$$

Претходно решење не искључује појаву осцилација амплитуде веће од дозвољеног одступања (0.02 m), па се мора користити математички модел крутог удара.

Из аналитичког решења, на основу једнакости $F(\phi_m) = F(-\phi_{m+1}$, где је $F(\phi) = (1+\phi)e^{-\phi}$, и почетног нивоа $z_{B,0} = 0.2$ m, може се добити вредност првог минимума

$$z_m = z_b \frac{A_B}{A_c} = 5.69\text{m} \qquad \phi_m = \frac{\lambda z_m}{d} = 1.14$$

$$F(\phi_m) = 0.684 = F(-\phi_{m+1})$$

$$-\phi_{m+1} = -0.639 \qquad z_b = -0.112\text{m}$$

На основу овога се закључује да се ниво у бунару неће одмах умирити. На исти начин добили би се и наредни максимум $z_b = 0.078m$, па наредни минимум, $z_b = -0.060$, $+0.049$, -0.041, $+0.036$, -0.032 и тако даље.

Задатак се може овако решавати док се не добије да је $z_b < 0.02$ m. Ако се има у виду да је растојање између два максимума приближно 120 s, на основу података добијених из аналитичког решења може се закључити да се ради о једном јако лошем мерном систему, коме треба више од 10 минута да би се осцилације умириле.

За оне који више воле да рачунају, следи наставак.

Нумерички модел

За нумеричку интеграцију јеначина (6.1) и (6.2) користи се Ојлерова метода.

$$z_b^{n+1} = z_b^n + \frac{Q^n}{A_b}\Delta t \tag{6.3}$$

$$Q^{n+1} = Q^n - C_1(z_b^n + z_b^{n+1}) - C_2 Q^n |Q^n| \tag{6.4}$$

где је $C_1 = gA_c/L \times 0.5 \times \Delta t = 0.00361$, а $C_2 = 2\lambda/(d^3\pi) \times \Delta t = 28.3$. Временски корак $\Delta t = 5$ s усвојен је тако буде мањи од $T/20 = 120/20$, а мањи је и од карактеристичног времена

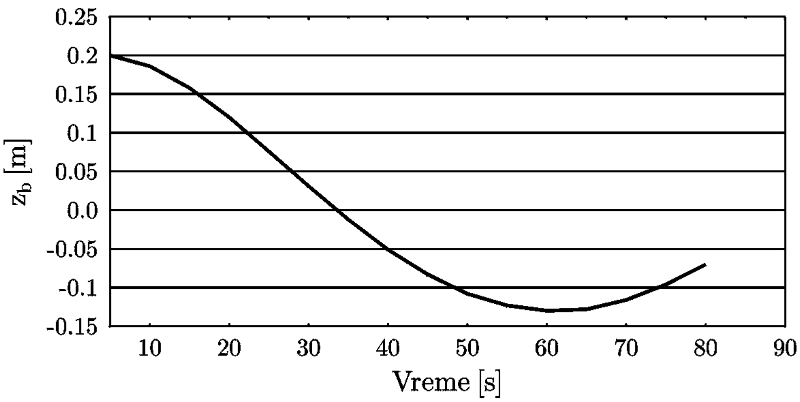
$$T_0 = \sqrt{\frac{2DL}{g\Delta\Pi\lambda}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.15 \cdot 120}{9.81 \cdot 0.2 \cdot 0.03}} = 24.7\,\text{s}$$

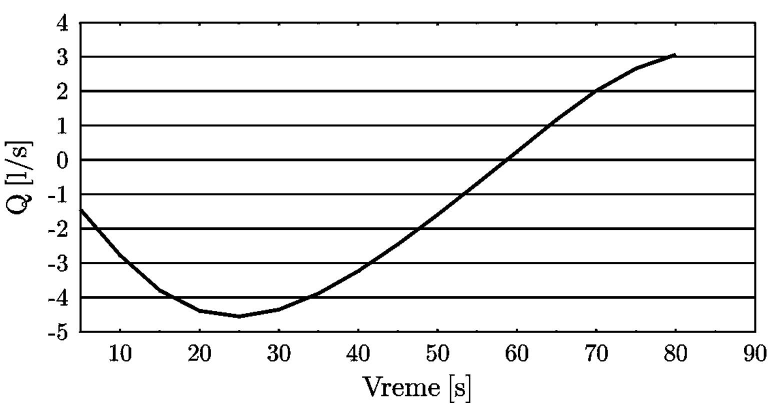
Резултати

У наредној табели дати су резултати прорачуна применом модела крутог удара, одакле се примећује да постоји одступање од аналитичког решења. Може се показати да се одступање смањује смањивањем временског корака.

Прорачун није рађен до задовољења услова задатка, јер би то захтевало сувише корака, а и непотребно је.

$t[s]$	z_b [м]	$Q[l/s]$
0	0.0	0
5	0.200	-1.444
10	0.186	-2.777
15	0.158	-3.802
20	0.120	-4.397
25	0.076	-4.558
30	0.031	-4.355
35	-0.012	-3.886
40	-0.051	-3.232
45	-0.083	-2.452
50	-0.107	-1.595
55	-0.123	-0.693
60	-0.130	0.233
65	-0.128	1.162
70	-0.116	2.006
75	-0.096	2.658
80	-0.070	3.056
–	…	…


0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0.0
-0.05
-0.1
-0.15
z_b [m]
10
20
30
40
50
60
70
80
90
Vreme [s]

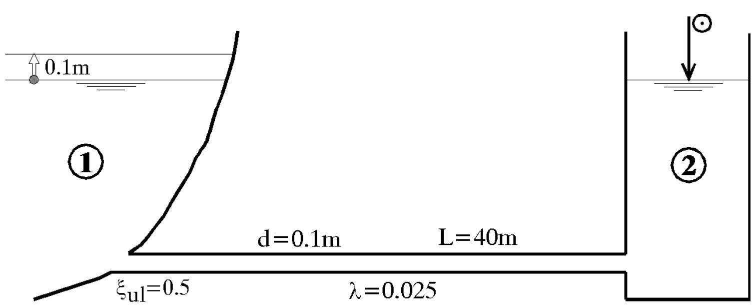

4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
Q [l/s]
10
20
30
40
50
60
70
80
90
Vreme [s]

Задатак 7

27. јануар 1993./1

Ниво у акумулацији се мери у бунару пречника $D = 1$ m, који је преко цеви пречника d =0.1 m, дужине 40 m, коефицијента трења $\lambda = 0.025$, спојен са акумулацијом. У акумулацији се ниво нагло повећа са $\Pi_1 =$ 10.0 m на 10.1 m, и даље се не мења.

За које време ће се ниво у бунару Π_2 изједначити са нивоом у акумулацији (дозвољено одступање је 0.02 m)? Модел квази-устаљеног течења или крутог удара?



Решење:

Као и у претходном задатку тражи се време после ког ће ниво у бунару осциловати око равнотежног положаја са одступањем мањим од 0.02 m.

Протицај у цеви означиће се са Q_{12} и усваја се да је позитиван смер течења од 1 ка 2. Да би се показало који је модел одговарајући у овом случају задатак ће се решити применом и модела квази-устаљеног течења и модела крутог удара (мада се и у овом случају може покушати прво са аналитичким решењем).

Нумерички модел квази-устаљеног течења

Из Бернулијеве једначине за цев од пресека 1 до пресека 2

$$\Pi_1 = \Pi_2 + R_{12} Q_{12} |Q_{12}| \tag{7.1}$$

добија се израз за протицај:

$$Q_{12}^n = SGN(\Pi_1^n - \Pi_2^n) \sqrt{\frac{|\Pi_1^n - \Pi_2^n|}{R_{12}}}$$

где је

$$SGN(\Pi_1 - \Pi_2) = \begin{cases} 1 & \Pi_1 > \Pi_2 \\ -1 & \Pi_1 < \Pi_2 \end{cases}$$

а израз

$$R_{12} = (\Sigma\xi + \lambda \frac{L}{D}) \frac{1}{2gA_c^2}$$

Из једначине континуитета за бунар 2:

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_2}{\mathrm{d}t} = \frac{Q_{12}}{A_2} \tag{7.2}$$

долази се до израза

$$\Pi_2^{n+1} = \Pi_2^n + Q_{12}^n \Delta t \frac{1}{A_2}$$

Нумерички модел крутог удара

Апроксимацијом динамичке једначине за флуид у цеви

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{gA_c}{L}(\Pi_1 - \Pi_2) - \frac{2\lambda}{\pi d^3} Q_{12}|Q_{12}| \tag{7.3}$$

долази се до нумеричког модела

$$Q_{12}^{n+1} = Q_{12}^n + \Delta t \frac{gA_c}{L}(\Pi_1 - \Pi_2^n) - \Delta t \frac{2\lambda}{\pi d^3} Q_{12}^n \mid Q_{12}^n \mid$$

Једначина континуитета за бунар 2 користи се у истом облику као у моделу квазиустаљеног течења:

$$\Pi_2^{n+1} = \Pi_2^n + Q_{12}^n \Delta t \frac{1}{A_2}$$

Периода осциловања је

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{gA_c(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2})}} = 127\,\mathrm{s}$$

Временски корак се добија из услова тачности $\Delta t < T/20$, па је усвојено $\Delta t = 5$ s. Такође, задовољено је и да је

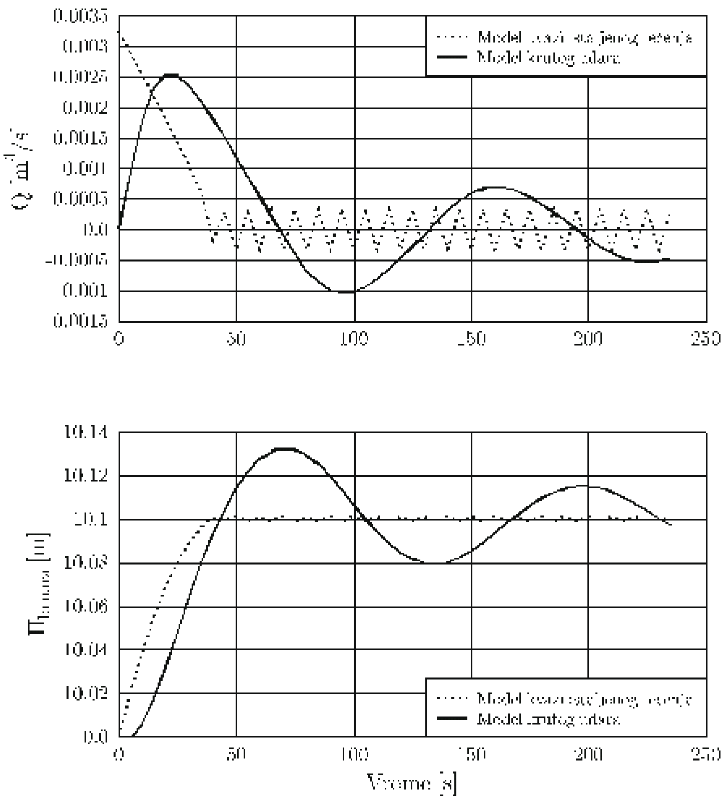
$$\Delta t < T_0 = \sqrt{\frac{2DL}{g\Delta\Pi\lambda_{ef}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.1 \cdot 40}{9.81 \cdot 0.1 \cdot 0.029}} = 16.8\,\mathrm{s}$$

Резултати

Ниво у акумулацији се нагло повећа на 10.10 m, што одговара коти Π_1 у почетном тренутку. Модел квази-устаљеног течења подразумева тренутно успостављање протицаја, па је почетни протицај $Q_{12} = 0.0032$ m^3/s. Код модела крутог удара протицај у почетном тренутку је 0, и постепено се повећава, јер овај модел узима у обзир и инерцију воде.

	Модел квазиустаљеног тока			Модел крутог удара		
t[s]	Π_1[m]	Π_2[m]	Q_{12}[l/s]	Π_1[m]	Π_2[m]	Q_{12}[l/s]
0	10.10	10.0000	3.244	10.10	10.0000	0.000
5	10.10	10.0207	2.890	10.10	10.0000	0.960
10	10.10	10.0391	2.531	10.10	10.0061	1.788
15	10.10	10.0552	2.171	10.10	10.0175	2.325
20	10.10	10.0690	1.805	10.10	10.0323	2.545
25	10.10	10.0805	1.431	10.10	10.0485	2.523
30	10.10	10.0896	1.044	10.10	10.0646	2.356
35	10.10	10.0963	0.625	10.10	10.0796	2.110
40	10.10	10.1003	-0.166	10.10	10.0930	1.822
45	10.10	10.0992	0.289	10.10	10.1047	1.513
50	10.10	10.1010	-0.332	10.10	10.1143	1.194
55	10.10	10.0989	0.335	10.10	10.1219	0.870
60	10.10	10.1010	-0.335	10.10	10.1274	0.547
65	10.10	10.0989	0.335	10.10	10.1309	0.226
70	10.10	10.1010	-0.335	10.10	10.1324	-0.089
75	10.10	10.0989	0.335	10.10	10.1318	-0.393
80	10.10	10.1010	-0.335	10.10	10.1293	-0.662
85	10.10	10.0989	0.335	10.10	10.1251	-0.868
90	10.10	10.1010	-0.335	10.10	10.1195	-0.995
95	10.10	10.0989	0.335	10.10	10.1132	-1.043
100	10.10	10.1010	-0.335	10.10	10.1066	-1.020
105	10.10	10.0989	0.335	10.10	10.1001	-0.937
110	10.10	10.1010	-0.335	10.10	10.0889	-0.811

Применом модела квази-устаљеног течења потребно време да се ниво у бунару изједначи са нивоом у акумулацији, с одступањем мањим од ± 0.02 m је 35 s, док се применом модела крутог удара (који је тачнији) добија 90 s. Очигледно је да се у овом случају модел квази-устаљеног течења не може применити, јер представља сувише грубу апроксимацију стања течења.

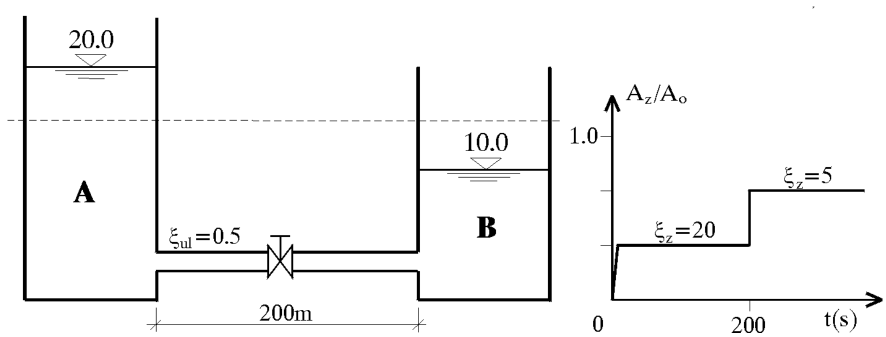

0.0035
0.003
0.0025
0.002
0.0015
0.001
0.0005
0.0
-0.0005
0
50
100
200
250
Model
Model krutog
10.14
10.12
10.1
10.06
10.04
10.02
0.0
Vreme [s]

Задатак 8

30. септембар 1994./1

На половини цеви ($D = 1.0$ m, $L = 200$ m, $\lambda = 0.017$), која спаја два цилиндрична резервоара ($D_R = 4.0$ m), налази се затварач, који је у почетном тренутку затворен. Ниво воде у резервоару A је 20.0 m, а у резервоару B је 10 m.

Затварач се отвара у два корака: за $0 < t < 200$ с, $\xi_Z = 20$, док је за $t > 200$ s, $\xi_Z = 5$. Математичким моделом крутог удара одредити максимални ниво у резервоару B



Решење:

Временски корак интеграције

Периода осциловања воде у цеви између два резервоара

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{LA_A A_B}{gA_c(A_A + A_B)}} = 80.2\,\mathrm{s}$$

Временски интервал од 200 s, за који важи иста отвореност затварача ($\xi_z = 20$) је 2.5 пута дужи од периоде осциловања T. То значи да ће први локални максимум нивоа у резервоару B, који се оствари по отварању затварача, бити највећи током целог описаног маневра затварачем. Поновно отварање затварача, тј. промена на $\xi_z = 5$, утицало би само ако би затварач променио отвореност пре достизања првог локалног максимума нивоа у резервоару B, што овде није случај.

Усваја се математички модел крутог удара са временским кораком интеграције $\Delta t = 4$ s ($\approx T/20$). Мора се проверити и да ли је задовољен услов да је $\Delta t < T_0$. Карактеристично време T_0 је

$$T_0 = \sqrt{\frac{2DL}{g\Delta\Pi\lambda_{ef}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 200}{9.81 \cdot 10 \cdot 0.1245}} = 5.7s$$

тако да је $\Delta t < T_0$.

Математички и нумерички модел

За приближну интеграцију једначина континуитета и динамичке једначине користиће се Ојлерова метода.

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_A}{\mathrm{d}t} = -\frac{Q_{12}}{A_A} \Longrightarrow \tag{8.1}$$

$$\Pi_A^{n+1} = \Pi_A^n - \frac{Q_{12}}{A_A}\Delta t$$

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{Q_{12}}{A_B} \tag{8.2}$$

$$\Pi_B^{n+1} = \Pi_B^n + \frac{Q_{12}}{A_B}\Delta t$$

$$\frac{\mathrm{d}Q_{12}}{\mathrm{d}t} = \frac{gA_c}{L}(\Pi_A - \Pi_B) - \frac{2\lambda}{D^3\pi}Q_{12}|Q_{12}| \tag{8.3}$$

$$Q_{12}^{n+1} = Q_{12}^n + \frac{gA_c}{L}\left(\frac{\Pi_A^n + \Pi_A^{n+1}}{2} - \frac{\Pi_B^n + \Pi_B^{n+1}}{2}\right)\Delta t - \frac{2\lambda}{D^3\pi}Q_{12}^n|Q_{12}^n|\Delta t$$

Резулатати

t [s]	Q [m^3/s]	Π_A [m]	Π_B [m]
0	0.000	20.00	10.00
4	1.540	19.51	10.49
8	2.207	18.81	11.19
12	1.897	18.20	11.80
16	1.788	17.63	12.37
20	1.626	17.11	12.88
24	1.473	16.65	13.35
28	1.320	16.23	13.77
32	1.167	15.85	14.15
36	1.016	15.53	14.47
40	0.865	15.25	14.75
44	0.716	15.03	14.97
48	0.568	14.85	15.15
52	0.423	14.71	15.29
56	0.280	14.62	15.38
60	0.140	14.58	15.42
64	0.004	14.58	15.42
68	-0.127	14.61	15.38
...			
100	-0.083	15.26	14.74
104	-0.001	15.27	14.74
108	0.083	15.24	14.76
112	0.154	15.19	14.81
...			
144	-0.005	14.81	15.19
148	-0.065	14.83	15.17
152	-0.117	14.86	15.14

Двоструко краћим кораком интеграције, Δt =2 s, добија се тачније решење, уместо $\Pi_{B,max} = 15.42$ m, добија се 15.45 m. Још тачније решење добило би се коришћењем неке тачније методе од Ојлерове, или даљим смањивањем корака интеграције. За овај случај, када се затварач не помера, може се добити и тачно, тј. аналитичко, решење за максимални ниво (док се тренутак када ће се то десити не може одредити).

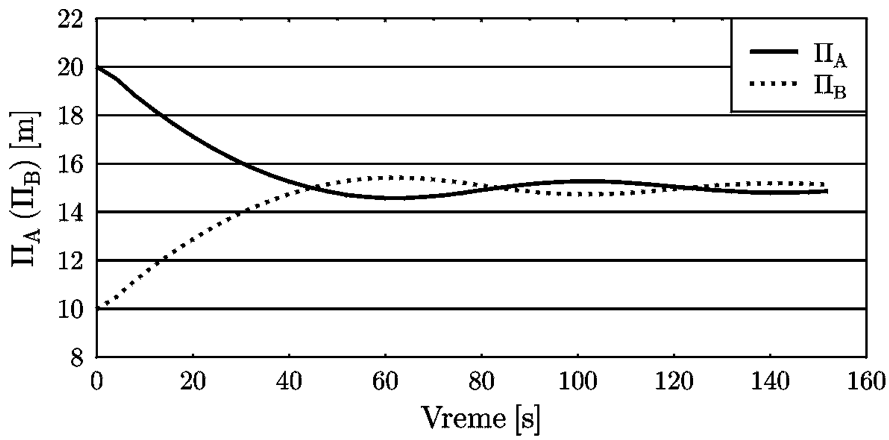
Аналитичко решење

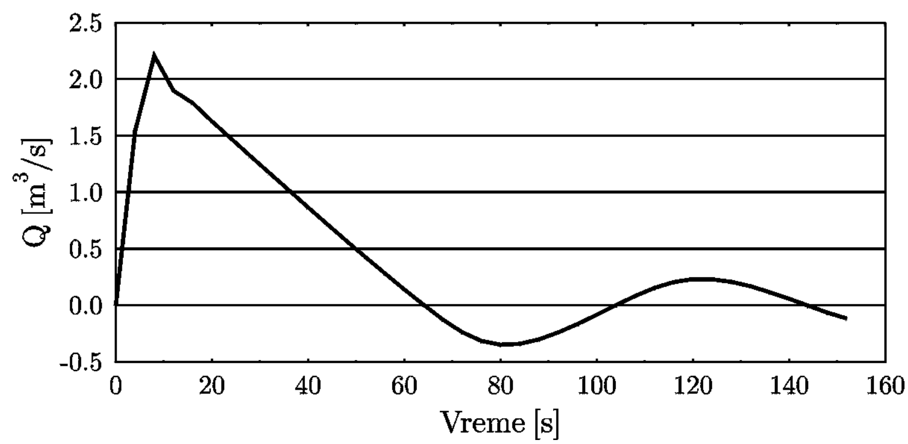
Пошто је у почетном тренутку одступање нивоа од равнотежног положаја $z_1 = 5$ m, наредна екстремна вредност се добија из прорачуна који следи.

$$z_m = \frac{A_1}{A_c}(z_1)_m = 16 \cdot 5 = 80 \qquad \Phi_m = 0.125\frac{80}{1} = 10 \qquad F(\Phi_m) \approx 0.0$$

$$\Phi_{m+1} = -1.0 \Rightarrow (z_1)_{m+1} = \frac{1.0}{0.125 \cdot 16} = 0.5\mathrm{m}$$

Тачно решење гласи $\Pi_{B,max} = 15.5$ m.



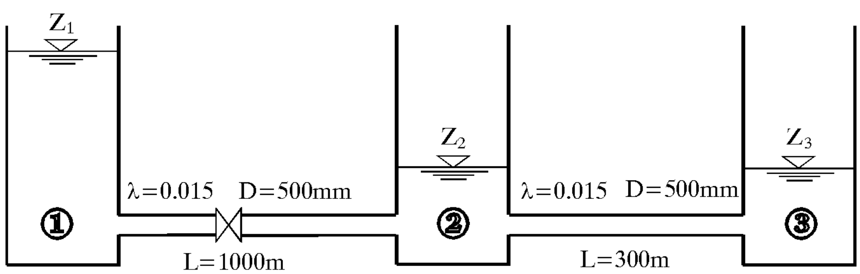


Задатак 9

24.септембар 1995./1

Резервоари R_1, R_2 и R_3 повезани су цевима као на скици. У почетном тренутку затварач на цеви између резервоара R_1 и R_2 је затворен, а нивои у резервоарима су Z_1 =110 m, $Z_2 = Z_3 = 100$ m. Површине резервоара су: $A_1 = 10\text{m}^2$, $A_2 = A_3 = 4\text{m}^2$.

Одредити сопствене периоде осциловања за обе цеви. Математичким моделом крутог удара одредити промене нивоа у резервоарима које се јављају након наглог отварања затварача у првих 50 секунди. Локалне губитке на улазима и излазима из цеви, као и на потпуно отвореном затварачу занемарити.



Решење

Сопствене периоде осциловања

За воду у цеви између резервоара 1 и 2, чији је пресек, A_{cevi} =0.196 m^2, периода осциловања је једнака

$$T_{12} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{gA_{cevi}(1/A_1 + 1/A_2)}} = 242\text{s}$$

а за воду у цеви између резервоара 2 и 3

$$T_{23} = 111\text{s}$$

Усваја се временски корак за интеграцију једначина континуитета и диналичких једначина, $\Delta t = 5\text{s}$ $(\approx T_{23}/20)$

Нумерички модел

Једначине континуитета за резервоаре R_1, R_2 и R_3, могу се написати у дискретизованом облику:

$$\frac{Z_1^{n+1} - Z_1^n}{\Delta t} = -\frac{Q_{12}^n}{A_1} \tag{9.1}$$

$$\frac{Z_2^{n+1} - Z_2^n}{\Delta t} = \frac{Q_{12}^n - Q_{23}^n}{A_2} \tag{9.2}$$

$$\frac{Z_3^{n+1} - Z_3^n}{\Delta t} = \frac{Q_{23}^n}{A_3} \tag{9.3}$$

Динамичке једначине за цеви 1-2 и 2-3, могу се написати у дискретизованом облику:

$$\frac{Q_{12}^{n+1} - Q_{12}^n}{\Delta t} = \frac{gA_c}{L_{12}} \left(\frac{Z_1^{n+1} + Z_1^n}{2} - \frac{Z_2^{n+1} + Z_2^n}{2} \right) - \frac{2\lambda}{\pi D^3} Q_{12}^n |Q_{12}^n| \tag{9.4}$$

$$\frac{Q_{23}^{n+1} - Q_{23}^n}{\Delta t} = \frac{gA_c}{L_{23}} \left(\frac{Z_2^{n+1} + Z_2^n}{2} - \frac{Z_3^{n+1} + Z_3^n}{2} \right) - \frac{2\lambda}{\pi D^3} Q_{23}^n |Q_{23}^n| \tag{9.5}$$

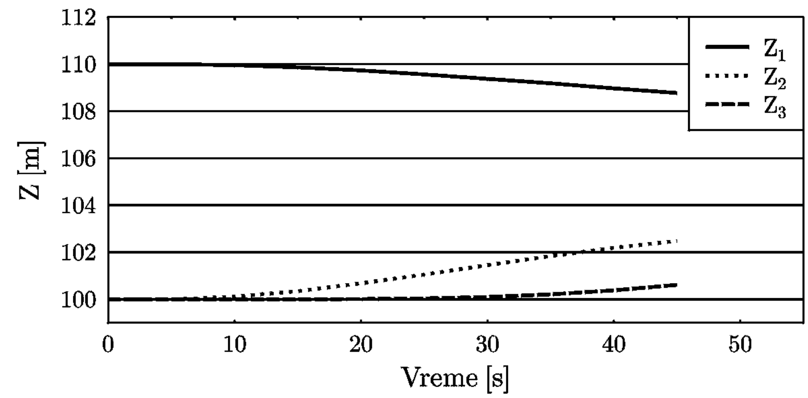
Резултати

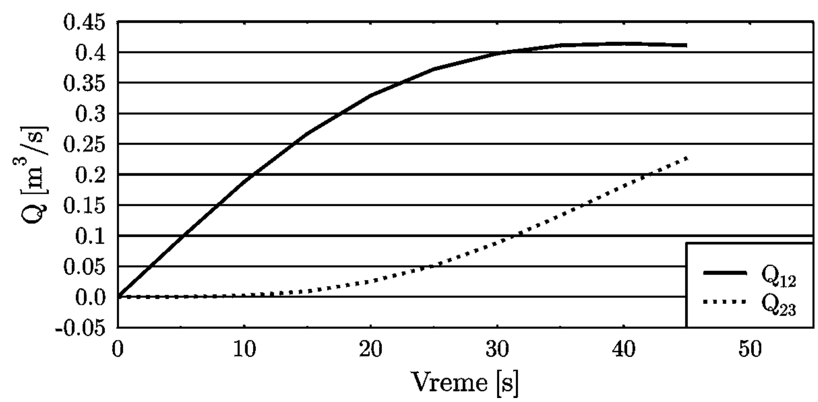
Редослед рачунања одговара редоследу једначина.

t [s]	Z_1 [m]	Z_2 [m]	Z_3 [m]	Q_{12}[m^3/s]	Q_{23}[m^3/s]
0	110.00	100.00	100.00	0.000	0.000
5	110.00	100.00	100.00	0.096	0.000
10	109.95	100.12	100.00	0.188	0.002
15	109.86	100.35	100.00	0.267	0.009
20	109.73	100.67	100.01	0.329	0.025
25	109.57	101.05	100.04	0.372	0.051
30	109.38	101.45	100.10	0.398	0.088
35	109.18	101.84	100.21	0.411	0.133
40	108.97	102.19	100.38	0.414	0.181
45	108.76	102.48	100.61	0.411	0.227
50	108.55	102.71	100.89	итд.	итд.

Ново равнотежно стање одговара нивоу 105.56 m, у сва три резервоара, али до њега ће доћи тек после неколико периода осцилација. Овде се не може користити модел квази-устаљеног течења јер је максимално одступање од равнотежног положаја нивоа у резервоару (2) једнако

$$\max z_2 = \frac{D}{\lambda}\frac{A_c}{A_2} = \frac{0.5}{0.015}\frac{0.196}{4} = 1.63\,\mathrm{m}.$$



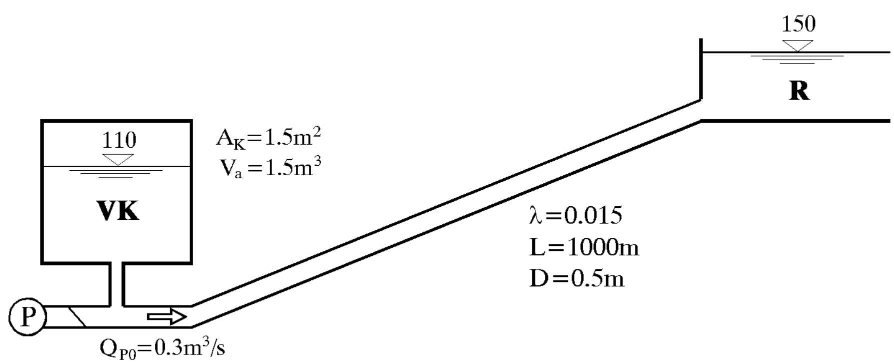


Задатак 10

25. јануар 1992./1

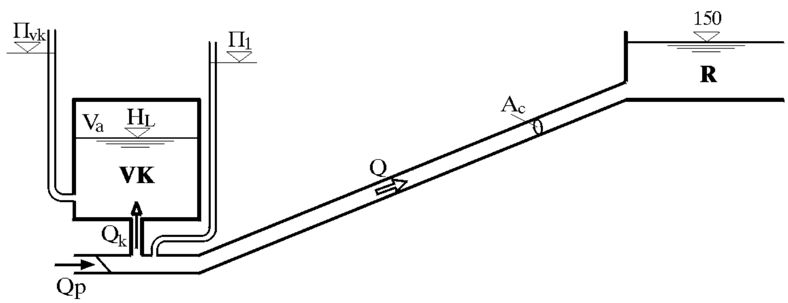
На слици је приказан цевовод дужине 1000 m, пречника $D = 0.5$ m, са ваздушним казаном за заштиту од хидрауличког удара.

Применом математичког модела крутог удара срачунати промене протицаја кроз цев током првих 15 s након искључења пумпе.



Подаци за рачун. Коефицијент трења је константан и износи λ =0.015. У тренутку искључења пумпе протицај је износио Q_{P0} = 0.3 m^3/s.

За ваздух под притиском важи једначина стања гаса, $p_{abs} \cdot V_a^n$ =конст, где је политропска константа n= 1.2. Коефицијент локалног губитка на споју ваздушног казана и цевовода (пречник пригушивача $d = 0.15$ m) износи 2.5 и исти је за оба смера течења. У почетном тренутку претпоставити да се неповратни затварач иза пумпе тренутно затвара и да Q_{P0} долази из ваздушног казана.



Решење

Почетно стање

Брзина у почетном тренутку је

$$V_0 = \frac{Q_0}{A_c} = \frac{0.30}{0.1963} = 1.53\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

а губитак енергије у устаљеном стању од пресека 1 до резервоара R је

$$\Delta E = \lambda \frac{L}{D}\frac{V_0^2}{2g} = 3.57\mathrm{m}$$

Тако је пијезометарска кота у комори Π_{VK} једнака пијезометарској коти у цеви у пресеку 1: $\Pi_{VK} = \Pi_1 = 150 + \Delta E = 153.57$ mnm. Релативни притисак ваздуха у комори је $(p_a)_0 = \rho g(153.57 - 110) = 427.4$ kPa, док је апсолутни $(p_a)_{abs} = 527.4$ kPa, тако да је $p_{abs} \cdot V_a^{1.2} = 858$.

Искључење пумпе из погона може се приказати следећим математичким релацијама:

$$t = 0 \qquad Q_P = Q_0 \qquad Q_K = 0 \qquad \Pi_{1,0} = \Pi_{VK,0}$$
$$t > 0 \qquad Q_P = 0 \qquad Q_K = -Q_1 \qquad \Pi_1 \neq \Pi_{VK}$$

(Q_K је позитивно када вода улази у ваздушну комору)

Дискретизација једначина

За прорачун течења воде у цеви од пресека 1 до резервоара R користиће се математички модел крутог удара. Због постојања ваздушне коморе на узводном крају цеви морају се увести још и додатне једначине.

Комплетан математички, као и нумерички модел могу се приказати у следећем облику, при чему редослед једначина одговара редоследу рачунања:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{gA_c}{L}\left(\Pi_1 - \Pi_R\right) - \frac{\lambda}{2DA_c}Q|Q| \tag{10.1}$$

$$Q^{n+1} = Q^n + \left(\frac{gA}{L}\Delta\Pi^n - rQ^n|Q^n|\right)\Delta t$$

$$\Pi_1 - \Pi_{VK} = \xi_K \frac{Q_K|Q_K|}{2gA_{pr}} \tag{10.2}$$

$$\Delta\Pi = \Pi_1 - \Pi_{VK} = 408 \cdot Q_K|Q_K|$$

$$\frac{\mathrm{d}H_L}{\mathrm{d}t} = \frac{Q_K}{A_K} \tag{10.3}$$

$$H_L^{n+1} = H_L^n + \frac{Q_K^n + Q_K^{n+1}}{2A_K}\Delta t$$

$$\frac{\mathrm{d}\cancel{V}_a}{\mathrm{d}t} = -Q_K \tag{10.4}$$

$$\cancel{V}_a^{n+1} = \cancel{V}_a^n - \frac{Q_K^n + Q_K^{n+1}}{2}\Delta t$$

$$p_{abs} \cdot (\cancel{V}_a)^{1.2} = \mathrm{const} \tag{10.5}$$

$$p_a^{n+1} = \frac{\mathrm{const}}{(\cancel{V}^{n+1})^{1.2}} - 100$$

$$\Pi_{VK} = H_L + \frac{p_a}{\rho g} \tag{10.6}$$

$$\Pi_{VK}^{n+1} = H_L^{n+1} + \frac{p_a^{n+1}}{\rho g}$$

Већина коришћених ознака у моделу је приказана на скици, док су још A_{pr} површина попречног пресека пригушивача, A_K површина попречног пресека коморе, p_{abs} апсолутни притисак ваздуха у комори, p_a релативни притисак ваздуха у комори.

Прорачун неустаљеног течења

Временски прираштај је једнак $\Delta t = 1$ s.

$\boxed{t > 0}$ (Тренутак непосредно после испада пумпе из погона)

$$Q_K^{(0)} = -Q_0 = -0.3\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$

$$(10.1) \to \Pi_1^{(0)} = 153.57 - 408 \cdot 0.3 \cdot 0.3 = 116.85\,\mathrm{m}$$

$$\Delta\Pi^{(0)} = 116.85 - 150.00 = -33.15\,\mathrm{m}$$

$\boxed{t = 1s}$ $\Delta t = 1s$

$$(10.2) \Rightarrow Q^{(1)} = -Q_K^{(1)} = 0.3 + (0.001926 \cdot (-33.15) - 0.0764 \cdot 0.3^2) \cdot 1 = 0.229\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$

$$(10.3) \Rightarrow H_L^{(1)} = 110.00 - \frac{0.3 + 0.229}{1.5 \cdot 2} \cdot 1 = 109.82\,\mathrm{m}$$

$$(10.4) \Rightarrow \cancel{V}_a^{(1)} = \cancel{V}_a^{(0)} + \frac{0.3 + 0.229}{2} \cdot 1 = 1.7645\,\mathrm{m}^3$$

$$(10.5) \Rightarrow p_a^{(1)} = \frac{858}{1.7645^{1.2}} - 100. = 334\,\mathrm{kPa}$$

$$(10.6) \Rightarrow \Pi_{VK}^{(1)} = 109.82 + \frac{334}{9.81} = 143.87\,\mathrm{m}$$

$$\Pi^{(1)} = 143.87 - 408 \cdot 0.229^2 = 122.47\,\mathrm{m}$$

$$\Delta\Pi^{(1)} = 122.47 - 150.00 = -27.53\,\mathrm{m}$$

$\boxed{t = 2s}$

$$Q^{(2)} = -Q_K^{(2)} = 0.229 - 0.057 = 0.172\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$

$$(H_L^{(2)} = 109.82 - \frac{0.229 + 0.172}{1.5 \cdot 2} \cdot 1 = 109.69\,\mathrm{m}$$

$$\cancel{V}_a^{(2)} = 1.7645 + 0.2005 = 1.965\,\mathrm{m}^3$$

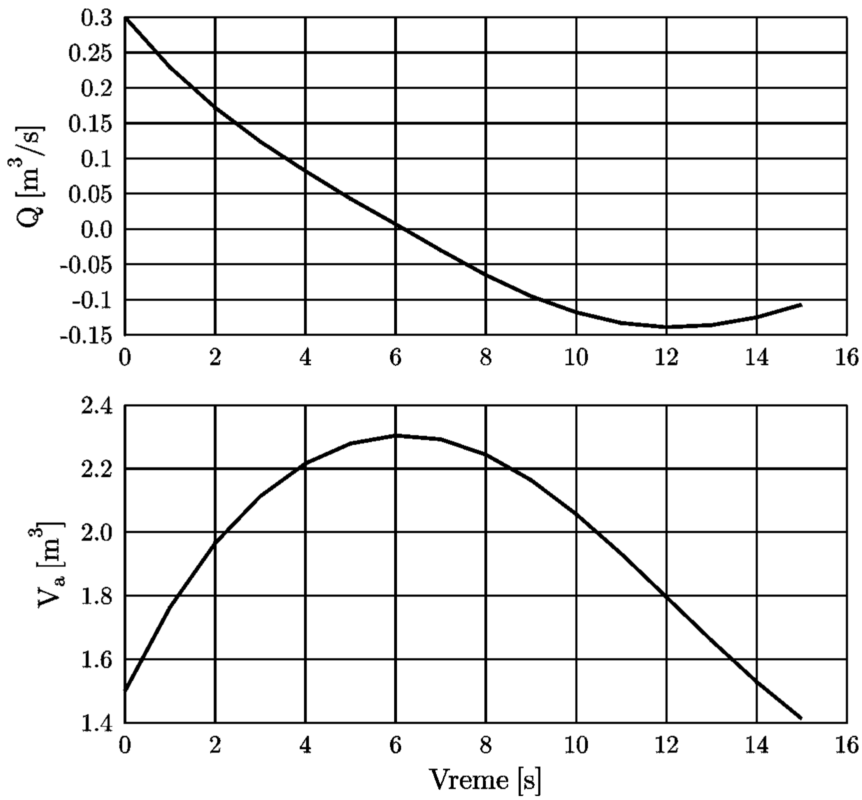
$$p_a^{(2)} = \frac{858.}{1.965^{1.2}} - 100. = 281.5\,\mathrm{kPa}$$

$$\Pi_{VK}^{(2)} = 109.69 + \frac{281.5}{9.81} = 138.39\,\mathrm{m}$$

$$\Pi^{(2)} = 138.39 - 408 \cdot 0.172^2 = 126.32\,\mathrm{m}$$

$$\Delta\Pi^{(2)} = 126.32 - 150.00 = -23.68\,\mathrm{m}$$

t	Q^n	H_L^n	V_a^n	p_a^n	Π_{VK}^n	Π_1^n	$\Delta\Pi^n$	Q^{n+1}
s	$\mathrm{m^3/s}$	m	$\mathrm{m^3}$	kPa	m	m	m	$\mathrm{m^3/s}$
0	0.300	110.00	1.500	427.4	153.57	116.85	-33.15	0.229
1	0.229	109.82	1.764	334.0	143.87	122.47	-27.53	0.172
2	0.172	109.69	1.965	281.5	138.39	126.32	-23.68	0.124
3	0.124	109.59	2.113	249.6	135.04	128.77	-31.23	0.082
4	0.082	109.52	2.216	230.2	132.99	130.25	-19.75	0.043
5	0.043	109.48	2.279	219.4	131.84	131.09	-18.91	0.006
6	0.006	109.46	2.304	215.2	131.40	131.39	-18.61	-0.030
7	-0.030	109.47	2.292	217.1	131.60	131.97	-18.03	-0.065
8	-0.065	109.50	2.244	225.2	132.46	134.18	-15.82	-0.095
9	-0.095	109.55	2.164	239.8	134.00	137.68	-12.32	-0.118
10	-0.118	109.62	2.057	261.0	136.22	141.90	-8.10	-0.133
11	-0.133	109.70	1.932	289.4	139.21	146.43	-3.57	-0.139
12	-0.139	109.79	1.796	324.9	142.91	150.75	0.79	-0.136
13	-0.136	109.88	1.659	367.6	147.35	154.90	4.90	-0.125
14	-0.125	109.97	1.529	415.7	152.34	158.71	8.71	-0.107
15	-0.107	110.05	1.413	466.7	157.62	162.29	12.29	-0.082



0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0.0
-0.05
-0.1
-0.15
Q [m^3/s]
0
2
4
6
8
10
12
14
16
2.4
2.2
2.0
1.8
1.6
1.4
V_a [m^3]
Vreme [s]

Задатак 11

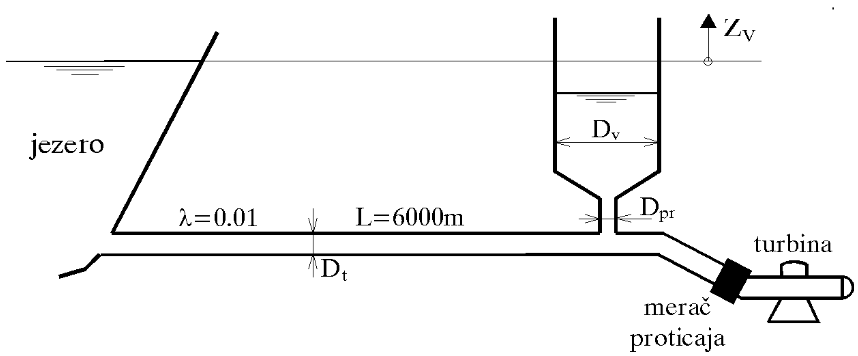
2. фебруар 1994/1

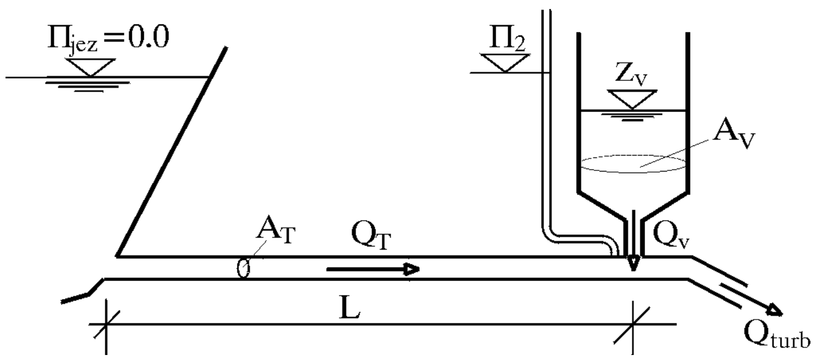
Тунел, дужине 6000 м, пречника $D_T = 3$ м, коефицијента трења $\lambda = 0.01$, води од акумулације до цилиндричног водостана пречника $D_V = 10$ м. Низводно од водостана, на релативно кратком растојању, налазе се мерач протицаја и турбина. У једнаким временским интервалима регистровани су нивои у водостану (релативно у односу на ниво у акумулацији) и протицаји кроз турбину.

t [с]	0	12	24	36	48	60
Z_V [м]	0.0	-1.11	-3.17	-4.96	-6.52	-7.86
$Q_{turb} [m^3/s]$	0.0	14.59	14.75	14.88	15.00	15.11

На основу регистрованих величина реконструисати протицаје кроз тунел.

Пречник пригушивача на водостану је $D_{pr} = 1.5$ м. Ако је то могуће, на основу датих података процени коефицијент локалног губитка на пригушивачу.





Решење:

Протицаји кроз тунел могу се реконструисати на основу измерених протицаја кроз турбину и промена нивоа воде у водостану применом једначине континуитета. Посао није једнозначан због малог броја података[1], великог утицаја типа и тачности нумеричке методе којом се апроксимира једначина континуитета

$$\frac{\mathrm{d}z_V}{\mathrm{d}t} = \frac{Q_T - Q_{turb}}{A_V} \tag{11.1}$$

Један од начина да се формира нумерички модел је и имплицитна метода Кранк-Николсон (резултати у колони 1)

$$\frac{z_V^{n+1} - z_V^n}{\Delta t} = \frac{Q_T^{n+1} + Q_T^n - Q_{turb}^{n+1} - Q_{turb}^n}{A_V} \tag{11.2}$$

У принципу, могућа је и другачија интерпретација резултата мерења. Ако се користи метода leap frog

$$\frac{z_V^{n+2} - z_V^n}{2\Delta t} = \frac{Q_T^{n+1} - Q_{turb}^{n+1}}{A_V} \tag{11.3}$$

добијају се резултати у колони (2).

t	z_V	Q_{turb}	Q_T (1)	Q_T (2)
[с]	[м]	[м^3/с]	[м^3/с]	[м^3/с]
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00
12	-1.11	14.59	0.06	4.22
24	-3.17	14.75	2.31	2.15
36	-4.96	14.88	3.89	3.92
48	-6.52	15.00	5.57	5.51
60	-7.86	15.11	7.00	**

[1] У осматраном периоду дешавају се значајне промене нивоа и протицаја у тунелу. Са друге стране због потребе да се задатак уради у предвиђеном року задатак се ради са оваквим бројем података.

На основу добијених резултата у овом случају не треба судити о овој методи због малог броја тачака. Вредност у тренутку $t = 12$ с од 4.22 м^3/с очигледно нема смисла, јер се не може очекивати од математичког модела крутог удара да даје тако скоковиту промену, док вредност у $t = 60$ с није могла бити срачуната. Преостале вредности су потпуно коректне, што није велико изненађење јер су и метода Кранк-Николсона и leap-frog формално другог реда тачности. Као веома корисна вежба препоручује се примена Ојлерове методе, која је првог реда тачности, и поређење са резултатима из табеле. Ојлерова метода такође не може дати вредности у $t = 60$ с, а такође вредност у $t = 0$ нема никавог смисла.

Можда је ова збрка око недовољног броја тачака и утицаја методе која се користи на вредности протицаја, довољна да нас обешрабри да одемо и корак даље покушавајући да проценимо вредност коефицијента локалног губитка на пригушивачу. У пракси би то свакако био случај, док у задатку, настављамо.

Знајући вредности протицаја кроз тунел у једнаким временским интервалима, применом динамичке једначине за воду у тунелу може се одредити вредност разлике пијезометарских кота на узводном и низводном крају тунела. Пијезометарска кота на узводном крају тунела је констатна (ниво у водостану се мери у односу на њу), док је на низводном крају нижа од коте нивоа у водостану за губитак енергије кроз пригушивач $\xi_{pr}\frac{Q_V|Q_V|}{A_{pr}^2 2g}$. Математички модел гласи

$$\frac{\mathrm{d}Q_T}{\mathrm{d}t} = \frac{gA_T}{L}(\Pi_{jez} - \Pi_2) - \frac{2\lambda}{D^3\pi}Q_T|Q_T| \tag{11.4}$$

И овде се резултати могу значајно разликовати у зависности од методе која се користи, а како је имплицитна метода код једначине континуитета дала најприхватљивије резултате и овде се користи нека варијанта те методе

$$\frac{Q_T^{n+1} - Q_T^n}{\Delta t} = \frac{gA_T}{L}(\Pi_{jez} - \tilde{\Pi}_2) - \frac{2\lambda}{D^3\pi}Q_T^{n+1}|Q_T^n| \tag{11.5}$$

где је

$$\tilde{\Pi}_2 = \frac{\Pi_2^{n+1} + \Pi_2^n}{2}$$

карактеристична, или (условно речено) средња вредност у интервалу (t_n, t_{n+1})). Као карактеристичне вредности добијено је

интервал [с]	$\tilde{\Pi}_2$[м]	$\tilde{z_V}$ [м]	Q_V [м^3/с]	$V_{pr}^2/2g$ [м]	ξ_p
0 – 12	-0.43				
12 – 24	-16.22				
24 – 36	-11.41	-4.06	11.7	2.23	3.3
36 – 48	-12.15	-5.74	10.2	1.70	3.8
48 – 60	-10.38	-7.19	8.8	1.26	2.5

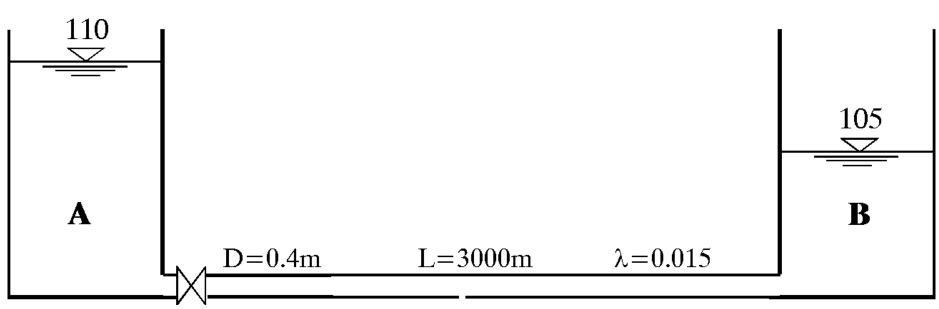
Опет се можемо уверити да механичко прерачунавање $\tilde{\Pi}_2$ у вредности пијезометарске коте на крајевима интервала може довести до неочекиваних резултата па ћемо опрезно искористити само три последње вредности, за које користимо репрезентативне вредности за протицаје Q_V, 11.7, 10.2 и 8.8 м^3/с, и вредности нивоа у водостану $\tilde{z_V}$, -4.06, -5.74 и -7.19 м, одакле добијамо вредности за ξ_{PR}, 3.3, 3.8 и 2.5. Распон у коме се крећу добијене вредности је релативно велик, па се не може рећи да су резултати довољно репрезентативни.

Задатак 12

10.новембар 1991./1

Два резервоара, A и B, велике хоризонталне површине, повезана су хоризонталном цеви дужине $L = 3000$ м, пречника $D = 0.4$ м, коефицијента трења $\lambda = 0.015$. Ниво у резервоару A износи $\Pi_A = 110.00$ м, у резервоару B, $\Pi_B = 105.00$ м, а кота тежишта попречног пресека цеви износи $Z_C = 100.00$ м. У почетном тренутку, затварач код резервоара A, који је био затворен, нагло се отвара. Претпоставити да се локални губици на улазу у цев и на потпуно отвореном затварачу могу занемарити.

Математичким моделом хидрауличког удара одредити промену протицаја и пијезометарске коте на половини цеви, током првих 15 с. Брзина пропагације таласа кроз цев је $a = 1000$ м/с.



Решење:

Математички модел

Примениће се математички модел хидрауличког (еластичног) удара. За решавање ће се користити метода карактеристика.

Једначине које важе дуж карактеристика:

$$\pm\frac{дП}{дt} + \frac{a}{Ag}\frac{дQ}{дt} + \lambda a \frac{Q|Q|}{2gDA^2} = 0 \tag{12.1}$$

Једначине карактеристика:

$$\frac{дx}{дt} = \pm a \tag{12.2}$$

Почетни услов

$$П(x,0) = 105m \qquad Q(x,0) = 0$$

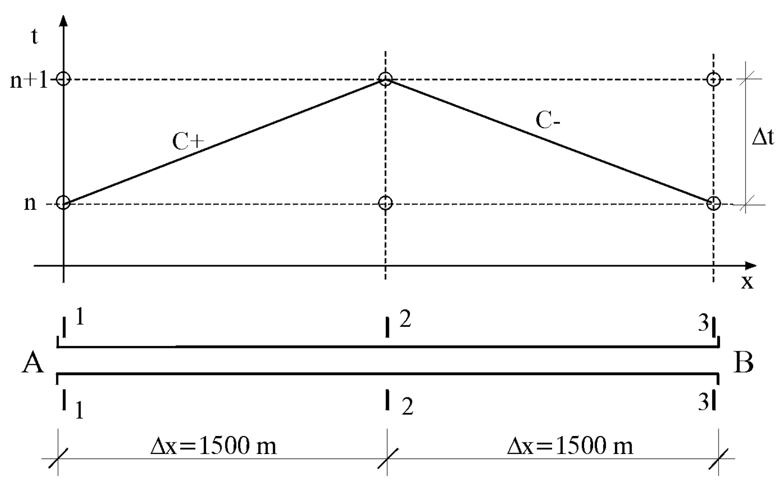
Гранични услови

$$П(0,t) = 110m \qquad П(L,t) = 105m$$

Нумерички модел

Да би се приступило нумеричком решавању математичког модела, мора се извршити дисретизација просторног и временског домена.

За решење задатка довољно је поделити цевовод на две деонице, са пресецима 1, 2 и 3, који су назначени на скици, при чему је $\Delta x =$ 1500 м. Временски корак се бира да је $\Delta t = \Delta x/a = 1.5s$, тако да карактеристике пролазе кроз чворове рачунске мреже.



Нумеричке једначине за прорачун зависно променљивих величина у пресеку 2 извешће се поступно, док ће се за граничне пресеке дати само крајњи изрази.

Пресек 2 Дуж позитивне карактеристике C^+ од $(1, n)$ до $(2, n+1)$ дискретизација диференцијалне једначине се може обавити на следећи начин:

$$\frac{\Pi_2^{n+1} - \Pi_1^n}{\Delta t} + B\frac{Q_2^{n+1} - Q_1^n}{\Delta t} + MQ_1^n|Q_1^n| = 0 \tag{12.3}$$

Дуж негативне карактеристике $C-$ од $(3, n)$ до $(2, n+1)$:

$$-\frac{\Pi_2^{n+1} - \Pi_3^n}{\Delta t} + B\frac{Q_2^{n+1} - Q_3^n}{\Delta t} + MQ_3^n|Q_3^n| = 0 \tag{12.4}$$

Претходне две једначине своде се на

$$\Pi_2^{n+1} = CP - BQ_2^n \tag{12.5}$$

$$\Pi_2^{n+1} = CM + BQ_2^n \tag{12.6}$$

где је

$$CM = \Pi_{i+1}^n - BQ_{i+1}^n + MQ_{i+1}^n|Q_{i+1}^n|$$
$$CP = \Pi_{i-1}^n + BQ_{i-1}^n - MQ_{i-1}^n|Q_{i-1}^n|$$
$$B = \frac{a}{gA} \qquad\qquad M = \frac{\lambda \Delta x}{2gDA^2}$$

Тако су пијезометарска кота и протицај у пресеку 2 у тренутку $n+1$

$$\Pi_2^{n+1} = \frac{CP + CM}{2} \tag{12.7}$$

$$Q_2^{n+1} = \frac{CP - \Pi_2^{n+1}}{B} \tag{12.8}$$

Пресек 1 Комбиновано са граничним условом у пресеку 1 (позната пијезометарска кота), долази се до следећих релација:

$$\Pi_1^{n+1} = \Pi_A = 110.00\text{м} \tag{12.9}$$

$$Q_1^{n+1} = \frac{\Pi_A - CM}{B} \tag{12.10}$$

Пресек 3

$$\Pi_3^{n+1} = \Pi_B = 105.00\text{м} \tag{12.11}$$

$$Q_3^{n+1} = \frac{CP - \Pi_B}{B} \tag{12.12}$$

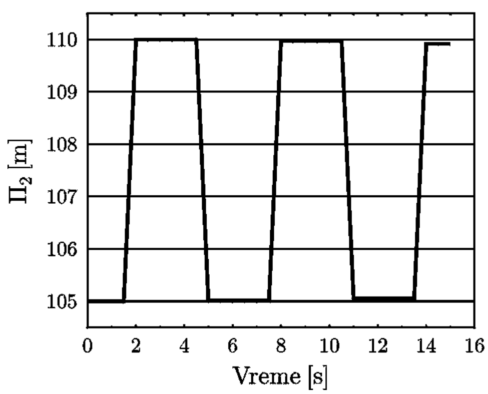
Резултати

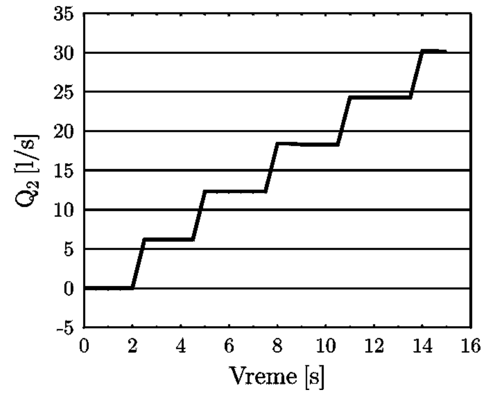
Прорачун у наредној табели урађен је за $\Delta t = 0.5s$, односно $\Delta x = 500m$. Најдужи временски корак са којим се може радити је $\Delta t = 1.5s$, за који је $\Delta x = 1500m$, а одговарајући резултати који би се добили рачуном са таквим временским прираштајем поклапају се са вредностима означеним звездицама.

t [s]	Π_1 [m]	Q_1 [m^3/s]	Π_2 [m]	Q_2 [m^3/s]	Π_3 [m]	Q_3 [m^3/s]
0.0*	110.00	0.0000	105.00	0.0000	105.00	0.0000
0.5	110.00	0.0000	105.00	0.0000	105.00	0.0000
1.0	110.00	0.0000	105.00	0.0000	105.00	0.0000
1.5*	110.00	0.0062	105.00	0.0000	105.00	0.0000
2.0	110.00	0.0062	110.00	0.0062	105.00	0.0000
2.5	110.00	0.0062	110.00	0.0062	105.00	0.0000
3.0*	110.00	0.0062	110.00	0.0062	105.00	0.0000
3.5	110.00	0.0062	110.00	0.0062	105.00	0.0123
4.0	110.00	0.0062	110.00	0.0062	105.00	0.0123
4.5*	110.00	0.0062	110.00	0.0062	105.00	0.0123
5.0	110.00	0.0062	105.02	0.0123	105.00	0.0123
5.5	110.00	0.0062	105.02	0.0123	105.00	0.0123
6.0*	110.00	0.0061	105.02	0.0123	105.00	0.0123
6.5	110.00	0.0184	105.02	0.0123	105.00	0.0123
7.0	110.00	0.0184	105.02	0.0123	105.00	0.0123
7.5*	110.00	0.0184	105.02	0.0123	105.00	0.0123
8.0	110.00	0.0184	109.96	0.0183	105.00	0.0123
8.5	110.00	0.0183	109.96	0.0183	105.00	0.0123
9.0*	110.00	0.0183	109.96	0.0183	105.00	0.0122
9.5	110.00	0.0183	109.96	0.0183	105.00	0.0244
10.0	110.00	0.0183	109.96	0.0183	105.00	0.0244
10.5*	110.00	0.0183	109.96	0.0183	105.00	0.0244
11.0	110.00	0.0183	105.06	0.0243	105.00	0.0244
11.5	110.00	0.0182	105.06	0.0243	105.00	0.0243
12.0*	110.00	0.0182	105.06	0.0243	105.00	0.0243
12.5	110.00	0.0302	105.06	0.0243	105.00	0.0243
13.0	110.00	0.0301	105.06	0.0243	105.00	0.0242
13.5*	110.00	0.0301	105.06	0.0242	105.00	0.0242
14.0	110.00	0.0301	109.90	0.0301	105.00	0.0242
14.5	110.00	0.0301	109.90	0.0301	105.00	0.0242
15.0*	110.00	0.0301	109.90	0.0301	105.00	0.0242

Промене пијезометарске коте и протицаја током првих 15 с у пресеку 2 приказани су на следећим графицима.

По сирењу осцилација оствариће се протицај од $Q_\infty = 0.1173 m^3/s$, а време за које ће се то остварити може се проценити математичким





моделом крутог удара

$$T_0 = \frac{LQ_\infty}{gA\Delta\Pi} = 57s \qquad \rightarrow \qquad t_{99\%} = 2.646T_0 \approx 151s.$$

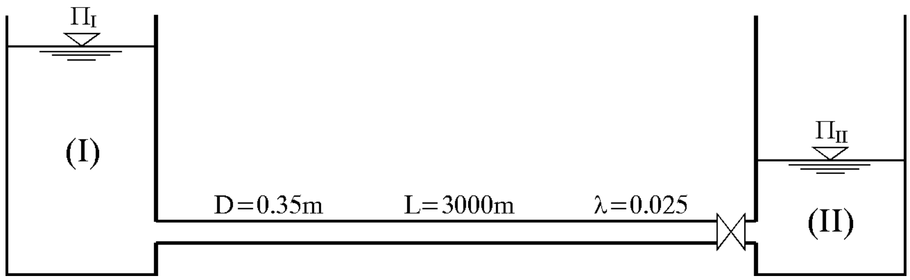
Задатак 13

26. август 1991./1

Резервоаре (I) и (II) спаја цев дужине 3 км, пречника $D = 0.3$ м и коефицијента трења $\lambda = 0.02$. На улазу у резервоар (II) налази се делимично отворен затварач, чији почетни губитак енергије износи $\xi_Z = 100$.

У тренутку када су нивои у резервоарима $\Pi_I = 100$ мнм и $\Pi_{II} = 90$ мнм, затварач се нагло отвара (цео маневар траје 1 с) и нови коефицијент локалног губитка енергије износи $\xi_Z = 50$.

Одредити минималне и максималне пијезометарске коте на цевоводу, као и нови протицај који се успоставља за нови положај затварача у устаљеном течењу.



Решење:

Почетно стање и ново устаљено стање

За почетно стање може се написати Бернулијева једначина:

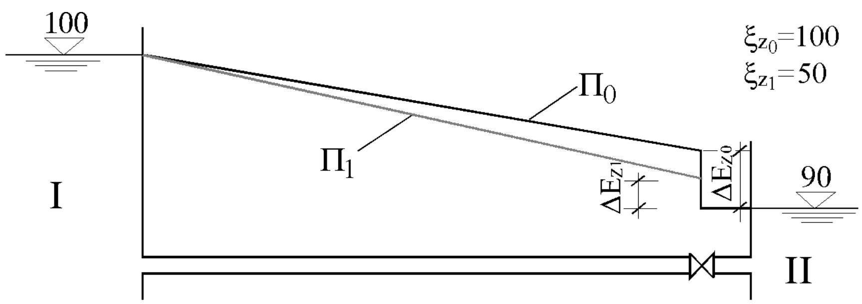
$$\Pi_I = \Pi_{II} + \left(\lambda \frac{L}{D} + \xi_Z\right) \frac{V_0^2}{2g}$$

одакле се добија брзина $V_0 = 0.809$ м/с, односно, брзинска висина $V_0^2/2g = 0.033$ м и губитак енергије на затварачу, $\Delta E_{Z0} = 3.30$ м, за вредност коефицијента локалног губитка $\xi_{Z0} = 100$.Локални губици на излазу из резервоара и улазу, као и брзинска висина, занемарљиви су у односу на губитак енергије на трење и на затварачу.

Ново устаљено стање се добија за вредност коефицијента локалног губитка $\xi_{Z1} = 50$:

$V_1 = 0.886$ м/с, брзинска висина $V_1^2/2g = 0.040$ м, и $\Delta E_{Z1} = 2.0$ м.

Пијезометарске линије за почетно стање Π_0 и ново устаљено стање Π_1 приказане су на следећој скици



Математички модел

Ако би се користили модели квази устаљеног течења и крутог удара, линије Π_0 и Π_1 представљају максималне, односно, минималне пијезометарске коте код промене положаја затварача. По моделу квазиустаљеног течења ново устаљено стање успоставља се тренутно. По моделу крутог удара протицај се приближава оном који одговара новом устаљеном стању са доње стране, а теоријски га достиже за бесконачно време. Зато нагиб линије нивоа не може бити стрмији од онога који одговара новом устаљеном стању (изузев услед нумеричке грешке).

Стварне промене, се дакле могу добити само применом модела хидрауличаког удара

$$\pm\frac{g}{a}\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \lambda\frac{V|V|}{2D} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm a \tag{13.1}$$

где је почетни услов

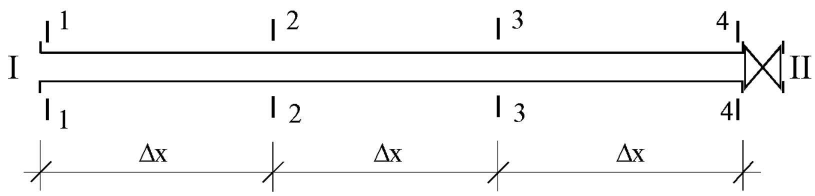
$$V(x,0) = V_0 \qquad \Pi(x,0)\text{се линеарно мења}$$

а гранични услови

$$\Pi(0,t) = 100 \qquad \Pi(L,t) = 90 + \xi_z\frac{V^2(L,t)}{2g}$$

Нумерички модел

Да би се промена положаја затварача могла пратити на одговарајући начин, цев треба поделити на најмање три деонице $\Delta x = 1000$ м, тако да је временски корак $\Delta t = 1$ с. У нумеричком моделу треба рачунати вредности у пресецима 1 (улаз у цев), 2 и 3 (пресеци на цеви) и 4 (пресек на низводном крају цеви непосредно узводно од затварача.



У пресецима 1 и 4 треба узети у обзир одговарајуће граничне услове.

пресек 1:

$$\Pi_1^{n+1} = 100.00$$

$$Q_1^{n+1} = \frac{100 - CM}{B}$$

пресеци 2 и 3:

$$\Pi_i^{n+1} = \frac{CP + CM}{2}$$

$$Q_i^{n+1} = \frac{\Pi_i^{n+1} - CM}{B}$$

пресек 4:

$$\Pi_4^{n+1} = CP - Q_4^{n+1} B$$

$$\Pi_4^{n+1} - 90 = \xi_Z \frac{(Q_4^{n+1})^2}{A^2 2g}$$

где је:

$$CP = \Pi_{i-1}^n + BQ_{i-1}^n - MQ_{i-1}^n |Q_{i-1}^n|$$

$$CM = \Pi_{i+1}^n - BQ_{i+1}^n + MQ_{i+1}^n |Q_{i+1}^n|$$

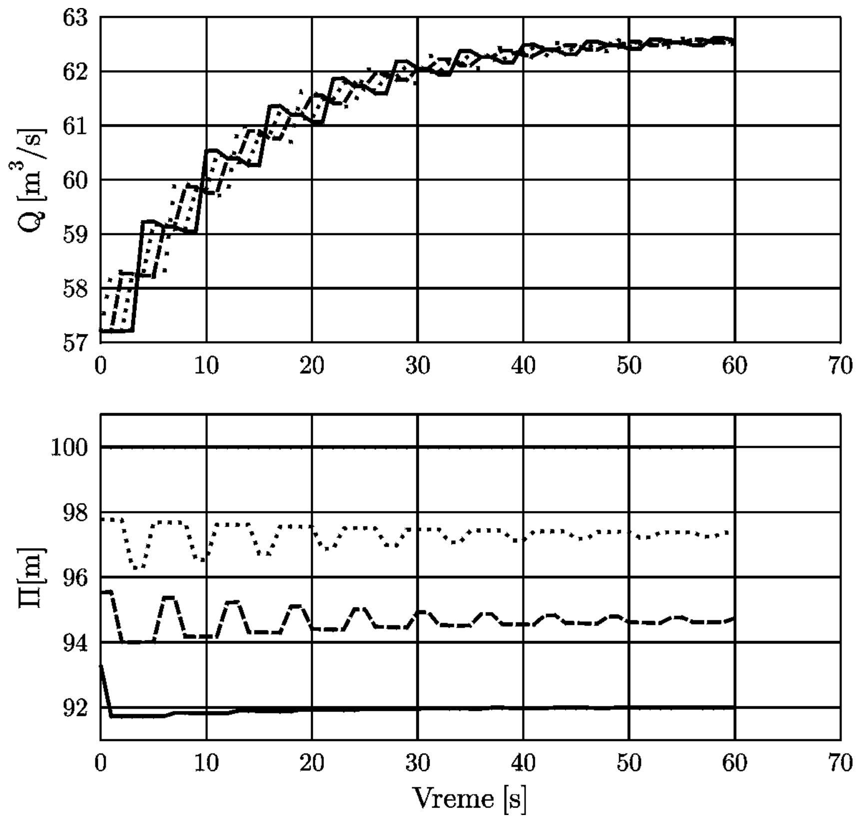
$$B = \frac{a}{gA} = 1442 \qquad M = \frac{\lambda \Delta x}{2gDA^2} = 680$$

Резултати

Рачунато је са временским кораком $\Delta t = 0.2$ с, а издвојени су подаци на размаку од $\Delta t' = 1$ с, и у пресецима на растојању $\Delta x = 1000$ м.

t [s]	Π_1 [m]	Q_1 [l/s]	Π_2 [m]	Q_2 [l/s]	Π_3 [m]	Q_3 [l/s]	Π_4 [m]	Q_4 [l/s]
0	100	57.2	97.78	57.2	95.53	57.2	93.30	57.2
1	100	57.2	97.78	57.2	95.53	57.3	91.74	58.2
2	100	57.2	97.78	57.2	94.03	58.2	91.74	58.3
3	100	57.4	96.30	58.2	94.03	58.2	91.74	58.2
4	100	59.0	96.30	58.2	94.01	58.2	91.74	58.2
5	100	59.1	97.51	59.1	94.01	58.3	91.74	58.2
6	100	59.1	97.69	59.1	95.36	59.1	91.75	58.2
7	100	59.1	97.68	59.0	95.36	59.2	91.83	59.9
8	100	59.0	97.68	59.0	94.20	59.7	91.84	59.8
9	100	59.3	96.55	59.7	94.20	59.8	91.84	59.8
10	100	60.2	96.55	59.7	94.19	59.7	91.83	59.7
11	100	60.4	97.60	60.4	94.19	59.8	91.84	59.6
12	100	60.3	97.60	60.3	95.22	60.3	91.85	59.6
13	100	60.3	97.61	60.3	95.22	60.3	91.90	60.9

Протицај у новом устаљеном течењу, $Q_1 = 62.6$ л/с, није достигнут ни после 13 секунди. Како се протицај мења даље, и какве су промене пијезометарске коте приказано је на следећим дијаграмима.

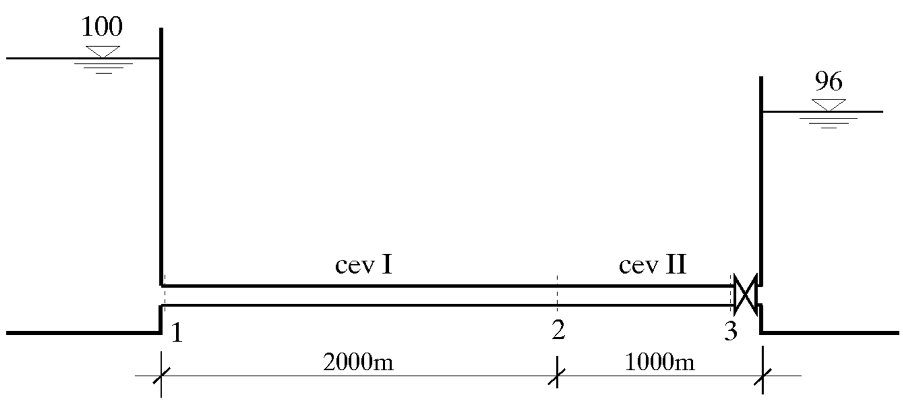

Q [m^3/s]
63
62
61
60
59
58
57
0
10
20
30
40
50
60
70
Π[m]
100
98
96
94
92
Vreme [s]

Задатак 14

11.јун 1995./1

На крају цевовода који спаја два резервоара (нивои $\Pi_1 = 100$ м, $\Pi_2 = 96$ м, кота цевовода $Z_T = 80$ м), налази се затварач делимично отворен ($\xi_z = 25$). Цевовод чине две цеви следећих карактеристика: цев I: $L_1 = 2000$ м, $a_1 = 1000$ м/с, $D_1 = 200$ мм, $\lambda_1 = 0.028$; цев II: $L_2 = 1000$ м, $a_2 = 500$ м/с, $D_2 = 200$ мм, $\lambda_2 = 0.022$.

Затварач се нагло притвори, тако да коефицијент локалног губитка постаје $\xi_1 = 100$, и тако остаје. Срачунати промене притиска, пијезометарске коте и протицаја у пресеку узводно од затварача током прве 4 секунде.



Решење:

Устаљено течење

У почетном тренутку претпоставља се устаљено течење у цевоводу, и почетни протицај се добија из Бернулијеве једначине

$$100.00 = 96.00 + \frac{v^2}{2g}\left(\lambda_1\frac{L_1}{D} + \lambda_2\frac{L_1}{D} + \xi_z\right) \tag{14.1}$$

$$v_0 = 0.434\frac{m}{s} \qquad Q_0 = 0.0136\frac{m^3}{s}$$

Математички модел хидрауличког удара

Математички модел хидрауличког удара већ је приказан у претходном задатку. Овде ће се само дефинисати гранични услови карактеристични за овај задатак.

$$\Pi(0,t) = 100 \qquad \Pi(L,t) = 96 + \xi_z\frac{v_3^2}{2g}$$

Параметри

Пре него што се крене у прорачун параметара, морају се дефинисати просторни и временски корак. Због различите брзине пропагације таласа притиска за цев I и II, усвајањем истог просторног корака за обе цеви добија се различити временски корак (што није згодно за прорачун). Зато се у овом случају усваја фиксан временски корак $\Delta t = 2s$. Просторни корак Δx се тако добија различит за цеви I и II:

$$\Delta x_1 = a_1\Delta t = 2000m \qquad \Delta x_2 = 1000m$$

Параметри B и M су дакле

$$B_I = \frac{a_1}{g\ A} = 3246 \qquad B_{II} = 1623$$

$$M_I = \frac{\lambda_1\Delta x_1}{2gDA^2} = 14474 \qquad M_{II} = 5686$$

$$\Delta t = 2s \qquad \Delta x_1 = a_1\Delta t = 2000m$$

$$\Delta x_2 = 1000m$$

Нумерички модел хидрауличког удара

Пресек 1

Пресек 1 представља гранични пресек, па се у њему комбинује једначина која важи дуж негативне карактеристике од тачке $(2, n)$ до тачке $(1, n+1)$ и једначина којом је дефинисан гранични услов на узводном крају

$$\Pi_1^{n+1} = 100m \tag{14.2}$$

$$Q_1^{n+1} = \frac{\Pi_1^{n+1} - CM_2}{B_I} \tag{14.3}$$

где је

$$CM_2 = \Pi_2^n - B_I Q_2^n + M_I Q_2^n |Q_2^n|$$

Пресек 2

Водити рачуна да пресек 2 представља гранични пресек између цеви различитих карактеристика, што значи да су параметри у једначинама позитивне и негативне карактеристике (које се секу у том пресеку) различити.

$$Q_2^{n+1} = \frac{CP_1 - CM_3}{B_I + B_{II}} \tag{14.4}$$

$$\Pi_2^{n+1} = CP_2 - B_I Q_2^{n+1} \tag{14.5}$$

$$CP_1 = \Pi_1^n + B_I Q_1^n - M_I Q_1^n |Q_1^n|$$

$$CM_3 = \Pi_3^n - B_{II} Q_3^n + M_{II} Q_3^n |Q_3^n|$$

Пресек 3

Једначина која важи дуж позитивне карактеристике од тачке $(2, n)$ до тачке $(3, n+1)$ комбинује се са напред дефинисаним граничним условом на низводном крају:

$$\Pi_3^{n+1} = CP_2 - B_{II} Q_3^{n+1} \tag{14.6}$$

$$\Pi_3^{n+1} = 96.00 + \xi_z \frac{Q_3^{n+1}|Q_3^{n+1}|}{2gA^2} \tag{14.7}$$

Резултати

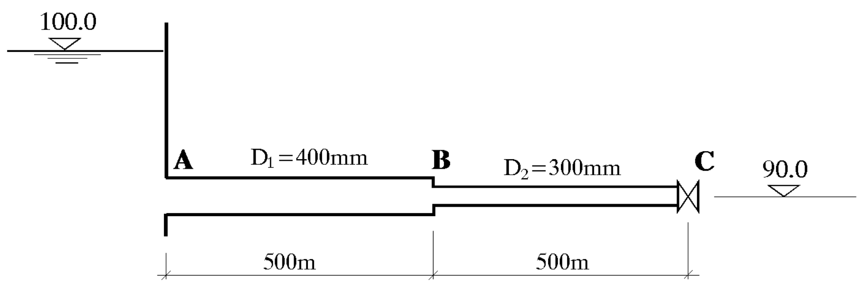
	$t < 0$	$t = 0$	$t = 2$ с	$t = 4$ с
CP_2 [м]		118.33	118.34	117.08
Π_3 [м]	96.25	96.90	96.90	96.81
$Q_3[m^3/s]$	0.0136	0.0132	0.0132	0.0125
CP_1 [м]		141.47	138.79	
CM_3 [м]		75.23	76.46	
Π_2 [м]	97.31	97.31	97.24	
$Q_2[m^3/s]$	0.0136	0.0136	0.0128	
CM_2 [м]		55.84	55.83	
Π_1 [м]	100.00	100.00	100.00	
$Q_1[m^3/s]$	0.0136	0.0136	0.0136	

Задатак 15

1. септембар 1996./1

На слици је приказан цевовод дужине 2×500 м, састављен од две цеви, пречника $D_1 = 0.4$ м и $D_2 = 0.3$ м, брзине простирања поремећаја $a_1 = a_2 = 1000$ м/с. На низводном крају цеви налази се затварач делимично затворен, тако да почетни протицај кроз цевовод износи $Q_0 = 0.007$ м^3/с. Кота нивоа воде у резервоару се не мења и износи $\Pi_R = 100$ мнм, а кота излазног пресека на затварачу је $Z_{zatv} = 90$ мнм.

Затварач се тренутно затвара у тренутку $t = 0s$. Уз претпоставку о занемарљивом трењу срачунати почетни коефицијент локалног губитка на затварачу, као и протицаје и пијезометарске коте у пресецима A, B и C, у временским тренуцима: 0 с; 0.5 с; 1.0 с; 1.5 с; 2.0 с и 2.5 с.



Решење:

Почетно стање и параметри модела

У почетном тренутку протицај износи 0.007 м^3/с. Пијезометарске коте у одговарајућим пресецима A, B и C исте су, јер се претпоставља да је трење занемарљиво.

Коефицијент локалног губитка на затварачу је $\xi_Z \approx 20000$.

Параметри нумеричког модела су за цев 1, $B_1 = 811$, а за цев 2, $B_2 = 1442$.

Нумерички модел

Како се математички модел и гранични услови могу приказати на сличан начин као у претходном задатку то се овде неће понављати исте релације.

Оно што је карактеристично у овом задатку је да је у пресеку Б спој две цеви различитих карактеристика, те да се при прорачуну зависно промењљивих величина (протицаја и пијезометарских кота) у овом пресеку мора водити рачуна о различитим параметрима B_1 и B_2 (у једначинама дуж позитивне и негативне карактеристике).

Нумерички модел са граничним условима може се приказати на следећи начин:

Пресек А:

$\Pi_A^{n+1} = 100$

$CM_B = \Pi_B^n - B_1 Q_B^n$

$$Q_A^{n+1} = \frac{1}{B_1}(100 - CM_B) \tag{15.1}$$

Пресек Б:

$CP_A = 100 + B_1 Q_A^n$

$CM_C = \Pi_C$

$$Q_B^{n+1} = \frac{CP_A - CM_C}{B_1 + B_2} \qquad \Pi_B^{n+1} = CP_A - B_1 Q_B^{n+1} \tag{15.2}$$

Пресек Ц:

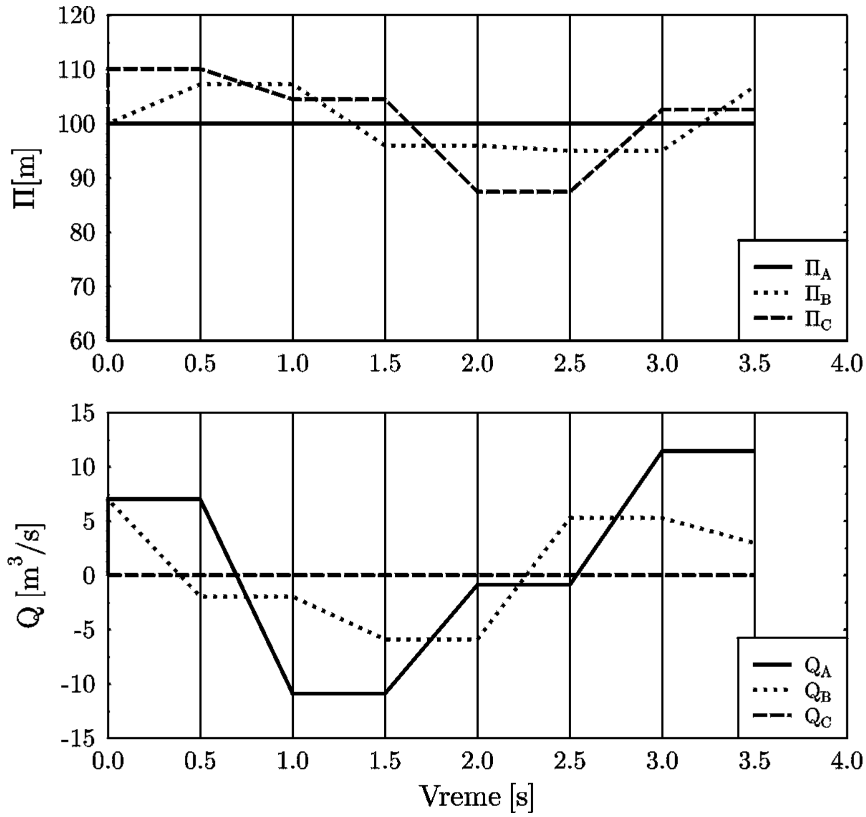
$Q_C^{n+1} = 0.0$

$$CP_B = \Pi_B^n + B_2 Q_B^n$$

$$\Pi_C^{n+1} = CP_B \tag{15.3}$$

Резултати

Пошто је затварање тренутно и практично се одиграва у почетном тренутку, следи да ће се и промена пијезометарске коте у пресеку C остварити у истом тренутку, па је зато за $t = 0$ за Π_C одмах уписана та новосрачуната вредност.



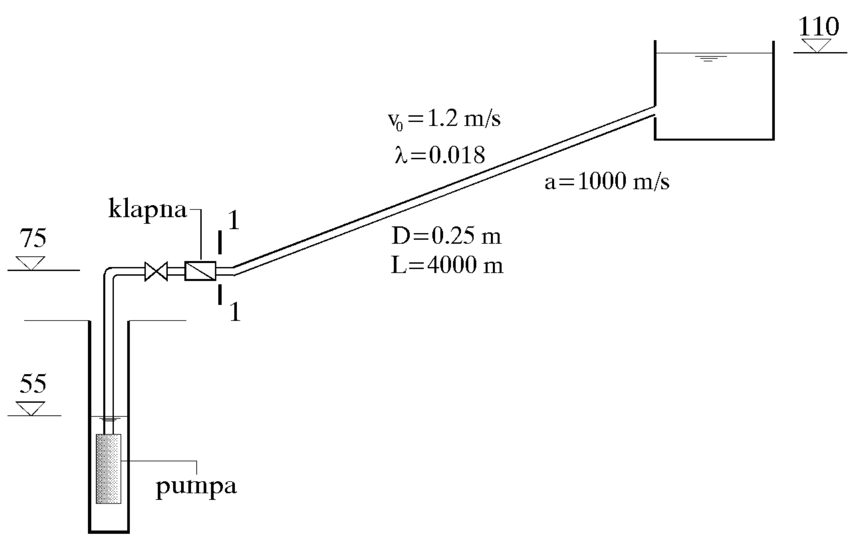
t [s]	Π_A [m]	CM [m]	Q_A [l/s]	CP [m]	CM [m]	Q_B [l/s]	Π_B [m]	Q_C [l/s]	Π_C [m]
0	100.	94.32	7.00	105.68	89.91	7.00	100.00	0.0	110.09
0.5	100.	94.32	7.00	105.68	110.09	-1.96	107.27	0.0	110.09
1.0	100.	108.86	-10.92	105.68	110.09	-1.96	107.27	0.0	104.44
1.5	100.	108.86	-10.92	91.14	104.44	-5.90	95.93	0.0	104.44
2.0	100.	100.71	-0.88	91.14	104.44	-5.90	95.93	0.0	87.42
2.5	100.	100.71	-0.88	99.29	87.42	5.27	95.01	0.0	87.42
3.0	100.	90.74	11.42	99.29	87.42	5.27	95.01	0.0	102.61
3.5	100.	90.74	11.42	109.26	102.61	2.95	106.87	0.0	102.61

Задатак 16

(није испитни задатак)

На слици је приказан подужни профил цевовода, дужине $L = 4000$ m, пречника $D = 250$ mm, од бунарске пумпе до резервоара.

Математичким моделом крутог удара проценити екстремне вредности притисака у пресеку низводно од клапне $(1-1)$, који се јављају након испада пумпе из погона.



Решење:

Претпоставља се тренутна (врло брза) промена протицаја иза пумпе.

У пресеку (1), низводно од клапне, П кота би са вредности

$$\Pi_1 = 110 + \lambda \frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = 131.14 \tag{16.1}$$

пала за вредност

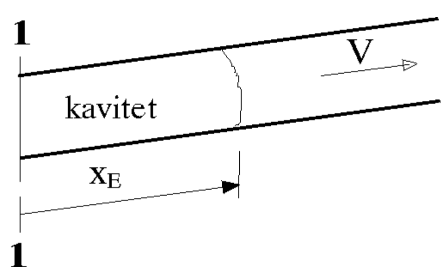
$$\Delta\Pi = -\frac{a\Delta V}{g} = 120m$$

на

$$\Pi_1 = 131.14 - 120 = 11.14m$$

Међутим јасно је да се то не може десити због положаја пресека 1 ($z_1 = 75$ m) и услова да у тој тачки притисак не може пасти испод притиска водене паре 0.02 бара (практично блиско апсолутном вакууму). Због тога се очекује да ће доћи до појаве кавитета испуњеног воденом паром непосредно низводно од клапне која ће се сама затворити чим престане течење воде.

Пијезометарска кота у пресеку 1 постаје једнака $\Pi_1 = 75 - 10 = 65$ м и на флуидну струју, која због инерције остаје у кретању, почиње да делује сила притиска и сила тежине. Кавитет се повећава (величина x_E означава померање границе воденог стуба) све док је брзина воденог стуба већа од нуле.



Кад брзина постане негативна кавитет почиње да се смањује, а нестаје када x_E постане нула. До процене повећања притиска долази се применом једначине Жуковског са брзином воденог стуба у тренутку нестанка кавитета.

Математички модел

За усвојени модел крутог удара динамичка једначина гласи

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g}{L}(\Pi_1 - \Pi_R) - \frac{\lambda}{2D}V \mid V \mid \tag{16.2}$$

Нумерички модел

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} = -\frac{9.81}{4000.}(65. - 110.) - 0.036 V^{n+1} \mid V^n \mid \tag{16.3}$$

Усвојен је временски корак $\Delta t = 2$ с.

$$V^{n+1} = \frac{V^n - 0.22}{1 + 0.072 \mid V^n \mid}$$

$$x_E^{n+1} = x_E^n + \frac{V^n + V^{n+1}}{2}\Delta t$$

т [с]	0	2	4	6	...	16	18	20
V [м/с]	1.20	0.902	0.64	0.401	...	-0.670	-0.849	-1.008
x_E [м]	0	2.1	3.64	4.68	...	3.22	1.70	-0.16

Кавитет нестаје после 20 с. Брзина у тренутку нестанка кавитета је око 1 м/с. Повећање пијезометарске коте у пресеку 1 у истом тренутку је

$$\Delta\Pi = -\frac{a}{g}\Delta V = \frac{1000 \cdot 1.0}{9.81} = 101.9m$$

а одговарајући притисак

$$\frac{p_1}{\rho g} = 91.9m \rightarrow p_1 = 9.02 \cdot 10^5 \Pi\text{а}$$

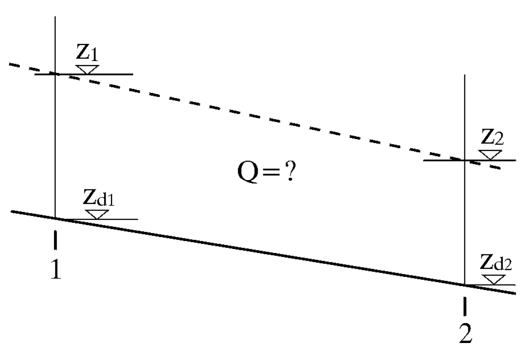
У односу на притисак у устаљеном течењу $p_{1,0} = \rho g(131.14 - 75) = 5.51 \cdot 10^5 Pa$, повећање износи $3.5 \cdot 10^5 Pa$.

Задатак 17

31. јануар 1991./2

У два попречна пресека призматичног канала правоугаоног попречног пресека (ширина дна $B = 5m$) на растојању $\Delta L = 500m$, у устаљеном течењу, измерене су коте нивоа $Z_1 = 102.31m$ и $Z_2 = 101.75m$, и коте дна $Z_{d1} = 100.00m$ и $Z_{d2} = 99.75m$. Протицај није измерен.

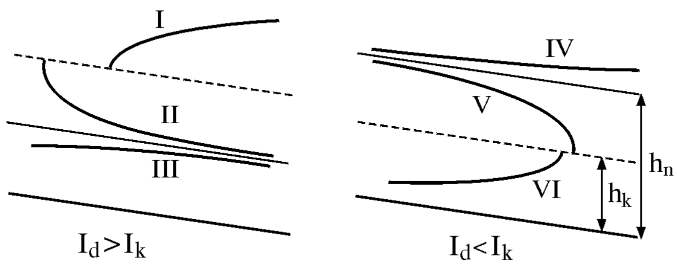
Одредити границе у којима се може наћи протицај, ако се зна да Манингов коефицијент храпавости n може имати вредности између 0.012 и 0.014 $m^{-1/3}s$.



Решење

Нагиб дна канала износи $I_D = 0.05$ %, а дубине у пресецима 1 и 2 су $h_1 = 2.31m$ и $h_2 = 2.00m$.

Анализом једначине неједноликог течења, долази се до шест могућих облика линије нивоа за $I_d > 0$, што је и приказано на следећој скици. Са скице је јасно да случају који се разматра, где је $h_1 > h_2$, одго-



варају и линија II и линија V.

На основу датих података не може се директно закључити о каквом се режиму течења ради. Зато ће се прво претпоставити да облик линије нивоа одговара линији II, односно да је реч о бурном режиму. У том случају максимални протицај који би могао да се оствари добио би се ако би било $h_2 = h_n$ (у сваком другом случају би h_2 било веће од нормалне дубине, што се види са скице, па би одговарајући протицај био мањи). За $n = 0.012$ м$^{-1/3}$с добија се протицај 20 м^3/с. Ако се провери Фрудов број у пресеку 2, добија се вредност мања од јединице, што говори да је почетна претпоставка о бурном режиму у каналу погрешна, те да је одговарајући облик линије број (V).

У случају мирног режима течења максимални протицај би се добио за $h_2 = h_{kr}$. Из услова $\mathrm{Fr} = 1$ добија се $Q = 44.3m^3/s$.

Овом протицају и Манинговом коефицијенту храпавости $n = 0.012m^{-1/3}/s$ одговара нормална дубина $h_n = 3.65m$. Решавањем једначине неједноликог течења

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{I_d - I_e}{1 - Fr}$$

полазећи од пресека 2, добија се дубина $h_1^{'} = 2.87m$, што је веће од 2.31 м, што значи да је протицај сигурно мањи.

Даље се бира Q (мање од 44.3 m^3/s), тако да се решавањем једначине неједноликог течења у призматичним каналима, добије да је $h_1 \approx 2.31m$.

За $n = 0.012m^{-1/3}s$ добија се $Q \approx 30m^3/s$, док се за $n = 0.014m^{-1/3}s$ добија $Q \approx 26.4m^3/s$, па се закључује

$$26.4\frac{m^3}{s} \leq Q \leq 30\frac{m^3}{s}$$

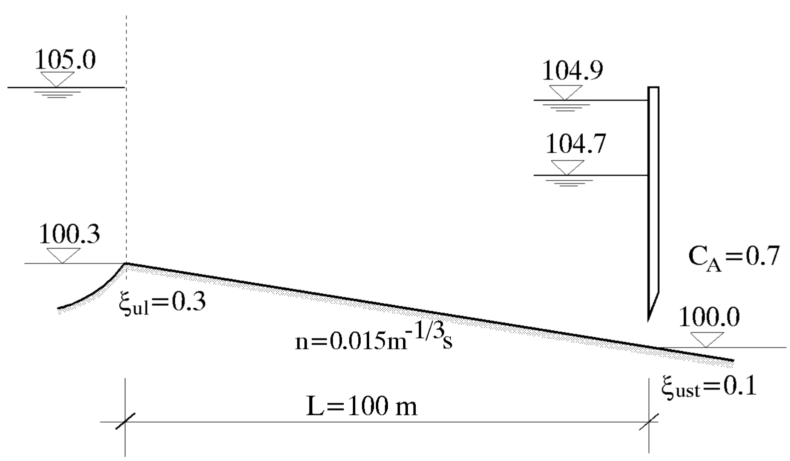
Задатак 18

10.новембар 1991./2

На низводном крају правоугаоног канала, ширине дна $b = 5m$, дужине $L = 100m$, налази се устава којом се одржава ниво у границама од 104.70 до 104.90 м.

У којим границама се креће протицај, а у којим отвор уставе, ако се зна следеће:

> Кота нивоа у узводном језеру је непроменљива и једнака је 105.00 м. Кота дна канала на улазу је 100.30 м, а на излазу је 100.00 м. Коефицијент локалног губитка на улазу је $\xi_{ul} = 0.3$, а на устави $\xi_{ust} = 0.1$. Истицање је непотопљено. Коефицијент контракције код истицања испод уставе је $C_A = 0.7$, а Манингов коефицијент храпавости облоге канала је $n = 0.015m^{-1/3}s$.



Решење

Да се у каналу остварује буран режим течења, на улазу у канал би се формирала критична дубина од 2.848 м, што одговара протицају од око 75 м^3/с. Како се из Шези-Манингове једначине (за $I_e = I_d$) добија нормална дубина већа од критичне, то се може закључити да је у целом каналу режим миран.

Посматра се прво случај када је ниво испред уставе 104.7 м. Због релативно мале дужине канала за прву оцену протицаја занемариће се губитак на трење и из Бернулијеве једначине за пресеке у језеру и узводно од уставе:

$$105.00 = 104.70 + \frac{Q^2}{2gB^2(4.7)^2}(1+\xi_{ul}) \tag{18.1}$$

добија се $Q \approx 50m^3/s$.

Узимањем у обзир трења и решавањем једначине неједноликог течења у призматичним каналима, за гранични услов $h(100) = 4.7m$ и за различите протицаје (у области око 50 м^3/с) добија се решење. Одговарајући протицај у овом случају је 45 м^3/с и представља Q_{max}, а линија нивоа приказана је у следећој табели

x [м]	0	20	40	60	80	100
дубина [м]	4.422	4.477	4.533	4.589	4.644	4.700
ниво [м]	104.722	104.717	104.713	104.709	104.704	104.700

Слично се за ниво 104.90 добије рачунато из Бернулијеве једначине са занемареним трењем, $Q \approx 30m^3/s$, односно, одговарајуће $Q = 27m^3/s = Q_{min}$.

Линија нивоа у овом случају је

x [м]	0	20	40	60	80	100
дубина [м]	4.607	4.665	4.724	4.783	4.841	4.900
ниво [м]	104.907	104.905	104.904	104.903	104.901	104.900

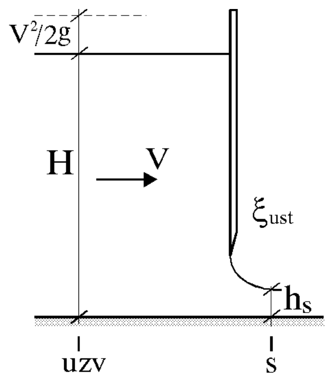
Истицање испод уставе

Бернулијева једначина за пресек (узв) испред уставе и пресек (s) vena contracta

$$H + \frac{V^2}{2g} = h_s + (1+\xi_{ust})\frac{Q^2}{2gB^2h_s^2} \tag{18.2}$$

$$Q = 45m^3/s \qquad H + \frac{V^2}{2g} = 104.887m$$

$$h_s = 1.094m \qquad \longrightarrow u = \frac{h_s}{0.7} = 1.56m$$



Односно,

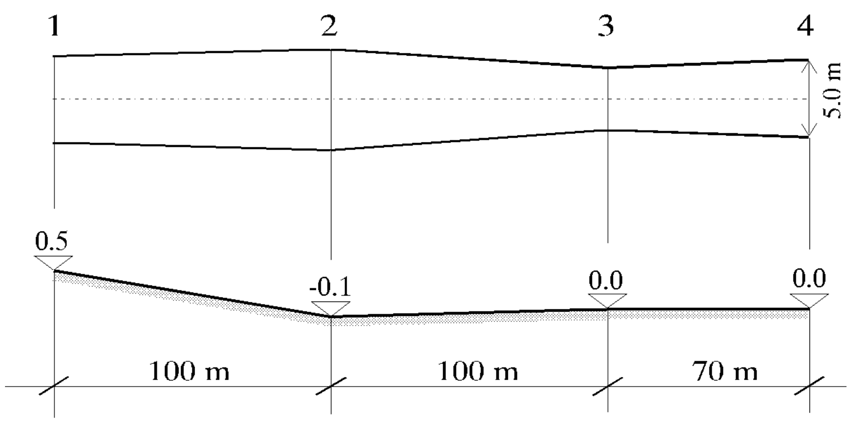
$$Q = 27m^3/s \qquad H + \frac{V^2}{2g} = 104.962m$$

$$h_s = 0.613m \qquad \longrightarrow u = \frac{h_s}{0.7} = 0.88m$$

Задатак 19

24.септембар 1995./2

Посматра се деоница правоугаоног, **непризматичног** канала чији су основа и подужни пресек дати на скици, а коте дна и ширине канала у карактеристичним пресецима у табели



Пресек	1	2	3	4
Кота дна [м]	0.5	-0.1	0.0	0.0
ширина [м]	5.5	6.0	4.0	5.0

Математичким моделом за устаљено течење у интегралном облику, за задато Δx, одредити коту нивоа у попречном пресеку (1), за протицај $Q = 20$ м^3/с и ниво у пресеку (4) $Z_4 = 2.0$ м. Претпоставити да је коефицијент тангенцијалног напона константан на целој деоници и једнак, $C_\tau = 0.004$, као и да услови узводно од пресека (1) не утичу на течење на посматраној деоници.

Решење

Математички модел

Користиће се енергетска једначина облика

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{V^2}{2g}+Z\right)+\frac{1}{2g}C_\tau\frac{V^2}{R}=0 \tag{19.1}$$

уз гранични услов $Z_4(x=270m)=2.0m$.

Нумерички модел

Нумерички модел И реда тачности је облика

$$Z_k+\frac{V_k^2}{2g}=Z_{k+1}+\frac{V_{k+1}^2}{2g}+C_\tau\frac{V_{k+1}^2}{2gR_{k+1}}\Delta x \tag{19.2}$$

где се величине на десној страни могу срачунати експлицитно.

У пресеку (4) је мирно течење, јер је $\mathsf{Fr}<1.0$, тако да прорачун може да иде од пресека (4) узводно. Одређивање нивоа у узводном пресеку, Z_3:

$$E_4=Z_4+\frac{V_4^2}{2g}=2.0+0.20=2.20m$$

$$\Delta E_{3-4}=C_\tau\frac{V_4^2}{2gR_4}\Delta x_{34}=0.04m \qquad E_3=E_4+\Delta E_{3-4}$$

Из једначине

$$E_3=2.24m$$

односно,

$$(Z_{d3}+h_3)+\left(\frac{20}{B_3h_3}\right)^2\frac{1}{2g}=2.24m$$

одређује се дубина, $h_3=1.88m$, и ниво, $Z_3=1.88m$.

На исти начин добијају се енергије, $E_2=2.39m$ и $E_1=2.42m$, дубине, $h_2=2.39m$ и $h_1=1.68m$ и нивои, $Z_2=2.29m$ и $Z_1=2.18m$.

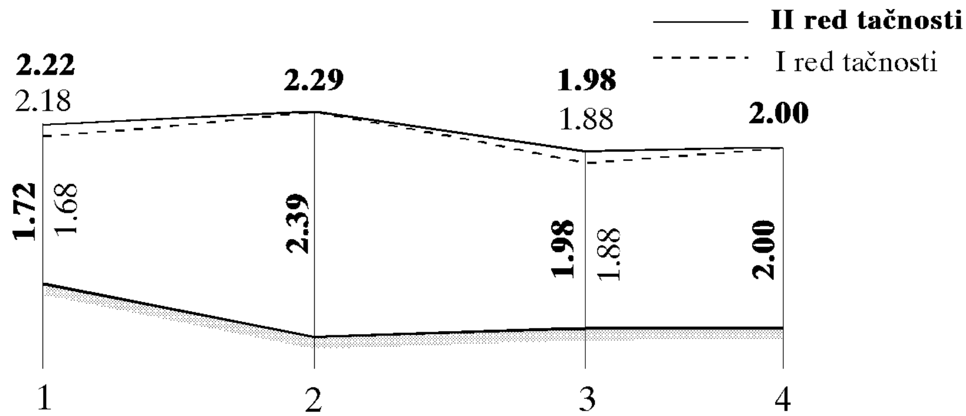
Исти задатак се може решити и методом другог реда тачности

$$Z_k+\frac{V_k^2}{2g}=Z_{k+1}+\frac{V_{k+1}^2}{2g}+\frac{1}{2}\left(C_\tau\frac{V_{k+1}^2}{2gR_{k+1}}+C_\tau\frac{V_k^2}{2gR_k}\right)\Delta x \tag{19.3}$$

и тада би резултат био:

Пресеци	1	2	3	4
Енергија	2.45	2.39	2.30	2.20
Ниво	2.22	2.29	1.98	2.00
Дубина	1.72	2.39	1.98	2.00

Ово је свакако тачније решење, али захтева нешто више рачунања. Права предност ове методе може се видети када се прорачун уради са нешто мањим временским кораком, рецимо са $\Delta x = 25m$.

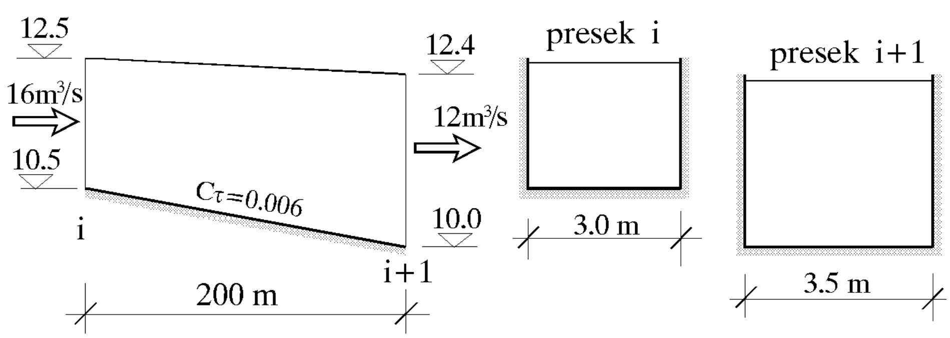


Задатак 20

4. септембар 1995./2

Посматра се деоница правоугаоног, **непризматичног** канала између два попречна пресека (i) и ($i+1$). Стање релевантних величина у тренутку t_n приказано је на скици. На деоници $[x_i, x_{i+1}]$ претпоставити линеарну промену свих величина.

Срачунати силе које делују на масу флуида између пресека, као и промену количине кретања те масе у интервалу $[t_n, t_n + \Delta t]$, где је $\Delta t = 20s$, до које доведу импулси срачунатих сила. (Поглавље 2, секција 2.2, Бележака "Отворени токови").



Решење:

Улазне величине

пресеци	B [м]	h [м]	A[м^2]	V [м/с]
i	3.0	2.0	6.0	2.67
$i+1$	3.5	2.4	8.4	1.43

Силе које делују на масу флуида између пресека i и $i+1$

И које доводе до промене количине кретања масе воде на посматраној деоници.

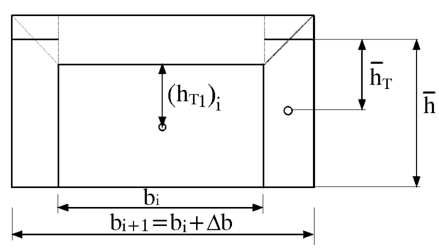
- **Инерцијалне силе** (протицај количине кретања кроз површину која ограничава контролну запремину)

$$I = [(\rho v^2 A)_i - (\rho v^2 A)_{i+1}] = 10^3[2.67^2 \cdot 6.0 - 1.43^2 \cdot 8.4] = 25.5kN$$

- **Силе притиска** у правцу тока
  - Силе притиска у пресецима i и $i+1$

$$P_1 = \rho g[(S_1)_i - (S_1)_{i+1}] = 10^3 \cdot 9.81(1 \cdot 6 - 1.2 \cdot 8.4) = -40.0kN$$

  - Сила притиска на контуру, услед непризматичности канала



$$P_2 = \rho g[S_2] = \rho g\overline{h}\Delta b\frac{\overline{h}}{2} = 10^3 \cdot 9.81 \cdot 2.2 \cdot 0.5 \cdot \frac{2.2}{2} = 11.9kN$$

где је $\overline{h} = 0.5 \cdot (h_i + h_{i+1}) = 2.20m$

- **Компонента силе тежине** у правцу тока

$$G_x = G\sin\alpha = \rho g\overline{A}\Delta x\frac{\Delta z_d}{\Delta x} = 10^3 \cdot 9.81 \cdot 7.2 \cdot 200\frac{0.5}{200} = 35.1kN$$

- **Сила трења**

$$T = -\overline{\tau}\overline{O}\Delta x = -\rho\frac{1}{2}C_\tau\overline{V}^2\overline{O}\Delta x$$

где се за:

$$\overline{O} = \frac{1}{2}[O_i + O_{i+1}] = 7.65m$$

$$\overline{V} = \frac{1}{2}[V_i + V_{i+1}] = 2.05m$$

добија:

$$T = -20.0kN$$

Промена количине кретања масе

флуида између пресека i и $i+1$ у интервалу $\Delta t = 20s$:

$$(I+P_1+P_2+G\sin\alpha+T)\Delta t = (25.5-40.0+11.9+35.1-20.0)\cdot 20 = 250\cdot 10^3 kg\frac{m}{s}$$

Ако маса флуида на деоници између пресека (i) и $(i+1)$, износи:

$$m = \rho\overline{A}\Delta x = 1000.\cdot 7.2\cdot 200. = 1.44\cdot 10^6 kg$$

онда је очекивана промена брзине у посматраном интервалу једнака:

$$\Delta V = \frac{250\cdot 10^3}{1.44\cdot 10^6} = 0.174\frac{m}{s}$$

Задатак 21

26. август 1991./2

[1] У призматичном широком правоугаоном каналу, ширине 12 м, дужине 10 км, са нагибом дна $I_d = 0.008$, храпавошћу облоге $n = 0.012$ м$^{-1/3}$с, долази до неустаљеног струјања. На узводном крају канала протицај се мења по следећем закону

време [с]	0.0	600	1200	1800	3000
протицај [м^3/с]	20.0	25.0	20.0	20.0	20.0

Између задатих тачака претпоставља се линеарна промена протицаја. Користити модел кинематичког таласа, тј. једначину континуитета и претпоставку о једнозначној вези протицаја и дубине у пресеку. Нумерички модел извести из једначине континуитета у следећем облику:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \tag{21.1}$$

где је $c \approx 1.5V_0$, брзина простирања таласа, а V_0 брзина воде при протицају 20 м^3/с.

Срачунати промену протицаја и дубине у најнизводнијем пресеку канала ($x = 10$ км).

За прорачун користити комбинацију параметара за коју се сматра да даје најбоље резултате:

- $\Delta x = 1000m$, $\Delta t = 200s$,
- $\Delta x = 2000m$, $\Delta t = 200s$,
- $\Delta x = 2000m$, $\Delta t = 300s$,

[1] Задатак није идентичан оном који је био на испиту.

Решење

Почетни услов

Почетни протицај је 20 м^3/с. Дубина у целом каналу је константна и једнака нормалној дубини. Из Chezy-Manning-ове једначине ($I_e = I_d$), уз претпоставку широког правоугаоног канала добија се

$$h_{poc} = (\frac{Qn}{B\sqrt{I_d}})^{3/5} = 0.407m$$

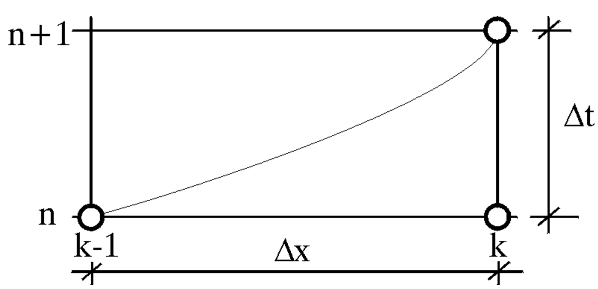
Нумерички модел

$$\frac{h_k^{n+1} - h_k^n}{\Delta t} + c\frac{h_k^n - h_{k-1}^n}{\Delta x} = 0 \qquad (21.2)$$

Изабрана нумеричка шема је експлицитна, тј дубина на наредном временском нивоу се добија директно из једначине

$$h_k^{n+1} = h_k^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(h_k^n - h_{k-1}^n) \qquad (21.3)$$

Овде се по услову задатка усваја да је брзина простирања таласа c константна. (У општем случају није константа и мора се у сваком кораку прерачунавати).



Брзина пропагације таласа c је

$$c \approx 1.5V_0 = 1.5\frac{20}{0.407 \cdot 12} = 6.142m/s$$

Усвојена нумеричка шема је стабилна само ако је задовољен следећи услов:

$$Cr = c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

За прву комбинацију параметара Δx и Δt добијено је $Cr_1 = 1.23$, за другу $Cr_2 = 0.614$ и за трећу $Cr_3 = 0.921$.

Усвојена је трећа комбинација $\Delta x = 2000m$ и $\Delta t = 300s$ (задовољава услов стабилности, а Cr је најближи јединици).

И друга комбинација задовољава услов стабилности. На основу датих података не може се рећи која је од ове две комбинације ближа природи, али се засигурно зна да комбинација 3 даје решење које је ближе аналитичком ресењу једначине (21.1).

Резултати прорачуна

У наредној табели приказани су резултати прорачуна (протицаји су у м^3/с, а дубине у м).

$t[s]$	Q_0	h_0	Q_{2km}	h_{2km}	Q_{4km}	h_{4km}	…	Q_{10km}	h_{10km}
0	20.00	0.407	20.00	0.407	20.00	0.407	…	20.00	0.407
300	22.50	0.437	20.00	0.407	20.00	0.407	…	20.00	0.407
600	25.00	0.465	22.30	0.435	20.00	0.407	…	20.00	0.407
900	22.50	0.437	24.78	0.463	22.11	0.432	…	20.00	0.407
1200	20.00	0.407	22.68	0.439	24.57	0.461	…	20.00	0.407
1500	20.00	0.407	20.21	0.410	22.82	0.441	…	20.00	0.407
1800	20.00	0.407	20.02	0.407	20.41	0.412	…	21.65	0.427
2100	20.00	0.407	20.00	0.407	20.05	0.408	…	23.95	0.454
2400	20.00	0.407	20.00	0.407	20.00	0.407	…	23.11	0.444
2700	20.00	0.407	20.00	0.407	20.00	0.407	…	20.97	0.419
3000	20.00	0.407	20.00	0.407	20.00	0.407	…	20.21	0.410

Промене протицаја и дубина у најнизводнијем пресеку приказане су на следећим дијаграмима.

Задатак 22

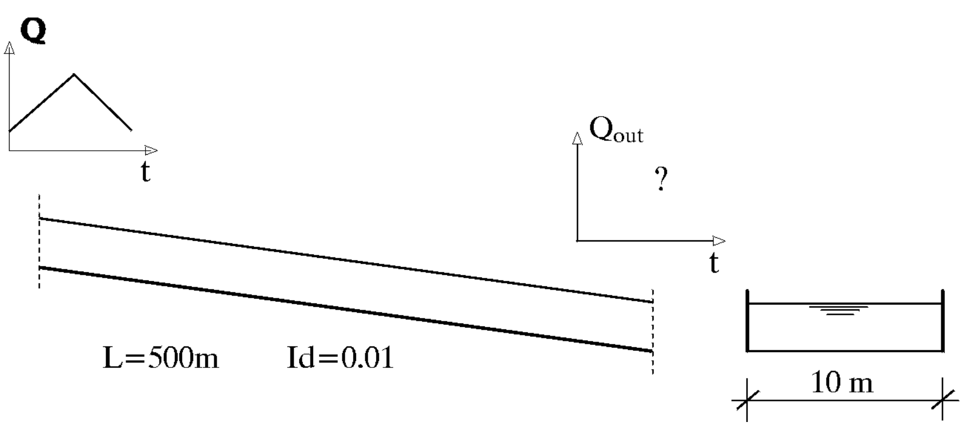
1. септембар 1996./2

Посматра се деоница широког правоугаоног канала (дужина $L = 500$ м, ширина $B = 10$ м, Манингов коефицијент храпавости $n = 0.013$ м$^{-1/3}$ с) константног нагиба дна $I_d = 0.01$. На улазном пресеку у деоницу регистрован је троугаони хидрограм

Време [с]	0	150	300
Протицај [m^3/s]	5	20	5

У излазном пресеку регистрована је само максимална вредност протицаја $Q_{out}^{max} = 15$ м^3/с.

На основу датих података одредити рачунске параметре методе Цунге Маскингам (односно, ако је $\Delta x = 100$ м, одредити колико треба да буде Δt) који дају најбоље слагање срачунатих и опажених вредности. Између вредности датих у табели претпоставити линеарну промену протицаја.



Решење

Математички модел

Веза између протицаја и дубине је једнозначна и изражава се преко Шези-Манингове јеначине за $I_e = I_d$, која за широко правоугаоно корито гласи

$$Q = \frac{1}{n} B h^{5/3} \sqrt{I_d} \tag{22.1}$$

Једначина континуитета се своди на

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{22.2}$$

Брзина пропагације таласа $c = dQ/dA$ и за широко правоугаоно корито износи $1.67V$ (водити рачуна да се брзина V мења у времену и дуж канала).

Нумеричка шема

Протицај у наредном временском тренутку у тачки $i + 1$ добија се из следећег израза

$$Q_{i+1}^{n+1} = C_1 Q_i^n + C_2 Q_j^{n+1} + C_3 Q_{i+1}^n \tag{22.3}$$

где су коефицијенти C_1, C_2 и C_3:

$$C_1 = \frac{1 + C_r - D}{1 + Cr + D} \qquad C_2 = \frac{-1 + C_r + D}{1 + Cr + D} \qquad C_3 = \frac{1 - C_r + D}{1 + Cr + D}$$

$$D = \frac{Q}{B I_d c \Delta x} = 0.0855$$

Цоурант-ов број добија се из израза

$$C_r = c \frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.877$$

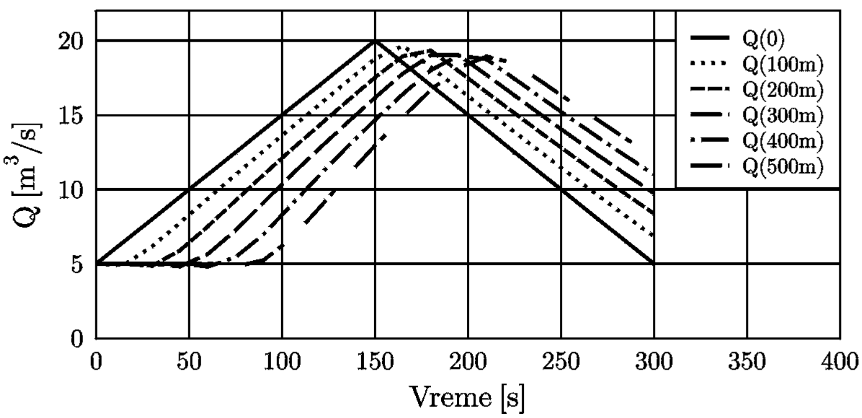
Почетни услов

За протицај $Q = 5m^3/s$ дубина у каналу се добија из Чезы-Маннинг-ове формуле ($I_e = I_d$), $h = 0.194m$.

Резултати прорачуна

Време је у следећој табели изражено у секундама, а протицај у м^3/с. Приказан је сваки други временски корак за усвојено $\Delta t = 15s$.

н	т	$Ч_0$	$Ч_{100}$	$Ч_{200}$	$Ч_{300}$	$Ч_{400}$	$Ч_{500}$
0	0	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00
2	30	8.00	6.19	4.87	5.02	5.00	5.00
4	60	11.00	9.39	7.52	5.66	4.82	5.04
6	90	14.00	12.58	10.99	9.12	6.98	5.26
8	120	17.00	15.71	14.31	12.76	10.95	8.76
10	150	20.00	18.80	17.53	16.17	14.67	12.96
12	180	17.00	18.21	19.33	19.02	18.01	16.67
14	210	14.00	15.30	16.52	17.68	18.74	18.93
16	240	11.00	12.42	13.73	14.95	16.10	17.20
18	270	8.00	9.59	11.00	12.29	13.50	14.65
20	300	5.00	6.85	8.38	9.74	11.00	12.19



У модификованој једначини Канж-Маскингам (Cunge-Muskingam) методе

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c\frac{\partial Q}{\partial x} - D'\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0 \tag{22.4}$$

улогу коефицијента дифузије има члан

$$D' = \left[\left(\theta - \frac{1}{2}\right) Cr \left(\frac{1}{2} - \Psi\right)\right] c \cdot \Delta x \tag{22.5}$$

где је $\theta = (1 - D)/2$, а $\Psi = 1/2$. Услов стабилности је да

$$0 \leq \theta \leq 1/2, \qquad \text{односно}, \qquad 0 \leq D \leq 1$$

Формално, условљава се избор Δx, док Δt треба само да задовољи услов да коефицијенти C_1, C_2 и C_3 буду позитивни.

Провера да ли је било оправдано користити методу кинематичког таласа урадиће се процењивањем величина занемарених чланова у динамичкој једначини. Користе се подаци за пресеке на почетку канала и на растојању $x = 300m$ $(\Delta x = 300m)$, као и величине у истом пресеку у размаку од 50 секунди $(\Delta t = 50s)$са дијаграма протицаја.

$$\frac{\partial h}{\partial x} \approx \frac{0.294 - 0.194}{300.} = \frac{1}{3000} \ll \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{3.40 - 2.58}{9.81 \cdot 50.} = 1.67 \cdot 10^{-3} < \frac{1}{100}$$

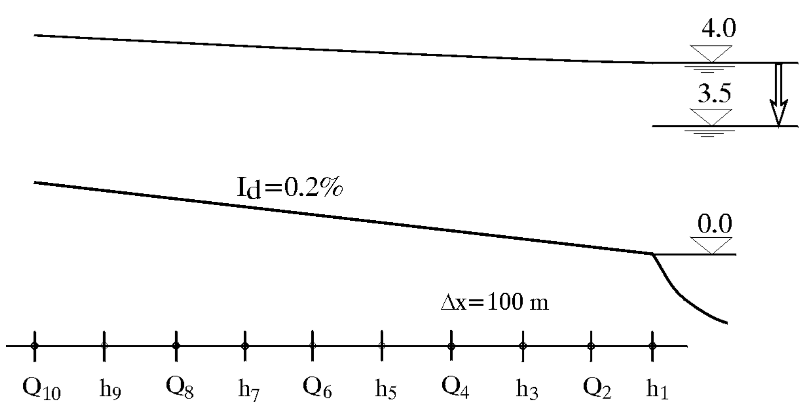
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2g}\right) \approx \frac{3.4^2 - 2.58^2}{300. \cdot 19.62} = 0.83 \cdot 10^{-3}\frac{1}{3000} < \frac{1}{100}$$

Задатак 23

27. јануар 1993./2

На слици је приказан низводни део правоугаоног канала, ширине дна $B = 3m$ и константног нагиба дна, $I_d = 0.2$ %. Манингов коефицијент храпавости износи $n = 0.012m^{-1/3}$с. Са узводне стране константно дотиче 20 м^3/с.

У почетном тренутку, у устаљеном течењу, дубина на крају канала износи 4.0 м. У врло кратком времену (један временски прираштај) дубина падне на 3.5 м. Одредити промену протицаја, у пресеку на 100 м узводно, и дубине, у пресеку на 200 м узводно. Користити математички модел дифузионог таласа и нумерички модел на смакнутој мрежи. Претпоставити да је протицај на растојању 900 м узводно, константан.



Решење

Математички модел дифузионог таласа

Једначина континуитета

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{B}\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{23.1}$$

Динамичка једначина, у којој је занемарен члан $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right)$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA(\frac{\partial h}{\partial x} - I_d) + \frac{n^2 g}{AR^{4/3}} Q \mid Q \mid = 0 \tag{23.2}$$

У почетном тренутку претпоставља се да је течење устаљено и да је

- $Q(x,0) = 20m^3/s$

Линија нивоа у устаљеном стању добија се решавањем динамичке једначине која се, ако се искористи да је $\partial Q/\partial t = 0$ своди на

$$\frac{dh}{dx} = I_d - \frac{n^2 g Q^2}{A^2 R^{4/3}} = f(h) \tag{23.3}$$

За добијање приближног решења може се користити Ојлерова метода, при чему је, због успостављеног мирног режима смер прорачуна - узводно.

$$h_k = h_{k+1} - f(h_k)\Delta x \qquad \Delta x = 100m$$

Гранични услови су:

- на низводном крају нагла промена нивоа $\Delta h = 0.5m$
- на узводном крају константан дотицај $Q_{10} = 20m^3/s$

Нумерички модел

Користи се смакнута мрежа, што значи да се протицаји и дубине не рачунају у истим пресецима.

Једначина континуитета

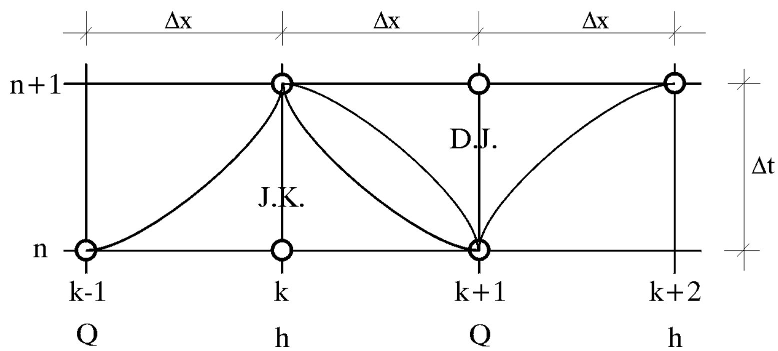
$$\frac{h_k^{n+1} - h_k^n}{\Delta t} + \frac{1}{B}\frac{Q_{k+1}^n - Q_{k-1}^n}{2\Delta x} = 0 \rightarrow h_k^{n+1} \tag{23.4}$$

Динамичка једначина

$$\frac{Q_{k+1}^{n+1} - Q_{k+1}^n}{\Delta t} + g\overline{A}^{n+1}(\frac{h_{k+2}^{n+1} - h_k^{n+1}}{2\Delta x} - I_d) + \frac{n^2 g}{\overline{A}^{n+1}(\overline{R}^{4/3})^{n+1}} Q_{k+1}^n \mid Q_{k+1}^n \mid = 0 \rightarrow Q_{k+1}^{n+1} \tag{23.5}$$

где је

$$\overline{A}^{n+1} = B\frac{1}{2}(h_{k+2}^{n+1} + h_k^{n+1})$$



$$\overline{R}^{n+1} = \frac{\overline{A}^{n+1}}{B + h_{k+2}^{n+1} + h_k^{n+1}}$$

Пошто је нумеричка шема експлицитна да би била стабилна потребно је да буде задовољен услов стабилности

$$c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

где је $c = v + \sqrt{gh}$ брзина пропагације поремећаја. За задато $\Delta x = 200m$, временски корак Δt мора бити

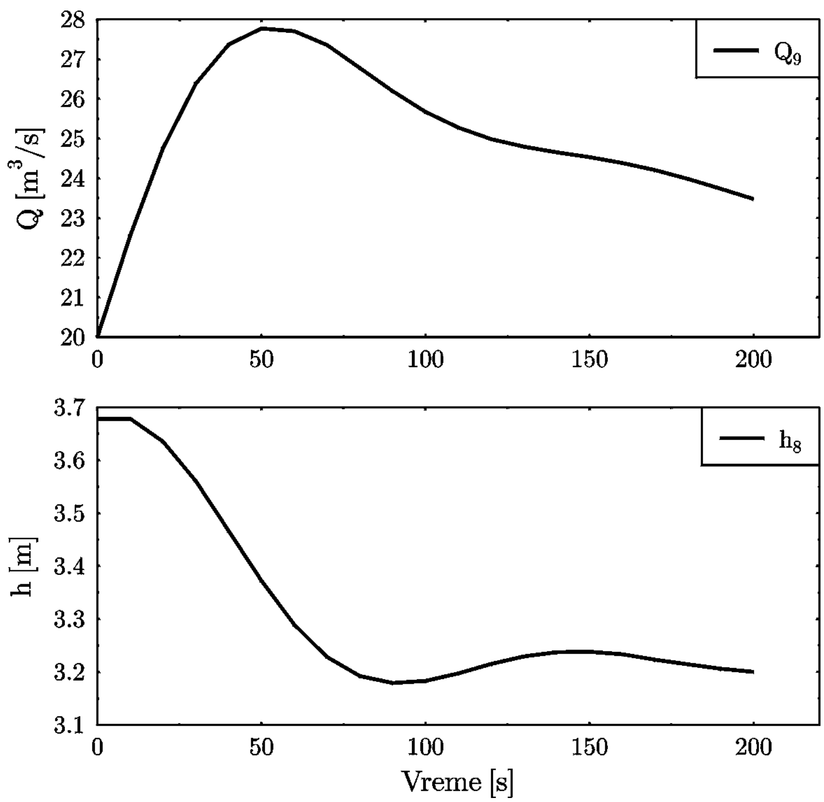
$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{(v + \sqrt{gh})_{max}} = \frac{200}{\frac{20}{12} + \sqrt{9.81 * 4}} = 12.6s$$

Усвојен је временски корак $\Delta t = 10s$

Резултати

У табели су дате вредности прорачуна до 100 с а на графицима су дате промене протицаја у пресеку 2 (Q_2) и дубине у пресеку 3 (h_3) до 200 с.

т [с]	Q_{10}	h_9	Q_8	h_7	Q_6	h_5	Q_4	h_3	Q_2	h_1
0	20.0	2.84	20.00	3.09	20.00	3.37	20.00	3.68	20.00	4.0
10	20.0	2.84	20.00	3.09	20.00	3.37	20.00	3.68	22.57	3.5
20	20.0	2.84	20.00	3.09	20.00	3.37	20.22	3.63	24.75	3.5
30	20.0	2.84	20.00	3.09	20.01	3.37	20.77	3.56	26.38	3.5
40	20.0	2.84	20.00	3.09	20.08	3.36	21.68	3.47	27.37	3.5
50	20.0	2.84	20.00	3.09	20.26	3.33	22.82	3.37	27.77	3.5
60	20.0	2.84	20.03	3.09	20.60	3.29	24.04	3.29	27.70	3.5
70	20.0	2.84	20.09	3.08	21.12	3.23	25.15	3.23	27.31	3.5
80	20.0	2.84	20.20	3.06	21.81	3.16	25.98	3.19	26.77	3.5
90	20.0	2.84	20.41	3.03	22.61	3.09	26.44	3.18	26.19	3.5
100	20.0	2.83	20.71	3.00	23.43	3.03	26.54	3.18	25.67	3.5


Q [m^3/s]
28
27
26
25
24
23
22
21
20
0
50
100
150
200
Q9
h [m]
3.7
3.6
3.5
3.4
3.3
3.2
3.1
h8
Vreme [s]

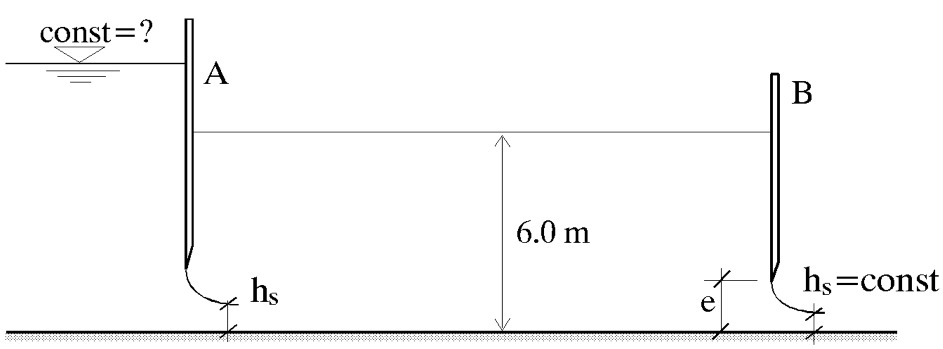
Задатак 24

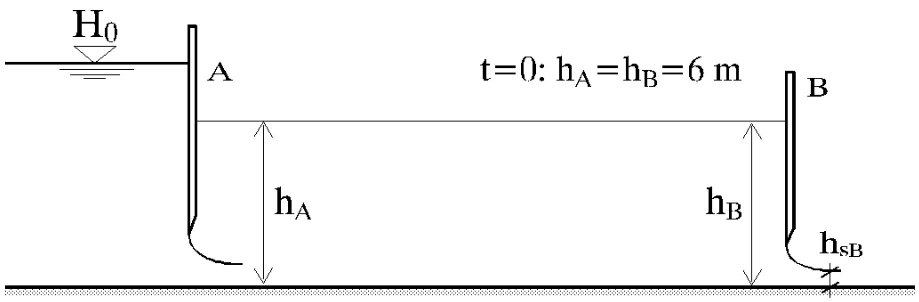
9. септембар 1993./2

Посматра се деоница правоугаоног канала ширине 3 м, дужине 200 м, између две уставе A и B. Дно канала је хоризонтално, а дубина воде је приближно константна на целој дужини и једнака 6 м. У почетном тренутку отвори обе уставе су исти ($e = 0.4m$), а течење је устаљено. Коефицијенти контракције млаза за обе уставе су једнаки ($C_A = 0.7$). Истицање испод низводне уставе је непотопљено, а коефицијент брзине је једнак ($C_V^A = 0.97$). Истицање испод узводне уставе је потопљено. Претпоставити да је пијезометарска кота у суженом пресеку флуидне струје низводно од уставе једнака коти нивоа воде у каналу, а да је коефицијент брзине једнак ($C_V^B = 0.95$).

Одредити протицај у почетном тренутку, као и ниво испред узводне уставе, који у даљим разматрањима остаје непромењен.

Узводна устава се постепено подигне на 0.60 м за 20 с. Срачунати промену нивоа и протицаја у пресеку узводно од уставе B током првих 50 с.





Решење:

Почетно стање - Устаљено течење

Ако се са h_B обележи дубина непосредно узводно од уставе Б, а са h_{sB} дубину у суженом пресеку иза уставе B, из једначине истицања испод уставе може се срачунати протицај у почетном тренутку

$$Q_0 = C_v^B C_A e b\sqrt{2g(h_B - h_{sB})} = 8.63 m^3/s$$

Брзина воде на посматраној деоници у почетном тренутку износи:

$$v_0 = 0.48 m/s$$

Ниво узводно од уставе А може се добити из једначине

$$Q_0 = C_v^A C_A e b\sqrt{2g(H_0 - h_A)} \rightarrow H_0 = 11.96m$$

Неустаљено течење

Тачка Б1

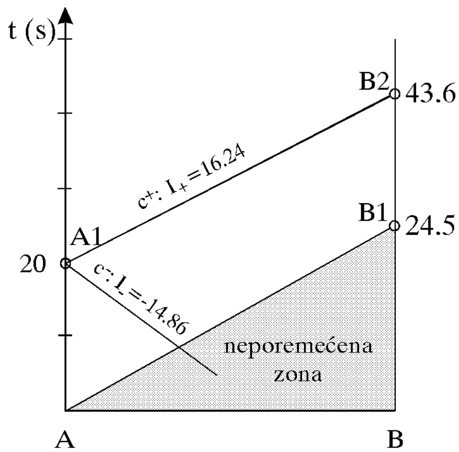
Како се поремећај изазива на узводном крају канала, карактеристика која одваја непоремећену зону од поремећене, је $(A - B1)$.

$$t_{B1} = \frac{L_{AB}}{v_0 + \sqrt{gh_0}} = \frac{200}{0.48 + 7.67} = 24.5s$$

Тачка А1

После 20 секунди отвореност узводне уставе се повећала на $e_{A1} = 0.6m$. Протицај у истом тренутку у пресеку непосредно низводно од уставе одговара протицају у тачки А1 приказаној на скици. Из граничног услова добија се релација

$$Q_{A1} = 0.95 \cdot 0.7 \cdot 3 \cdot 0.6\sqrt{2 \cdot 9.81(11.96 - h_{A1})}$$



Ово је једна једначина са две непознате Q_{A1} и h_{A1}. Друга једначина се добија из услова, $I_- = \text{const}$, која важи дуж негативне карактеристике. Карактеритика полази из непоремећене зоне (водити рачуна да је трење занемарено), па се добија:

$$I_- = v_0 - 2\sqrt{gh_0} = -14.86 = \frac{Q_{A1}}{h_{A1}b} - 2\sqrt{gh_{A1}}$$

$$h_{A1} = 6.16m \qquad Q_{A1} = 12.76m^3/s \qquad v_{A1} = 0.69m/s$$

Тачка Б2

Из тачке А1 полази позитивна карактеристика која носи низводно информацију о поремећају (промени протицаја и дубине у узводном пресеку) и стиже до низводног краја за

$$t_{B2} = 20 + \frac{L_{AB}}{v_{A1} + \sqrt{gh_{A1}}} = 43.6s$$

Дуж ове карактеристике важи

$$I_+ = v_{A1} + 2\sqrt{gh_{A1}} = 16.24 = \frac{Q_{B2}}{h_{B2}b} + 2\sqrt{gh_{B2}}$$

Пошто се тачка Б2 налази на низводној граници користи се и једначина истицања испод уставе Б

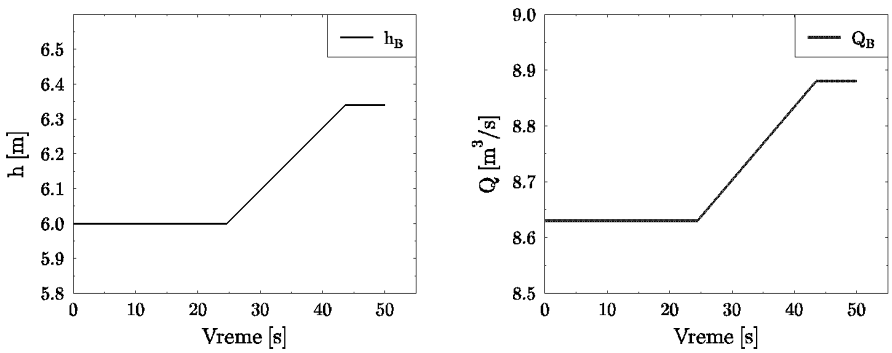
$$Q_{B2} = 0.97 \cdot 0.7 \cdot 3 \cdot 0.4\sqrt{2 \cdot 9.81(h_{B2} - 0.28)}$$

одакле се добијају дубина и протицај у тачки $B2$, у тренутку $t = 43.6s$.

$$h_{B2} = 6.34m \qquad Q_{B2} = 8.88m^3/s$$

На низводном крају, у пресеку непосредно испред уставе Б, после 43.6 с дубина и протицај неко време (око 20 секунди) остају исти као у тачки Б2, односно, док поремећај који путује из тачке ($B1$) не стигне одбијен од узводне границе (A) до уставе (B).

Промене нивоа и протицаја непосредно узводно од уставе (B) приказани су на дијаграму.

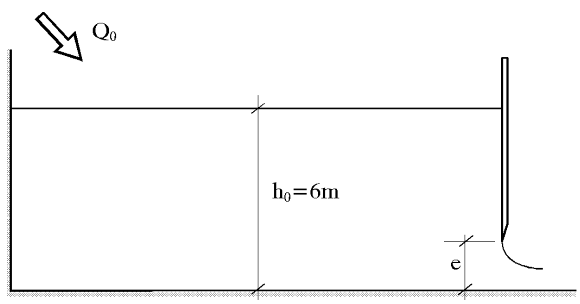


Задатак 25

11. јун 1995./2

Посматра се деоница правоугаоног канала, ширине $B = 6m$, дужине $L = 200m$. На низводном крају канала налази се устава делимично отворена (отвор уставе $e_0 = 0.3$ м, коефицијент контракције $C_A = 0.68$, коефицијент брзине $C_V = 0.96$), а на узводном крају је дефинисан константан дотицај (Q_0). Дно канала је хоризонтално, а дубина воде је приближно константна на целој дужини и једнака $h_0 = 6m$. Одредити протицај у почетном тренутку.

Отвор уставе се равномерно мења до $e = 0.15$ м, за 20 с, после чега остаје непромењен. Одредити промене протицаја и дубине у пресеку узводно од уставе током првих 60 с.



Решење

Почетно стање - Устаљено течење

Протицај у почетном тренутку добија се из једначине истицања испод уставе

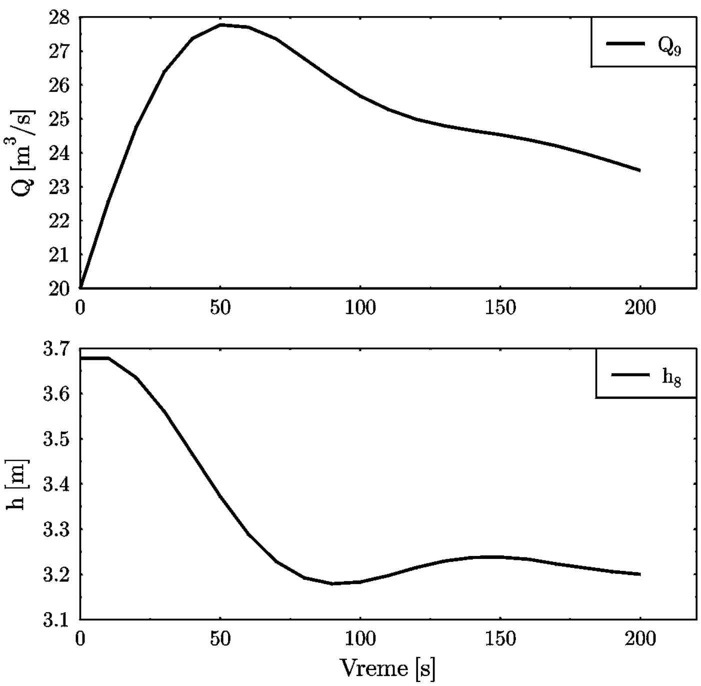
$$Q_0 = C_A C_V e_0 B \sqrt{2g}\sqrt{h_0 - C_A e_0}$$

$$Q_0 = 5.20\sqrt{6.0 - 0.204} = 12.53 m^3/s$$

Брзина флуида и брзина путовања информација у устаљеном току су

$$v_0 = 0.348 m/s \qquad \sqrt{gh_0} = 7.67 m/s$$

Неустаљено течење



Пошто се промена у ток уноси са низводне стране прво се црта негативна карактеристика $A_0 - A_1$, која представља границу између непоремећене зоне и зоне простог таласа. Положај тачке A_1 добија се на основу познатог нагиба ове карактеристике $(v_0 - \sqrt{gh_0})$:

$$t_{A_1} = \frac{200}{|0.348 - 7.67|} = 27.3 s$$

После 20 с отвореност уставе се смањи на 0.15 м. Вредности брзине (протицаја) и дубине у тачки B_0 добиће се решавањем једначине истицања испод уставе и једначине која важи дуж позитивне карактеристике која у тачку B_0 стиже из непоремећене зоне.

$$t_{B_0} = 20 s$$

$$v_{B_0} + 2\sqrt{gh_{B_0}} = v_0 + 2\sqrt{gh_0} = I_0^+ = 15.69 m/s$$

Величина I_0^+ представља вредност Римановe инваријанте за разматрану карактеристику.

$$Q_{B_0} = 2.60\sqrt{h_{B_0} - 0.102}$$

Итеративним поступком, почевши од $h_{B_0}^{(0)} \approx 6.0m$, добија се

$$Q_{B_0} = 6.386m^3/s \qquad h_{B_0} = 6.136m$$

$$v_{B_0} = 0.174m/s \qquad \sqrt{gh_{B_0}} = 7.76m/s$$

Из тачке B_0 полази само негативна карактеристика и дуж ње је вредност инваријанте

$$I_{B_0}^- = 0.174 - 2 \cdot 7.76 = -15.35m/s$$

Дубина и брзина у тачки B_1 до које стиже карактеристика из B_0 добија се комбинацијом једначине дуж те карактеристике и узводног граничног услова (понати протицај, Q_0, у том пресеку)

$$t_{B_1} = 20 + \frac{200}{|0.174 - 7.76|} = 46.4s$$

$$Q_{B_1} = 12.53m^3/s$$

$$v_{B_1} - 2\sqrt{gh_{B_1}} = -15.35$$

$$h_{B_1} = 6.27m \qquad v_{B_1} = 0.33m/s$$

Из тачке B_1 креће даље позитивна карактеристика дуж које је вредност инваријанте једнака

$$I_{B_1}^+ = 0.33 + 2 \cdot 7.84 = 16.01m/s$$

Положај тачке A_2 добија се из

$$t_{A_2} = 27.3 + \frac{200}{0.35 + 7.67} = 52.2s$$

Пошто до тачке A_2 стиже карактеристика из непоремећене зоне, као и до тачке B_0, а отвореност уставе је 0.15 м, то су брзина и протицај исти као и за тачку B_0.

Положај тачке B_2 добија се из

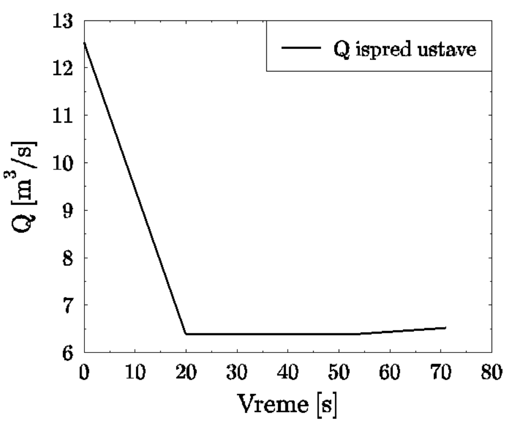
$$t_{B_2} = 46.4 + \frac{200}{0.33 + 7.84} = 70.9s$$

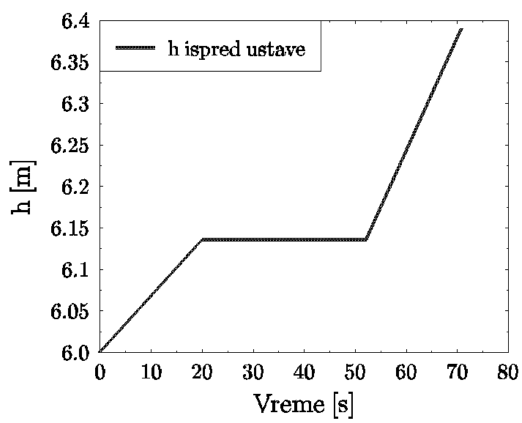
а протицај и дубина из

$$Q_{B_2} = 2.60\sqrt{h_{B_2} - 0.102}$$

$$v_{B_2} + 2\sqrt{gh_{B_2}} = 16.01$$

$$h_{B_2} = 6.39m \qquad Q_{B_2} = 6.52m^3/s$$


Q ispred ustave
Q [m^3/s]
13
12
11
10
9
8
7
6
0
10
20
30
40
50
60
70
80
Vreme [s]


h ispred ustave
h [m]
6.4
6.35
6.3
6.25
6.2
6.15
6.1
6.05
6.0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
Vreme [s]

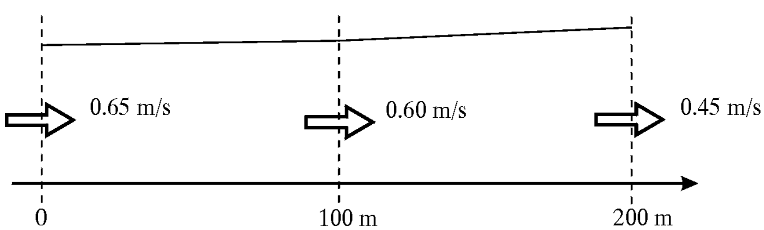
Задатак 26

2. фебруар 1994/2

У три пресека призматичног правоугаоног канала ($b = 8m$, $I_d = 0.001$, $C_\tau = 0.003$) познате су вредности дубине и брзине у тренутку t_0. Пресеци су на међусобном растојању 100 м, а течење је у позитивном смеру x осе.

$x[m]$	0.	100.	200.
х [м]	2.00	2.09	2.29
v [м/с]	0.65	0.60	0.45

Методом карактеристика без интерполација одредити стање (дубину, брзину, положај и временски тренутак) у две тачке у којима се секу карактеристике. Да ли је течење устаљено и једнолико?

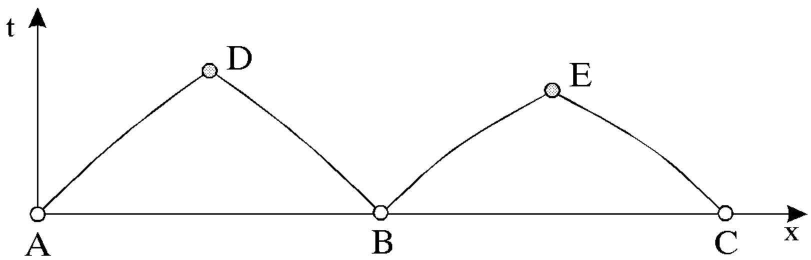


Решење:

Течење у каналу није једнолико што се може закључити из табеле са улазним подацима о брзинама и дубинама.

На дијаграму су приказане позитивне и негативне карактеристике које полазе из пресека A, B и C, и одређују положаје тачака D и E.

Тачке A, B и C су са познатим вредностима, а у тачкама D и E треба одредити стање.



Математички модел

Карактеристичан облик једначина неустаљеног течења у призматичном каналу гласи

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (v \pm c)\frac{\partial}{\partial x}\right)(v \pm 2c) + M = 0 \tag{26.1}$$

где M означава допринос трења и нагиба дна канала

$$M = \frac{1}{2} C_\tau \frac{v^2}{R} - g I_d$$

Ове две једначине се своде на еквивалентан систем од четири једначине. Следеће две

$$\frac{d(V \pm 2c)}{dt} + M = 0 \tag{26.2}$$

које важе дуж линија

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v \pm c \tag{26.3}$$

где је $c = \sqrt{gh}$ брзина простирања поремећаја посматрано у односу на флуид који се креће, док је $v \pm c$ брзина простирања поремећаја у односу на дно.

За одређивање положаја тачке D у равни ш-т користи се апроксимација једначине карактеристике првог реда, користећи познате вредности у тачкама A и B

$$\frac{x_D - x_A}{t_D - t_A} \approx v_A + c_A$$

$$\frac{x_D - x_B}{t_D - t_B} \approx v_B - c_B$$

одакле се добија $t_D = 11.1$ с, и x_D =56.4 м. На исти начин добија се положај тачке E, t_E ı 10.6 с, и x_E ı 154.5 м.

Брзина и дубина у тачки D одређују се из апроксимације динамичке једначине у карактеристичном облику

$$v_D + 2\sqrt{gh_D} = v_A + 2\sqrt{gh_A} - (t_D - t_A)M_A$$

$$v_D - 2\sqrt{gh_D} = v_B - 2\sqrt{gh_B} - (t_D - t_B)M_B$$

где је само члан M апроксимиран са тачношћу првог реда, док је остатак тачан. Изрази на левој страни представљају тзв. Риманове квази-инваријанте.

$$v_D + 2\sqrt{gh_D} = 9.61m/s$$

$$v_D - 2\sqrt{gh_D} = -8.35m/s$$

одакле се добије v_Dı 0.63 м/с, и h_D ı 2.06 м.

Када би било $M \approx 0$, онда би изрази на левој страни биле инваријанте, а брзина и дубина у тачки D биле би,

$$v_D = 0.53\text{м/с} \qquad h_D = 2.05\text{м}$$

Грешка код одређивања брзине је значајна, па члан M у овом случају не би требало занемарити. Први ред тачности апроксимације чланова M_A и M_B је сасвим довољан, што је и разумљиво, јер је M_A ı -0.00933 м/с^2.

Вредности брзине и дубине у тачки E,

$$v_E = 0.41\text{м/с} \qquad h_E = 2.22\text{м}$$

добијају се на исти начин, користећи вредности у тачкама B и C.

Иако немамо податке о брзинама и дубинама у истим пресецима, а у различитим времнским тренуцима, можемо закључити да је течење неустаљено, јер су брзине у тачкама D и E, мање од брзина у тачкама A, B и C, дакле, долази до успоравања тока. Рачунањем стања у тачки F, (налази се у пресеку карактеристика које полазе из тачака D и E) дошли би до недвосмислене потврде да је течење неустаљено.

Задатак 27

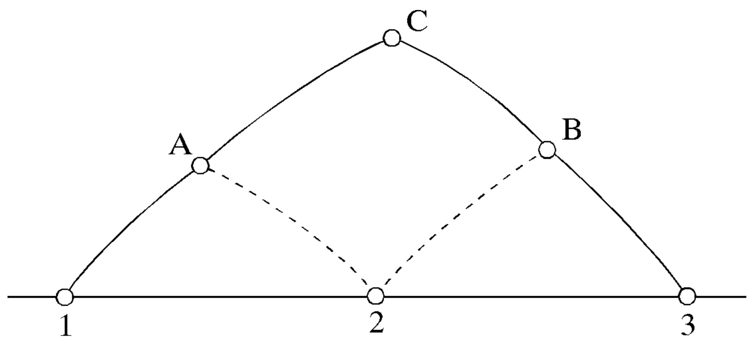
2.јули 1995./2

У правоугаоном каналу, ширине дна 6 м, нагиба дна 0.2 %, коефицијент тангенцијалног напона $C_\tau = 0.004$, у временском тренутку t_0, познате су дубине и протицаји у три пресека на међусобном растојању, $\Delta x =$ 50 м.

Пресек	1	2	3
Q [м^3/с]	2.3	1.5	1.4
h [м]	2.2	2.0	1.9

Одредити пресек и временски ниво у којима се може одредити дубина и протицај методом карактеристика без интерполација. Упоредити решења (дубину и протицај) добијена методама које се заснивају на трапезном правилу и на експлицитној методи.

Решење



За било коју од 3 тачке (A, B, C) приказане на скици, може се одредити стање на основу познатих величина у тачкама 1, 2 и 3. У наставку се поступак илуструје само за тачку C.

За прорачун дубина и брзина у тачки C користиће се познате величине у тачкама 1 и 3

Пресек i	Q_i [м^3/с]	h_i [м]	v_i [м/с]	$\sqrt{gh_i}$ [м/с]	R_i [м]	I_i [м/с]	$-M_i$ [м/с^2]
1	2.3	2.2	0.174	4.65	1.27	9.47	0.0194
3	1.4	1.9	0.123	4.32	1.16	-8.56	0.0194

Експлицитна метода

Положај тачке C

добија се у пресеку позитивне карактеристике $1-C$ и негативне карактеристике $3-C$. Преласком на коначне прираштаје добија се

$$\frac{x_C - x_1}{\Delta t_C} = v_1 + \sqrt{gh_1}$$

$$\frac{x_C - x_3}{\Delta t_C} = v_3 - \sqrt{gh_3}$$

$$x_1 = 0 \qquad\qquad x_3 = 100m$$

$$x_C = 4.82\Delta t$$

$$x_C = 100 - 4.24\Delta t$$

$$x_C = 53.5m \qquad\qquad \Delta t_C = 11.08s$$

Брзина и дубина у тачки C

добија се решавањем једначина које важе дуж карактеристика $1-C$ и $3-C$

$$v_c + 2\sqrt{gh_c} = (I_+)_1 + \Delta t(-M_1)$$

$$v_c - 2\sqrt{gh_c} = (I_-)_3 + \Delta t(-M_3)$$

Добија се као решење

$$v_c = 0.47m/s \qquad\qquad h_c = 2.07m$$

Трапезно правило

У овом случају, за нумеричку интеграцију члана $(-M)$, који представља утицај нагиба дна и трења, користи се трапезно правило

Положај тачке

$$\frac{x_C}{\Delta t} = \frac{v_1 + v_C}{2} + \frac{1}{2}(\sqrt{gh_1} + \sqrt{gh_C})$$
$$\frac{x_C - 100}{\Delta t} = \frac{v_3 + v_C}{2} - \frac{1}{2}(\sqrt{gh_3} + \sqrt{gh_C})$$

Као решење се добија

$$\Delta t_C = 11.06s \qquad\qquad x_C = 55.3m$$

Вредности у тачки C се ипак неће значајније променити, јер је вредност $\Delta t(-M_C) = 0.21$, што је практично исто као и у тачкама 1 и 3.

Задатак 28

септембар 1992./2

У правоугаоном каналу, ширине $b = 5$ м, на делу са приближно хоризонталним дном, измерене су дубине испред и иза хидрауличког скока, $h_1 = 0.5$ м,и $h_2 = 2.0$ м. Под претпоставком да је хидраулички скок стабилан одредити протицај.

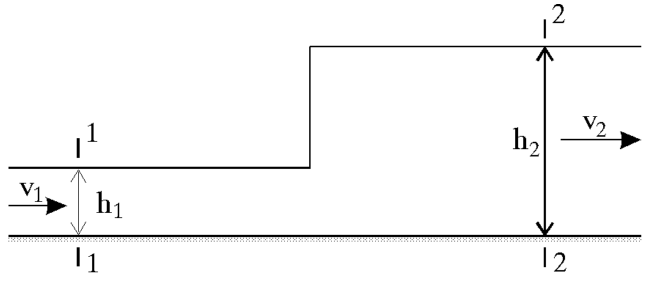
Некаквим маневром на низводном крају канала, низводна дубина се повећа за 0.2 м, док брзина и дубина у узводном пресеку остају исте.

Одредити:

- Којом брзином се помера хидраулички скок,
- протицај у покретном координатном систему, и
- брзину у односу на дно у низводном пресеку.

Решење

Стабилан хидраулички скок



Једначина континуитета

$$\rho v_1 h_1 b = \rho v_2 h_2 b \tag{28.1}$$

Динамичка једначина

$$\frac{1}{2}\rho g h_1^2 b + \rho h_1 b v_1^2 = \frac{1}{2}\rho g h_2^2 b + \rho h_2 b v_2^2 \tag{28.2}$$

Заменом једначине континуитета у динамичку добија се

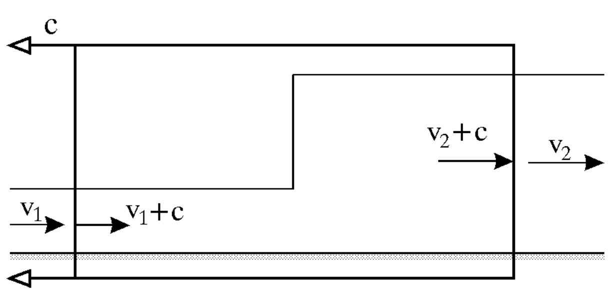
$$v_1^2 = g h_2 \frac{h_1 + h_2}{2h_1} \rightarrow v_1 = 7.00 m/s$$
$$v_2 = 1.75 m/s$$

Протицај каналом је

$$Q = v_1 h_1 b = 7.0 \cdot 0.5 \cdot 5.0 = 17.5 m^3/s$$

Покретан хидраулички скок

Уводи се покретан координатни систем који се креће брзином c у истом смеру као и хидраулички скок. У таквом систему скок мирује, па се могу применити једначине за устаљено течење (континуитета и динамичка у интегралном облику). Водити рачуна да су вредности брзина другачије у новом координатном систему.



Једначина континуитета

$$\rho(v_1 + c) h_1 b = \rho(v_2 + c) h_2 b \tag{28.3}$$

Динамичка једначина

$$\frac{1}{2}\rho g h_1^2 b + \rho h_1 b (v_1 + c)^2 = \frac{1}{2}\rho g h_2^2 b + \rho h_2 b (v_2 + c)^2 \tag{28.4}$$

Из претходне две једначине узимајући у обзир да су брзина и дубина у пресеку 1 остале непромењене, а дубина у пресеку (2), $h_2 = 2.2$м добија се:

1. брзина којом се помера хидраулички скок (смер је супротан смеру течења)

$$c = 0.634 m/s$$

2. протицај у покретном координатном систему

$$Q = (v_1 + c)h_1 b = (7 + 0.634) \cdot 0.5 \cdot 5.0 = 19.085 m^3/s$$

3. брзина у односу на дно у низводном пресеку је

$$v_2 = 1.10 m/s$$

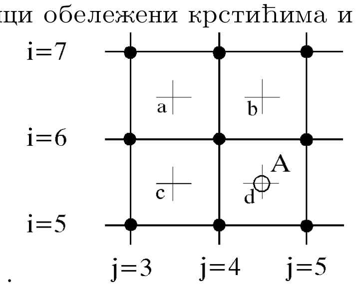
Задатак 29

9. септембар 1993./3

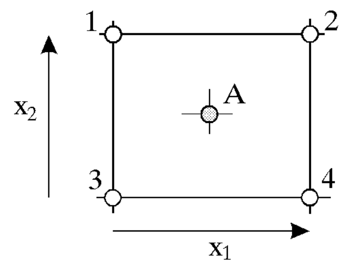
На скици је приказан део области струјања у којој се вода понаша као идеални флуид. Вредности потенцијала брзине дате су у тачкама квадратне мреже, на међусобном растојању $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0.5$ м. Димензија потенцијала брзине је $[m^2/s]$.

Одредити обе компоненте брзине и притисак у тачки A. Висина тачке A износи 90 м изнад референтне равни, а укупна енергија по јединици тежине износи 100 м.

Напомена: Постоје четири могућа положаја тачке А који су на скици обележени крстићима и словима *а, б, в, г*.



$i\ j$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
$i=7$	60.0	62.0	63.5
$i=6$	54.0	57.0	59.5
$i=5$	50.0	53.0	56.5



Решење:

Везе између функције потенцијала Φ и компонената брзине дате су следећим релацијама:

$$u_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \qquad\qquad u_2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \tag{29.1}$$

Наведени изводи могу се апроксимирати на следећи начин

$$u_1 \approx -\frac{1}{2}[(\Phi_2 + \Phi_4) - (\Phi_1 + \Phi_3)]\frac{1}{\Delta x_1} \tag{29.2}$$

$$u_2 \approx -\frac{1}{2}[(\Phi_1 + \Phi_2) - (\Phi_3 + \Phi_4)]\frac{1}{\Delta x_2} \tag{29.3}$$

Укупна брзина је

$$V = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Притисак у тачки A је једнак

$$p = \rho g(E - z - \frac{V^2}{2g})$$

Резултати за четири различита положаја тачке A приказани су табеларно

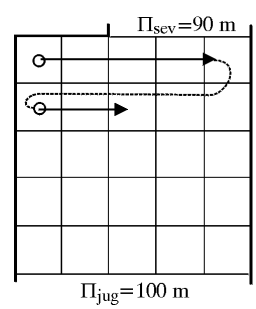
	а	б	ц	д
u_1 [м/с]	-5	-4	-6	-6
u_2 [м/с]	-11	-9	-8	-6
V [м/с]	12.08	9.85	10.00	8.49
$p/\rho g$ [м]	2.56	5.06	4.90	6.33
p [кПа]	25.11	49.64	48.07	62.10

Задатак 30

24.септембар 1995./3

На слици је схематски приказана хомогена и изотропна издан под притиском (трансмисивност $T = 5\times10^{-3}m^2/s$), која је са западне и источне стране ограничена непропусном границом. На делу северне границе налази се константан ниво, $\Pi_{Sev} = 90.0m$, а на јужној, $\Pi_{Jug} = 100.0m$. Величина поља је $100m \times 100m$.

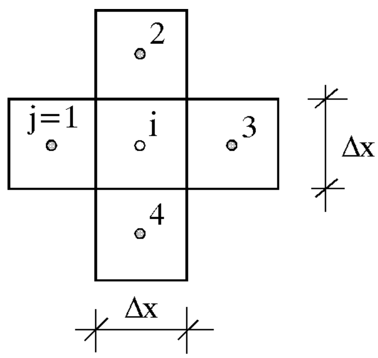
Методом сукцесивних надрелаксација одредити нивое воде у свим пољима издани у којима долази до промене током прве итерације, ако се поштује редослед рачунања који је дат на скици. Као почетну вредност за пијезометарске коте у свим пољима узети коту која одговара нивоу на јужној граници издани, $\Pi_{Jug} = 100m$. (Коефицијент надрелаксације треба да је мањи од 1.45).



Решење

Нумерички модел

Струјни домен је подељен на 25 елементарних запремина. Сваку запремину i ограничавају четири елементарне запремине $j = 1,4$. Јед-



начина континуитета за ел. запремину i гласи

$$\sum_{j=1}^{4} Q_{ij} = -Q_{vi} \tag{30.1}$$

где су Q_{ij} протицаји кроз површине које одвајају елементарну запремину i од суседних, а Q_{vi} протицај који дотиче или отиче из i у вертикалном правцу (у овом задатку $Q_{vi} = 0$).

Применом Дарсијевог закона долази се до коначног облика једначине (којих има онолико колико има елементарних запремина):

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}\Pi_i - \sum_{j=1}^{4} a_{ij}\Pi_j = Q_{vi} \tag{30.2}$$

где су коефицијенти a_{ij}

$$a_{ij} = \frac{2T_iT_j}{T_i + T_j}$$

Добијени систем једначина (непознате пијезометарске коте Π) решава се приближно применом методе сукцесивних надрелаксација

$$\Pi_i^{(1)} = \Pi_i^{(0)} + \omega \left(\frac{\sum_{j=1}^{4} a_{ij}\Pi_j^{(m)}}{\sum_{j=1}^{4} a_{ij}} - \Pi_i^{(0)} \right) \tag{30.3}$$

Коефицијенти a_{ij} су једнаки:

- T, за контакт две елементарне запремине
- $2T$, за контакт елементарне запремине и реке (односно елементарне запремине са константном пијезометарском котом)
- 0, за контакт елементарне запремине и непропусне границе

Коефицијент надрелаксације $\omega = 1.40$.

Резултати прорачуна

Вредности пијезометарских кота после прве итерације у свим пољима су

**	**	**	90.00	90.00	90.00	**
**	(1) 100.00	(2) 100.00	94.40	92.83	90.49	**
**	(6) 100.00	100.00	98.04	96.80	94.07	**
**	100.00	100.00	99.31	98.64	96.60	**
**	100.00	100.00	99.76	99.44	98.15	**
**	100.00	100.00	99.93	99.82	99.29	**
**	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	**

За поље у коме је вредност после прве итерације 92.83, та вредност је добијена на следећи начин

$$100 + 1.4\left(\frac{94.40 + 2\cdot 90 + 100 + 100}{5} - 100\right) = 92.83$$

За поље у коме је вредност после прве итерације 94.07, та вредност је добијена на следећи начин

$$100 + 1.4\left(\frac{96.80 + 90.49 + 0 + 100}{3} - 100\right) = 94.07$$

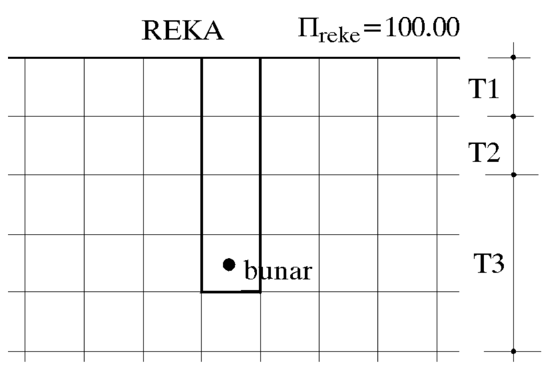
итд.

Задатак 31

20. септембар 1992./3

Део издани под притиском поред реке издељен је на контролне запремине димензија $10m \times 10m$ (види скицу). Из бунара чији је радијус $r_b = 0.2m$, црпи се $Q_b = 0.01m^3/s$ у устаљеном режиму. Издан је изотропна али није хомогена. Први ред елементарних запремина, поред реке, има трансмисивност $T_1 = 0.01m^2/s$, други ред, $T_2 = 0.005m^2/s$, а трећи, четврти и пети, $T_3 = 0.002m^2/s$.

Методом сукцесивних надрелаксација срачунати вредности пијезометарских кота у две итерације, за четири елементарне запремине, од бунара до реке. У првој итерацији срачунати све вредности пијезометарских кота неопходних за рачунање тражених пијезометарских кота у другој итерацији.



Решење:

Нумерички модел

$$\Pi_i^{k+1} = \Pi_i^k + \omega \left(\frac{\sum_{j=1}^{4} a_{ij} \Pi_j^{(m)} - Q_{vi}}{\sum_{j=1}^{4} a_{ij}} - \Pi_i^k \right) \tag{31.1}$$

Коефицијенти a_{ij} су једнаки:

$$a_{ij} = \frac{2T_i T_j}{\alpha_1 T_i + \alpha_2 T_j}$$

Коефицијенти α_1 и α_2 зависе од типа елементарне запремине (i), за коју се пише једначина, и од суседне, (j). Ако су обе запремине обичне, онда је $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, Ако је бунар у запремини (i), онда је:

$$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = (4/\pi) ln(\Delta x / 2r_b)$$

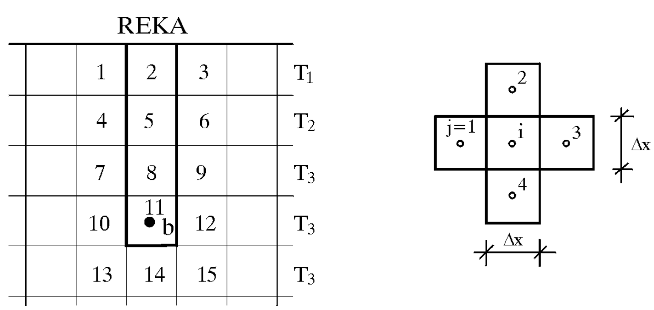
Ако је бунар у пољу (j) тада је

$$\alpha_1 = (4/\pi) ln(\Delta x / 2r_b) \qquad \alpha_2 = 1$$

За поље i које се граничи са реком:

$$a_{iR} = 2T_i$$

Компонента вертикалног биланса, Q_{vi}, једнака је нули за све запремине изузев за ону у којој се налази бунар. Нумерација поља приказана је на следећој скици



Усвојен је коефицијент надрелаксације $\omega = 1.40$.

Резултати

У нултој итерацији за све коначне запремине претпостављена је иста вредност пијезометарске коте $\Pi_i = \Pi_{reke} = 100.0$.

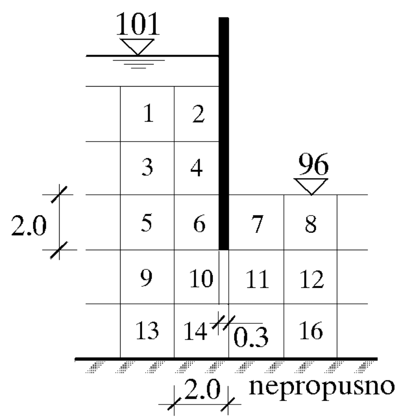
i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	$\Pi_i(0)$	$\Pi_i(1)$	$\Pi_i(2)$
1	0.0100	0.0200	0.0100	0.0067	100.00	100.00	100.00
2	0.0100	0.0200	0.0100	0.0067	100.00	100.00	100.00
3	0.0100	0.0200	0.0100	0.0067	100.00	100.00	100.00
4	0.0050	0.0067	0.0050	0.0029	100.00	100.00	100.00
5	0.0050	0.0067	0.0050	0.0029	100.00	100.00	100.00
6	0.0050	0.0067	0.0050	0.0029	100.00	100.00	100.00
7	0.0020	0.0029	0.0020	0.0020	100.00	100.00	100.00
8	0.0020	0.0029	0.0020	0.0020	100.00	100.00	98.59
9	0.0020	0.0029	0.0020	0.0020	100.00	100.00	99.33
10	0.0020	0.0020	0.0008	0.0020	100.00	100.00	99.28
11	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	100.00	95.54	96.07
12	0.0008	0.0020	0.0020	0.0020	100.00	99.28	
13	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	100.00	100.00	
14	0.0020	0.0008	0.0020	0.0020	100.00	99.28	
15	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	100.00	99.49	

Задатак 32

11. јун 1995./3

На скици је приказан део области струјања за случај филтрације испод прибоја[1]. Порозна средина је хомогена и изотропна (коефицијент филтрације, $K = 10^{-4} m/s$), а прибој је представљен непропусном мембраном (пуна линија дебљине $\delta = 0.3m$, $K_\delta = \infty$) и слабије пропусном мембраном (у продужетку испод прибоја, $K_m = 2 \times 10^{-6} m/s$), дебљине $0.3m$.

Методом сукцесивних надрелаксација одредити вредности у нацртаним пољима после две итерације. Као почетне вредности предпоставити да је у свим коначним запреминама са леве стране прибоја пијезометарска кота једнака $\Pi_{uzv} = 101m$, а са десне стране, $\Pi_{niz} = 96m$.



[1] Ради се о врло грубој апроксимацији области струјања, која је неопходна да би се задатак могао решити на испиту. За реалне случајеве мрежа мора да буде много гушћа.

Решење

Математички модел

Реч је о устаљеном раванском струјању воде у порозној средини (у вертикалној равни). Користиће се математички модел у интегралној форми (комбинација једначине континуитета и Дарсијевог закона) који се примењује на елементарну запремину i димензија $\Delta x \times \Delta x \times 1m'$. У коначном облику математички модел се за сваку елементарну запремину своди на облик

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}\Pi_i - \sum_{j=1}^{4} a_{ij}\Pi_j = 0 \tag{32.1}$$

где индекс i представља основну нумерацију поља, као на основној скици (види задатак 30, 24.09.1995), а индекс j локалну нумерацију поља која окружују поље i

$$a_{ij} = \frac{2K_iK_j}{\alpha_1 K_i + \alpha_2 K_j}$$

Коефицијенти α_1 и α_2 једнаки су:

- ако су поље (i) и поље (j) обична поља

$$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = 1$$

- ако је поље (i) обично, а у пољу (j), на граници према пољу (i), је мембрана

$$\alpha_1 = (2\delta_m/\Delta x)(K_i/K_m - 1) + 1 \qquad \alpha_2 = 1$$

- ако је у пољу i мембрана, а поље j обично

$$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = (2\delta_m/\Delta x)(K_i/K_m - 1) + 1$$

Гранични услови. За поље које се граничи са реком, $a_{ij} = 2K_i$. За поље које се граничи са непропусном границом, $a_{ij} = 0$.

Нумерички модел

Како једначина облика (32.1) има онолико колико и елементарних запремина, укупно 16, проблем се своди на решавање система од 16 алгебарских једначина са 16 непознатих пијезометарских кота.

Систем једначина решиће се итеративно, применом методе сукцесивних надрелаксација:

$$\Pi_i^{(k+1)} = \Pi_i^{(k)} + \omega \left(\frac{\sum_{j=1}^{4} a_{ij}\Pi_j^{(m)}}{\sum_{j=1}^{4} a_{ij}} - \Pi_i^{(k)} \right) \tag{32.2}$$

Усвојени коефицијент надрелаксације је $\omega = 1.45$.

Резултати

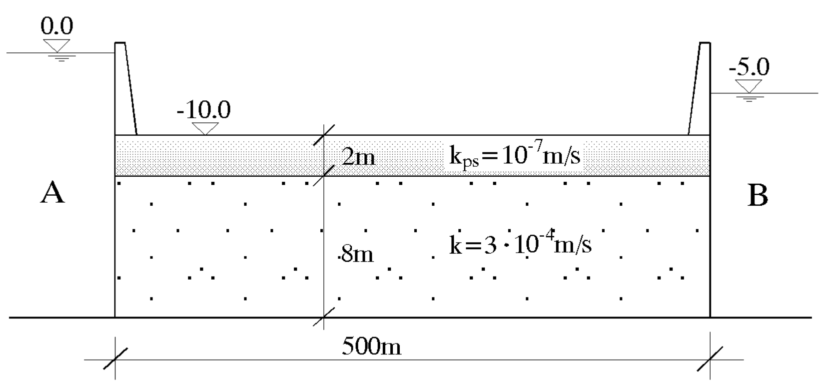
i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	$\Pi_i^{(0)}$	$\Pi_i^{(1)}$	$\Pi_i^{(2)}$
1	К	2 К	К	К	101.00	101.00	101.00
2	К	2 К	0	К	101.00	101.00	101.00
3	К	К	К	К	101.00	101.00	101.00
4	К	К	0	К	101.00	101.00	101.00
5	К	К	К	К	101.00	101.00	101.00
6	К	К	0	К	101.00	101.00	100.87
7	0	2 К	К	К	96.00	96.00	96.10
8	К	2 К	К	К	96.00	96.00	96.06
9	К	К	К	К	101.00	101.00	99.97
10	К	К	0.12К	К	101.00	100.72	99.20
11	0.12К	К	К	К	96.00	96.26	96.76
12	К	К	К	К	96.00	96.10	96.50
13	К	К	К	0	101.00	101.00	99.27
14	К	К	К	0	101.00	98.45	98.66
15	К	К	К	0	96.00	97.31	97.39
16	К	К	К	0	96.00	96.68	96.61

Задатак 33

9. фебруар 1996./3

Посматра се попречни пресек кроз брањено подручје (кота терена нижа од нивоа воде у непосредној близини, рецимо, један полдер у земљи Холандији). За дате податке о порозној средини (дебљина $H = 8m$, коефицијент филтрације $k = 3\dot{1}0^{-4}m/s$), слабије пропусном повлатном слоју (дебљина слоја $4m$, коефицијент филтрације $K_{ps} = 0.2\dot{1}0^{-6}m/s$) и нивое воде дате на скици, проценити количину воде (по метру дужном) која продире у брањено подручје.

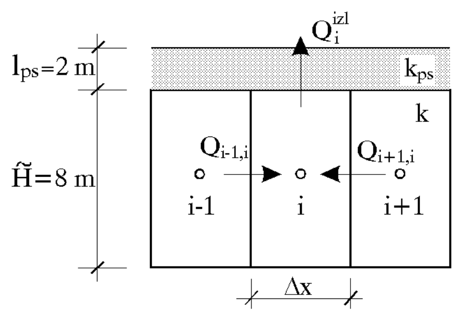
Пијезометарска кота у брањеном подручју одговара коти терена, $\Pi_{KT} = KT = -10m$. Количину воде која продире кроз насипе занемарити. (Сугерише се коришћење методе коначних запремина са поделом издани на најмање 5 коначних запремина.)



Решење:

Нумерички модел

Издан се дели на коначне запремине, као што је приказано на следећој скици



Једначина континуитета за коначну запремину i којој су суседне $i-1$ и $i+1$

$$Q_{i-1,i} + Q_{i+1,i} = Q_i^{izl} \tag{33.1}$$

Применом динамичке једначине добија се

$$T\frac{\Pi_{i-1} - \Pi_i}{\Delta x} \cdot 1m' + T\frac{\Pi_{i+1} - \Pi_i}{\Delta x} \cdot 1m' = k_{ps}\frac{\Pi_i - \Pi_{KT}}{l_{ps}}\Delta x \cdot 1m' \tag{33.2}$$

где је T трансмисивност $T = k\overline{H}$.

Ако се уведе величина λ:

$$\lambda^2 = T\frac{l_{ps}}{k_{ps}}$$

претходна једначина се своди на

$$\Pi_{i-1} + \Pi_{i+1} - (2 + \frac{\Delta x^2}{\lambda^2})\Pi_i + \Pi_{KT}\frac{\Delta x^2}{\lambda^2} = 0 \tag{33.3}$$

Једначина има укупно 5 и решавају се приближно. Итеративна формула за израчунавање је

$$\Pi_i^{(k+1)} = \frac{1}{2 + \frac{\Delta x^2}{\lambda^2}}(\Pi_{i-1}^{k+1} + \Pi_{i+1}^{(k)} + \Pi_{KT}\frac{\Delta x^2}{\lambda^2}$$

што може да се сведе на

$$\Pi_i^{(k+1)} = \Pi_i^{(k)} + \frac{\epsilon_k}{2 + \frac{\Delta x^2}{\lambda^2}} \tag{33.4}$$

где је

$$\epsilon_k = \Pi_{i-1}^{(k+1)} + \Pi_{i+1}^{(k)} - (2 + \frac{\Delta x^2}{\lambda^2})\Pi_i^{(k)} + \Pi_{KT}\frac{\Delta x^2}{\lambda^2}$$

Треба водити рачуна о граничним контролним запреминама $i = 1$ и $i = 5$, за које важи следећа итеративна формула

$$\Pi_i^{(k+1)} = \Pi_i^{(k)} + \frac{\epsilon_k}{3 + \frac{\Delta x^2}{\lambda^2}} \qquad (33.5)$$

где је за $i = 1$

$$\epsilon_k = 2\Pi_A + \Pi_{i+1}^{(k)} - (3 + \frac{\Delta x^2}{\lambda^2})\Pi_i^{(k)} + \Pi_{KT}\frac{\Delta x^2}{\lambda^2}$$

а за $i = 5$

$$\epsilon_k = \Pi_{i-1}^{(k+1)} + 2\Pi_B - (3 + \frac{\Delta x^2}{\lambda^2})\Pi_i^{(k)} + \Pi_{KT}\frac{\Delta x^2}{\lambda^2}$$

Ово је зато што су и једна и друга граница на растојању $\Delta x/2$ од центра контролне запремине, па је

$$Q_{A,1} = T\frac{\Pi_A - \Pi_1}{\Delta x/2} \qquad Q_{5,B} = T\frac{\Pi_5 - \Pi_B}{\Delta x/2} \qquad (33.6)$$

Резултати

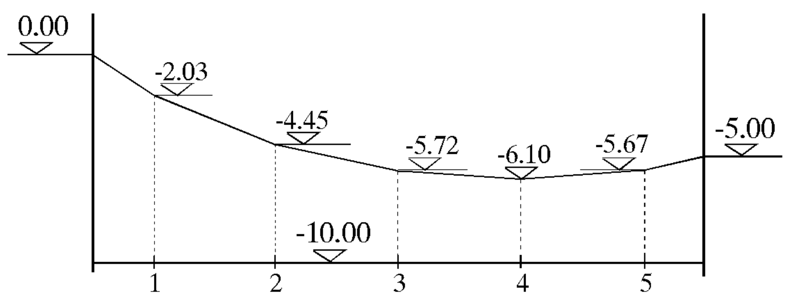
i	$\Pi_i^{(0)}$	$\Pi_i^{(1)}$	$\Pi_i^{(2)}$	$\Pi_i^{(3)}$	$\cdots$	$\Pi_i^{(9)}$	$\Pi_i^{(10)}$	$\Pi_i^{(11)}$
1	-2.5	-1.428	-1.498	-1.622	$\cdots$	-2.009	-2.030	-2.034
2	-2.5	-2.722	-3.120	-3.477	$\cdots$	-4.406	-4.444	-4.451
3	-2.5	-3.308	-3.974	-4.761	$\cdots$	-5.678	-5.712	-5.719
4	-2.5	-3.573	-4.953	-5.504	$\cdots$	-6.074	-6.095	-6.099
5	-2.5	-4.880	-5.310	-5.482	$\cdots$	-5.659	-5.666	-5.667

Усваја се решење добијено у једанаестој итерацији као довољно тачно, јер је

$$\epsilon = |max(\Pi_i^{(11)} - \Pi_i^{(10)})| < 1.5cm$$

Количина воде која продире у брањено подручје износи

$$Q^{izl} = \sum_{i=1}^{5} Q_i^{izl} = k_{ps}\frac{\Delta x}{l_{ps}}\sum_{i=1}^{5}(\Pi_i - \Pi_{KT}) = 0.13\ l/s/m'$$

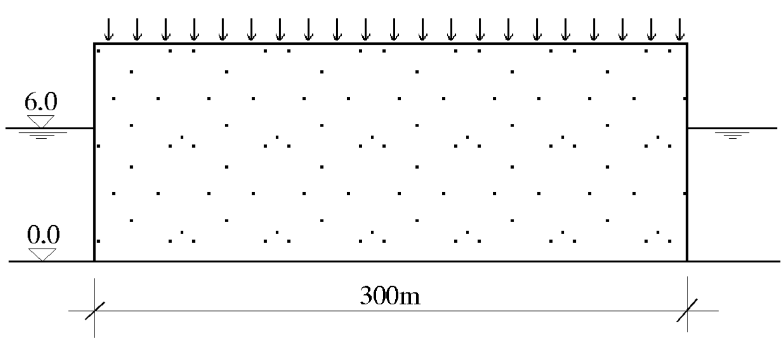

0.00
-2.03
-4.45
-5.72
-6.10
-5.67
-5.00
-10.00
1
2
3
4
5

Задатак 34

1. септембар 1996./3

На слици је приказан вертикалан пресек хомогене и изотропне порозне средине са слободном површином (коефицијент филтрације $K = 0.0005 m/s$, специфична издашност $S_Y = 0.25$) са константним нивоом на граници. У почетном тренутку нивои воде на граници и у порозној средини су исти. На површину терена почиње да се доводи $50 l/m^2$ дневно, а нивои на границама остају константни.

Срачунати промену нивоа подземне воде у карактеристичним тачкама до $t = 10$ дана. Порозну средину поделити на 6 делова подједнаке дужине, а прираштај по времену одабрати тако да прорачун по експлицитној методи буде стабилан. Проблем линеаризовати уз апроксимацију да је $T \approx T_0 = KM_0$, где је M_0 дебљина издани у почетном тренутку.



Решење

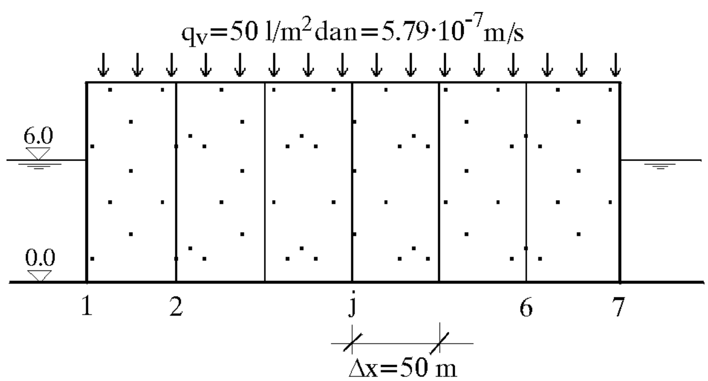
Математички модел

Неустаљено линијско струјање подземне воде може се представити следећом диференцијалном једначином

$$S_Y \frac{\partial \Pi}{\partial t} = T \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} - q_v \tag{34.1}$$

Почетни услов је у овом случају $\Pi(x, 0) = 6.0m$.
Гранични услови су $\Pi(0, t) = \Pi(300, t) = 6.0m$.

Нумерички модел



Заменом извода коначним прираштајима у математичком моделу добија се нумерички модел

$$\Pi_j^{n+1} = \Pi_j^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\left(\Pi_{j+1}^n - 2\Pi_j^n + \Pi_{j-1}^n\right) + \frac{\Delta t}{S_Y} q_V \tag{34.2}$$

где је $a = T/S_Y$.

Усваја се просторни корак $\Delta x = 50m$.

Пошто је примењена нумеричка шема експлицитна, потребно задовољити услов стабилности

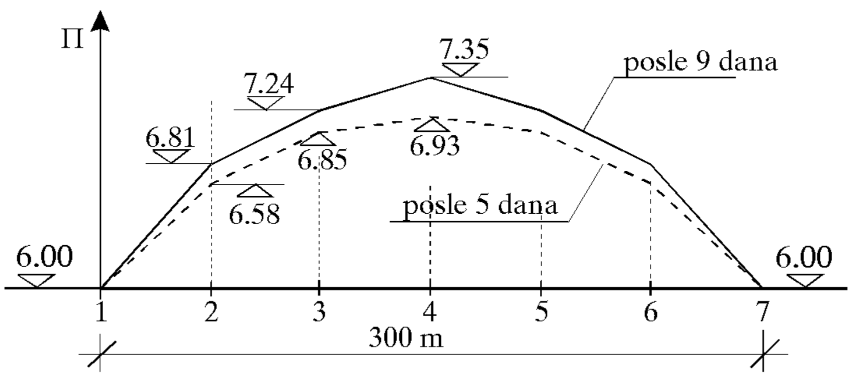
$$\Delta t < \frac{\Delta x^2}{2a}$$

Највећи временски корак са којим се може ући у прорачун је $\Delta t = 1.2$ дана. Овде је усвојен корак $\Delta t = 1$ дан.

Резултати

У наредној табели пијезометарске коте су у метрима.

t [дан]	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5	Π_6	Π_7
0	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00
1	6.00	6.20	6.20	6.20	6.20	6.20	6.00
2	6.00	6.32	6.40	6.40	6.40	6.32	6.00
3	6.00	6.42	6.57	6.60	6.57	6.42	6.00
4	6.00	6.51	6.72	6.77	6.72	6.51	6.00
5	6.00	6.58	6.85	6.93	6.85	6.58	6.00
6	6.00	6.65	6.97	7.06	6.97	6.65	6.00
7	6.00	6.71	7.05	7.19	7.05	6.71	6.00
8	6.00	6.76	7.17	7.27	7.17	6.76	6.00
9	6.00	6.81	7.24	7.35	7.24	6.81	6.00
10	6.00	6.85	7.31	7.46	7.31	6.85	6.00

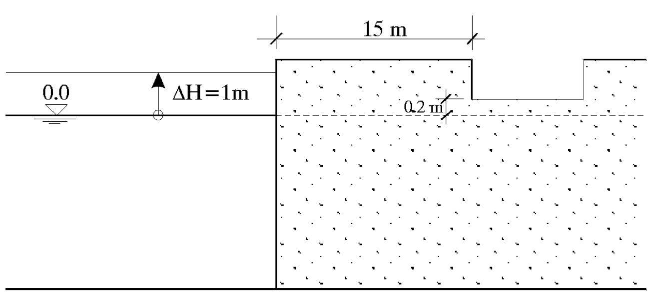


Задатак 35

2. фебруар 1994/3

На једној граници издани са слободном површином долази до нагле промене пијезометарске коте за $\Delta H = 1.0$ м. Почетна пијезометарска кота у целој области струјања износи 0.00 м. Средња вредност трансмисивности износи $T = 5 \times 10^{-3}$м^2/с, а специфична издашност $S_Y = 0.20$.

Користећи линијски математички модел и експлицитну нумеричку шему, проценити време до којег се може задржати повишени ниво у каналу, а да не дође до повећања пијезометарске коте преко $0.2m$, у пресеку удаљеном $15m$ од канала. Друга граница области струјања је практично у бесконачности. Усвојити $\Delta x = 5m$, и одговарајући временски прираштај Δt, којим је задовољен услов стабилности експлицитне методе.



Решење

Математички модел

Задатак ће се разматрати као линијски.

Математички модел неустаљеног линијског струјања подземне воде гласи

$$S_Y \frac{\partial \Pi}{\partial t} = T \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \tag{35.1}$$

Почетни услов је у овом случају $\Pi(x, 0) = 0.0m$.
Гранични услови су $\Pi(0, t) = 1.0m$, а $\Pi(\infty, t) = 0.0m$.

Нумерички модел

Користиће се екплицитан нумерички модел облика

$$\Pi_j^{n+1} = \Pi_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{T}{S_Y} \left(\Pi_{j+1}^n - 2\Pi_j^n + \Pi_{j-1}^n \right) \tag{35.2}$$

Услов стабилности нумеричког модела је

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{T}{S_Y} \leq \frac{1}{2}$$

што за $\Delta x = 5$ м даје максимални корак од Δt ı 500 с. Прорачун је међутим урађен са нешто мањим кораком, Δt ı 180 с, због веће тачности (Абботт, 1989).

Резултати нумеричке симулације

У наредној табели време t је дато у минутама, а растојање x у метрима.

t	x ı0	x ı 5	x ı 10	x ı 15	x ı 20	x ı 25	x ı 30	x ı 35
0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	1.0	0.180	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6	1.0	0.295	0.032	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
9	1.0	0.375	0.074	0.006	0.0	0.0	0.0	0.0
12	1.0	0.433	0.116	0.017	0.001	0.0	0.0	0.0
15	1.0	0.478	0.155	0.032	0.004	0.0	0.0	0.0
…			…		…			…
39	1.0	0.650	0.364	0.173	0.069	0.023	0.006	0.001
42	1.0	0.662	0.382	0.189	0.080	0.028	0.008	0.002
45	1.0	0.672	0.397	**0.204**	0.090	0.034	0.011	0.003

Аналитичко решење

За овако постављен случај струјања (почетне и граничне услове) постоји аналитичко решење једначине математичког модела.

Ако се са Π обележи пијезометарска кота у пресеку на растојању x од обале, Π_1 вредност пијезометарске коте у почетном тренутку у порозној средини и каналу и Π_2 нова вредност пијезометарске коте у каналу, тада амалитичко решење гласи:

$$\Pi(x,t) = \Pi_1 + (\Pi_2 - \Pi_1) erfc(\lambda)$$

где је $\lambda = x_1/(2\sqrt{at})$. Параметар a назива се пијезопроводљивост и једнак је $a = T/S_Y$. Функција $erfc(\lambda)$, такозвана "цомплементары еррор фунцтион" табеларно је дата.

λ	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50
$erfc(\lambda)$	1.00	0.72	0.48	0.29	0.16	0.03

Ако се тражи време за које ће ниво у пресеку $x_1 = 15m$ да порасте за 0.2 м, из аналитичког решења се добија да је $erfc(\lambda)$ ı 0.2. Из таблице се добија да је $\lambda = 0.915$, односно $t = 2687s \approx 45$ мин, што показује да је решење добијено нумерички доста добро.

Задатак 36

28. август 1992./3

У табели су дати резултати пробног црпљења константним протицајем ($Q_P = 50l/s$), из једног вертикалног бунара (пречника 1 м) побијеног у издан под притиском. Депресије регистроване у пијезометарској бушотини, која је удаљена 45 м од бунара дате су у следећој табели

Време [х]	1	2	4	6	8	10	12
Депресија [м]	0.55	1.12	1.64	2.00	2.19	2.37	2.53

Одредити репрезентативну трансмисивност и специфичну издашност издани. Одредити депресију у бунару и у посматраном пијезометру после 3 месеца црпљења протицајем $Q_P/2$. Почетно стање је: $t = 0$, $S = 0.0$. Издан је бесконачна, струјање остаје под притиском.

Решење:

Математички модел

Полази се од једначине за осносиметрично неустаљено течење у поларним координатама

$$\frac{\partial^2 s}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial s}{\partial R} = \frac{S_Y}{T}\frac{\partial s}{\partial t} \tag{36.1}$$

Увођењем смене

$$u = \frac{R^2}{4at}$$

при чему је $a = T/S_Y$, једначина се своди на облик за који постоји аналитичко решење:

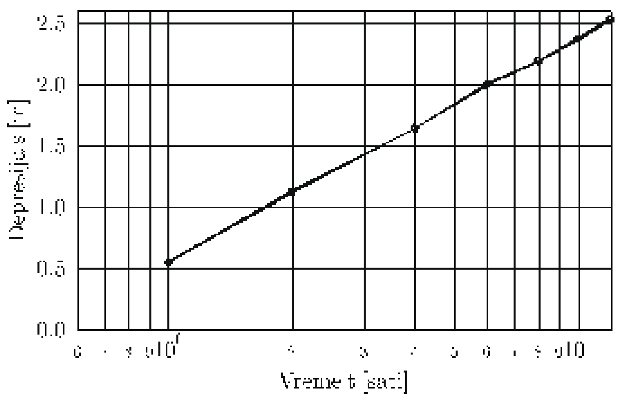
$$s = \frac{Q_b}{4\pi T} W(u) \tag{36.2}$$

Претходни израз се још назива и Тајсовим решењем. Величина $W(u)$ је функција бунара, која се у близини бунара ($u \to 0$) своди на следећи израз

$$W(u) = ln(1/u) - 0.5772$$

Репрезентативна трансмисивност и специфична издашност

Промена депресије у времену у пијезометарској бушотини приказана је на следећој слици (време је у логаритамској размери).



У семи-логаритамској размери, и за мале вредност промењиве u, Тајсово решење представља праву линију. Тачке (t, s) добијене мерењем требало би да буду на једној правој која је и приказана на претходној слици.

Нагиб праве одређује се директно са графика, а користећи било које две тачке на правој:

$$\tan\alpha = \frac{\Delta s}{\Delta(\ln t)} = 0.75m$$

На основу аналитичког решења нагиб праве је једнак

$$\tan\alpha = \frac{Q_b}{4\pi T}$$

Тако се из нагиба добија репрезентативна вредност трансмисивности:

$$T = \frac{Q}{4\pi\tan\alpha} = \frac{0.050}{4 \cdot 3.14 \cdot 0.75} = 0.0053\frac{m^2}{s}$$

Познавањем трансмисивности T и вредности (t, s) било које тачке А на правој може се добити вредност специфичне издашности из следећег израза

$$S_A = \frac{Q_b}{4\pi T}(-\ln\frac{R^2 S_Y}{4Tt} - 0.5772)$$

где је $R = 45m$, $S_A = 2.19m$, $t_A = 8sati = 28800s$. Специфична издашност издани је

$$S_Y = 0.0092$$

Депресија у бунару и пијезометру после три месеца

Ако се из бунара црпи $Q_b = 25l/s$ воде, депресија у бунару ($R = r_b$) и пијезометру ($R = 45m$) се добија из следећег израза:

$$s = \frac{0.025}{4 \cdot 3.14 \cdot 0.0053}\left(-\ln(\frac{R^2 \cdot 0.0092}{4 \cdot t \cdot 0.0053}\right) - 0.5772)$$

За

$$t = 3\text{месеца} = 3 \cdot 30 \cdot 24 \cdot 3600 = 6.998 \cdot 10^8 s$$

Депресија у бунару је

$$s_b = 8.27\mathrm{m}$$

а депресија у пијезометарској бушотини

$$s_{pij} = 4.89\mathrm{m}$$

Задатак 37

10.новембар 1991./3

На скици (а) приказана је дводимензионална област струјања која је издељена на квадрате димензија 10 $m \times 10m$. Уписане вредности означавају концентрацију неке материје у центрима елементарних запремина у тренутку $t = t_0$. Скица (б) приказује исту област у тренутку $t = 250s$.

Срачунати вредности концентрација у пољима означеним са (•),[1] експлицитним нумеричким моделом. Брзине струјања флуида су униформне у целом струјном пољу, $u_1 = 0.20cm/s$ и $u_2 = 0.0$, а коефицијенти дисперзије су $D_1 = 0.2m^2/s$ и $D_2 = 0.05m^2/s$.

а) t ı 0 с

0	0	0	0	0
70	70	50	0	0
100	100	70	0	0
70	70	50	0	0
0	0	0	0	0

б) t ı 250 с

*	*	*	*	*
*	•	•	•	*
*	•	•	•	*
*	•	•	•	*
*	*	*	*	*

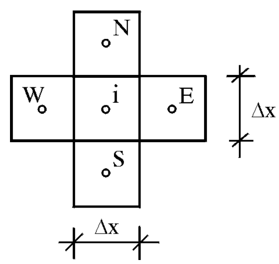
Решење

Математички модел

Математички модел транспорта у равни (x_1, x_2) неке материје чија је концентрација C

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_1 \frac{\partial C}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial C}{\partial x_2} = D_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x_1^2} + D_2 \frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2} \tag{37.1}$$

[1] На испиту је требало срачунати три вредности



Нумерички модел

Одговарајући нумерички модел до кога се долази дискретизацијом математичког модела на квадратној мрежи ($\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$), и то, конвективних чланова разликама уназад (зато што је $Pe = \Delta x v_1 / D_1 = 10 > 2$), а дифузионих чланова централним разликама, гласи

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + u_1 \frac{C_i^n - C_{W(i)}^n}{\Delta x_1} = D_1 \frac{C_{E(i)}^n + C_{W(i)}^n - 2C_i^n}{\Delta x_1^2} + D_2 \frac{C_{N(i)}^n + C_{S(i)}^n - 2C_i^n}{\Delta x_2^2} \tag{37.2}$$

Односно

$$C_i^{n+1} = C_i^n - 0.05(C_i^n - C_{W(i)}^n) + 0.5(C_{E(i)}^n + C_{W(i)}^n - 2C_i^n) + 0.125(C_{N(i)}^n + C_{S(i)}^n - 2C_i^n)$$

Резултати

а) t ı 0 с

0	0	0	0	0
70	70	50	0	0
100	100	70	0	0
70	70	50	0	0
0	0	0	0	0

б) t ı 250 с

*	*	*	*	*
*	55	32.25	27.5	*
*	77.5	46.5	38.5	*
*	55	32.25	27.5	*
*	*	*	*	*

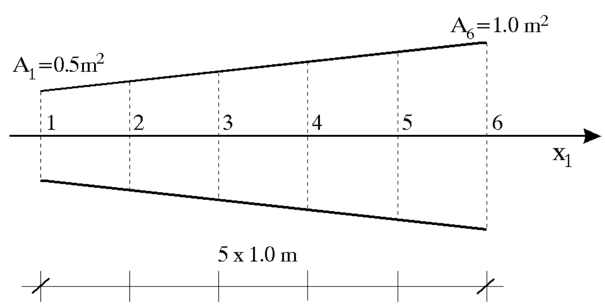
Задатак 38

27. јануар 1993./3

Цев промењљивог попречног пресека (на дужини од 5 м, површина попречног пресека цеви се линеарно повећа са $0.5m^2$, у пресеку 1, на $1.0m^2$, у пресеку 6), испуњена је порозним материјалом, кроз који протиче вода са константним протицајем $Q = 2 \times 10^{-4} m^3/s$.

У тренутку t_0, уместо чисте воде, кроз пресек 1 почиње да пролази загађена вода у којој се налази C_0 растворених материја. Ако се зна да је коефицијент дисперзије једнак $D = 0.5 \times 10^{-3} m^2/s$, а ефективна порозност $n_{ef} = 0.2$, одредити тренутак када ће концентрација загадјења у излазном пресеку прећи $0.3C_0$.

Задатак разматрати као линијски. Усвојити рачунски корак $\Delta x = 1.0m$.



Решење

Математички модел

Линијски модел транспорта материје у познатом струјном пољу може се представити следећим изразом, који представља једначину одржања масе материје која се транспортује:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v\frac{\partial C}{\partial x} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \tag{38.1}$$

где је C концентрација материје, u стварна, средња брзина кретања флуида у изабраном пресеку ($v = Q/An_{ef}$), а D коефицијент дисперзије.

Да би се могло приступити решавању ове парцијалне диференцијалне једначине морају се дефинисати почетни и гранични услови.

Почетни услов у овом случају је:

$$C(x, 0) = 0$$

Гранични услов на узводној граници:

$$C(0, t) = C_0$$

а на низводној граници:

$$\frac{\partial C}{\partial x}(x = 5m, 0) = 0$$

Нумерички модел

Прво ће се извршити дискретизација просторног и временског домена. Ако се усвоји рачунски корак $\Delta x = 1m$, временски корак мора да се изабере тако да буду задовољени услови стабилности (пошто ће се рачунати са експлицитном нумеричком шемом):

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2D} = \frac{1^2}{2 \times 0.5 \times 10^{-3}} = 1000s$$

$$\Delta t \leq \frac{2D}{v_{max}^2} = \frac{2 \times 0.5 \times 10^{-3}}{\left[(2 \times 10^{-4}/0.5)/0.2\right]^2} = 250s$$

Усваја се $\Delta t = 250s$.

Пошто је Пецлет-ов број

$$Pe = \frac{\Delta x v}{D} = 4$$

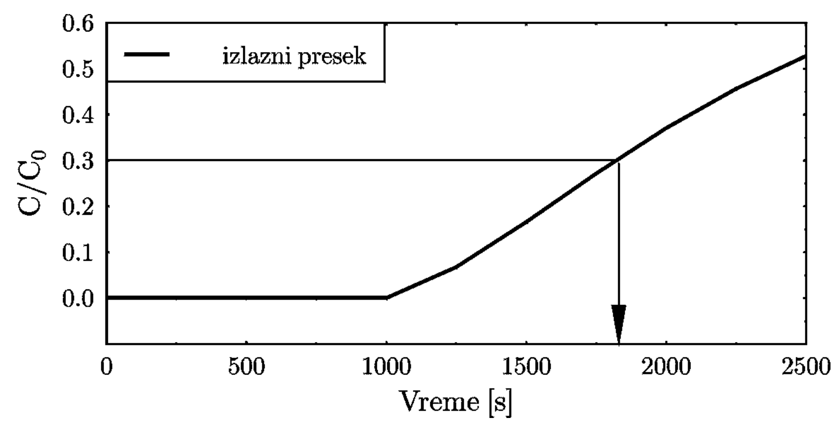
већи од 2, доминантна је конвекција, па се при дискретизацији конвективног члана користе разлике уназад.

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} = -\frac{v_i + v_{i-1}}{2}\frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{D}{\Delta x^2}(C_{i-1}^n - 2C_i^n + C_{i+1}^n) \tag{38.2}$$

Резултати

и	1	2	3	4	5	6
$\overline{A}$ [м^2]	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
в [10^{-3}м/с]	2.00	1.67	1.43	1.25	1.11	1.00
т [с]			C/C_0			
0	1.000	0	0	0	0	0
250	1.000	0.583	0	0	0	0
500	1.000	0.753	0.340	0	0	0
750	1.000	0.846	0.539	0.198	0	0
1000	1.000	0.897	0.675	0.372	0.116	0
1250	1.000	0.929	0.767	0.517	0.251	0.067
1500	1.000	0.950	0.830	0.629	0.383	0.166
1750	1.000	0.964	0.875	0.716	0.500	0.272
2000	1.000	0.974	0.907	0.782	0.597	0.371
2250	1.000	0.981	0.931	0.832	0.677	0.457
2500	1.000	0.986	0.948	0.870	0.740	0.528

Линеарном интерполацијом добија се да после 1820 s у излазном пресеку концентрација загађења прелази $0.3C_0$.



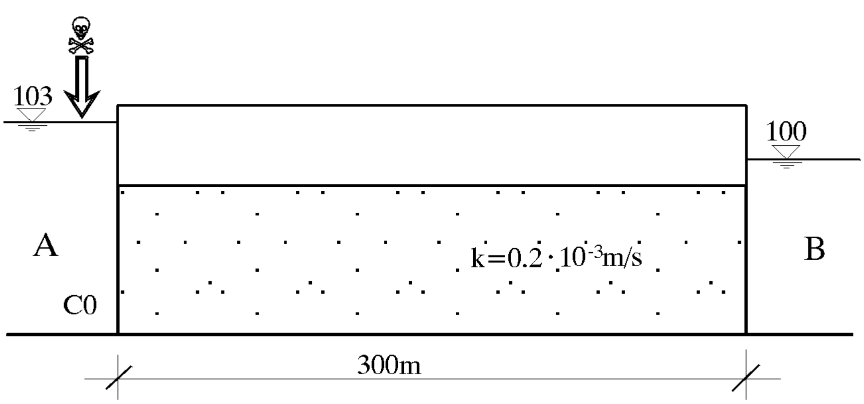
Задатак 39

31. јануар 1991./3

Водоток A и водоток B су на међусобном растојању од $300m$. Они су хидраулички повезани преко издани под притиском, као на скици. Издан је приближно константне дебљине, хомогена и изотропна (коефицијент филтрације $K = 0.2 \times 10^{-3} m/s$, ефективна порозност, $н_{ef} = 0.1$, коефицијент дисперзије $D = 0.4 \times 10^{-3} m^2/s$). Нивои у водотоцима се у дужим временским интервалима одржавају константним: $Z_A = 103m$ и $Z_B = 100m$.

У једном тренутку почне се испуштати загађена материја у водоток A и кроз дуже време се одржава непромењена концентрација загађујуће материје $C_0 = 5g/m^3$. Проценити какав ће бити распоред концентрација после 3 месеца.

Напомене за прорачун: Користити линијски модел за транспорт и експлицитну нумеричку шему. Област струјања поделити на 6 деоница и радити са максималним дозвољеним временским кораком.



Решење

Брзина воде у порозној средини

Због разлике у нивоима у водотоцима, постоји струјање воде од A ка B, тако да Дарсијева брзина, или специфични протицај, износи:

$$v = K\frac{\Delta\Pi}{L} = 0.2 \times 10^{-3}\frac{3}{300} = 2 \times 10^{-6}\frac{m}{s}$$

Просечна брзина којом се вода и загађење крећу кроз порозну средину је већа и једнака

$$v_l = \frac{v}{n_{ef}} = 20 \times 10^{-6}\frac{m}{s}$$

.

Математички модел транспорта

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_l\frac{\partial C}{\partial x} - D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0 \tag{39.1}$$

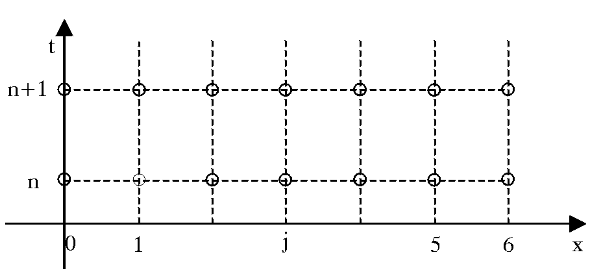
Да би се проблем могао решити потребно је дефинисати и

- почетни услов: $C(x,0) = 0.0$
- гранични услов на узводној граници: $C(0,t) = C_0$
- гранични услов на низводном крају: $\dfrac{\partial C}{\partial x}(x = 300m, t) = 0$

Нумерички модел

Користиће се експлицитна нумеричка шема коначних разлика:

$$\frac{C_j^{n+1} - C_j^n}{\Delta t} + v_l\frac{C_{j+1}^n - C_{j-1}^n}{2\Delta x} - D\frac{C_{j+1}^n - 2C_j^n + C_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \tag{39.2}$$



Ако се област струјања дели на шест деоница, тада је $\Delta x = 50m$. Временски корак је ограничен условима стабилности:

$$\Delta t \leq \Delta t_1 = \frac{\Delta x^2}{2D} = 3.125 \times 10^6 s = 36 dana$$

$$\Delta t \leq \Delta t_2 = \frac{2D}{v_{lin}^2} = 2.0 \times 10^6 s = 23 dana$$

Поред горња два критеријума за стабилност методе треба проверити локални Рејнолдсов (или Пеклеов) број, који треба да буде мањи од 2 да би се могла користити централна апроксимација конвективног члана:

$$\frac{20 \times 10^{-6} \frac{m}{s} \cdot 50m}{0.4 \times 10^{-3} \frac{m^2}{s}} = 2.5 > 2$$

Како је Рејнолдсов број већи од 2, нумерички модел треба модификовати, тј уместо централне разлике користити разлику уназад), тако да је

$$C_j^{n+1} = C_j^n - A_1(C_j^n - C_{j-1}^n) + A_2(C_{j+1}^n - 2C_j^n + C_{j-1}^n) \tag{39.3}$$

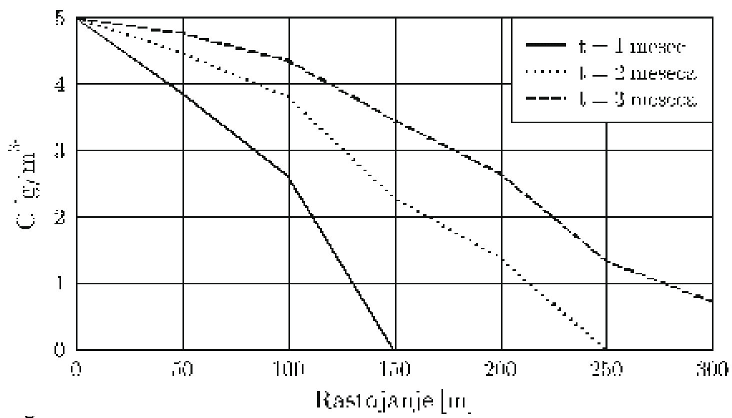
$$A_1 = \frac{\Delta t v_l}{\Delta x} = 0.5184 \qquad A_2 = \frac{\Delta t D}{\Delta x^2} = 0.2074$$

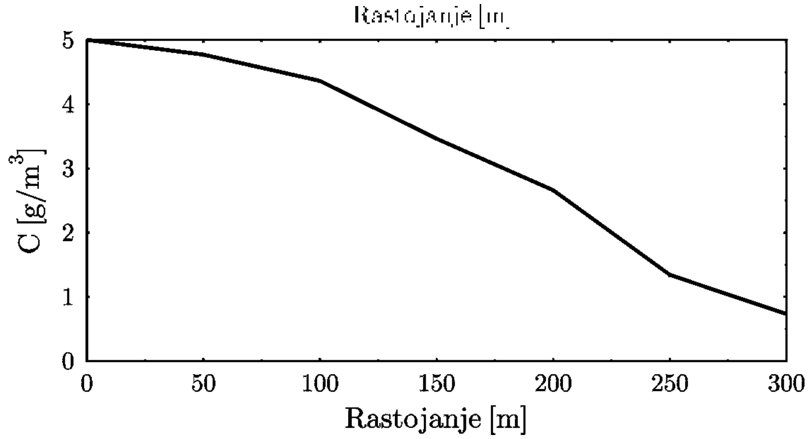
Резултати

Прорачун је спроведен са корацима $\Delta x = 50m$ и $\Delta t = 0.5 meseci$

време	Концентрација $[g/m^3]$						
[месеци]	A	1	2	3	4	5	B
0.0	5.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.5	5.00	3.63	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.0	5.00	3.87	2.63	0.00	0.00	0.00	0.00
1.5	5.00	4.43	2.98	1.91	0.00	0.00	0.00
2.0	5.00	4.47	3.81	2.29	1.39	0.00	0.00
2.5	5.00	4.72	3.97	3.21	1.75	1.01	0.00
3.0	5.00	4.77	4.36	3.46	2.66	1.34	0.73

Распоред концентрација загађења у издани после 1, 2 и 3 месеца приказани су графички на следећем дијаграму


t = 1 mesec
t = 2 meseca
t = 3 meseca
Rastojanje [m]

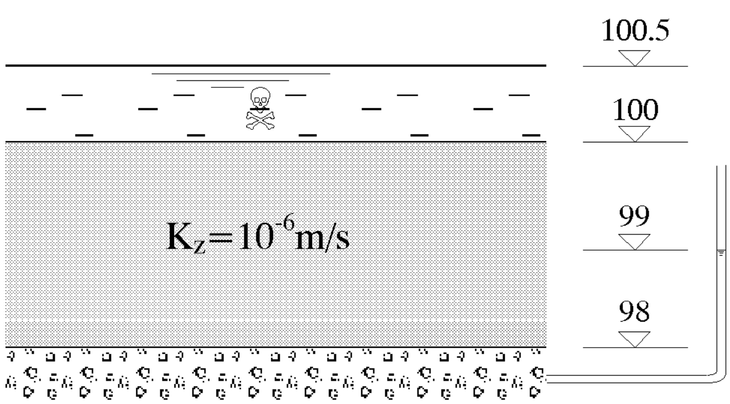

C [g/m3]
Rastojanje [m]

Задатак 40

2. јули 1995./3

На слици је приказан повлатни (полупропусни) слој, дебљине $2m$, коефицијента филтрације $K_z = 10^{-6} m/s$, ефективне порозности $n_{ef} = 0.1$, изнад једне издани. Приказана је ситуација када је дошло до изливања токсичне материје на површини терена.

Одредити карактеристична времена за које ће токсична материја доспети до издани: а) t_{50}, време за које ће 50 % почетне концентрације доспети до издани, и б) t_5, време за које ће 5 % почетне концентрације доспети до издани. Дисперзивност повлатног слоја износи 10 м. Код нумеричког решавања користити методу коначних запремина, а пут који прелази загађење поделити на најмање 5 деоница. У фиктивним тачкама рачунске мреже, (0) и (6), које се налазе ван полупропусног слоја концентрација токсичне материје се не мења, $C_0 = 1.0$ и $C_6 = 0.0$, а као меродавну посматрати концентрацију у запремини (5). Коефицијент филтрације издани далеко је већи од коефицијента филтрације повлатног слоја.



Решење

Математички модел

Овде се проблем може разматрати као линијски у вертикалном правцу. Математички модел се може написати у облику

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_l \frac{\partial C}{\partial z} - D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = 0 \tag{40.1}$$

Почетни услов је $C(z, 0) = 0$
Гранични услов на узводном крају $C(100m, t) = C_0$,
а на низводном крају је $\partial C/\partial x(98m, t) = 0$

Дарсијева брзина је у овом случају

$$v = -K_z \frac{99.0 - 100.5}{2.0} = 0.75 \cdot 10^{-6} m/s$$

Средња брзина кретања воде је

$$v_l = \frac{v}{n_{ef}} = 7.5 \cdot 10^{-6} m/s$$

Коефицијент дисперзије

$$D_z = L v_l = 75 \cdot 10^{-6} m^2/s$$

Време путовања t_{50} одговара времену за које би загађење прошло када не би било дисперзије

$$t_{50} = \frac{\Delta L}{v_l} = \frac{2}{7.5} 10^6 s \approx 74\text{часа}$$

Нумерички модел

Пеклеов број је

$$Pe = \left| \frac{\bar{v} \Delta z}{D_z} \right| = 0.04 < 2$$

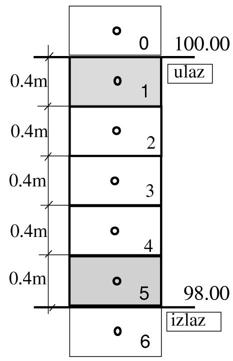
што значи да је овде доминантна дисперзија, па се при дискретизацији за конвективни члан примењују централне разлике.

$$\frac{C_j^{n+1} - C_j^n}{\Delta t} + \bar{v} \frac{C_{j+1}^n - C_{j-1}^n}{2\Delta z} - D_z \frac{C_{j+1}^n - 2C_j^n + C_{j-1}^n}{\Delta z^2} = 0 \tag{40.2}$$

Дискретизација по простору, $\Delta z = 0.4m$, према поставци задатка. Временски корак

$$\Delta t = 1000s < \Delta t_1 = \frac{0.4^2}{2 \cdot 75 \cdot 10^{-6}} = 1067s$$

Друго ограничење за временски корак, $\Delta t_2 \le 2D_z/v_l^2$, захтева да временски корак буде краћи од 10670 секунди.

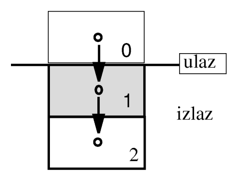


Гранични услови

Конвекција. Код методе коначних запремина, конвекција се рачуна на исти начин као и за било коју другу коначну запремину, излаз из запремине мање улаз. На скици су назначене запремине на граници (1) и (5), а део протицаја кроз површину елементарне запремине, који одговара граничном услову, уоквирен је.

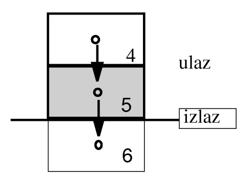
За елементарну запремину (1), излаз - улаз:

$$V_{1+1/2}\frac{C_1+C_2}{2}-V_{0+1/2}\frac{C_0+C_1}{2}$$



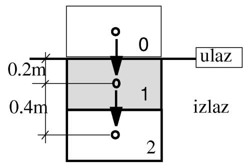
а за елементарну запремину (5):

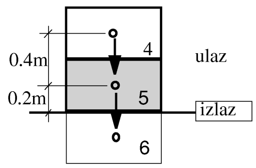
$$V_{5+1/2}\frac{C_5+C_6}{2}-V_{4+1/2}\frac{C_4+C_5}{2}$$



За овај случај све брзине су исте и једнаке V_l.

Дисперзија. Код елементарних запремина на граници разликује се растојање у односу на које се посматра градијент концентрације код рачунања протицаја услед дисперзије.





За елементарну запремину (1), излаз - улаз:

$$\left(-D_Z\frac{C_2-C_1}{\Delta z}\right)-\left(-D_Z\frac{C_1-C_0}{\Delta z/2}\right)$$

а за елементарну запремину (5):

$$\left(-D_Z\frac{C_6-C_5}{\Delta z/2}\right)-\left(-D_Z\frac{C_5-C_4}{\Delta z}\right)$$

$t[s]$	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	(C_6)
0	1.000	0	0	0	0	0	0
1000	1.000	0.480	0	0	0	0	0
2000	1.000	0.509	0.230	0	0	0	0
3000	1.000	0.616	0.258	0.110	0	0	0
4000	1.000	0.636	0.362	0.130	0.053	0	0
5000	1.000	0.685	0.387	0.206	0.066	0.025	0
6000	1.000	0.699	0.447	0.228	0.114	0.033	0
7000	1.000	–	–	–	–	0.057	0

Време за које ће 5 % концентрације токсичне материје доспети у издан износи $t_5 \approx 2$ часа.